# EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

JOHN COTRINA

JAVIER ZÚÑIGA

99

Apuntes de Estudio

Fondo Editorial UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

# EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

JOHN COTRINA
JAVIER ZÚÑIGA

99

Apuntes de Estudio

Fondo Editorial
UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

De esta edición:

©  Universidad del Pacífico
Jr. Gral. Luis Sánchez Cerro 2141
Lima 15072, Perú

**EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS BÁSICAS**
John Cotrina y Javier Zúñiga

1.ª edición digital: diciembre de 2021
Diseño de la cáratula: Ícono Comunicadores
ISBN: 978-9972-57-481-8
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: 2021-14335
doi: http://dx.doi.org/10.21678/978-9972-57-481-8
Disponible en fondoeditorial.up.edu.pe

---

**BUP**

**Cotrina, John**
Ejercicios de matemáticas básicas / John Cotrina, Javier Zúñiga. -- 1a edición. -- Lima: Universidad del Pacífico, 2021.
193 p. -- (Apuntes de Estudio ; 99)

1. Matemáticas--Problemas, ejercicios, etc.
2. Matemáticas--Estudio y enseñanza
I. Zúñiga, Javier
II. Universidad del Pacífico (Lima)

510 (SCDD)

---

«El principio es
la mitad del todo»

Pitágoras de Samos

# Contenido

# Prólogo

Esta publicación nació de la necesidad de proveer a los alumnos del primer de año de estudios en la Universidad del Pacífico de ejercicios de matemáticas con soluciones debidamente revisadas. Los temas cubiertos son parte de los cursos de Nivelación de Matemáticas y Matemáticas I. Así, este texto sirve como complemento de los libros de lectura obligatoria de dichos cursos: (Cotrina, 2015) y (Zúñiga, 2013). Todas las definiciones y notaciones usadas aquí pueden ser encontradas en las obras anteriormente señaladas. La parte teórica en este texto es sucinta y cuando una nueva definición es presentada se denota por negrillas. Otras fuentes que pueden ser consultadas son (Halmos, 1998), (Stewart, Redlin, & Watson, 2011), (Sullivan, 1997) y (Sydsaeter & Hammond, 1996).

El lector debe intentar resolver todos los ejercicios antes de leer las soluciones; de lo contrario, la sola lectura de ejercicios y soluciones implica, en la mayoría de los casos, la memorización y entendimiento superficial de los temas, y no el verdadero aprendizaje.

Los autores deseamos agradecer al equipo de profesores y jefes de práctica que han contribuido durante muchos años con el mantenimiento de la excelencia educativa de los cursos de primeros años de matemáticas en esta casa de estudios, y a nuestras familias por el apoyo y la paciencia brindadas. También agradecemos el arduo trabajo de los revisores anónimos, cuyas observaciones han contribuido a elevar la calidad de esta publicación.

Lima, noviembre de 2021

## Nomenclatura

### Lógica

| | |
|---|---|
| $\neg p$ | Negación de la proposición $p$ |
| $p \wedge q$ | Conjunción: $p$ y $q$ |
| $p \vee q$ | Disyunción: $p$ o $q$ |
| $p \veebar q$ | Disyunción exclusiva: O $p$ o $q$ |
| $p \rightarrow q$ | Condicional: si $p$ entonces $q$ |
| $p \leftrightarrow q$ | Bicondicional: $p$ si y solo si $q$ |
| $p \equiv q$ | Equivalencia: $p$ es equivalente a $q$ |
| $P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ | Argumento compuesto por las premisas $P_1, \ldots, P_n$ y la conclusión $Q$ |
| $\forall x$ | Para todo $x$ |
| $\exists x$ | Existe al menos un $x$ |
| $\exists! x$ | Existe solo un $x$ |

### Conjuntos

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | El conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \cdots\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | El conjunto de los números enteros |
| $\mathbb{Q}$ | El conjunto de los números racionales |
| $\mathbb{R}$ | El conjunto de los números reales |
| $A \cup B$ | Unión de $A$ y $B$ |
| $A \cap B$ | Intersección de $A$ y $B$ |
| $A^c$ | Complemento de $A$ |
| $A \Delta B$ | Diferencia simétrica de $A$ y $B$ |
| $A - B$ | Diferencia de $A$ y $B$ |
| $\varnothing$ | Conjunto vacío |
| $x \in A$ | $x$ pertenece al conjunto $A$ |
| $A \subset B$ | $A$ se encuentra incluido en $B$ |
| $A \subsetneq B$ | $A$ se encuentra estrictamente incluido en $B$ |
| $n(A)$ | Número de elementos de $A$ |
| $\operatorname{dom} R$ | Dominio de la relación $R$ |
| $\operatorname{ran} R$ | Rango de la relación $R$ |

## Álgebra

| | |
|---|---|
| $a^n$ | Potencia $n$-ésima de $a$ |
| $\sqrt[n]{a}$ | Raíz $n$-ésima de $a$ |
| $\log_b(a)$ | Logaritmo de $a$ en base $b$ |
| $\ln(a)$ | Logaritmo natural de $a$ |
| $\mathbb{Z}[x]$ | El conjunto de los polinomios de coeficientes enteros |
| $\mathbb{Q}[x]$ | El conjunto de los polinomios de coeficientes racionales |
| $\mathbb{R}[x]$ | El conjunto de los polinomios de coeficientes reales |
| $\operatorname{grad}(p)$ | Grado del polinomio $p(x)$ |
| $\Delta(p)$ | Discriminante del polinomio $p(x)$ |

## Desigualdades

| | |
|---|---|
| $[a, b]$ | Intervalo cerrado desde $a$ hasta $b$ |
| $]a, b[$ | Intervalo abierto desde $a$ hasta $b$ |
| $\lvert x\rvert$ | Valor absoluto de $x$ |
| $d(a, b)$ | Distancia entre los números reales $a$ y $b$ |
| $\text{máx}\{a, b\}$ | Máximo entre los números reales $a$ y $b$ |
| $\text{mín}\{a, b\}$ | Mínimo entre los números reales $a$ y $b$ |
| $\sup A$ | Supremo del conjunto $A$ |
| $\text{ínf}\, A$ | Ínfimo del conjunto $A$ |
| $[\![x]\!]$ | Máximo entero de $x$ |

# 1
# Lógica

## Proposiciones

Una **proposición** es un enunciado que puede ser verdadero o falso. Si $p$ es una proposición, sus posibles valores se pueden representar por una **tabla de verdad** como la siguiente:

| $p$ |
|---|
| V |
| F |

La **negación** u **opuesto** de una proposición $p$ es la proposición con los valores opuestos y es denotada por $\neg p$. Su tabla de verdad será entonces:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Las proposiciones se pueden combinar para crear nuevas proposiciones mediante **operaciones o conectores lógicos**. A continuación se definen dichas operaciones junto con sus tablas de verdad.

La **conjunción** de dos proposiciones $p$, $q$ es la nueva proposición "$p$ y $q$" y es denotada por $p \wedge q$. Su tabla de verdad se presenta a continuación:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

La **disyunción** es la proposición "$p$ o $q$" y es denotada por $p \vee q$. Su tabla de verdad es la siguiente:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

La **disyunción exclusiva** de dos proposiciones $p$, $q$ es la nueva proposición "O $p$ o $q$ (pero no ambas al mismo tiempo)" y es denotada por $p \veebar q$. Su tabla de verdad está dada por:

| $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Si $p$, $q$ son proposiciones, definimos la proposición **condicional** como el enunciado "Si $p$, entonces $q$" y la denotamos como $p \to q$. En este caso, $p$ se denomina **antecedente** y $q$, **consecuente**. La tabla de verdad de la condicional se presenta a continuación:

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Dada la proposición condicional $p \to q$ definimos tres proposiciones asociadas:

- La proposición **conversa** o **recíproca** se define como $q \to p$.
- La proposición **inversa** es la proposición $\neg p \to \neg q$.

- La proposición **contrapositiva** se define como $\neg q \to \neg p$.

La proposición **bicondicional** se define como "$p$ si y solo si $q$" y se denota por $p \leftrightarrow q$. La tabla de verdad de la bicondicional es la siguiente:

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Una proposición es llamada **compuesta** cuando se obtiene de al menos otras dos mediante conectores lógicos. La negación de la condición anterior conlleva la definición de una proposición **simple**, es decir, aquella proposición que no es el resultado de conectar lógicamente al menos otras dos. Como se ve, la tabla de verdad de una proposición contiene todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las proposiciones simples que la forman. Por ello, si la proposición es formada por $n$ proposiciones simples, la tabla de verdad tendrá $2^n$ filas sin contar el encabezado.

## Problemas

1. Indique las negaciones de las siguientes proposiciones:

   *a*) José le dice a Mario que su afirmación es falsa.

   *b*) Si Jesús descansa y hace dieta, entonces se recuperará pronto.

   *c*) Edicson estudia o no aprueba sus exámenes.

   *d*) O Malena es alta o es baja.

   *e*) Valeria estudia economía y Pedro trabaja en un ministerio.

   *Solución.* Las negaciones son:

   *a*) José no le dice a Mario que su afirmación es falsa.

   *b*) Jesús descansa y hace dieta, pero no se recuperará pronto.

   *c*) Edicson no estudia y aprueba sus exámenes.

   *d*) Malena es alta si y solamente si ella es baja.

   *e*) Valeria no estudia economía o Pedro no trabaja en un ministerio.

   $\square$

2. Considere el siguiente diccionario:

$$
\begin{aligned}
p &= \text{Él es economista,} \\
q &= \text{Él es informático,} \\
r &= \text{Él es empresario.}
\end{aligned}
$$

Escriba cada enunciado siguiente en su forma lógica formal:

*a*) Él no es economista ni es informático, pero sí empresario.

*b*) Él no es economista y es informático.

*c*) Si él es economista e infomático, entonces es empresario.

*d*) Él es economista si y solo si no es informático.

*e*) O él no es empresario o él es informático.

*Solución.* A continuación se presenta la simbolización de cada uno de los enunciados:

*a*) $(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$

*b*) $\neg p \wedge q$

*c*) $(p \wedge q) \rightarrow r$

*d*) $p \leftrightarrow \neg q$

*e*) $\neg r \veebar q$

□

3. Defina proposiciones simples que actúen como un diccionario para traducir todas las proposiciones compuestas al lenguaje lógico formal:

*a*) Ana no está enamorada de Pedro, si Pedro no habla inglés ni trabaja en la UP.

*b*) O Pedro aprende inglés y trabaja en la UP o tiene 2 entradas para Evenpropark.

*c*) Si Pedro está enamorado de Ana, Ana está enamorada de Pedro; y si Pedro no está enamorado de Ana, trabaja en la UP. Además, si Ana no está enamorada de Pedro, entonces Pedro tiene 2 entradas para Evenpropark.

*d*) Pedro está enamorado de Ana si y solo si Ana está enamorada de Pedro. Además Pedro no tiene 2 entradas para Evenpropark.

*Solución.* Considere el siguiente diccionario

$$\begin{aligned}
p &= \text{Pedro habla inglés,}\\
q &= \text{Pedro trabaja en la UP,}\\
r &= \text{Pedro tiene 2 entradas para Evenpropark,}\\
s &= \text{Pedro está enamorado de Ana,}\\
t &= \text{Ana está enamorada de Pedro.}
\end{aligned}$$

Así, los enunciados en lenguaje lógica formal son:

*a*) $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg t$.

*b*) $(p \wedge q) \veebar r$.

*c*) $(s \to t) \wedge (\neg s \to q) \wedge (\neg t \to r)$.

*d*) $(s \leftrightarrow t) \wedge \neg r$.

□

4. Determine el converso, la inversa y la contrapositiva de cada condicional sin negar proposiciones compuestas.

*a*) "Si me compro un celular, no voy a Chosica".

*b*) "Alberto es elegido si la votación es numerosa".

*c*) "Jaime es expulsado si *triquea* Mate I".

*d*) "Si llueven hamburguesas, no veo la película Lluvia de hamburguesas".

*Solución.*

*a*) Converso: "Si no voy a Chosica, entonces me compro un celular". Inversa: "Si no me compro un celular, voy a Chosica". Contrapositiva: "Si voy a Chosica, no me compro un celular".

*b*) Converso: "Si Alberto es elegido, entonces la votación es numerosa". Inversa: "Alberto no es elegido si la votación no es numerosa". Contrapositiva: "Si Alberto no es elegido, la votación no es numerosa".

*c*) Converso: "Si Jaime es expulsado, entonces *triquea* Mate I". Inversa: "Si no *triquea* Mate I, entonces Jaime no es expulsado". Contrapositiva: "Si Jaime no es expulsado, entonces no *triquea* Mate I".

*d*) Converso: "Si no veo la película Lluvia de hamburguesas, llueve hamburguesas". Inversa: "Si no llueve hamburguesas, veo la película Lluvia de hamburguesas". Contrapositiva : "Si veo la película Lluvia de hamburguesas, entonces no llueve hamburguesas".

□

5. Sean $p$ y $q$ dos proposiciones, complete las siguientes tablas de verdad:

| $p$ | $q$ | $\neg(p \wedge q)$ | $(p \leftrightarrow q) \ \wedge \ (p \veebar q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | | |
| V | F | | |
| F | V | | |
| F | F | | |

*Solución.* Se debe recordar que la conjunción de dos proposiciones solo es verdadera cuando las dos proposiciones que la componen son verdaderas. También, a diferencia de la disyunción exclusiva, la bicondicional es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Así, las tablas son:

| $p$ | $q$ | $\neg(p \wedge q)$ | $(p \leftrightarrow q) \ \wedge \ (p \veebar q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | **F** | **F** |
| V | F | **V** | **F** |
| F | V | **V** | **F** |
| F | F | **V** | **F** |

□

6. Sean $p, q$ y $r$ tres proposiciones, complete la siguiente tabla de verdad:

| $p$ | $q$ | $r$ | $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \quad \longleftrightarrow \quad (p \rightarrow r)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | |
| V | V | F | |
| V | F | V | |
| V | F | F | |
| F | V | V | |
| F | V | F | |
| F | F | V | |
| F | F | F | |

*Solución.* Primero debemos recordar que la condicional es falsa solo cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. Segundo, la conjunción de dos proposiciones es verdadera únicamente cuando ambas proposiciones que la componen son verdaderas. Finalmente, la bicondicional es verdadera solo cuando ambas proposiciones que la conforman tienen los mismos valores de verdad. Así, la tabla resulta ser:

| $p$ | $q$ | $r$ | $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \longleftrightarrow (p \to r)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | **V** |
| V | V | F | **V** |
| V | F | V | **F** |
| V | F | F | **V** |
| F | V | V | **V** |
| F | V | F | **F** |
| F | F | V | **V** |
| F | F | F | **V** |

□

7. Si la proposición $(q \wedge \neg p) \ \to \ [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   - $\neg\,[(\neg p \vee \neg q) \ \to \ (r \vee \neg\, t)]$
   - $(\neg q \wedge \neg r) \vee [\neg t \wedge (p \vee q)]$
   - $(\neg p \to t) \to (\neg q \to r)$
   - $r \to r$

   *Solución.* Desde que la condicional es falsa cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso, se deduce que $q \equiv$ V, $p \equiv$ F y $t \equiv$ F. Luego, sin importar el valor de $r$ se deduce que los valores de las proposiciones por analizar son: F, V, V y V, respectivamente. □

8. Sean $p, q$ y $r$ tres proposiciones tales que la proposición:

$$[(p \to q) \wedge p] \to (q \to r)$$

   es falsa. Determine el valor de verdad de la proposición $(p \to r) \wedge (r \to q)$.

*Solución.* Desde que la condicional es falsa cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso, se tiene que $(p \to q) \wedge p \equiv$ V y $q \to r \equiv$ F. Deduciéndose que $q \equiv$ V, $r \equiv$ F y $p \equiv$ V. Por lo tanto, la proposición $(p \to r) \wedge (r \to q)$ es falsa. □

9. En una isla hay dos tipos de personas, las veraces (que siempre dicen la verdad) y las mentirosas (que siempre mienten). Un turista se encuentra con tres personas, A, B y C, de dicha isla y cada una le dice una frase:

   - A dice "B y C son veraces si y solo si C es veraz".
   - B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso".
   - C dice "B es mentiroso, si y solo si, A o B es veraz".

   *a*) Con el siguiente diccionario: $p =$ "A dice la verdad", $q =$ "B dice la verdad" y $r =$ "C dice la verdad", traduzca a lenguaje lógico formal lo que dicen A, B y C.

   *b*) A través de tablas de verdad, determine quiénes son veraces y quiénes son mentirosos.

*Solución.*

*a*) Con el diccionario dado se tiene que los enunciados de A, B y C en lógica formal son las siguientes proposiciones compuestas respectivamente:

- $P \equiv (q \wedge r) \leftrightarrow r$,
- $Q \equiv (p \wedge r) \to (q \wedge r \wedge \neg p)$
- $R \equiv \neg q \leftrightarrow (p \vee q)$

*b*) Las tablas de las proposiciones se muestran a continuación:

| $p$ | $q$ | $r$ | $P$ | $Q$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F |
| **V** | **V** | **F** | **V** | **V** | **F** |
| V | F | V | F | F | V |
| V | F | F | V | V | V |
| F | V | V | V | V | F |
| F | V | F | V | V | F |
| F | F | V | F | V | F |
| F | F | F | V | V | F |

Si A dice la verdad, entonces la proposición simple $p$ y la proposición compuesta $P \equiv (q \wedge r) \leftrightarrow r$ deben ser verdaderas al mismo tiempo, pero si A es mentiroso ambas proposiciones deben ser falsas. De forma análoga, se cumple lo anterior para B y C y sus proposiciones simples y compuestas correspondientes. Por lo tanto, para detectar a los veraces y mentirosos se busca una línea en la tabla de verdad que cumple que los valores de verdad de las proposiciones simples se repitan en las proposiciones compuestas. La única línea que cumple esta condición es la segunda; por lo tanto, $A$ y $B$ son veraces y $C$ es mentiroso.

□

10. Considere la siguiente proposición compuesta: "Si el valor de las acciones de la compañía aumenta o se declaran dividendos, entonces los accionistas se reunirán si y solo si dos cosas ocurren: la junta de directores convoca a reunión y el presidente del directorio no renuncia".

    *a*) Escriba la proposición anterior en su forma lógica formal.

    *b*) Determine el valor de verdad de la proposición bajo las siguientes condiciones:

    - El valor de las acciones aumenta, no se declaran dividendos, los accionistas se reunirán, la junta de directores convoca a reunión, y el presidente del directorio renuncia.
    - El valor de las acciones cae, se declaran dividendos, los accionistas no se reunirán, la junta de directores no llama a reunión y el presidente del directorio renuncia.

*Solución.*

*a*) $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow (s \wedge t))$, donde $p$="El valor de las acciones aumenta", $q$="se declaran dividendos", $r$="los accionistas se reunirán", $s$="la junta de directores convoca a reunión" y $t$="el presidente del directorio no renuncia".

*b*)
- $\begin{array}{ccccccccc} (p & \vee & q) & \rightarrow & (r & \leftrightarrow & (s & \wedge & t)) \\ \hline \mathrm{V} & \mathrm{V} & \mathrm{F} & \mathbf{F} & \mathrm{V} & \mathrm{F} & \mathrm{V} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \end{array}$ y por lo tanto la proposición es falsa.
- $\begin{array}{ccccccccc} (p & \vee & q) & \rightarrow & (r & \leftrightarrow & (s & \wedge & t)) \\ \hline \mathrm{F} & \mathrm{V} & \mathrm{V} & \mathbf{V} & \mathrm{F} & \mathrm{V} & \mathrm{F} & \mathrm{F} & \mathrm{F} \end{array}$ y por lo tanto la proposición es verdadera.

□

11. Suponga que usted está encerrado en una habitación sin ningún tipo de alimento, la habitación tiene dos puertas de las que usted puede abrir solo una. Únicamente una de las puertas le permitirá escapar, pues si es abierta la puerta equivocada ingresarán a su habitación gases venenosos que lo eliminarán instantáneamente. Si usted puede leer que en la puerta 1 dice: "Esta puerta lo dirige a la salida y tras la otra hay gases venenosos", y que en la puerta 2 dice: "Una de las puertas conduce a la salida y tras la otra hay gases venenosos ", sabiendo que solo uno de los carteles dice la verdad, determine qué puerta debe abrir para salvarse.

    *Solución.* Denotemos la proposición "La puerta 1 permite escapar"por $p$. Luego, teniendo presente que solo una de las puertas permite escapar, $\neg p$ debe ser la proposición "La puerta 2 permite escapar". En la puerta 1 se afirma $p$, mientras que en la puerta 2 solo se menciona un enunciado que sabemos es verdadero. Así, $\neg p \equiv$ V, lo que implica que $p \equiv$ F. Por lo tanto, la puerta 2 es la que debe abrirse para salvarse. □

12. En un salón de Mate I, el profesor le pregunta a Jake si estudió para la PC. Jake dice lo siguiente: "Ayer estudié para la PC o fui a clase,... mmmm ... ahora que recuerdo ayer no fui a clase"; en otro momento de la conversación él también afirma: "Ayer fui a clase o no estudié para la PC". Demostrar que Jake no dijo la verdad siempre.

    *Solución.* Consideremos:

    $$p = \text{Jake estudió ayer para la PC}, \quad q = \text{Jake fue ayer a clase}.$$

    Por lo tanto, las afirmaciones de Jake pueden resumirse en $p \vee q,\ \neg q,\ q \vee \neg p$. Si todas ellas fuesen verdad, tendríamos que $\neg q \equiv V$, es decir, $q \equiv F$, luego como debe ser $p \vee q \equiv V$, necesariamente $p \equiv V$, pero en este caso $\neg p \equiv F$ y junto con $q \equiv F$ resulta $q \vee \neg p \equiv F$, lo que nos da una contradicción. Por ello, Jake no dijo la verdad siempre. □

13. En un interrogatorio, un agente del Servicio de Inteligencia Nacional sabe que exactamente uno de cuatro funcionarios es un espía vendiendo información clasificada a intereses extranjeros. En el interrogatorio, la declaración de cada funcionario es la siguiente:

    - Funcionario A: "El funcionario C es el espía".
    - Funcionario B: "Yo no soy el espía".
    - Funcionario C: "El funcionario A miente".

- Funcionario D: “El funcionario A es el espía”.

*a*) Si el agente sabe que exactamente un funcionario está diciendo la verdad y el resto miente, ¿quién es el espía?

*b*) Si el agente sabe que exactamente un funcionario está mintiendo y el resto dice la verdad, ¿quién es el espía?

*Solución.* Primero definimos las proposiciones simples: $p$=“El funcionario A es el espía”, $q$=“El funcionario B es el espía”, $r$=“El funcionario C es el espía”, $s$=“El funcionario D es el espía”. Las declaraciones de cada funcionario se traducen en $r$, $\neg q$, $\neg r$, $p$, respectivamente. La tabla de verdad muestra las posibilidades que se pueden dar y las declaraciones de cada funcionario separados por una línea doble.

| | $p$ | $q$ | $r$ | $s$ | $r$ | $\neg\ q$ | $\neg\ r$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | V | V | V | V | V | F | F | V |
| 2 | V | V | V | F | V | F | F | V |
| 3 | V | V | F | V | F | F | V | V |
| 4 | V | V | F | F | F | F | V | V |
| 5 | V | F | V | V | V | V | F | V |
| 6 | V | F | V | F | V | V | F | V |
| 7 | V | F | F | V | F | V | V | V |
| 8 | V | F | F | F | F | V | V | V |
| 9 | F | V | V | V | V | F | F | F |
| 10 | F | V | V | F | V | F | F | F |
| 11 | F | V | F | V | F | F | V | F |
| 12 | F | V | F | F | F | F | V | F |
| 13 | F | F | V | V | V | V | F | F |
| 14 | F | F | V | F | V | V | F | F |
| 15 | F | F | F | V | F | V | V | F |
| 16 | F | F | F | F | F | V | V | F |

*a*) La pregunta se puede traducir en la siguiente interrogante sobre la tabla de verdad: ¿qué fila en la tabla tiene todas las declaraciones son falsas excepto por una que debe ser verdadera? Únicamente las filas 9, 10, 11 y 12 cumplen dicha condición. Como solo uno puede ser el espía de esas filas, debemos buscar la que contiene un único valor verdadero para $p$, $q$, $r$ o $s$ (a la izquierda de la línea doble). De las cuatro filas, solo la 12 cumple dicha condición y esto nos dice que $q$ es verdadero, es decir, el funcionario B es el espía.

*b*) Esta pregunta se puede traducir en: ¿qué fila tiene todas las declaraciones verdaderas excepto por una? Únicamente las 5, 6, 7 y 8 cumplen esta condición. Pero solo puede haber un espía; entonces, como solo 8 cumple dicha condición, el espía es el funcionario A en este caso.

$\square$

14. Cuando volvió a casa, María encontró su bicicleta malograda. Ella deduce que el culpable o los culpables de ello están entre sus 3 hermanos. Cuando los interroga, Gabo dice: Si Sandro no malogró tu bicicleta, entonces Patricio tampoco. Además, Patricio le dice: Yo malogré tu bicicleta con uno de nuestros hermanos. Sin embargo, Sandro prefirió no hablar. Responda en cada caso:

    *a*) Si solo Sandro ha malogrado la bicicleta, ¿alguien miente?

    *b*) Si se sabe que Gabo y Patricio dicen la verdad, ¿quién o quiénes de ellos han malogrado la bicicleta y quién o quiénes no?

    *c*) Si se sabe que Gabo y Patricio mienten, ¿quién o quiénes de ellos han malogrado la bicicleta y quién o quienes no?

*Solución.* Denotemos nuestro diccionario por: $p =$ "Sandro ha malogrado la bicicleta", $q =$ "Patricio ha malogrado la bicicleta" y $r =$ "Gabo ha malogrado la bicicleta", entonces lo que dicen Gabo y Patricio son

$$\neg p \to \neg q \text{ y } q \wedge (p \veebar r),$$

respectivamente.

Luego, sus tablas de verdad se muestran a continuación:

| | $p$ | $q$ | $r$ | $\neg p$ | $\to$ | $\neg q$ | $q$ | $\wedge$ | $(p \veebar r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | V | V | V | | **V** | | | **F** | F |
| 2 | V | V | F | | **V** | | | **V** | V |
| 3 | V | F | V | | **V** | | | **F** | F |
| 4 | V | F | F | | **V** | | | **F** | V |
| 5 | F | V | V | | **F** | | | **V** | V |
| 6 | F | V | F | | **F** | | | **F** | F |
| 7 | F | F | V | | **V** | | | **F** | V |
| 8 | F | F | F | | **V** | | | **F** | F |

*a*) Si solo Sandro ha malogrado la bicicleta, observamos en la tabla que esto ocurre en la fila 4; por lo tanto, Patricio miente.

*b*) Si Gabo y Patricio dicen la verdad, observamos en la tabla que esto ocurre en la fila 2; entonces, Sandro y Patricio han malogrado la bicicleta, pero Gabo no.

*c*) Si Gabo y Patricio mienten, observamos en la tabla que esto ocurre en la fila 6; por lo tanto, Patricio ha malogrado la bicicleta, pero Sandro y Gabo no.

$\square$

## Equivalencias y tautologías

Una proposición compuesta es una **tautología** cuando su tabla de verdad resulta en valores verdaderos sin importar el valor de verdad de las proposiciones simples que la forman. Claramente, una proposición simple no puede ser una tautología. Cuando la tabla de verdad resulta en valores falsos, la proposición es llamada **contradicción**; y cuando la proposición no es una tautología ni una contradicción, se denomina **contingencia**.

Decimos que dos proposiciones compuestas $P$, $Q$ son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. En este caso escribimos:

$$P \equiv Q.$$

Esto es equivalente a que la proposición $P \leftrightarrow Q$ sea una tautología. Por ejemplo, la condicional es equivalente a su contrapositiva, y la recíproca es equivalente a la inversa.

Dos ejemplos importantes de equivalencias son las siguientes identidades llamadas **leyes de De Morgan**:

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

## Problemas

1. A continuación se tiene 3 proposiciones:

   *a*) Si mañana salen los helicópteros del Ejército peruano y se recauda la donación necesaria, entonces reconfortamos a los afectados por la inundación.

   *b*) Mañana no salen los helicópteros del Ejército peruano ni se recauda la donación necesaria, o no se reconfortan a los afectados por la inundación.

*c*) Mañana no salen los helicópteros del Ejército peruano o no se recauda la donación necesaria, si no reconfortamos a los afectados por la inundación.

Establezca un único diccionario para las tres proposiciones y tradúzcalas al lenguaje de lógica formal. Además, establezca si las dos primeras proposiciones son equivalentes.

*Solución.* El diccionario viene dado por: $p$ = "Mañana salen los helicópteros del Ejército peruano", $q$ = "Se recauda la donación necesaria" y $r$ = "Reconfortamos a los afectados por la inundación". Así, las proposiciones se simbolizan de la siguiente manera:

*a*) $(p \wedge q) \to r$

*b*) $(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$

*c*) $\neg r \to (\neg p \vee \neg q)$

Luego, al realizar las tablas de verdad de las dos primeras proposiciones se obtiene lo siguiente:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \wedge q) \to r$ | $(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | **V** | **F** |
| V | V | F | **F** | **V** |
| V | F | V | **V** | **F** |
| V | F | F | **V** | **V** |
| F | V | V | **V** | **F** |
| F | V | F | **V** | **V** |
| F | F | V | **V** | **V** |
| F | F | F | **V** | **V** |

de donde se observa que no tienen las mismas tablas y por ende no son equivalentes.

□

2. A continuación se tienen dos proposiciones:

*a*) Si prospera la vacancia del presidente de la República por parte del Congreso y los vicepresidentes renuncian, entonces se convoca a nuevas elecciones.

*b*) Si no se convoca a nuevas elecciones, entonces los vicepresidentes no renuncian o no prospera la vacancia del presidente de la República por parte del Congreso.

Exprese ambas proposiciones en su forma lógico formal estableciendo primero un diccionario. Además, justifique si las proposiciones dadas son o no equivalentes.

*Solución.* Se considera el siguiente diccionario: $p$ = "Prospera la vacancia del presidente de la República por parte del Congreso", $q$ = "Los vicepresidentes renuncian" y $r$ = "Se convoca a nuevas elecciones". Así, las proposiciones serán expresadas de la siguiente manera:

*a*) $(p \wedge q) \rightarrow r$

*b*) $\neg r \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$

Luego, al usar algunas equivalencias se obtiene que:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow r &\equiv \neg r \rightarrow \neg (p \wedge q)\\ &\equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)\\ &\equiv \neg r \rightarrow (\neg q \vee \neg p)\end{aligned}$$

de donde se concluye que las proposiciones son equivalentes. □

3. Dadas las siguientes proposiciones:

   *a*) Si Perú no le gana a Australia y le gana a Dinamarca, entonces no clasifica a la siguiente fase de la copa del mundo.

   *b*) Perú le gana a Australia o no es cierto que Perú le gana a Dinamarca y clasifica a la siguiente fase de la copa del mundo.

   Escriba en lenguaje lógico formal ambas proposiciones, estableciendo un diccionario. Además, determine si las proposiciones son equivalentes.

   *Solución.* Se considera el siguiente diccionario: $p$ = "Perú le gana a Australia", $q$ = "Perú le gana a Dinamarca", y $r$ = "Perú clasifica a la siguiente fase de la copa del mundo". Así las proposiciones vienen dadas por:

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r \ \text{ y } \ p \vee \neg(q \wedge r),$$

   respectivamente. Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned}(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r &\equiv \neg(\neg p \wedge q) \vee \neg r\\ &\equiv (p \vee \neg q) \vee \neg r\\ &\equiv p \vee (\neg q \vee \neg r)\\ &\equiv p \vee \neg(q \wedge r)\end{aligned}$$

Por lo tanto, las proposiciones son equivalentes. □

4. Verifique en cada caso si el primer enunciado es equivalente al segundo. Justifique su respuesta en cada caso usando la lógica de proposiciones.

   *a*)
   - “Si llueve el piso se moja, y cuando el piso se moja hay que limpiarlo”.
   - “Si llueve hay que limpiar el piso”.

   *b*)
   - “No es cierto que si está lloviendo entonces no uso el paraguas”.
   - “Está lloviendo y uso el paraguas”.

   *Solución.*

   *a*) Haciendo $p$ =“Está lloviendo”, $q$ =“El piso se moja” y $q$ =“Hay que limpiar el piso”; el primer enunciado tiene la forma $(p \to q) \wedge (q \to r)$ y el segundo, $p \to r$. Para verificar si son equivalentes vemos la tabla de verdad:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \to q)$ | $\wedge$ | $(q \to r)$ | $p \to r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | **V** | V | **V** |
| V | V | F | V | **F** | F | **F** |
| V | F | V | F | **F** | V | **V** |
| V | F | F | F | **F** | V | **F** |
| F | V | V | V | **V** | V | **V** |
| F | V | F | V | **F** | F | **V** |
| F | F | V | V | **V** | V | **V** |
| F | F | F | V | **V** | V | **V** |

   Esto nos dice que no son equivalentes.

   *b*) Para el segundo enunciado hacemos $p$ =“Está lloviendo” y $q$ =“no uso el paraguas”. Entonces el primer enunciado tiene la forma $\neg(p \to q)$ y el segundo, la forma $p \wedge \neg q$. Para verificar si son equivalentes vemos la tabla de verdad:

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p \to q)$ | $p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **F** | V | | **F** | F | |
| V | F | **V** | F | | **V** | V | |
| F | V | **F** | V | | **F** | F | |
| F | F | **F** | V | | **F** | V | |

   Esto nos dice que las enunciados son equivalentes.

$\square$

5. Demuestre cada una de las siguientes equivalencias:

*a*) $p \wedge p \equiv p$

*b*) $p \vee p \equiv p$

*c*) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

*d*) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

*e*) $p \equiv \neg(\neg p)$

*f*) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

*g*) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

*h*) $(p \vee q) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$

*i*) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

*j*) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

*Solución.* Para justificar las equivalencias se muestran las tablas de verdad.

*a*) $p \wedge p \equiv p$

| $p$ | $p$ | $\wedge$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| **V** | | **V** | |
| **F** | | **F** | |

*b*) $p \vee p \equiv p$

| $p$ | $p$ | $\vee$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| **V** | | **V** | |
| **F** | | **F** | |

*c*) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \wedge q)$ | $\wedge$ | $r$ | $p$ | $\wedge$ | $(q \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | **V** | | | **V** | V |
| V | V | F | V | **F** | | | **F** | F |
| V | F | V | F | **F** | | | **F** | F |
| V | F | F | F | **F** | | | **F** | F |
| F | V | V | F | **F** | | | **F** | V |
| F | V | F | F | **F** | | | **F** | F |
| F | F | V | F | **F** | | | **F** | F |
| F | F | F | F | **F** | | | **F** | F |

*d*) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \vee q)$ | $\vee$ | $r$ | $p$ | $\vee$ | $(q \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | **V** | | | **V** | V |
| V | V | F | V | **V** | | | **V** | V |
| V | F | V | V | **V** | | | **V** | V |
| V | F | F | V | **V** | | | **V** | F |
| F | V | V | V | **V** | | | **V** | V |
| F | V | F | V | **V** | | | **V** | V |
| F | F | V | F | **V** | | | **V** | V |
| F | F | F | F | **F** | | | **F** | F |

*e*) $p \equiv \neg(\neg p)$

| $p$ | $\neg$ | $(\neg$ | $p)$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | F | |
| **F** | **F** | V | |

*f*) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p$ | $\wedge$ | $(q \vee r)$ | $(p \wedge q)$ | $\vee$ | $(p \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | **V** | V | V | **V** | V |
| V | V | F | | **V** | V | V | **V** | F |
| V | F | V | | **V** | V | F | **V** | V |
| V | F | F | | **F** | F | F | **F** | F |
| F | V | V | | **F** | V | F | **F** | F |
| F | V | F | | **F** | V | F | **F** | F |
| F | F | V | | **F** | V | F | **F** | F |
| F | F | F | | **F** | F | F | **F** | F |

*g*) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

| $p$ | $q$ | $r$ | $p$ | $\vee$ | $(q \wedge r)$ | $(p \vee q)$ | $\wedge$ | $(p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | **V** | V | V | **V** | V |
| V | V | F | | **V** | F | V | **V** | V |
| V | F | V | | **V** | F | V | **V** | V |
| V | F | F | | **V** | F | V | **V** | V |
| F | V | V | | **V** | V | V | **V** | V |
| F | V | F | | **F** | F | V | **F** | F |
| F | F | V | | **F** | F | F | **F** | V |
| F | F | F | | **F** | F | F | **F** | F |

*h*) $(p \vee q) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$

| $p$ | $q$ | $(p \vee q)$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q$ | $p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | **F** | F | | | **F** | F | |
| V | F | V | **V** | V | | | **V** | V | |
| F | V | V | **F** | F | | | **F** | F | |
| F | F | F | **F** | V | | | **F** | V | |

*i*) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\vee$ | $q)$ | $\neg$ | $p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **F** | | V | | F | | **F** | F | |
| V | F | **F** | | V | | F | | **F** | V | |
| F | V | **F** | | V | | V | | **F** | F | |
| F | F | **V** | | F | | V | | **V** | V | |

*j*) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $q)$ | $\neg$ | $p$ | $\vee$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **F** | | V | | F | | **F** | F | |
| V | F | **V** | | F | | F | | **V** | V | |
| F | V | **V** | | F | | V | | **V** | F | |
| F | F | **V** | | F | | V | | **V** | V | |

□

6. Demuestre que la proposición condicional es equivalente a su contrapositiva. También demuestre que la recíproca es equivalente a la inversa.

*Solución.* La proposición condicional es $p \to q$. Se pide verificar que

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p \quad \text{y} \quad q \to p \equiv \neg p \to \neg q.$$

Para ello se construyen las respectivas tablas de verdad.

| $p$ | $q$ | $p$ | $\to$ | $q$ | $\neg$ | $q$ | $\to$ | $\neg$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | **V** | | F | | **V** | F | |
| V | F | | **F** | | V | | **F** | F | |
| F | V | | **V** | | F | | **V** | V | |
| F | F | | **V** | | V | | **V** | V | |

| $p$ | $q$ | $q$ | $\to$ | $p$ | $\neg$ | $p$ | $\to$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | **V** | | F | | **V** | F | |
| V | F | | **V** | | F | | **V** | V | |
| F | V | | **F** | | V | | **F** | F | |
| F | F | | **V** | | V | | **V** | V | |

□

7. Si se sabe que $p \veebar q \equiv \neg(p \leftrightarrow q)$, escriba la tabla de verdad de $p \veebar q$ y verifique las siguientes propiedades:

   *a*) $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,

   *b*) $\neg(p \veebar q) \equiv p \veebar \neg q$.

*Solución.* La tabla de verdad es:

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\leftrightarrow$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **F** | | V | |
| V | F | **V** | | F | |
| F | V | **V** | | F | |
| F | F | **F** | | V | |

Para solucionar $a)$ y $b)$ mostramos a continuación sus respectivas tablas de verdad:

| $p$ | $q$ | $p$ | $\veebar$ | $q$ | $(p$ | $\vee$ | $q)$ | $\wedge$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | **F** | | | V | | **F** | F | | V | |
| V | F | | **V** | | | V | | **V** | V | | F | |
| F | V | | **V** | | | V | | **V** | V | | F | |
| F | F | | **F** | | | F | | **F** | V | | F | |

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\veebar$ | $q)$ | $p$ | $\veebar$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **V** | | | | | **V** | F | |
| V | F | **F** | | | | | **F** | V | |
| F | V | **F** | | | | | **F** | F | |
| F | F | **V** | | | | | **V** | V | |

Entonces, como en la primera tabla la primera y última columnas en negrilla son idénticas, esto nos dice que $a)$ es cierto. Como en la segunda tabla la segunda y tercera columnas en negrilla son idénticas, esto nos indica que $b)$ es cierto. $\square$

8. Escriba las siguientes proposiciones sin usar condicionales y sin negar proposiciones compuestas.

   *a*) "Si hace frío me pongo la gorra".

   *b*) "Las empresas reducen personal o liquidan activos, siempre y cuando la economía nacional entre en recesión".

   *c*) "Mañana hago la tarea, si me levanto temprano y no voy al gimnasio".

*Solución.*

*a*) El enunciado está en la forma $p \to q$, donde $p$="Hace frío" y $q$="me pongo la gorra". Como $p \to q \equiv \neg p \vee q$, el enunciado es equivalente a "No hace frío o me pongo la gorra", el cual no es una condicional.

*b*) Si $p$="Las empresas reducen personal o liquidan activos" y $q$="La economía nacional entra en recesión", entonces el enunciado está en la forma $q \to p$. Como $q \to p \equiv p \vee \neg q$, el enunciado es equivalente a "Las empresas reducen personal o liquidan activos, o la economía nacional no entra en recesión."

*c*) Haciendo $p$="Mañana hago la tarea", $q$="me levanto temprano" y $r$="no voy al gimansio", el enunciado está en la forma $(q \wedge r) \to p$. Como $(q \wedge r) \to p \equiv p \vee \neg(q \wedge r) \equiv p \vee (\neg q \vee \neg r)$, el enunciado es equivalente a: "Mañana hago la tarea o, no me levanto temprano o voy al gimnasio."

□

9. Escriba la negación de cada proposición sin negar proposiciones compuestas.

*a*) "Si no duermo bien no voy a poder concentrarme en clase".

*b*) "Voy a la playa si y solo si termino la tarea".

*c*) "Si llueve mucho entonces no saco el carro".

*Solución.*

*a*) Como la proposición está en la forma $p \to q$, la equivalencia:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q,$$

implica que podemos escribir la negación de la proposición como "No duermo bien y puedo concentrarme en clase".

*b*) Como la proposición está en la forma $p \leftrightarrow q$, la equivalencia:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \veebar q,$$

implica que podemos escribir la negación de la proposición como "O voy a la playa o termino la tarea (pero no ambas)".

*c*) Como la proposición está en la forma $p \to q$, la equivalencia:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q,$$

implica que podemos escribir la negación de la proposición como "Llueve mucho y saco el carro".

□

10. Pruebe que los siguientes enunciados son lógicamente equivalentes:

*a*) "Si Juan termina de solucionar ese problema y el horario de trabajo terminó, entonces se retira muy satisfecho".

*b*) "Juan no terminó de solucionar ese problema o el horario de trabajo no terminó, o Juan se retira muy satisfecho".

*Solución.* Sean $p =$ "Juan termina de solucionar ese problema", $q =$ "El horario de trabajo terminó" y $r =$ "Juan se retira muy satisfecho". La primera proposición se escribe como $(p \wedge q) \to r$, y la segunda como $(\neg p \vee \neg q) \vee r$. Para verificar si son equivalentes se usan las tabla de verdad:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \wedge q) \to r$ | $(\neg p \vee \neg q) \vee r$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | **V** | **V** |
| V | V | F | **F** | **F** |
| V | F | V | **V** | **V** |
| V | F | F | **V** | **V** |
| F | V | V | **V** | **V** |
| F | V | F | **V** | **V** |
| F | F | V | **V** | **V** |
| F | F | F | **V** | **V** |

Como los valores coinciden, las proposiciones son equivalentes. □

11. Consideremos las siguientes proposiciones:

- *Si Nadine postula para presidente y las elecciones son mañana entonces ganará la competencia.*
- *Si no gana la competencia entonces las elecciones no son mañana o Nadine no postula para presidente.*

Establezca un diccionario para expresar ambas proposiciones en su forma lógico formal. Justifique si las proposiciones dadas son o no equivalentes.

*Solución.* Consideremos el diccionario: $p =$ "Nadine postula para presidente", $q =$ "Las elecciones son mañana" y $r =$ "Ganará la competencia". Las proposiciones en su forma lógico formal son:

- $(p \wedge q) \to r$.
- $\neg r \to (\neg q \vee \neg p)$.

A continuación dadas las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow r &\equiv \neg r \rightarrow \neg(p \wedge q)\\ &\equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)\\ &\equiv \neg r \rightarrow (\neg q \vee \neg p)\end{aligned}$$

se concluye la equivalencia de los extremos. □

12. Una proposición compuesta es una **tautología** cuando su tabla de verdad tiene valores verdaderos sin importar el valor de verdad de sus proposiciones simples. Muestre que $P \equiv Q$ es equivalente a afirmar que $P \leftrightarrow Q$ es una tautología.

    *Solución.* En efecto, si las tablas de verdad de las proposiciones compuestas $P$ y $Q$ son idénticas, entonces cuando $P$ es verdadero $Q$ también lo es y cuando $P$ es falso $Q$ también lo es. Por lo tanto, $P \leftrightarrow Q$ será siempre verdadero. Ahora, si $P \leftrightarrow Q$ es siempre verdadero, entonces el valor de $P$ debe ser igual al valor de $Q$, es decir, las tablas de verdad de $P$ y $Q$ son idénticas y entonces $P \equiv Q$. □

13. Sean $p, q$ y $r$ tres proposiciones simples. Determine si la proposición:

    $$[p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$$

    es una tautología.

    *Solución.* Usando equivalencia de proposiciones se observa que:

    $$\begin{aligned}p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv \neg p \vee (q \wedge r)\\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)\\ &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)\end{aligned}$$

    deduciéndose que la proposición en mención es una tautología. □

14. Sean $p$, $q$ y $r$ tres proposiciones. Complete la tabla de verdad de la siguiente proposición.

| $p$ | $q$ | $r$ | $[\neg p \wedge (q \vee r)] \veebar [(p \vee r) \wedge q]$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | |
| V | V | F | |
| V | F | V | |
| V | F | F | |
| F | V | V | |
| F | V | F | |
| F | F | V | |
| F | F | F | |

Además, concluya si es o no una tautología.

*Solución.* El resultado de la tabla es:

| $p$ | $q$ | $r$ | $[\neg p \wedge (q \vee r)] \veebar [(p \vee r) \wedge q]$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | **V** |
| V | V | F | **V** |
| V | F | V | **F** |
| V | F | F | **F** |
| F | V | V | **F** |
| F | V | F | **V** |
| F | F | V | **V** |
| F | F | F | **F** |

Por lo tanto, la proposición no es una tautología. $\square$

15. Una **contradicción** es una proposición compuesta que es falsa sin importar los valores de verdad de sus proposiciones simples. Indique si las siguientes proposiciones son tautologías o contradicciones:

*a*) $p \vee \neg p$.

*b*) $\neg(p \to q) \leftrightarrow \neg[\neg q \to \neg p]$.

*c*) $p \wedge \neg p$.

*d*) $\neg\{[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \to \neg p\}$.

*Solución.* En cada caso mostraremos su tabla para concluir.

*a*) $p \vee \neg p$

| $p$ | $p \vee \neg p$ |
|---|---|
| V | **V** |
| F | **V** |

es una tautología.

*b*) $\neg(p \to q) \leftrightarrow \neg[\neg q \to \neg p]$

| $p$ | $q$ | $\neg(p \to q)$ | $\leftrightarrow$ | $\neg(\neg q \to \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | **V** | F |
| V | F | V | **V** | V |
| F | V | F | **V** | F |
| F | F | F | **V** | F |

es una tautología.

*c*) $p \wedge \neg p$

| $p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|
| V | **F** |
| F | **F** |

es una contradicción.

*d*) $\neg\{[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \to \neg p\}$

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $\{[(\neg p \vee q)$ | $\wedge$ | $\neg q]$ | $\to$ | $\neg p\}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **F** | V | F | | V | |
| V | F | **F** | F | F | | V | |
| F | V | **F** | V | F | | V | |
| F | F | **F** | V | V | | V | |

es una contradicción.

Finalmente, podemos mencionar que las dos primeras son tautologías y las dos últimas son contradicciones. $\square$

16. Demostrar que $\big(s \to (\neg r \wedge q)\big) \to \big(s \to (r \to q)\big)$ es una tautología.

*Solución.* Podemos proceder con una tabla de verdad, pero en este caso usaremos el método de reducción al absurdo. Si la proposición no fuera una tautología, es decir fuera falsa para ciertos valores de verdad de $s$, $r$ y $q$, debería ocurrir, para dichos valores, que $s \to (\neg r \wedge q) \equiv V$ y $s \to (r \to q) \equiv F$, luego $s \equiv V$ y $r \to q \equiv F$, de donde se deduce que $r \equiv V$ y $q \equiv F$. Por lo tanto $s \equiv V$, $r \equiv V$ y $q \equiv F$, de donde se deduce que $s \to (\neg r \wedge q) \equiv F$, que es absurdo pues era verdad. Por ende, la proposición inicial no puede ser falsa, es decir, es una tautología. $\square$

17. Sean $p, q$ y $r$ tres proposiciones simples. Determine si la proposición:

$$[p \to (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (p \to r)]$$

es una tautología

*Solución.* Usando equivalencia de proposiciones se observa que

$$\begin{aligned} p \to (q \wedge r) &\equiv \neg p \vee (q \wedge r) \\ &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \\ &\equiv (p \to q) \wedge (p \to r) \end{aligned}$$

deduciéndose que la proposición en mención es una tautología. $\square$

## Argumentos

De acuerdo con el diccionario de la lengua española, un argumento es un "razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición". Como veremos más adelante, en el contexto de lógica formal dicha definición es equivalente a la de un argumento válido.

Matemáticamente, un **argumento** es una lista de proposiciones $P_1$, $P_2$, ..., $P_n$ llamadas **premisas** y una proposición $Q$ llamada **conclusión**. La notación usada para argumentos es

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q.$$

Un argumento escrito como el anterior se dice que está expresado en el **lenguaje lógico formal**. Muchas veces se necesita traducir entre un enunciado escrito en la forma de un párrafo o **lenguaje coloquial** y el lenguaje lógico formal. Para ello es necesario establecer un **diccionario**, como se verá en las soluciones de los problemas más adelante.

Un argumento es **válido** si, al establecer todas las premisas como verdaderas, la conclusión es necesariamente verdadera también. Un argumento es **inválido** si la condición anterior no se cumple, es decir, si asumiendo la veracidad de las premisas no se puede llegar a la veracidad de la conclusión. Esto puede ocurrir si existen valores de verdad específicos para las proposiciones simples que dan como resultado la veracidad de las premisas y la falsedad de la conclusión.

Un error común es confundir el concepto de validez con el de veracidad. Un argumento no puede ser verdadero o falso dado que un argumento no es una proposición sino una lista de proposiciones. La siguiente herramienta se usa en ocasiones para demostrar la validez de un argumento. El argumento:

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$$

es válido si y solo si la proposición:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q$$

es una tautología.

## Problemas

1. Determine si los siguientes argumentos son válidos:

   *a*) $\neg p \vdash p \to q$
   *b*) $p \to q,\ \neg p \to r,\ \big(q \vee r\big) \to s \vdash s$
   *c*) $q \wedge (r \to p),\ r \vee p \vdash (p \to q) \to p$
   *d*) $p \to (q \vee r),\ q \to (\neg r),\ p \vdash q \veebar r$
   *e*) $p \to r,\ q \to r \vdash (p \vee q) \to r$
   *f*) $(\neg p) \to q,\ q \to (\neg r),\ r \vee s,\ \neg s \vdash p$
   *g*) $q \wedge (r \to p),\ (\neg r) \to p \vdash p$
   *h*) $p \to q,\ q \leftrightarrow (\neg r) \vdash p \to (\neg r)$
   *i*) $p \to q,\ (\neg r) \to (\neg s),\ p \wedge s \vdash q \wedge r$
   *j*) $(p \vee q) \leftrightarrow \neg r,\ \neg p \to s,\ \neg t \to q,\ (s \wedge t) \to u \vdash r \to u$

   *Solución.*

   *a*) Asumiendo que la premisa es verdadera tenemos que $p \equiv F$, de donde la conclusión $p \to q$ es verdadera. El argumento es válido.

   *b*) Demostremos que el argumento es válido por contradicción. Supongamos que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, es decir, $(p \to q \equiv V,\ \neg p \to r \equiv V,\ \big(q \vee r\big) \to s \equiv V,\ s \equiv F)$.

De $s \equiv F$ y $\big(q \vee r\big) \to s \equiv V$ tenemos que $q \equiv F$ y $r \equiv F$, luego de la primera y segunda premisa $p \equiv F$ y $p \equiv V$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el argumento es válido.

*c*) Demostremos que el argumento es válido por contradicción. Supongamos que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. De $q \wedge (r \to p) \equiv V$ y $(p \to q) \to p \equiv F$ tenemos que $q \equiv V$, $p \equiv F$ y $r \equiv F$; de esta manera, la segunda premisa $r \vee p$ es falsa, lo cual es absurdo. El argumento es válido.

*d*) Supongamos que las premisas son verdaderas. De $p \to (q \vee r) \equiv V$ y $p \equiv V$ obtenemos

$$q \vee r \equiv V \tag{1.1}$$

además de $q \to \neg r \equiv \neg(q \wedge r) \equiv V$ tenemos

$$q \wedge r \equiv F \tag{1.2}$$

Luego de $(1.1)$ y $(1.2)$ las proposiciones $q$ y $r$ tienen distintos valores de verdad, de donde $q \veebar r \equiv V$. Así, el argumento es válido.

*e*) Demostremos por contradicción que el argumento es válido. Supongamos que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, esto es:

$i)$ $p \to r \equiv V$

$ii)$ $q \to r \equiv V$

$iii)$ $(p \vee q) \to r \equiv F$

De $iii)$, tenemos que $p \vee q \equiv V$ y $r \equiv F$ esto último al reemplazarlo en $i)$ y $ii)$ concluimos que $p$ y $q$ son falsos, lo que contradice $p \vee q \equiv V$, por lo que la conclusión debe ser verdadera, de donde el argumento es válido.

*f*) Demostremos por contradicción, que el argumento es válido. Supongamos que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, esto es:

$i)$ $(\neg p) \to q \equiv V$

$ii)$ $q \to (\neg r) \equiv V$

$iii)$ $r \vee s \equiv V$

$iv)$ $\neg s \equiv V$

$v)$ $p \equiv F$

De $v)$ y $i)$ tenemos que $q \equiv V$, luego al sustituirlo en $ii)$ nos lleva a que $r \equiv F$ y reemplazando en $iii)$ tenemos que $s \equiv V$, pero esto último contradice $iv)$. Así, la contradicción proviene de haber supuesto que la conclusión es falsa, entonces la conclusión debe ser verdadera, por lo que el argumento es válido.

*g*) Demostremos por contradicción que el argumento es válido. Supongamos que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, esto es:

$i)$ $q \wedge (r \to p) \equiv V$
$ii)$ $(\neg r) \to p \equiv V$
$iii)$ $p \equiv F$

De las dos últimas equivalencias se concluye que $r \equiv V$, que al reemplazarlo en $i)$ genera una contradicción, por lo que la conclusión debe ser verdadera, de donde el argumento es válido.

*h*) Si las premisas son verdaderas, estudiaremos las opciones que se presentan según los valores de verdad de $q$.

- Si $q$ es verdad, entonces $\neg r$ debe ser verdad, así $p \to (\neg r)$ es verdad, independientemente del valor de verdad que tenga $p$.
- Si $q$ es falso, entonces $p$ es falso y $\neg r$ también lo es, en consecuencia $p \to (\neg r)$ es verdad.

Así pues, en cualquier caso, la conclusión $p \to (\neg r)$ es verdad; por tanto, el argumento es válido.

*i*) Asumimos que las premisas son verdaderas, es decir:

$i)$ $p \to q \equiv V$
$ii)$ $(\neg r) \to (\neg s) \equiv V$
$iii)$ $p \wedge s \equiv V$

De $iii)$ tenemos que $p \equiv V$, $s \equiv V$. De este último valor junto a $ii)$ concluimos que $r \equiv V$. De $i)$ obtenemos que $q \equiv V$. Por tanto, la conclusión $q \wedge r$ es verdadera. El argumento es válido.

*j*) Supongamos que las premisas del argumento son verdaderas y la conclusión es falsa, es decir:

$i)$ $(p \vee q) \leftrightarrow \neg r \equiv V$
$ii)$ $\neg p \to s \equiv V$
$iii)$ $\neg t \to q \equiv V$
$iv)$ $(s \wedge t) \to u \equiv V$
$v)$ $r \to u \equiv F$

De la parte $v)$ tenemos que $r \equiv V$ y $u \equiv F$, esto junto con la parte $iv)$ permite concluir:

$$s \wedge t \equiv F \tag{1.3}$$

Por otro lado, la parte $i)$ junto con $r \equiv V$ permite ver que $p \equiv F$ y $q \equiv F$. De las partes $ii)$, $iii)$ junto con $p \equiv F$ y $q \equiv F$ vemos que $s \equiv V$ y $t \equiv V$, luego $s \wedge t \equiv V$. Esto contradice (1.3). Así, el argumento es válido.

$\square$

2. Determine si el siguiente argumento es válido.
*Si Argentina entra en estado de cese de pagos, entonces su riesgo país sube y la bolsa de valores cae; por otro lado, Argentina no entra en estado de cese de pagos si las negociaciones con los acreedores conocidos como "fondos buitre" tienen éxito o Argentina paga la deuda completa; el miércoles 30 de julio las negociaciones con los acreedores fracasan y Argentina no paga la deuda completa. Por lo tanto, el riesgo país de Argentina sube.*

*Solución.* Definimos las siguientes proposiciones simples:

- $p$= Argentina entra en estado de cese de pagos.
- $q$= El riesgo país sube.
- $r$= La bolsa de valores cae.
- $s$= Las negociaciones con los acreedores tienen éxito.
- $t$= Argentina paga la deuda completa.

Luego, el argumento es:

$$p \rightarrow (q \wedge r),\ (s \vee t) \rightarrow \neg p,\ \neg(s \vee t)\ \vdash q.$$

Analizando el argumento podemos observar que si $p \equiv F$, $s \equiv F$, $t \equiv F$ y $q \equiv F$, las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. El argumento es inválido. $\square$

3. Analice la validez del siguiente argumento.
*Las inversiones se perjudican si Argentina entra en estado de cese de pagos, si las inversiones no se perjudican entonces baja el desempleo; sin embargo, el gobierno argentino asegura o Argentina entra en estado de cese de pagos o no baja el desempleo. Por lo tanto, las inversiones se perjudican.*

*Solución.* Definimos:

- $p$= Argentina entra en estado de cese de pagos.
- $q$= Las inversiones se perjudican.

- $r$= El desempleo baja.

Luego, el argumento es:

$$p \to q,\ \neg q \to r,\ p \veebar \neg r\ \vdash q$$

Supongamos que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, es decir:

$$p \to q \equiv V,\ \neg q \to r \equiv V,\ p \veebar \neg r \equiv V \text{ y } q \equiv F.$$

De $\neg q \to r \equiv V$ y $q \equiv F$ tenemos que $r \equiv V$, además de $p \veebar \neg r \equiv V$ obtenemos $p \equiv V$. Finalmente, como $p \to q \equiv V$ se tiene $q \equiv V$, que contradice el supuesto. El argumento es válido. $\square$

4. Determinar si el siguiente argumento es válido:
*Si Gabriela compra un computador, estudiará programación o diseño gráfico. Además, si ella estudia programación, no estudiará diseño gráfico. Finalmente, Gabriela compró un computador. Por tanto o bien Gabriela estudia programación o bien diseño gráfico.*

*Solución.* Sean las siguientes proposiciones:

- $p$ = Gabriela compra un computador.
- $q$ = Gabriela estudia programación.
- $r$ = Gabriela estudia diseño gráfico.

Luego en lógica formal tenemos:

$$p \to (q \vee r), q \to \neg r, p \vdash (q \veebar r).$$

Supongamos que las premisas sean verdaderas, demostraremos que $q \veebar r \equiv V$. Como $p \equiv V$, de $p \to (q \vee r) \equiv V$, tenemos que $q \vee r \equiv V$, luego $q$ y $r$ no pueden ser al mismo tiempo falsos. Por otra parte de $q \to \neg r \equiv V$, tenemos que ambos, $q$ y $r$, no pueden ser verdaderos. De donde $q$ y $r$ tienen valores de verdad distintos, luego $q \veebar r \equiv V$. $\square$

5. Determine si el siguiente argumento es válido.
*Si el gobierno griego aprueba las medidas económicas impuestas por la Unión Europea, entonces el impuesto sobre el valor agregado (IVA) aumenta y las jubilaciones anticipadas terminarán en el 2022; por otro lado, el gobierno no aprueba las medidas impuestas si se retira de la eurozona o el gobierno paga la deuda completa a sus acreedores; el jueves 7 de agosto el gobierno decide no retirarse de la eurozona y no paga la deuda completa. Por lo tanto, el IVA sube.*

*Solución.* Definimos las siguientes proposiciones simples:

- $p$= El gobierno griego aprueba las medidas económicas impuestas por la Unión Europea.
- $q$= El impuesto sobre el valor agregado aumenta.
- $r$= Las jubilaciones anticipadas terminarán en el año 2022.
- $s$= Grecia se retira de la eurozona.
- $t$= El gobierno griego paga la deuda completa.

Luego, el argumento es:

$$p \to (q \wedge r),\ (s \vee t) \to \neg p,\ \neg(s \vee t)\ \vdash q.$$

Analizando el argumento podemos observar que si $p \equiv F$, $s \equiv F$, $t \equiv F$ y $q \equiv F$, las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. El argumento es inválido. □

6. Determine si el siguiente argumento es válido.
*La crisis financiera griega será superada si Grecia se retira de la eurozona; por otro lado, si Grecia no supera su crisis financiera, entonces se convertirá en un "Estado fallido"; sin embargo, el gobierno griego ha proyectado o Grecia se retira de la eurozona o Grecia no se convertirá en un "Estado fallido". Por lo tanto, la crisis griega es superada.*

*Solución.* Definimos las siguientes proposiciones simples:

- $p$= La crisis financiera griega es superada.
- $q$= Grecia se retira de la eurozona.
- $r$= Grecia se convierte en un "Estado fallido".

Luego, el argumento es:

$$q \to p,\ \neg p \to r,\ q \veebar \neg r\ \vdash\ p.$$

Asumiendo que todas las premisas son verdaderas, de la tercera tenemos dos casos: $q \equiv V$ y $\neg r \equiv F$ o $q \equiv F$ y $\neg r \equiv V$

*a*) Si $q \equiv V$ y $\neg r \equiv F$, la veracidad de la primera premisa implica $p \equiv V$. El argumento es válido.

*b*) Si $q \equiv F$ y $\neg r \equiv V$, tenemos $r \equiv F$. Luego, la veracidad de la segunda premisa implica $p \equiv V$. El argumento es válido.

En cualquier caso, el argumento es válido. $\square$

7. Formalice el siguiente argumento y luego determine si el argumento es válido o no.
*Si Santiago se casa, entonces Florinda se tira al tren. Florinda se tira al tren si y solo si Santiago no se hace cura. Por lo tanto, si Santiago se casa, entonces no se hace cura.*

*Solución.* Definimos las siguientes proposiciones simples:

- $p$= Santiago se casa.
- $q$= Florinda se tira al tren.
- $r$= Santiago se hace cura.

Luego, el argumento en forma simbólica es:

$$p \to q,\ q \leftrightarrow (\neg r)\ \vdash p \to (\neg r)$$

Si las premisas son verdaderas, estudiaremos las opciones que se presentan según los valores de verdad de $q$.

- Si $q$ es verdad, entonces $\neg r$ debe ser verdad, así $p \to (\neg r)$ es verdad, independientemente del valor de verdad que tenga $p$.
- Si $q$ es falso, entonces $p$ es falso y $\neg r$ también lo es, en consecuencia $p \to (\neg r)$ es verdad.

Así pues, en cualquier caso, la conclusión $p \to (\neg r)$ es verdad; por tanto, el argumento es válido. $\square$

8. Traduzca los siguientes argumentos en forma de oraciones y establezca la validez de los mismos, considerando el siguiente diccionario:

- $p$ = 10Gb es mejor que 1Gb.
- $q$ = Compramos mayor capacidad de memoria.
- $r$ = Compramos un ordenador nuevo.

*a)* $p \to r,\ p \to q\ \vdash p \to (r \wedge q)$

*b)* $p \to (r \vee q),\ r \to \neg q\ \vdash p \to r$

*c)* $p \to r,\ r \to q\ \vdash q$

*d)* $\neg r \to \neg p,\ r\ \vdash p$

*Solución.*

*a*) Redactando el argumento, se tiene:
*Si 10Gb es mejor que 1Gb, entonces compramos un ordenador nuevo. Si 10Gb es mejor que 1Gb, entonces compramos mayor capacidad de memoria. Por lo tanto, si 10Gb es mejor que 1Gb, compramos un ordenador nuevo y una mayor capacidad de memoria.*
El argumento es válido. En efecto, como las premisas son verdaderas, estudiaremos las opciones que se presentan según los valores de verdad de $p$.

- Si $p$ es verdad, entonces como $p \to r$ y $p \to q$ son verdaderas, así, $r$ y $q$ son verdaderas; por tanto, $r \wedge q$ es verdad, en consecuencia, la conclusión $p \to (r \wedge q)$ es verdadera.
- Si $p$ es falso, entonces la conclusión $p \to (r \wedge q)$ es verdad, independientemente de los valores de $q$ y $r$.

*b*) Redactando el argumento, se tiene:
*Si 10Gb es mejor que 1Gb, entonces compramos un ordenador nuevo o mayor capacidad de memoria. Si compramos un ordenador nuevo, entonces no compramos mayor capacidad de memoria. Por tanto, si 10Gb es mejor que 1Gb, compramos un ordenador nuevo.*
El argumento es no válido. En efecto, considere los valores de verdad $p \equiv V$, $q \equiv V$ y $r \equiv F$ con los cuáles las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa.

*c*) Redactando el argumento, se tiene:
*Si 10Gb es mejor que 1Gb, entonces compramos un ordenador nuevo. Si compramos un ordenador nuevo, entonces compramos mayor capacidad de memoria. Por tanto, compramos mayor capacidad de memoria.*
El argumento es no válido. En efecto, considere los valores de verdad $p \equiv F$, $q \equiv F$ y $r \equiv F$ con los cuales las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa.

*d*) Redactando el argumento, se tiene:
*Si no compramos un ordenador nuevo, entonces 10Gb no es mejor que 1Gb. Compramos un ordenador nuevo. Por tanto, 10Gb es mejor que 1Gb.*
El argumento es no válido. En efecto, considere los valores de verdad $p \equiv F$ y $r \equiv V$ con los cuales las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa.

$\square$

9. Analice la validez del siguiente argumento:
*Si Tomás tiene diecisiete años, entonces Tomás tiene la misma edad que Juana. Si Joaquín tiene distinta edad que Tomás, entonces Joaquín tiene distinta edad que Juana. Tomás tiene diecisiete años y Joaquín tiene la misma edad que Juana. Por tanto, Joaquín tiene la misma edad que Tomás y Tomás la misma que Juana.*

   *Solución.* Definimos las siguientes proposiciones simples:

   - $p$= Tomás tiene diecisiete años.
   - $q$= Tomás tiene la misma edad que Juana.
   - $r$= Joaquín tiene la misma edad que Tomás.
   - $s$= Joaquín tiene la misma edad que Juana.

   Luego, el argumento es:

$$p \to q,\ (\neg r) \to (\neg s),\ p \wedge s \vdash q \wedge r.$$

   Asumimos que las premisas son verdaderas, es decir:

   i) $p \to q \equiv V$

   ii) $(\neg r) \to (\neg s) \equiv V$

   iii) $p \wedge s \equiv V$

   De iii) tenemos que $p \equiv V$, $s \equiv V$. De este último valor junto a $ii)$ concluimos que $r \equiv V$. De $i)$ obtenemos que $q \equiv V$. Por tanto, la conclusión $q \wedge r$ es verdadera. El argumento es válido. □

## Cuantificadores

Los cuantificadores permiten darle mayor estructura a las proposiciones para hacerlas más claras bajo ciertas condiciones. Por ejemplo, la proposición *"todo número entero es par"* es simple y claramente falsa. En esta proposición se puede reconocer un **conjunto universal** o **contexto** que es el conjunto de los números enteros. También se puede reconocer una propiedad o **predicado**, que es la cualidad de un número de ser par. Como dicha cualidad se aplica a todo elemento del conjunto universal, la proposición se puede expresar en el lenguaje lógico formal como:

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ [2 \mid x]$$

donde $2 \mid x$ significa "$x$ es divisible entre 2". El símbolo "$\forall$" significa "Para todo" y es llamado **cuantificador universal**. En general, una proposición con cuantificador universal se escribe como:

$$\forall x \in U,\ [P(x)]$$

donde $U$ es el conjunto universal y $P$ es el predicado que se aplica al elemento arbitrario $x$. Esta proposición se traduce a "Todo elemento de $U$ satisface la propiedad $P$".

El **cuantificador existencial** se define como la expresión "Para algún" o "Existe". Así, la expresión:

$$\exists x \in U,\ [P(x)]$$

se traduce a "existe algún elemento de $U$ que satisface la condición $P$". El cuantificador existencial no especifica el número de elementos que satisfacen dicha propiedad, solo que existe al menos uno, pero pueden existir varios. Es más si $\forall x \in U,\ [P(x)]$ es verdadero, en particular $\exists x \in U,\ [P(x)]$ también lo es. Si desea especificar que solo existe un único elemento de $U$ que satisface la propiedad $P$, se usa el **cuantificador existencial único**, el cual se denota por $\exists!$.

Una forma de conectar estos cuantificadores es mediante la negación. En el ejemplo anterior de la paridad de los números enteros, se mencionó que dicha proposición es claramente falsa. La razón es porque existen números enteros que no son pares, estos son los llamados números impares. Cuando una proposición con cuantificador universal es falsa, esto significa que el opuesto es verdadero, así:

$$\neg(\forall x \in U,\ [P(x)]) \equiv \exists x \in U, [\neg P(x)].$$

Por lo tanto, el opuesto del cuantificador universal es el cuantificador existencial y viceversa. Es decir:

$$\neg(\exists x \in U, [P(x)]) \equiv \forall x \in U, [\neg P(x)].$$

Cuando una proposición con cuantificador universal es falsa como en el ejemplo de paridad, como la negación es verdadera y dicha negación es una proposición con cuantificador existencial, al elemento del conjunto universal que prueba la verdad de dicha negación se le llama **contraejemplo**. En el ejemplo de paridad, el contraejemplo se puede tomar como el número 1, ya que dicho número es entero y no es par.

En ocasiones es necesario considerar proposiciones con más de un cuantificador. La teoría vista hasta el momento se puede generalizar de manera natural. Por ejemplo, la proposición:

$$\forall x \in U, \exists y \in V, [P(x, y)]$$

se traduce a "para todo elemento de $U$ existe al menos un elemento de $V$ que cumple con la condición $P$". La negación de este enunciado es:

$$\neg(\forall x \in U, \exists y \in V, [P(x,y)]) \equiv \exists x \in U, \forall y \in V, [\neg P(x,y)].$$

De forma análoga se pueden deducir los significados y negaciones del resto de enunciados posibles. El número de posibles combinaciones si se han dado $n$ cuantificadores será $2^n$.

## Problemas

1. Traduzca al lenguaje simbólico de lógica formal las siguientes proposiciones:

   *a*) Existe un único elemento de los números naturales que es menor o igual a todo número natural.

   *b*) Después de $40$ años ninguna persona del mundo cree en la inocencia del expresidente Richard Nixon.

   *c*) Si Denegri afirma que la televisión comercial hace daño, entonces todos los peruanos debemos evitar ver la televisión comercial.

   *d*) Todo hombre tiene una única mujer que lo ama.

   *e*) Todo ciudadano que esté de acuerdo con una disposición del gobierno, o lo apoya o se abstiene de opinar.

   *Solución.*

   *a*) $\exists! x \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N},\ [x \leqslant n]$.

   *b*) Consideremos $C$ = Conjunto de personas del mundo y $p(x) = x$ cree en la inocencia del expresidente Richard Nixon. Luego, la proposición en lenguaje formal es:

   $$\forall x \in C,\ [\neg p(x)].$$

   *c*) Consideremos $p =$ Denegri afirma que la televisión comercial hace daño , $C =$ Conjunto de peruanos y $q(x) = x$ ve televisión comercial. Luego, la proposición en lenguaje formal es:

   $$p \to (\forall x \in C,\ [\neg q(x)]).$$

   *d*) Sean $H$ = Conjunto de hombres , $M$ = Conjunto de mujeres y $p(x,y) =$ Mujer $y$ ama a hombre $x$. Luego, la proposición en lenguaje formal es:

   $$\forall x \in H,\ \exists! y \in M,\ [p(x,y)].$$

*e*) Sean $C$ = Colección de ciudadanos, $p(x) = x$ está de acuerdo con una disposición del gobierno, $q(x) = x$ apoya al gobierno, $r(x) = x$ se abstiene de opinar. Luego, en lógica formal tenemos:

$$\forall x \in C, \left[p(x) \to \Big(q(x) \veebar r(x)\Big)\right].$$

□

2. Transcribir formalmente cada una de las siguientes proposiciones, niéguelas y exprese su resultado sin negar proposiciones compuestas. Reescribir su respuesta en el lenguaje coloquial.

   *a*) Para todo número natural par mayor que dos existen dos números primos que suman el número original.

   *b*) Todas las plantas y los mamíferos son seres vivos, pero existen seres vivos que no son plantas ni mamíferos.

*Solución.* En cada caso tenemos que:

*a*) Si $P$ es el conjunto de números primos, la proposición es:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [(\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k + 2) \to (\exists p \in P, \exists q \in P,\ [n = p + q])],$$

y su negación es:

$$\exists n \in \mathbb{N},\ [(\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k + 2) \wedge (\forall p \in P, \forall q \in P,\ [n \neq p + q])].$$

En el lenguaje coloquial esto último quiere decir que "*existe un número natural mayor que dos que no es la suma de dos números primos*".

*b*) Sean $P$ el conjunto de plantas, $M$ el conjunto de mamíferos y $V$ el de seres vivos. La proposición en lenguaje formal es:

$$\big(\forall x \in P, \forall y \in M,\ [x \in V \wedge y \in V]\big) \wedge \big(\exists x \in V,\ [x \notin P \wedge x \notin M]\big),$$

su negación es:

$$\big(\exists x \in P, \exists y \in M,\ [x \notin V \vee y \notin V]\big) \vee \big(\forall x \in V,\ [x \in P \vee x \in M]\big),$$

que coloquialmente quiere decir que "*existen plantas y mamíferos que no son seres vivos o todos los seres vivos son plantas o mamíferos*".

$\square$

3. Analice si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

   *a*) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ [x = 2y]$.
   *b*) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ [x = 2y]$.
   *c*) $\forall z \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ [z = x + y]$.

   *Solución.*

   *a*) Para $x \in \mathbb{R}$ cualquiera consideremos $y = \frac{x}{2} \in \mathbb{R}$, de aquí tenemos $x = 2y$. La proposición es verdadera.
   *b*) Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = 2y$ para todo $y \in \mathbb{R}$; cuando $y = 1$ tenemos $x = 2$ y si $y = 2$ obtenemos $x = 4$, luego $2 = x = 4$. La proposición es falsa.
   *c*) Es verdadera porque si $z \in \mathbb{R}$ podemos considerar $x = \frac{z}{2}$ y $y = \frac{z}{2}$ tal que $z = x + y$.

$\square$

4. Niegue los siguientes enunciados sin hacer uso de la negación de proposiciones compuestas ni condicionales:

   *a*) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ [k \leqslant x < k + 1]$.
   *b*) $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ [(a > 0\ \wedge\ b > 0) \to b < a \cdot n]$.
   *c*) $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N},\ [\frac{1}{n} < \epsilon]$.
   *d*) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ [x < y \to f(x) < f(y)]$.
   *e*) $\forall x \in C, \forall y \in C, \forall t \in \mathbb{R},\ [0 \leqslant t \leqslant 1 \to tx + (1 - t)y \in C]$.
   *f*) $\forall a \in A, \exists r > 0, \forall x \in \mathbb{R},\ [|x - a| < r \to x \in A]$.

   *Solución.*

   *a*) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ [k > x\ \vee\ x \geqslant k + 1]$.
   *b*) $\exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ [(a > 0\ \wedge\ b > 0) \wedge b \geqslant a \cdot n]$.
   *c*) $\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ [\frac{1}{n} \geqslant \epsilon]$.
   *d*) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ [x < y \wedge f(x) \geqslant f(y)]$.

*e*) $\exists x \in C, \exists y \in C, \exists t \in \mathbb{R},\ [0 \leqslant t \leqslant 1 \wedge tx + (1-t)y \notin C]$.

*f*) $\exists a \in A, \forall r > 0, \exists x \in \mathbb{R},\ [|x-a| < r \wedge x \notin A]$.

$\square$

5. Transcriba formalmente cada una de las siguientes proposiciones. Luego niéguelas y exprese el resultado sin negar proposiciones compuestas. Finalmente, reescriba la respuesta en el lenguaje coloquial.

   *a*) Todos los alumnos de Matemática I tienen una nota mayor o igual a 11.

   *b*) Si el maestro está ausente, algunos estudiantes no terminan su tarea.

   *c*) Cada estudiante de la UP tiene una computadora o tiene al menos un amigo, estudiante en la UP, que tiene una computadora.

   *d*) Toda persona es menor que su padre.

   *Solución.*

   *a*) Sea el universo $U$ el conjunto de alumnos del curso de Matemática I, $p(x) = x$ tiene una nota $\geqslant 11$. Así, la proposición en el lenguaje formal es:

   $$\forall x \in U,\ [p(x)].$$

   Su negación es:

   $$\exists x \in U,\ \neg[p(x)],$$

   cuya traducción al lenguaje coloquial es "*Al menos un alumno de Matemática I está desaprobado*".

   *b*) Nuestro universo $U$ es el conjunto de estudiantes de la UP, $p(x) = x$ termina su tarea y $q =$ el maestro está ausente. Así, la proposición en el lenguaje formal es:

   $$q \rightarrow \left(\exists x \in U,\ [\neg p(x)]\right).$$

   Su negación es:

   $$q \wedge \left(\forall x \in U,\ [p(x)]\right),$$

   cuya tranducción al lenguaje coloquial es "*El maestro está ausente y todos los estudiantes terminan su tarea*".

*c*) Nuestro universo $U$ es el conjunto de estudiantes de la UP , $C(x)$ = el estudiante $x$ tiene una computadora y sea $F(x,y)$ = los estudiantes $x$ e $y$ son amigos. Así, la proposición formal es:

$$\forall x \in U,\ [C(x) \vee (\exists y \in U,\ [F(x,y) \wedge C(y)])].$$

Su negación es:

$$\exists x \in U,\ [\neg C(x) \wedge (\forall y \in U,\ [\neg F(x,y) \vee \neg C(y)])],$$

cuya tranducción al lenguaje coloquial es "*Hay al menos un estudiante de la UP que no tiene computadora y no tiene amigos que tengan computadora*".

*d*) El universo $U$ es el conjunto de personas del mundo, $P(x,y) = y$ es el padre de $x$, además $M(x,y) = x$ tiene menor edad que $y$. Por tanto, la proposición formal es:

$$\forall x, y \in U,\ [P(x,y) \to M(x,y)].$$

Su negación es:

$$\exists x, y \in U,\ [P(x,y) \wedge \neg M(x,y)],$$

cuya traducción al lenguaje coloquial es "*Hay al menos una persona que tiene algún hijo con edad mayor o igual a él*".

□

6. Traduzca al lenguaje simbólico de lógica formal las siguientes proposiciones:

*a*) Todos los ciudadanos griegos están preocupados.

*b*) Si el gobierno griego acepta las condiciones de la "Troika", todos los ciudadanos griegos se endeudarán.

*c*) Si Grecia se retira de la eurozona, entonces todos los países de la eurozona pierden dinero, estabilidad económica y algunos países deciden retirarse también de la eurozona.

*d*) Todos los políticos griegos son responsables de la crisis o algunos ciudadanos griegos perderán su jubilación anticipada.

*Solución.*

*a*) Sean $C$ = "conjunto de ciudadanos griegos" y $p(x)$ = "$x$ está preocupado". Luego, la proposición es:

$$\forall x \in C,\ [p(x)]$$

*b*) Consideremos $p =$ "el gobierno griego acepta las condiciones de la Troika", $C =$ "conjunto de ciudadanos griegos" y $q(x) =$ "$x$ se endeudará". Luego, la proposición es:

$$p \to \forall x \in C, \ [q(x)]$$

*c*) Sean $E =$ "conjunto de países de la eurozona", $p =$ "Grecia se retira de la eurozona", $r(x) =$ "$x$ pierde dinero", $s(x) =$ "$x$ pierde estabilidad económica", $t(x) =$ "$x$ se retira de la eurozona". Luego, la traducción es:

$$p \to (\forall x \in E, \ [r(x) \wedge s(x)] \wedge (\exists x \in E, \ [t(x)]).$$

*d*) Sean $A =$ "conjunto de políticos griegos", $C =$ "conjunto de ciudadanos griegos", $n(x) =$ "$x$ es responsable de la crisis" y $m(x) =$ "$x$ pierde su jubilación anticipada". Luego, la tradución es:

$$(\forall x \in A, \ [n(x)]) \vee (\exists x \in C, \ [m(x)]).$$

□

7. Considere las siguientes proposiciones:

- $p = \forall x \in \mathbb{R}, \ [x^2 - 10x + 28 > 0]$.
- $q = \exists x \in \mathbb{Q}, \ [3x^2 - 15 = 0]$.
- $r = \forall x \in \mathbb{R}, \ [0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1]$.

*a*) Determine la negación de las proposiciones.

*b*) Halle el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$[p \wedge (\neg q \vee r)] \to (\neg r \veebar q).$$

*Solución.*

*a*) Negando las proposiciones obtenemos:

- $\neg p = \exists x \in \mathbb{R}, \ [x^2 - 10x + 28 \leqslant 0]$.
- $\neg q = \forall x \in \mathbb{Q}, \ [3x^2 - 15 \neq 0]$.
- $\neg r = \exists x \in \mathbb{R}, \ [\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 0 \vee \dfrac{1}{1+x^2} > 1]$.

*b*) Los valores de verdad de las proposiciones simples son:

- $p \equiv V$, pues para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $x^2 - 10x + 28 = (x-5)^2 + 3 > 0$.
- $q \equiv F$, pues despejando la variable $x$ se tiene $x = \sqrt{5}$ o $x = -\sqrt{5}$.
- $r \equiv V$, pues para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $x^2 + 1 > 0$ y $x^2 + 1 \geqslant 1$, es decir, $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.

Luego $[p \wedge (\neg q \vee r)] \equiv V$ y $(\neg r \veebar q) \equiv F$. Por lo tanto la proposición $[p \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow (\neg r \veebar q)$ es falsa.

$\square$

8. Considere el siguiente enunciado:

*"Si existe un jugador del campeonato de primera división del fútbol peruano que acate la huelga, entonces existe un periodista deportivo que entreviste al presidente de la Federación Peruana de Fútbol y hace preguntas comprometedoras".*

*a*) Exprese el enunciado en lenguaje de lógica formal elaborando primero un diccionario y usando cuantificadores.

*b*) Niegue el enunciado anterior sin hacer uso de condicionales ni de la negación de proposiciones compuestas. Expréselo en lenguaje formal y coloquial.

*Solución.*

*a*) Dado el siguiente diccionario:

- $U =$"colección de jugadores del campeonato de primera división del fútbol peruano".
- $E =$"colección de periodistas deportivos".
- $p(x) =$"$x$ acata la huelga".
- $q(x) =$"$x$ entrevista al presidente de la Federación Peruana de Fútbol".
- $r(x) =$"$x$ hace preguntas comprometedoras".

se obtiene el siguiente enunciado en lenguaje formal:

$$(\exists x \in U, [\, p(x) \,]) \rightarrow (\exists x \in E, [\, q(x) \wedge r(x) \,])\,.$$

*b*) La negación en lenguaje formal es la siguiente:

$$(\exists x \in U, [\, p(x)\, ]) \wedge (\forall x \in E, [\, \neg q(x) \vee \neg r(x)\, ])\,.$$

En el lenguaje coloquial se obtiene: "Existe un jugador del campeonato de primera división del fútbol peruano que acata la huelga y todos los periodistas deportivos no entrevistan al presidente de la Federación Peruana de Fútbol o no hacen preguntas comprometedoras".

□

9. Simbolice las siguientes proposiciones estableciendo un diccionario, indicando el conjunto universal y el cuantificador en cada caso, además niegue cada proposición y dé su traducción al lenguaje coloquial.

   *a*) En el Perú, todos los hombres son bajos.

   *b*) En Lima, existen mujeres que no son universitarias.

   *Solución.*

   *a*) En el primer caso, el universo $U$ es el conjunto de los hombres peruanos y el predicado $p(x) =$ "$x$ es bajo". Así, nuestra proposición se escribe como:

   $$\forall x \in U,\ [\, p(x)\, ].$$

   Luego, su negación es $\exists x \in U,\ [\, \neg p(x)\, ]$, cuya traducción a lenguaje coloquial es "Hay hombres peruanos que no son bajos".

   *b*) En el segundo caso, el universo $U$ es el conjunto de mujeres de Lima y el predicado $p(x) =$ "$x$ es universitaria". Así, nuestra proposición se escribe:

   $$\exists x \in U,\ [\, \neg p(x)\, ].$$

   Luego, su negación es $\forall x \in U,\ [\, p(x)\, ]$, cuya traducción a lenguaje coloquial es "Todas las mujeres de Lima son universitarias".

□

10. Sean $U$ el conjunto de los policías del Perú, el predicado $p(x) =$ "el policía $x$ es corrupto", y el predicado $q(x) =$ "el policía $x$ es honesto". Traduzca al lenguaje coloquial la proposición $R$:

$$(\forall x \in U,\ \exists y \in U,\ [\, p(x) \ \rightarrow\ q(y)\, ]) \ \longrightarrow\ \neg(\forall x \in U,\ [\, p(x)\, ]).$$

Además, indique su negación en notación simbólica, sin negar condicionales, así como su traducción al lenguaje coloquial.

*Solución.* La traducción coloquial de la proposición $R$ es: " Si para cada policía corrupto existe un policía honesto, entonces no es cierto que todos los policías son corruptos".

Su negación es

$$(\forall x \in U,\ \exists y \in U,\ [\ p(x)\ \rightarrow\ q(y)\ ])\ \ \wedge\ \ (\forall x \in U,\ [\ p(x)\ ]),$$

siendo su traducción al lenguaje coloquial: "Para todo policía corrupto existe un policía honesto, pero todos los policías son corruptos". □

11. Se seleccionó al azar un conjunto de estudiantes de la UP matriculados en el curso de Nivelación de Matemáticas y se les preguntó por su conducta alimentaria, es decir, las diferentes formas de alimentación de una persona. Así, tenemos la forma familiar, $(F)$, que es la comida que trae de casa. La forma desordenada, $(D)$, que se le atribuye a la comida al paso, la cual por falta de tiempo es ingerida por el estudiante; y la forma institucional, $(I)$, que es la brindada por la universidad basada en un menú balanceado.

    Considerando que los estudiantes seleccionados están en el conjunto $U$, las conductas alimentarias en el conjunto $C$, es decir, $C = \{F, D, I\}$ y la asociación $p(x, y) =$ "El estudiante $x$ se alimenta de forma $y$", se pide que:

    *a*) Traduzca al lenguaje coloquial las siguientes expresiones:
    - $\forall x \in U, [\ p(x, D)\ ]$.
    - $\exists x \in U, \forall y \in C, [\ p(x, y)\ ]$.

    *b*) Traduzca las siguientes proposiciones al lenguaje de lógica formal.
    - Algún estudiante de la UP matriculado en el curso de Nivelación de Matemáticas no se alimenta de la forma familiar.
    - Algunos estudiantes de la UP matriculados en el curso de Nivelación de Matemáticas se alimentan de la forma institucional o desordenada.

    *Solución.*

    *a*)
    - Todo estudiante de la UP matriculado en el curso de Nivelación de Matemáticas se alimenta de forma desordenada.
    - Algunos estudiantes de la UP matriculados en el curso de Nivelación de Matemáticas se alimentan de las tres formas.

*b*) • $\exists x \in U,\ [\ \neg p(x, F)\ ].$
• $\exists x \in U,\ [\ p(x, I) \vee p(x, D)\ ].$

$\square$

12. Sea $U$ el conjunto de choferes del Perú. Considere los siguientes predicados:

- "$p(x) = x$ conduce con más de $0.5$ gr/litro de alcohol en la sangre".
- "$q(x) = x$ es castigado con pena privativa de libertad".
- "$r(x) = x$ paga multa".

*a*) Escriba, en lógica formal, la siguiente proposición: "Todo chofer del Perú que conduce con más de $0.5$ gr/litro de alcohol en la sangre es castigado con pena privativa de libertad".

*b*) Traduzca la siguiente proposición al lenguaje coloquial:

$$\exists x \in U,\ [\ p(x) \wedge (\neg q(x) \wedge \neg r(x))\ ],$$

además, escriba su negación en lógica formal y traduzca dicha negación al lenguaje coloquial.

*Solución.*

*a*) $\forall x \in U,\ [\ p(x) \rightarrow q(x)\ ].$

*b*) Algunos choferes del Perú conducen con más de $0.5$ gr/litro de alcohol en la sangre y no son castigados con pena privativa de libertad ni pagan multa. La negación es:

$$\forall x \in U,\ [\ p(x) \rightarrow (q(x) \vee r(x))\ ],$$

cuya traducción al lenguaje coloquial es: "Todo chofer del Perú que conduce con más de $0.5$ gr/litro de alcohol en la sangre es castigado con pena privativa de libertad o con una multa."

$\square$

13. Considere el siguiente diccionario: $U$ es el conjunto de economistas del Perú, "$p =$ ocurre una baja en los precios del petróleo", "$q(x) = x$ reduce su estimación de la tasa de interés" y "$r(x) = x$ aumenta su estimación de la tasa de crecimiento". Además, a partir de la siguiente proposición $S$ :

“Si ocurre una baja en los precios del petróleo, todos los economistas del Perú reducirán su estimación de la tasa de interés o aumentarán su estimación de la tasa de crecimiento”.

Exprese $S$ en su forma lógico formal. Niegue dicha proposición en su forma lógico formal, sin hacer uso de la negación de proposiciones compuestas ni condicionales. Adicionalmente, exprese lo anterior en lenguaje coloquial.

*Solución.* La proposición $S$ en lógico formal es:

$$p \rightarrow \forall x \in U, [\ q(x) \vee r(x)\ ] \,.$$

Así, su negación viene dada por

$$\begin{aligned} \neg\,(p \rightarrow \forall x \in U, [q(x) \vee r(x)]) &\equiv \neg\,(\neg p \vee \forall x \in U, [q(x) \vee r(x)]) \\ &\equiv \neg\,(\neg p) \wedge \neg\,(\forall x \in U, [q(x) \vee r(x)]) \\ &\equiv p \wedge\ \exists x \in U, \neg\,[q(x) \vee r(x)] \\ &\equiv p \wedge\ \exists x \in U, [\neg q(x) \wedge \neg r(x)] \end{aligned}$$

Luego, su traducción al lenguaje coloquial es:

“Ocurre una baja en los precios del petróleo y existe al menos un economista del Perú que no reduce su estimación de la tasa de interés y no aumenta su estimación de la tasa de crecimiento". □

14. Con respecto a la elección del nuevo gabinete ministerial, se tiene la siguiente proposición: "Si todos los ministros son profesionales pero no independientes, entonces algunos ministros son empresarios si y solo si son profesionales".

Escriba en lógica formal, detallando su conjunto universal y los predicados de la proposición. Además, escriba la negación de la proposición en lógica formal y en lenguaje coloquial.

*Solución.* Diccionario:

- $U$= El nuevo gabinete ministerial,
- $p(x) = x$ es profesional,
- $q(x) = x$ es independiente,

- $r(x) = x$ es empresario.

Así, la proposición es simbolizada por:

$$(\forall x \in U,\ [\, p(x) \wedge \neg q(x)\, ]) \longrightarrow (\exists x \in U,\ [\, r(x) \leftrightarrow p(x)\, ])\,.$$

Luego, su negación es:

$$(\forall x \in U,\ [\, p(x) \wedge \neg q(x)\, ]) \wedge (\forall x \in U,\ [\, r(x) \veebar p(x)\, ])\,,$$

cuya traducción al lenguaje coloquial es: "Todos los ministros son profesionales pero no independientes, además, todos o son empresarios o son profesionales". □

15. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

*a*) $\forall a \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ [\, x^2 > a \ \leftrightarrow\ \sqrt{a} < x\, ]$.

*b*) $\forall a \in \mathbb{R},\ [\, a < 0 \ \rightarrow\ |a+1| = -1 - a\, ]$.

*c*) $\forall a, b \in \mathbb{N},\ [\, a - b \in \mathbb{N}\, ]$.

*d*) $\forall r \in \mathbb{N},\ [$ si $r$ es primo entonces $r^2 + 1$también lo es $]$.

*e*) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\, x^2 + y^2 = 1 \ \rightarrow\ (x = 1 \ \wedge\ y = 0)\, ]$.

*f*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\, |-x-5| = |x| + 5\, ]$.

*g*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\, \left([\![x]\!] + 1\right)^2 = x^2 + 2[\![x]\!] + 1\, ]$.

*h*) Si $|x+5| = 2$, entonces $x = -3$.

*i*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\, x^2 - 3x + 2 > 0\, ]$.

*j*) $\forall a, b, x \in \mathbb{R} - \{0\},\ [\, ax < b \rightarrow x < \frac{b}{a}\, ]$.

*k*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\, x < 5 \rightarrow x^2 < 25\, ]$.

*Solución.*

*a*) Un contraejemplo es $a = 1$ y $x = -2$.

*b*) Un contraejemplo es $a = -0.5$.

*c*) El contraejemplo es considerar $a = 1$ y $b = 2$.

*d*) El contraejemplo es $r = 3$.

*e*) El contraejemplo es considerar $x = 0$ e $y = 1$.

*f*) Para $x = -1$, tenemos que $|-(-1)-5| = 4 \neq 6 = |-1| + 5$.

*g*) Para $x = \dfrac{1}{2}$, tenemos que

$$\left(\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right] + 1\right)^2 = 1 \neq \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right] + 1.$$

*h*) Para $x = -7$, tenemos que $|-7+5| = 2$, sin embargo $-7 \neq -3$.

*i*) Para $x = 1$, tenemos que $1^2 - 3(1) + 2 = 0$.

*j*) Para $a = -1, x = 1$ y $b = 2$ se cumple que (-1)(1)=-1<(2), pero $1$ no es menor a $2/(-1) = -2$.

*k*) Por ejemplo, para $x = -5$ se cumple que $x < 5$ pero $x^2 = 25$ no es menor a $25$.

□

16. Sea $U = \{x \in \mathbb{Z} : \ 0 < x^2 \leqslant 5\}$. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

*a*) $\forall x \in U, \ [\ x^2 \in U \ \rightarrow \ x = 1\ ]$

*b*) $\forall x \in U, \exists y \in U, \ [\ xy \in U \ \rightarrow \ x + 2y^2 \in U\ ]$

*c*) $\forall x, y \in U, \ [\ x < y \ \rightarrow \ x^2 < y^2\ ]$

*Solución.*

*a*) Notemos que $U = \{-2, -1, 1, 2\}$. El contraejemplo es $x = -1$, pues $x = -1 \in U$ y $x^2 = 1 \in U$ pero $x \neq 1$.

*b*) Desde que $U = \{-2, -1, 1, 2\}$. Para $x = 1$ se tiene que $xy = y \in U$ para todo $y \in U$. Pero

- Para $y = -2$, se tiene que $x + 2y^2 = 1 + 2(-2)^2 = 9 \notin U$
- Para $y = -1$, se tiene que $x + 2y^2 = 1 + 2(-1)^2 = 3 \notin U$
- Para $y = 1$, se tiene que $x + 2y^2 = 1 + 2(1)^2 = 3 \notin U$
- Para $y = 2$, se tiene que $x + 2y^2 = 1 + 2(2)^2 = 9 \notin U$

*c*) Notemos que $U = \{-2, -1, 1, 2\}$. El contraejemplo es $x = -1$ y $y = 1$, pues se tiene que $x < y$ pero $x^2 = y^2 = 1$.

□

17. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 5, 6\}$. Justifique por qué son falsas las siguientes proposiciones:

- $\forall x \in A, \exists y \in B, \; [\, x + y < 3 \,]$.
- $\forall x \in A, \forall y \in B, \; [\, x + y \leqslant 0 \;\veebar\; x^y < 1 \,]$.

*Solución.*

- La negación de la proposición es:

$$\exists x \in A, \forall y \in B, \; [\, x + y \geqslant 3 \,],$$

  la cual es verdadera, pues, considerando $x = 5$ y los distintos valores de $y$, se tiene que:

$$\begin{array}{cc} y = -2, & x + y = 3 \geqslant 3, \\ y = -1, & x + y = 4 \geqslant 3, \\ y = 0, & x + y = 5 \geqslant 3, \\ y = 5, & x + y = 10 \geqslant 3, \\ y = 6, & x + y = 11 \geqslant 3. \end{array}$$

  Luego, la proposición es falsa.

- La negación de la proposición es:

$$\exists x \in A, \exists y \in B, \; [\, x + y \leqslant 0 \;\leftrightarrow\; x^y < 1 \,],$$

  la cual es verdadera, pues, considerando $x = 2$ e $y = -2$ se tiene que

$$\left[\, x + y = 0 \leqslant 0 \leftrightarrow x^y = \frac{1}{4} < 1 \,\right] \equiv V.$$

  Por lo tanto, la proposición es falsa.

$\square$

18. Sea $A = \{0, 1, 2\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando sus respuestas:

*a*) $\forall x \in A, \forall y \in A, [\, y^2 < 2(x + 1) \,]$.

*b*) $\forall x \in A, \exists y \in A, [\, (x - 1)^2 = y \,]$.

*c*) $\exists x \in A, \forall y \in A, [\, (x - 2)^2 + y^2 \leqslant 4 \,]$.

*Solución.*

*a*) La proposición es falsa, pues el opuesto respectivo es verdadero, esto es, $(\exists, x, y \in A, [\ y^2 \geqslant 2(x+1)\ ]) \equiv V$. En efecto, para $x = 0 \in A$ e $y = 2 \in A$ se tiene que $4 > 2$.

*b*) La proposición es verdadera, pues,

$$\begin{array}{llll} \text{para} & x = 0 \in A, & \text{existe } y = 1 \in A, & \text{tal que } (x-1)^2 = 1 = y, \\ \text{para} & x = 1 \in A, & \text{existe } y = 0 \in A, & \text{tal que } (x-1)^2 = 0 = y, \\ \text{para} & x = 2 \in A, & \text{existe } y = 1 \in A, & \text{tal que } (x-1)^2 = 1 = y. \end{array}$$

*c*) La proposición es verdadera, pues, $\exists x = 2 \in A$ tal que

$$\begin{array}{lcl} \text{para } y = 0 \in A & : & (x-2)^2 + y^2 = 0 \leqslant 4, \\ \text{para } y = 1 \in A & : & (x-2)^2 + y^2 = 1 \leqslant 4, \\ \text{para } y = 2 \in A & : & (x-2)^2 + y^2 = 4 \leqslant 4. \end{array}$$

$\square$

# 2
# Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos bien definida. Si $a$ es un elemento del conjunto $C$, se dice que $a$ **pertenece** a $C$ y se denota por $a \in C$. Si $a$ no pertenece a $C$ se puede escribir $\neg(a \in C)$ o $a \notin C$. Un conjunto se puede definir por **extensión** listando sus elementos entre llaves, o por **comprensión** seleccionando elementos mediante una propiedad dentro de conjunto universal anteriormente descrito. Por ejemplo, el conjunto de primos naturales menores a 10 se puede definir por extensión como $\{2, 3, 5, 7\}$ o por comprensión como $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es primo} \wedge x < 10\}$. Estos dos conjuntos son **iguales** porque tienen los mismos elementos. Esta notación es consistente con la existencia de un conjunto sin elementos expresado como $\{\}$ y llamado **conjunto vacío**. Dicha existencia se asume como un axioma que no requiere definición. Otra notación usada para el conjunto vacío es $\varnothing$. Adicionalmente, en una definición por extensión es posible usar "$\cdots$" para denotar el resto de elementos de un conjunto si el patrón de construcción es claro. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales es:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

y el conjunto de los números pares positivos es

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}.$$

Otros conjuntos numéricos son el conjunto de números enteros, denotado por $\mathbb{Z}$ y el conjunto de números reales, denotado por $\mathbb{R}$.

## Inclusión

El conjunto $A$ está **incluido** en $B$ si todo elemento de $A$ es un elemento de $B$. De manera más formal, esto quiere decir que

$$\forall x \in U, \quad [x \in A \to x \in B].$$

En este caso se escribe $A \subset B$. De esta definición de inclusión y de la definición que se dio de igualdad, se deduce que dos conjuntos $A$ y $B$ son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$ o

$$\forall x \in U, \quad [x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

De esta definición de igualdad también se deduce que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

## Operaciones

Nuevos conjuntos pueden ser construidos a partir de conjuntos conocidos mediante las operaciones definidas a continuación.

- El **complemento** de $A$ en $U$ es el conjunto:

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

- La **unión** de dos conjuntos $A$ y $B$ se define como el conjunto:

$$A \cup B = \{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

- La **intersección** de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto:

$$A \cap B = \{x \in U : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

  En particular, dos conjuntos se dicen **disjuntos** cuando su intersección es el conjunto vacío.

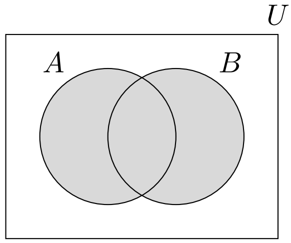
- La **diferencia** de $A$ y $B$ es el conjunto:

$$A - B = \{x \in U : (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}.$$

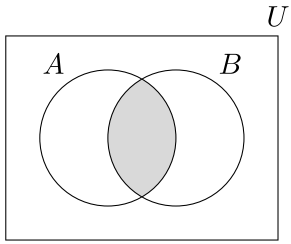
- La **diferencia simétrica** de dos conjuntos $A$ y $B$ es el conjunto:

$$A \Delta B = \{x \in U : (x \in A) \veebar (x \in B)\}.$$

Una forma sencilla de representar conjuntos y sus operaciones es mediante **diagramas de Venn**, como los que se muestran a continuación para la unión:




y la intersección:




Una consecuencia inmediata de la definición de las operaciones de conjuntos son las **Leyes de De Morgan**:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{y} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Estas se siguen aplicando la definición y observando que las proposiciones

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \text{y} \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

son taulogías (usando por ejemplo tablas de verdad).

## Problemas

1. Sean $A$ y $B$ subconjuntos de $U$. Escribir, usando cuantificadores, el significado de las siguientes definiciones:

    *a*) $A \not\subset B$

    *b*) $A \neq B$

*Solución.*

*a*) La definición de $A \not\subset B$ es la negación de la inclusión:

$$\forall x \in U, [\ x \in A \to x \in B\ ].$$

Además, de las equivalencias:

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q,$$

se sigue que

$$\exists x \in U,\ [\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\ ].$$

*b*) La definición de $A \neq B$ se desprende de la negación de la definición de igualdad:

$$\forall x \in U, [\ x \in A \leftrightarrow x \in B\ ].$$

De las equivalencias:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg((p \to q) \wedge (q \to p)) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

se obtiene:

$$(\exists x \in U,\ [\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\ ]) \vee (\exists x \in U,\ [\ x \in B\ \wedge\ x \notin A\ ]).$$

$\square$

2. Sean $A,\ B \subset U$. Pruebe cada uno de los siguientes enunciados:

*a*) $A \subset B$ si y sólo si $B^c \subset A^c$.

*b*) $A^c - B \subset (A \cap B)^c$.

*c*) $A \cap B = \varnothing \to B \subset A^c$. Sugerencia: Use la siguiente propiedad de conjuntos: $X = \varnothing \leftrightarrow \forall x \in U,\ [\ x \notin X\ ]$.

*Solución.*

*a*) De la equivalencia

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

y la definición de inclusión de conjuntos, se obtiene

$$\begin{aligned} A \subset B &\leftrightarrow \forall x \in U, [x \in A \to x \in B] \\ &\leftrightarrow \forall x \in U, [x \notin B \to x \notin A] \\ &\leftrightarrow \forall x \in U, [x \in B^c \to x \in A^c] \\ &\leftrightarrow B^c \subset A^c \end{aligned}$$

*b*) Recordemos que $A \cap B \subset A \cup B$. Por el ítem anterior concluimos que

$$(A \cup B)^c \subset (A \cap B)^c \, .$$

Por la ley de De Morgan,

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Por la propiedad de diferencia de conjuntos,

$$A^c \cap B^c = A^c - B.$$

De esta manera, concluimos que $A^c - B \subset (A \cap B)^c$.

*c*) Por definición $\neg(x \in A) \equiv x \in A^c$ y de la equivalencia $\neg p \vee q \equiv p \rightarrow q$ se obtiene

$$\begin{aligned}
A \cap B = \varnothing \quad &\rightarrow \quad \forall x \in U, \; [\, x \notin A \cap B \,] \\
&\rightarrow \quad \forall x \in U, \; [\neg \; x \in A \cap B \,] \\
&\rightarrow \quad \forall x \in U, \; [\neg \, (\, x \in A \wedge x \in B) \,] \\
&\rightarrow \quad \forall x \in U, \; [\neg \, (\, x \in A) \vee \neg \, (x \in B) \,] \\
&\rightarrow \quad \forall x \in U, \; [\neg \, (\, x \in B) \vee (x \in A^c) \,] \\
&\rightarrow \quad \forall x \in U, \; [(\, x \in B) \rightarrow (x \in A^c) \,] \\
&\rightarrow \quad B \subset A^c
\end{aligned}$$

□

3. Dado el conjunto universal $U = \{1, 2, 3, ..., 9, 10\}$, se definen los conjuntos $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 8, 9\}$. Determine cada uno de los siguientes conjuntos:

*a*) $E = B \cup A^c$

*b*) $F = B^c \cap (C - A)$

*c*) $G = (A \cup B)^c \cup C$

*d*) $H = (A \cup B) - (C - B)$

*Solución.* Los conjuntos son:

*a*) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

*b*) $F = \{8, 9\}$

*c*) $G = \{2, 4, 6, 8, 9\}$

*d*) $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

$\square$

4. Todos los conjuntos considerados en este ejercicio están contenidos en un universo $U$. Demuestre lo siguiente:

*a*) $\varnothing - A = \varnothing$.

*b*) El conjunto vacío es único.

*c*) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

*d*) Si $A \subset B$, entonces $A - B = \varnothing$.

*e*) $A \cup A = A$.

*f*) $(A - B) \cap B = \varnothing$.

*Solución.*

*a*) Debemos demostrar que $\varnothing - A$ es vacío. Supongamos que $\varnothing - A$ no sea vacío, entonces existe $x \in \varnothing - A$, es decir, $x \in \varnothing \wedge x \notin A$. Esto último es absurdo porque el vacío no tiene elemento alguno. Por lo tanto $\varnothing - A = \varnothing$.

*b*) Primero mostremos que si $\varnothing$ no tiene elementos, entonces $\varnothing \subset A$ para cualquier conjunto $A$. Esto se cumple desde que la proposición $\forall x \in U,\ [x \in \varnothing \to x \in A]$ es siempre verdadera dado que el antecedente es falso.
Veamos que el vacío es único. Supongamos que existe otro conjunto $\varnothing_1$ que no posee elemento alguno. Se puede mostrar (como lo hicimos anteriormente) que $\varnothing_1 \subset A$ para cualquier conjunto $A$; de aquí $\varnothing \subset \varnothing_1$ y $\varnothing_1 \subset \varnothing$, luego $\varnothing = \varnothing_1$ y el conjunto vacío es único.

*c*) La igualdad se deduce de probar la inclusión en ambos sentidos.

- La inclusión

$$(A - B) \cap C \subset (A \cap C) - (B \cap C)$$

se sigue de: $\forall x \in U$,

$$\begin{aligned} x \in (A - B) \cap C &\to (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \wedge x \in C \\ &\to (x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in B) \\ &\to (x \in A \wedge x \in C) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\ &\to (x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in (B \cap C)) \\ &\to x \in (A \cap C) - (B \cap C) \end{aligned}$$

- La inclusión

$$(A \cap C) - (B \cap C) \subset (A - B) \cap C$$

se sigue de: $\forall x \in U$,

$$\begin{aligned} &x \in (A \cap C) - (B \cap C) \\ \to&x \in (A \cap C) \wedge \neg(x \in (B \cap C)) \\ \to&(x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)) \\ \to&(x \in A \wedge x \in C) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\ \to&[(x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in B)] \vee [(x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in C)] \\ \to&(x \in A \wedge x \in C) \wedge \neg(x \in B) \\ \to&x \in (A - B) \wedge x \in C \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

*d*) Supongamos que $A - B \neq \emptyset$, entonces existiría un $x$ tal que $x \in A$ y $x \notin B$, pero por hipótesis si $x \in A$ entonces $x \in B$, esto es una contradicción. Por lo tanto, $A - B = \emptyset$.

*e*) Es claro que $A \subset A \cup A$, por otro lado, si $x \in A \cup A$ entonces $x \in A$ o $x \in A$, en cualquier caso $x \in A$; por tanto, $A \cup A \subset A$. La doble inclusión demuestra lo pedido.

*f*) Supongamos que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$, luego existe $x$ tal que $x \in A - B$ y $x \in B$, es decir $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in B$, lo que es una contradicción. Por tanto, la intersección es vacía.

$\square$

5. Sean $A$, $B$ y $C$ tres subconjuntos de $U$. Demuestre $A - B \subset (A - C) \cup (C - B)$.

*Solución.* Debemos mostrar que todo elemento de $A - B$ es un elemento de $A - C$ o de $C - B$, esto es, la siguiente condicional debe ser verdadera

$$x \in A - B \;\rightarrow\; (x \in A - C) \vee (x \in C - B),$$

para todo $x \in U$.

Sea $x$ un elemento de $A - B$, esto es, $x \in A$ y $x \notin B$. Si $x \in A - C$, entonces la condicional es verdadera. Pero si $x \notin A - C$, entonces $x \notin A$ o $x \in C$. Sin embargo, por hipótesis, $x \in A$. Así, deducimos que $x \in C$. Luego, como $x \notin B$ por hipótesis se tiene que $x \in C - B$, es decir, la condicional es verdadera también. □

6. Demuestre que $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$.

   *Solución.* Notemos que, $\forall x \in U$,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (A \cap B) &\leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ &\leftrightarrow (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in A \vee x \in B) \\ &\leftrightarrow x \in A \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

□

7. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones justificando su respuesta.

   *a*) $A - B = B - A$
   
   *b*) $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$
   
   *c*) $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$
   
   *d*) $A \cap B = A \cap C \leftrightarrow B = C$
   
   *e*) $A \cup B = A \cup C \leftrightarrow B = C$
   
   *f*) $A - (B - C) = (A - B) - C$

   *Solución.*

   *a*) Falso, consideremos $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$, se tiene que

$$A - B = \{1\} \neq \{2\} = B - A.$$

   *b*) Verdadero. Como $A \cap B \subset A$, para demostrar $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$ basta probar que

$$A \subset B \leftrightarrow A \subset A \cap B.$$

En efecto, de la equivalencia $p \to q \equiv p \to (p \wedge q)$ se sigue

$$\begin{array}{rcl} A \subset B & \leftrightarrow & \forall x \in U,\ x \in A \to x \in B \\ & \leftrightarrow & \forall x \in U,\ x \in A \to (x \in A \wedge x \in B) \\ & \leftrightarrow & \forall x \in U,\ x \in A \to x \in (A \cap B) \\ & \leftrightarrow & A \subset A \cap B. \end{array}$$

Luego $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$

*c*) Verdadero, como $B \subset A \cup B$ para demostrar $A \subset B \leftrightarrow A \cup B = B$ basta con probar que

$$A \subset B \leftrightarrow A \cup B \subset B,$$

- Sabiendo que $A \subset B$, se tiene $\forall x \in U$,

$$\begin{array}{rcl} x \in A \cup B & \to & x \in A \vee x \in B \\ & \to & x \in B \vee x \in B \text{ , pues } A \subset B \\ & \to & x \in B \end{array}$$

  Por lo tanto, $A \cup B \subset B$.

- Sabiendo que $A \cup B \subset B$, entonces, $\forall x \in U$

$$x \in A \to (x \in A) \vee (x \in B) \to x \in A \cup B \to x \in B.$$

  Por ende, $A \subset B$.

*d*) Falso, considerando $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$; se tiene que

$$A \cap B = \{1\} = A \cap C,$$

pero $B \neq C$.

*e*) Falso, considerando $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$; se tiene que

$$A \cup B = \{1, 2\} = A \cup C,$$

pero $B \neq C$.

*f*) Falso, considerando $A = \{1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{1, 2\}$; se tiene que

$$A - (B - C) = \{1\} \neq \emptyset = (A - B) - C.$$

$\square$

8. Dados $R$ y $S$ dos subconjuntos de los números reales, se define su suma como el conjunto dado por
$$R + S = \{r + s : \ r \in R, \ s \in S\}.$$
Sean los conjuntos $A = \left\{\dfrac{m}{2^n} : \ m, n \in \mathbb{N}\right\}$ y $C = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$. Pruebe lo siguiente:

   *a*) Si $B \subset A$, entonces $B + B$ es un subconjunto de $A$.

   *b*) Halle el conjunto $(C + C) - C$ e indique si este conjunto es igual a $C$.

*Solución.*

*a*) Sea $B \subset A$, si $x \in B + B$ existen $a, b \in B$ tales que $x = a + b$. Ya que $B \subset A$, existen $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ tales que $a = \dfrac{m}{2^n}$ y $b = \dfrac{p}{2^q}$, luego
$$x = a + b = \frac{m}{2^n} + \frac{p}{2^q} = \frac{2^q m + 2^n p}{2^{n+q}} = \frac{M}{2^N},$$
donde $M = 2^q m + 2^n p \in \mathbb{N}$ y $N = n + q \in \mathbb{N}$. Así se deduce que
$$x = a + b \in A$$
y por tanto $B + B \subset A$.

*b*) Si aplicamos la definición anterior, para hallar los elementos del conjunto $C+C$, tenemos que
$$\begin{aligned} C + C \quad &= \quad \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \right. \\ &\qquad \left. \cdots, \frac{1}{2} + 1, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + 1\right\} \\ &= \quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}, \end{aligned}$$
de donde concluimos que
$$(C + C) - C = \left\{\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2\right\}$$
que claramente es diferente de $C$.

□

9. Sea $A$ un conjunto, definimos el **conjunto potencia de** $A$ como

$$P(A) = \{X : X \subset A\}$$

*a*) Demuestre que $A \subset B$ si solo si $P(A) \subset P(B)$.

*b*) Pruebe $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$. Dé un ejemplo de dos conjuntos $A$ y $B$ en el que se vea que $P(A \cup B)$ no es subconjunto de $P(A) \cup P(B)$.

*c*) Demuestre que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

*d*) ¿En qué caso se cumple $A \subset P(A)$?

*Solución.*

*a*) Se desea demostrar las dos implicancias en sentidos opuestos.

- Probemos $A \subset B \to P(A) \subset P(B)$. Si $X \in P(A)$, entonces $X \subset A$. Como $A \subset B$ tenemos que $X \subset B$, luego $X \in P(B)$. Por lo tanto, $A \subset B \to P(A) \subset P(B)$.
- Veamos ahora que $P(A) \subset P(B) \to A \subset B$. Si $x \in A$, entonces $\{x\} \in P(A)$. Como $P(A) \subset P(B)$ tenemos que $\{x\} \in P(B)$, de donde $x \in B$ y así $A \subset B$. Por ende, $P(A) \subset P(B) \to A \subset B$.

De esta manera se cumple $A \subset B$ si solo si $P(A) \subset P(B)$.

*b*) Como $A \subset A \cup B$, de la parte $a$) tenemos que

$$P(A) \subset P(A \cup B)$$

de forma similar como $B \subset A \cup B$ tenemos

$$P(B) \subset P(A \cup B).$$

De estas dos inclusiones obtenemos $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.
Para el ejemplo pedido, consideremos los conjuntos $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$. Tenemos que

$$P(A \cup B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

y

$$P(A) \cup P(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}.$$

Vemos claramente que $P(A \cup B)$ no es sunconjunto de $P(A) \cup P(B)$.

*c*)
- Veamos $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.
De $A \cap B \subset A$ , $A \cap B \subset B$ y de la parte $a$) tenemos $P(A \cap B) \subset P(A)$ y $P(A \cap B) \subset P(B)$, de donde $P(A \cap B) \subset P(A) \cap P(B)$.

- Probemos $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$.
  Sea $X \in P(A) \cap P(B)$, entonces $X \subset A$ y $X \subset B$ luego $X \subset A \cap B$, de donde $X \in P(A \cap B)$. Por lo tanto, $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$.

Luego $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

*d*) Se cumple por ejemplo cuando $A = \varnothing$ porque el vacío es un subconjunto de cualquier conjunto, en particular, del conjunto potencia.

$\square$

10. De acuerdo con la definición de **conjunto potencia de** $A$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando su procedimiento.

*a*) $P(\varnothing) \neq \varnothing$

*b*) $\forall A \subset U \ : \ P(A) \cap P(A^c) = \varnothing$.

*Solución.*

*a*) Verdad, como $\varnothing \subset \varnothing$ esto es $\varnothing \in P(\varnothing)$, luego es no vacío.

*b*) Falso, podemos tomar $A = \varnothing$ luego $A^c = U$, entonces $\{\varnothing\} = P(A) \cap P(A^c)$, de donde

$$P(A) \cap P(A^c) \neq \varnothing.$$

$\square$

11. Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos del conjunto universal $U$. La diferencia de $A$ con $B$ se denota por $A - B$, y la diferencia simétrica se denota por $A \triangle B$.

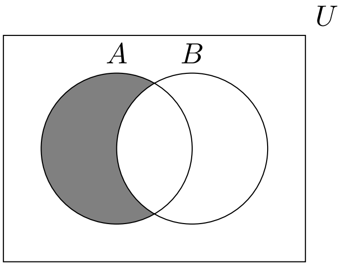
*a*) Represente la diferencia y la diferencia simétrica mediante diagramas de Venn.

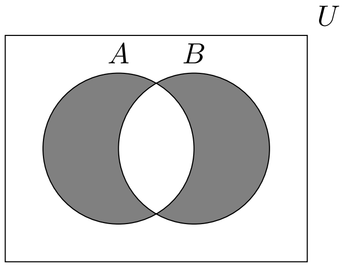
*b*) Demuestre que $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

*c*) Demuestre que $A \triangle B = B \triangle A$.

*Solución.*

*a*) La diferencia $A - B$ y la diferencia simétrica $A \triangle B$ se representan, respectivamente, como:




*b*) Usando propiedades de conjuntos se obtiene

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap (B \cap A)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

*c*) Usando propiedades de conjuntos se obtiene

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \triangle A \end{aligned}$$

□

12. Sean $X \neq \emptyset$, $H \subset P(X)$, $H \neq \emptyset$. Se dice que $H$ es un **anillo de conjuntos** si para cualquier par de conjuntos $A, B \in H$ se verifica lo siguiente:

    $i)$ $A \cup B \in H$

    $ii)$ $A - B \in H$

    Si $H$ es un anillo de conjuntos, demuestre las siguientes proposiciones:

    *a*) Si $A, B \in H$, entonces $A \triangle B \in H$.

    *b*) Si $A, B \in H$, entonces $A \cap B \in H$.

    *c*) $\emptyset \in H$.

*Solución.*

*a*) Sean $A, B \in H$. De la definición de anillo parte $ii)$ tenemos que:

$$A - B,\ B - A \in H.$$

Asimismo, de la parte $i)$ la unión de los mismos pertenece al conjunto $H$, es decir:

$$(A - B) \cup (B - A) = A \triangle B\ \in H.$$

*b*) Sea $A, B \in H$. De la parte $i)$ de la definión $A \cup B \in H$ y del ítem $a)$ tenemos también que $A \triangle B \in H$, luego la diferencia de los mismos pertenece al conjunto $H$, así:

$$(A \cup B) - (A \triangle B) = A \cap B\ \in H.$$

*c*) Como $H \neq \varnothing$ existe un conjunto $A \in H$ y considerando $B = A$ en la definición parte $ii)$, se obtiene:

$$A - A = \varnothing\ \in H.$$

□

13. Sea $A = \{a - b, 6, 2a - 3b + 1\}$ un conjunto unitario, y se definen los conjuntos $B = \{x \in \mathbb{Z} : x = ak \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : x = bk \wedge k \in \mathbb{Z}\}$ . Determine el conjunto $(B^c \cup C^c)^c$ .

*Solución.* Dado que $A$ es un conjunto unitario, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a - b = 6 = 2a - 3b + 1,$$

luego $a = 13$ y $b = 7$.
De esta forma, los conjuntos $B$ y $C$ quedan determinados por:

$$B = \{x \in \mathbb{Z} : x = 13k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(múltiplos de 13)}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : x = 7k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(múltiplos de 7).}$$

Por otro lado, por las leyes de De Morgan, se tiene que:

$$(B^c \cup C^c)^c = B \cap C,$$

luego

$$(B^c \cup C^c)^c = \{x \in \mathbb{Z} : x = 91k \wedge k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(múltiplos de 91).}$$

□

## Conjuntos finitos

El número de elementos del conjunto $\{a, b, c\}$ es tres porque pueden ser contados. La noción intuitiva de conteo puede ser formalizada por medio de funciones biyectivas; sin embargo, esta definición formal no es necesaria a este nivel introductorio. La **cardinalidad** de un conjunto $A$ se denota por $n(A)$ y se define intuitivamente como el número de elementos de dicho conjunto. Por ejemplo, $n(\{a, b, c\}) = 3$ y $n(\varnothing) = 0$. Un conjunto $A$ es **finito** cuando $n(A)$ es cero o un número natural. Cuando el conjunto no es finito se dice **infinito** y se puede escribir $n(A) = \infty$. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales cumple que $n(\mathbb{N}) = \infty$.

En ocasiones es útil usar algunas propiedades para determinar la cardinalidad de un conjunto. Las siguientes propiedades pueden ser consultadas en (Halmos, 1998).

- Si $A$ y $B$ son conjuntos finitos y disjuntos, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
- Para dos conjuntos $A$ y $B$ finitos, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
- Para dos conjuntos $A$ y $B$ tales que $A \subset B$, se cumple $n(A) \leqslant n(B)$.

## Problemas

1. De los siguientes conjuntos, ¿cuáles son vacíos, unitarios , finitos o infinitos?

   *a*) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$.
   *b*) $B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \frac{1}{1000}\}$.
   *c*) $C = \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$.
   *d*) $D = \{x \in \mathbb{R} : \log(x - 1) = \log[(x - 1)(x + 3)]\}$.
   *e*) $E = \{x \in \mathbb{Z} : 15 < x^2 < 25\}$.
   *f*) $F = \{x \in \mathbb{Z} : x = \frac{m}{2^n},\ m, n \in \mathbb{N}\}$.
   *g*) $G = \{x \in \mathbb{Z} : 17 < x^2 < 26\}$.
   *h*) $H = \{x \in \mathbb{N} : x = 2n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$.
   *i*) $I = \{x \in \mathbb{Q} : (3x - 1)(x + 2) = 0\}$.
   *j*) $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$.

   *Solución.*

   *a*) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$. Por lo tanto, no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1 < 0$, es decir $A = \varnothing$.

*b*) Para todo $n \in \mathbb{N}$ el número racional $x = 1/(1000 + n)$ cumple $0 < x < 1/1000$. Por ende, $B$ es un conjunto infinito.

*c*) Como $0 < \sqrt{2} < 2$, entonces $x = \sqrt{2}/2$ cumple $0 < x < 1$ y es irracional. Además $C$ contiene los elementos de la forma $x^n$ donde $n \in \mathbb{N}$. Así $C$ tiene infinitos elementos.

*d*) De $\ln(x-1) = \ln[(x-1)(x+3)]$ se tiene que $x = -2$, pero $x$ no puede ser negativo, por lo tanto $D = \varnothing$.

*e*) Resolviendo se obtiene $E = \{-4, 4\}$, el cual es un conjunto finito.

*f*) Tomando $m = 1$ se obtiene el subconjunto:

$$G = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots \right\} \subset F.$$

El conjunto $G$ es infinito y por ende $F$ también lo es.

*g*) Como $G = \{-5, 5\}$, este es un conjunto finito.

*h*) Dado que $H = \{3, 5, 7, \cdots\}$, es el conjunto de número impares postivos, entonces es infinito.

*i*) Resolviendo se obtiene $I = \{\frac{1}{3}, -2\}$, el cual es finito.

*j*) Resolviendo se obtiene $J = \{(0, 0)\}$, el cual es unitario.

□

2. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos tales que

$$n(A) = 30, \quad n(A \cap B) = 10, \quad \text{y} \quad n(A \cup B) = 50.$$

Determine $n(B)$.

*Solución.* Recordemos que para $A$ y $B$ conjuntos finitos se cumple que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Luego $50 = 30 + n(B) - 10$, y por lo tanto $n(B) = 30$. □

3. Sean $A$, $B$, $C$ tres subconjuntos finitos de $U$. Justifique por qué son falsas las siguientes proposiciones:

*a*) Si $n(A) = n(B) + n(C)$, entonces $A = B \cup C$.

*b*) Si $n(A) = n(B)$ entonces, $n(A - B) = 0$.

*c*) El número de elementos del conjunto $\{c, t, y, u, i, t\}$ es 6.

*d*) Para cualesquiera $A$ y $B$ conjuntos se tiene que $n(A) + n(B) = n(A \cup B)$.

*Solución.*

*a*) El contraejemplo consiste en considerar los subconjuntos $A = \{3, 4\}$, $B = \{1\}$ y $C = \{2\}$.

*b*) El contraejemplo consiste en considerar los subconjuntos $A = \{1\}$ y $B = \{2\}$.

*c*) Como la letra $t$ se repite, el conjunto solo tiene cinco elementos.

*d*) Un contraejemplo se puede construir haciendo $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$. De esa forma se tiene que $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $n(A) = 2$, $n(B) = 2$ y $n(A \cup B) = 3$.

□

4. Sean $U = \{x \in \mathbb{Z} : \ 0 \leqslant x < 10\}$ y $A, B \subset U$ tales que:

$$(A \cup B)^c = \{0, 6, 9\}, \quad A \cap B = \{1, 2, 7\} \quad \text{y} \quad A - B = \{3, 5\}.$$

Calcule la cantidad de elementos de $B - A$.

*Solución.* Como $(A \cup B)^c = \{0, 6, 9\}$ se sigue que:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}. \tag{2.1}$$

Desde que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ deducimos que:

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}. \tag{2.2}$$

Finalmente, como $B - A = (A \cup B) - A$, entonces de (2.1) y (2.2) obtenemos que:

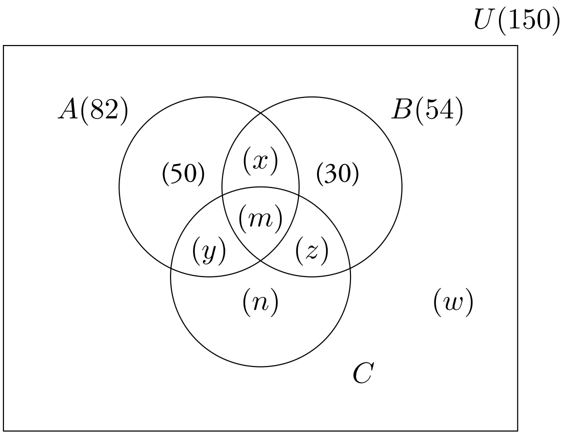
$$B - A = \{4, 8\}.$$

Por lo tanto, $n(B - A) = 2$. □

5. En una encuesta realizada a 150 personas sobre sus preferencias de tres productos A, B y C, se obtuvieron los siguientes resultados: 82 personas consumen el producto A; 54, el producto B; 50 consumen únicamente el producto A; 30, solo el producto B;

el número de personas que consumen solo B y C es la mitad del número de personas que consumen solo A y C, el número de personas que consumen solo A y B es el triple del número de las que consumen los tres productos y hay tantas personas que no consumen los productos mencionados como las que consumen solo C. Determine el número de personas que consumen solo dos de los productos y el número de personas que no consumen ninguno de los tres productos.

*Solución.* Consideremos el siguiente diagrama




Además,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}y \\ x &= 3m \\ w &= n \end{aligned}$$

De los conjuntos $A$ y $B$ se tiene

$$\begin{aligned} x + y + m &= 32 \\ x + z + m &= 24 \end{aligned}$$

De esto se sigue que $z = 8$ y $m = 4$.
Por otro lado, note que

$$82 + 30 + z + n + w = 150,$$

lo cual implica que $n = w = 15$. Luego

$$\begin{aligned} 50 + 30 + m + n + w + x + y + z &= 150 \\ x + y + z &= 36 \end{aligned}$$

Por lo tanto, 36 prefieren solo dos de los productos y 15 no consumen ninguno de los tres productos. $\square$

6. En una encuesta realizada a un grupo de estudiantes, se sabe que 32 prefieren el curso X, 28 prefieren el curso A, 30 prefieren el curso G. Los que prefieren los tres cursos son el triple de los que prefieren X y A pero no G, los que prefieren X y G pero no A son la mitad de los que pefieren los tres cursos. Además, los que prefieren A y G pero no X son 5, los que prefieren solo A son tantos como los que prefieren solo G, y los que no tienen preferencia por ninguno de los tres cursos son tantos como los que prefieren solo X.

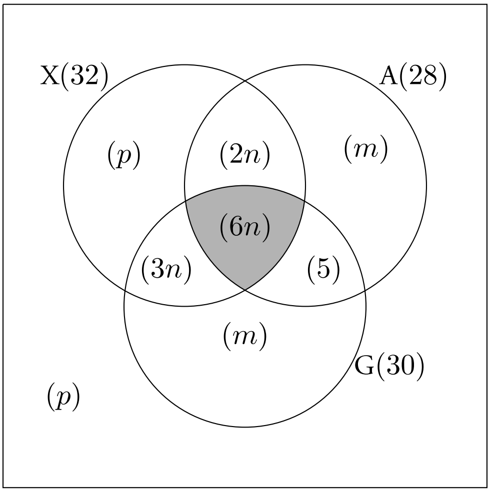
   *a*) Represente la información dada en un diagrama de Venn y calcule la cantidad de estudiantes en cada espacio del diagrama.

   *b*) ¿ Cuántos estudiantes fueron encuestados?

   *c*) ¿ Cuántos estudiantes prefieren X o A, pero no G?

*Solución.*

*a*) Primero, realizaremos un diagrama de Venn que involucra todos los datos.



Luego, de los conjuntos $G$ y $A$ se tiene que

$$9n + m = 25 \ \text{ y } \ 8n + m = 23,$$

de donde se deduce que $n = 2$ y $m = 7$. Por lo tanto, $p = 10$.

*b*) El total de estudiantes encuestados es $61$.

*c*) Dicho número de estudiantes viene dado por $n((X \cup A) - G) = 21$.

□

7. De $80$ estudiantes que rindieron un examen de admisión que contenía tres partes, $A, B$ y $C$, se tiene la siguiente información:

   - Se anularon ocho pruebas y el resto aprobó por lo menos una de las partes.
   - Los que aprobaron $A$ desaprobaron $B$ y $C$.
   - Quince estudiantes aprobaron $B$ y $C$.

   *a*) ¿Cuántos estudiantes aprobaron solo una de las partes?

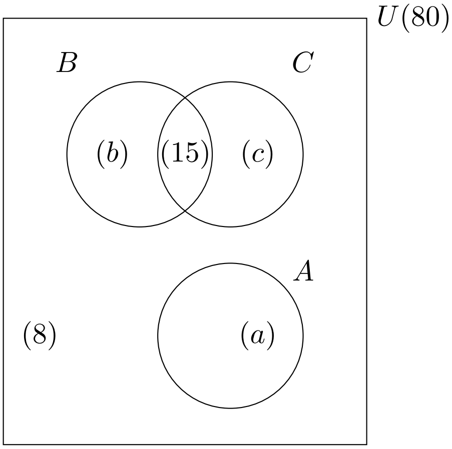
   *b*) Si el examen hubiera constado de 4 partes, $A, B, C$ y $D$, con las condiciones anteriores y además sabiendo que

   - Los que aprobaron $D$, desaprobaron $B$ y $C$.
   - 12 estudiantes aprobaron $A$ y $D$.

   ¿Cuántos estudiantes aprobaron solo una de las partes?

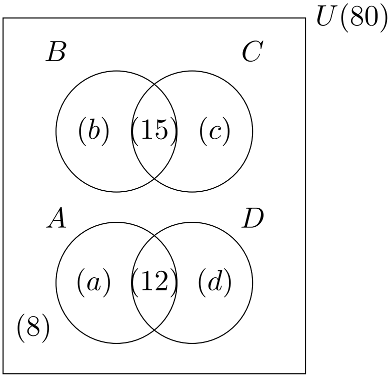
*Solución.*

*a*) El siguiente diagrama de Venn representa el problema con los datos mencionados.



Luego $a + b + c + 8 + 15 = 80$, de donde $a + b + c = 57$.

*b*) El siguiente diagrama representa la nueva situación planteada.




Luego $a + b + c + d + 8 + 15 + 12 = 80$, de donde $a + b + c + d = 45$.

$\square$

## Relaciones

Una manera de formalizar la idea de cómo relacionar los elementos de un conjunto con otro es mediante subconjunto del producto cartesiano. Dado un **conjunto de partida** $A$ y un **conjunto de llegada** B, para un elemento específico $a \in A$ y un elemento específico $b \in B$, la expresión $(a, b)$ es llamada un **par ordenado**. Como el nombre lo dice, el par ordenado contiene dos elementos en un orden determinado. Debido a ello, el elemento $a$ es llamado primera coordenada o componente y el elemento $b$ es llamado segunda coordenada o componente. Dos pares ordenados son **iguales** cuando:

$$(a, b) = (c, d) \quad \leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad b = d.$$

El conjunto de todos los posibles pares ordenados es el **producto cartesiano** de los conjuntos $A$ y $B$ denotado por $A \times B$ y se define formalmente por:

$$A \times B = \{(x, y) : (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$

El elemento arbitrario $(x, y)$ en la definición anterior se puede entender como una variable con dos componentes.

Una **relación** (binaria) entre los conjuntos $A$ y $B$ (en ese orden) es un subconjunto $R \subset A \times B$ del producto cartesiano. Cuando $A = B$ se dice que $R \subset A \times A$ es una relación en $A$.

Para identificar los elementos del conjunto de partida o de llegada que forman parte de la relación, se definen los conceptos de dominio y rango. Si $R \subset A \times B$ es una relación, entonces el **dominio** de $R$ se define como

$$\operatorname{dom} R = \{x \in A : \exists\, y \in B,\ [(x, y) \in R]\},$$

y el **rango** de $R$ como

$$\operatorname{ran} R = \{y \in B : \exists\, x \in A,\ [(x, y) \in R]\}.$$

## Problemas

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación en $A$ definida por

$$R = \{(x, y) \in A \times A : x = y \lor x + y = 3\}.$$

Determine el dominio y el rango de la relación, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

*a*) $\forall a \in A,\ [(a, a) \in R]$

*b*) $\forall (a, b) \in R,\ [(a, b) \in R \to (b, a) \in R]$.

*c*) $(a, b) \in R \land (b, c) \in R \to (a, c) \in R$.

*Solución.* La relación es:

$$R = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (1, 2); (2, 1)\},$$

luego $\operatorname{dom} R = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\operatorname{ran} R = \{1, 2, 3, 4\}$. Verificando las afirmaciones, tenemos:

*a*) Verdadera, pues para todo $a \in A$, se tiene $a = a$, lo cual implica que $(a, a) \in R$, pues satisface su definición.

*b*) Verdadera, pues para todo $(a, b) \in R$, se tiene $a = b$ o $a + b = 3$, que es equivalente a $b = a$ o $b + a = 3$, así $(b, a) \in R$.

*c*) Verdadero, pues para todo $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ se tiene:

$$(a = b \lor a + b = 3) \quad \text{y} \quad (b = c \lor b + c = 3).$$

De la equivalencia:

$$(p \lor q) \land (r \lor s) \equiv (p \land r) \lor (q \land r) \lor (p \land s) \lor (q \land s)$$

se generan cuatro casos:

- $a = b \wedge b = c$ implica $a = c$.
- $a + b = 3 \wedge b = c$ implica $a + c = 3$.
- $a = b \wedge b + c = 3$ implica $a + c = 3$.
- $a + b = 3 \wedge b + c = 3$ implica $a = c$.

En cualquiera de los casos $(a, c) \in R$.

$\square$

2. Sean $R$ y $S$ relaciones contenidas en $A \times B$, demuestre que:

   *a*) $\operatorname{dom}(R) - \operatorname{dom}(S) \subset \operatorname{dom}(R - S)$.

   *b*) $\operatorname{dom}(R \cup S) = \operatorname{dom}(R) \cup \operatorname{dom}(S)$.

   *c*) $\operatorname{dom}(R \cap S) \subset \operatorname{dom}(R) \cap \operatorname{dom}(S)$.

   *Solución.*

   *a*) Si $x \in \operatorname{dom}(R) - \operatorname{dom}(S)$, entonces existe $y \in B$ tal que

   $$(x, y) \in R \wedge (x, y) \notin S.$$

   En consecuencia $x \in \operatorname{dom}(R - S)$. Por lo tanto

   $$\operatorname{dom}(R) - \operatorname{dom}(S) \subset \operatorname{dom}(R - S).$$

   *b*) Si $x \in \operatorname{dom}(R \cup S)$, existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in R \cup S$, luego

   $$(x, y) \in R \;\vee\; (x, y) \in S,$$

   de esta forma $x \in (\operatorname{dom} R) \cup (\operatorname{dom} S)$. Además, si $x \in (\operatorname{dom} R) \cup (\operatorname{dom} S)$, se deduce que

   $$(x \in \operatorname{dom} R) \vee (x \in \operatorname{dom} S).$$

   Como $\operatorname{dom} R \subset \operatorname{dom}(R \cup S)$ y $\operatorname{dom} S \subset \operatorname{dom}(R \cup S)$, se obtiene que $x \in \operatorname{dom}(R \cup S)$. Por ende

   $$\operatorname{dom}(R \cup S) = \operatorname{dom}(R) \cup \operatorname{dom}(S).$$

   *c*) En este caso, si $x \in \operatorname{dom}(R \cap S)$, como $R \cap S \subset R$, para todo $(x, y) \in (R \cap S)$ se tiene que $(x, y) \in R$, luego $x \in \operatorname{dom} R$. Por lo tanto

   $$\operatorname{dom}(R \cap S) \subset \operatorname{dom} R.$$

Similarmente, de $R \cap S \subset S$ se deduce que $\operatorname{dom}(R \cap S) \subset \operatorname{dom} S$. Las dos inclusiones permiten concluir que

$$\operatorname{dom}(R \cap S) \subset \operatorname{dom} R \cap \operatorname{dom} S.$$

□

3. Se dice que un conjunto $R$ es una **relación de equivalencia** en $A$ cuando $R \subset A \times A$ y se cumplen las siguientes proposiciones:

   *a*) Para todo $x \in A$, se tiene que $(x, x) \in R$.

   *b*) Si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$.

   *c*) Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

   Determine si el conjunto

   $$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ (x - y) \text{ es múltiplo de } 3\}$$

   es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

   *Solución.* Claramente $R \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   *a*) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0(3)$, de donde $x - x$ es múltiplo de 3. Por lo tanto, $(x, x) \in R$.

   *b*) Si $(x, y) \in R$, entonces $x - y = 3 \times k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Luego $y - x = 3 \times (-k)$, es decir $(y, x) \in R$.

   *c*) Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que

   $$x - y = 3 \times k_1 \ \text{ y } \ y - z = 3 \times k_2.$$

   Así, $x - z = x - y + y - z = 3 \times (k_1 + k_2)$. Por lo tanto, $(x, z) \in R$.

   Como se cumplen las tres condiciones, $R$ es una relación de equivalencia. □

4. Se dice que un conjunto $R$ es una **relación de orden** en $A$ cuando $R \subset A \times A$ y se cumplen las siguientes proposiciones:

   *a*) Para todo $x \in A$, se tiene que $(x, x) \in R$.

   *b*) Si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces $x = y$.

   *c*) Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

Determine si el conjunto

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \; x + y^2 = y + x^2\}$$

es una relación de orden en $\mathbb{Z}$.

*Solución.* No es difícil verificar que $(1, 0) \in R$ y $(0, 1) \in R$, pero $0 \neq 1$. Por lo tanto, no se cumple la segunda condición y $R$ no es una relación de orden. □

## Funciones

Una relación es una **función** cuando cada elemento del dominio se relaciona con un único elemento del rango, lo cual formalmente se puede escribir como

$$\forall x \in \operatorname{dom} R, \exists!\, y \in \operatorname{ran} R, \;\; [(x, y) \in R].$$

Esto quiere decir que si un elemento del dominio se relaciona con dos elementos del rango, esos dos elementos deben ser iguales, es decir

$$(a, b) \in R \;\wedge\; (a, c) \in R \;\rightarrow\; b = c.$$

Cuando la relación es una función se denota por $f$ en vez de $R$. Por convención, se suele denotar a una función por $f : A \rightarrow B$, donde $A$ es el dominio (no necesariamente el conjunto de partida) y $B$ es el conjunto de llegada (no necesariamente el rango). En este caso, la pertenencia a la relación $(a, b) \in f$ se denota por $f(a) = b$. Por ello se denota por $f(x)$ la **regla de correspondencia** de la función $f$, donde $x$ es la variable independiente y a veces se expresa como $x \mapsto f(x)$. Para definir una función es necesario entonces definir el dominio, conjunto de llegada y regla de correspondencia, lo cual se puede expresar como

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Así, dos funciones son **iguales** cuando estos tres ingredientes son iguales.

## Problemas

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c\}$, consideremos las relaciones

   $$R_1 = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$$

   y

   $$R_2 = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c)\}$$

   en $A \times B$.

*a*) Hallar el dominio y rango de cada relación.

*b*) Indique qué relaciones son funciones justificando adecuadamente.

*Solución.*

*a*) De la definición

$$\operatorname{dom} R_1 = \{1,2,3\}, \quad \operatorname{ran} R_1 = \{a,c\}$$

y

$$\operatorname{dom} R_2 = \{1,2\}, \quad \operatorname{ran} R_2 = \{a,b,c\}.$$

*b*) La relación $R_1$ es una función, ya que cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento en el conjunto de llegada. Sin embargo, $R_2$ no es una función, puesto que $(1,a)$ y $(1,b)$ están en $R_2$.

□

2. Determine si las siguientes relaciones son funciones:

*a*) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$

*b*) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 3\}$

*c*) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$

*Solución.*

*a*) La relación no es una función porque $(1,1)$ y $(1,-1)$ pertenecen a $R$ pero $1 \neq -1$.

*b*) Supongamos que $(a,b)$ y $(a,c)$ pertenecen a $R$, entonces $2a+b = 3$ y $2a+c = 3$, igualando tenemos que $b = c$. Así, cada elemento del dominio se relaciona con un único elemento del rango; por lo tanto, la relación es una función.

*c*) Como $R = \{(0,0)\}$ luego cada elemento del dominio está relacionado con un único elemento del rango; por ende, la relación es una función.

□

3. Responda las siguientes preguntas:

   *a*) Sean $r$ y $s \in \mathbb{N}$. Si

   $$f = \big\{(s^2 + r, r + 2s), (r - 1, 2), (r + s, r^2)\\ (r - 1, s + 1), (5, r^2 - r - 2)\big\}$$

   es una función, determine de manera explícita $f$ e indique el dominio y el rango.

   *b*) Sean $A = \{-1, 2, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Si

   $$R = \{(-1, h + 3); (2, 4); (h, 4)\} \subset A \times B$$

   es una función, determine el valor o valores que puede tomar $h$.

*Solución.*

   *a*) Del segundo y cuarto elemento de $f$ tenemos $s + 1 = 2$, es decir $s = 1$. Luego

   $$f = \{(r + 1, r + 2), (r - 1, 2), (r + 1, r^2), (5, r^2 - r - 2)\}.$$

   Además $r + 2 = r^2$, luego $r = -1$ o $r = 2$. Como $r \in \mathbb{N}$ se tiene que $r = 2$. Por lo tanto

   $$f = \{(3, 4), (1, 2), (5, 0)\}$$

   $\text{dom} f = \{1, 3, 5\}$ y $\text{ran} f = \{0, 2, 4\}$.

   *b*) Como $h \in A$, probando con cada valor de $A$ vemos que $h$ solo puede tomar dos valores para que $R$ sea una función:

   *i*) Si $h = 3$, $R = \{(-1, 6), (2, 4), (3, 4)\}$ es una función.

   *ii*) Si $h = 5$, $R = \{(-1, 8), (2, 4), (5, 4)\}$ es una función.

□

4. Sea $A = \{1, 2, 3, ...., 10\}$. Determine el dominio y el rango de las siguientes relaciones y verifique si son funciones.

   *a*) $R_1 = \{(x, y) \in A \times A : y > 3x\}$

   *b*) $R_2 = \{(x, y) \in A \times A : 5 \leqslant x^2 + y^2 < 10\}$

   *c*) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

   *d*) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \cdot y = 1\}$

*Solución.*

*a*) Como:

$$R_1 = \{(1,4); .....; (1,10); (2,7); .....; (2,10); (3,10)\},$$

se tiene que $\operatorname{dom} R_1 = \{1,2,3\}$ y $\operatorname{ran} R_1 = \{4,5,....,10\}$. La relación $R_1$ no es una función porque $(1,4)$ y $(1,5)$ son elementos de $R_1$ y $4 \neq 5$.

*b*) Como:

$$R_2 = \{(1,2); (2,1); (2,2)\},$$

entonces $\operatorname{dom} R_2 = \{1,2\}$ y $\operatorname{ran} R_2 = \{1,2\}$. La relación $R_2$ no es una función porque $(2,1)$ y $(2,2)$ son elementos de $R_2$ pero $1 \neq 2$.

*c*) El menor valor posible para $y^2$ es cero, en ese caso $x^2 = 1$. El mayor valor posible de $y^2$ es uno (si fuera mayor a uno, $x^2$ sería negativo, lo cual es imposible), en ese caso $x^2 = 0$. Por lo tanto, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$. Así, el dominio y el rango de esta relación son respectivamente

$$\operatorname{dom} R_3 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leqslant x \leqslant 1\}, \quad \operatorname{ran} R_3 = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

La relación $R_3$ no es una función porque $(0,-1)$ y $(0,1)$ pertenecen a $R_3$ y $1 \neq -1$.

*d*) Como

$$R_4 = \{(1,1)\},$$

luego $\operatorname{dom} R_4 = \{1\}$ y $\operatorname{ran} R_4 = \{1\}$. Esta relación sí es una función.

$\square$

5. En el conjunto $P = \{p : p \text{ es una proposición}\}$ definimos la función $f : P \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ es verdadero,} \\ 0 & \text{si } p \text{ es falso.} \end{cases}$$

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

*a*) $f(p \vee q) = f(p) + f(q)$

*b*) $f(\neg p) = -f(p)$

*c*) $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$

*d*) $f(\neg p) = 1 - f(p)$

*e*) $f(p \to q) = 1 - f(p) \cdot f(\neg q)$

*Solución.*

*a*) Falso, para $p \equiv V$ y $q \equiv V$ se obtiene $f(p \vee q) = 1$, pero $f(p) + f(q) = 2$.

*b*) Falso, si $p \equiv V$ se obtiene $f(\neg p) = 0$, pero $-f(p) = -1$.

*c*) Verdadero, existen dos casos:

1) Si $p \wedge q \equiv V$, entonces $f(p \wedge q) = 1$, $p \equiv V$ y $q \equiv V$; por lo tanto, $f(p \wedge q) = 1 = 1 \cdot 1 = f(p) \cdot f(q)$.
2) Si $p \wedge q \equiv F$, entonces $f(p \wedge q) = 0$, $p \equiv F$ o $q \equiv F$. En cualquier caso $f(p \wedge q) = 0 = f(p) \cdot f(q)$.

*d*) Verdadero, existen dos casos:

1) Si $p \equiv V$ , entonces $f(\neg p) = 0 = 1 - f(p)$.
2) Si $p \equiv F$ , entonces $f(\neg p) = 1 = 1 - f(p)$.

*e*) Verdadero, existen dos casos generales:

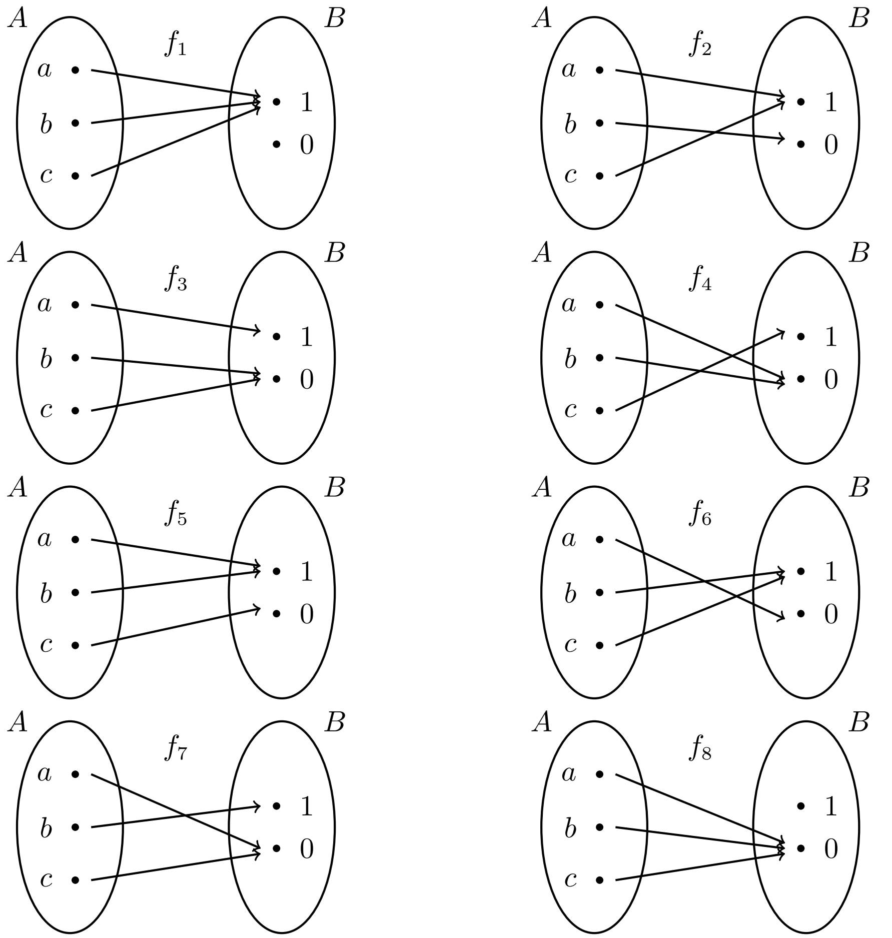
1) Si $p \to q \equiv F$, entonces $f(p \to q) = 0$, $p \equiv V$ y $q \equiv F$, luego $f(p \to q) = 0 = 1 - f(p) \cdot f(\neg q)$.
2) Si $p \to q \equiv V$, entonces se consideran tres casos particulares:
   - $p \equiv V$ y $q \equiv V$, $f(p \to q) = 1$ y $1 - f(p)f(\neg q) = 1 - (1)(0) = 1$.
   - $p \equiv F$ y $q \equiv V$, $f(p \to q) = 1$ y $1 - f(p)f(\neg q) = 1 - (0)(0) = 1$.
   - $p \equiv F$ y $q \equiv F$, $f(p \to q) = 1$ y $1 - f(p)f(\neg q) = 1 - (0)(1) = 1$.

   en cualquier caso se tiene $f(p \to q) = 1 - f(p) \cdot f(\neg q)$.

$\square$

6. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 0\}$. ¿Cuántas posibles funciones se pueden construir de $A$ en $B$, y cuáles son?

*Solución.* Representando con diagramas todas las funciones posibles de $A$ en $B$ tenemos:




Hay entonces ocho funciones. $\square$

# 3
# Álgebra

## Leyes de exponentes

Dado un número real $a$ y un número entero $n$, la expresión

$$a^n$$

se denomina **potencia** con **base** $a$ y **exponente** $n$. Cuando $n = 1$, se define $a^1 = a$. Luego, para todo $n$ entero positivo se define inductivamente las potencias de $a$ como

$$a^{n+1} = a^n \times a.$$

La definición anterior nos permite decir que el exponente $n$ indica el número de veces que se debe multiplicar $a$ consigo mismo, es decir

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ veces}}.$$

Cuando el exponente es cero y la base es diferente de cero, se define la potencia $a^0$ como uno, esto es

$$a^0 = 1.$$

Finalmente, si el exponente es negativo y la base es diferente de cero, se define la potencia $a^n$ como el inverso multiplicativo de la potencia con base $a$ y exponente $-n$, es decir

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Las leyes de exponentes resultan ser una lista de propiedades que permiten simplificar operaciones con potencias. A continuación presentamos las tres más conocidas. Sean $a, b$ dos números reales diferentes de cero y $m, n$ dos números enteros cualquiera,

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

Sean $a$ un número real positivo y $m, n$ dos números enteros con $n \neq 0$, se define la potencia de exponente fraccionario $a^{\frac{m}{n}}$ como aquel número real positivo $r$ tal que

$$a^m = r^n.$$

Cuando $m = 1$, se dice que $r$ es la **raíz $n$-ésima** de $a$ y se usa la siguiente notación $\sqrt[n]{a}$ en lugar de $a^{\frac{1}{n}}$. En particular, cuando $n = 2$, se denomina la **raíz cuadrada** y la notación se simplifica a la siguiente $\sqrt{a}$.

Para $a = 0$, la raíz $n$-ésima de $0$ se define como $0$, es decir $\sqrt[n]{0} = 0$. Cuando $a$ es negativo y $n$ es impar, se define la raíz $n$-ésima de $a$ como $-\sqrt[n]{-a}$.

Las propiedades anteriores sobre leyes de exponentes también funcionan cuando los exponentes son racionales o números reales. Una propiedad adicional es la **inyectividad** de la exponenciación, la cual asegura que si $a^x = a^y$, entonces $x = y$ donde $x$ e $y$ son números reales.

## Problemas

1. Dé un ejemplo de dos números naturales distintos $a$ y $b$ tales que $a^b = b^a$.

   *Solución.* Para $a = 4$ y $b = 2$, se tiene lo pedido $4^2 = 2^4 = 16$. $\square$

2. Calcule el valor simplificado de cada de una de las siguientes expresiones:

   *a)* $$\frac{\left(3 \times 2^{20} + 7 \times 2^{19}\right) \times 52}{\left(13 \times 8^4\right)^2}$$

   *b)* $$\left[4^{3^{-\frac{2}{7}}}\right]^{3^{\frac{9}{7}}}$$

*c*) $\sqrt{24 - 15(5^3 - 31 \times 4)}$

*Solución.*

*a*) Primero, es claro que

$$\begin{aligned} 3 \times 2^{20} + 7 \times 2^{19} &= 2^{19}(3 \times 2 + 7) \\ &= 2^{19} \times 13. \end{aligned}$$

Segundo, como $8 = 2^3$, se sigue que

$$\begin{aligned} (13 \times 8^4)^2 &= (13 \times (2^3)^4)^2 \\ &= 13^2 \times 2^{24}. \end{aligned}$$

Luego, como $52 = 2^2 \times 13$, se reemplaza las últimas igualdades obtenidas en la expresión y se tiene que

$$\frac{\left(3 \times 2^{20} + 7 \times 2^{19}\right) \times 52}{\left(13 \times 8^4\right)^2} = \frac{(2^{19} \times 13)(2^2 \times 13)}{13^2 \times 2^{24}}.$$

Aplicando producto de potencias con bases iguales en el numerador se obtiene

$$\frac{(2^{19} \times 13)(2^2 \times 13)}{13^2 \times 2^{24}} = \frac{13^2 \times 2^{21}}{13^2 \times 2^{24}}$$

que luego de simplificar se obtiene $\dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$.

*b*) Es claro que

$$\left[4^{3^{-\frac{2}{7}}}\right]^{3^{\frac{9}{7}}} = 4^{3^{-\frac{2}{7}} \times 3^{\frac{9}{7}}}.$$

De igual modo

$$\begin{aligned} 3^{-\frac{2}{7}} \times 3^{\frac{9}{7}} &= 3^{\frac{-2+9}{7}} \\ &= 3^1 \end{aligned}$$

Así, el valor de la expresión es $4^3 = 64$.

*c*) Como $5^3 = 125$ y $31 \times 4 = 124$, se sigue que

$$\sqrt{24 - 15(5^3 - 31 \times 4)} = \sqrt{24 - 15(5^3 - 31 \times 4)}$$

Desde que $5^3 = 125$ y $31 \times 4 = 124$, se tiene que

$$\sqrt{24 - 15(5^3 - 31 \times 4)} = \sqrt{24 - 15}.$$

Así, el valor de la expresión es $\sqrt{9} = 3$.

$\square$

3. Justifique por qué son falsas las siguientes proposiciones:

*a*) $\forall n \in \mathbb{N},\ \left[2^{n^3} = (2^n)^3\right]$.

*b*) $\forall r \in \mathbb{N},\ [$ si $r$ es primo entonces $r^2 + 1$ también lo es $]$.

*c*) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\, x^2 + y^2 = 1 \ \rightarrow\ (x = 1 \ \wedge\ y = 0)\,]$.

*d*) $\forall a, b \in \mathbb{N},\ [\ \sqrt[a]{b} = \sqrt[b]{a}\ ]$

*e*) $\forall a, b \in \mathbb{R}, [\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}\ ]$.

*Solución.*

*a*) Para $n = 2$, se tiene que $2^{2^3} = 2^8$ y $(2^2)^3 = 2^6$ que son diferentes.

*b*) Para $r = 3$ se tiene que $3$ es primo, pero $3^2 + 1 = 10$ no es primo.

*c*) Para $x = 0$ e $y = 1$ también se cumple $x^2 + y^2 = 1$.

*d*) Para $a = 2$ y $b = 4$ se tiene que $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt[4]{2}$ son diferentes.

*e*) Para $a = 1$ y $b = 1$ se observa que $\sqrt{-1}$ es uno de los factores en el producto y no es un número real. Como el producto solo está definido para números reales, la proposición es falsa.

$\square$

4. Sean $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$. Determine el valor de la expresión

$$\frac{a^2 \times a^4 \times a^6 \times \cdots \times a^{2n}}{a^{n^2} \times a^n}. \tag{3.1}$$

*Solución.* Por un lado, es claro que

$$a^{n^2} \times a^n = a^{n^2+n} \text{ y } a^2 \times a^4 \times a^6 \times \cdots \times a^{2n} = a^{2+4+6+\cdots+2n}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+2n &= 2(1+2+3+\cdots+n) \\ &= 2\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n^2+n. \end{aligned}$$

Luego, la expresión (3.1) se reduce a la siguiente:

$$\frac{a^{n^2+n}}{a^{n^2+n}} = 1.$$

$\square$

5. Determine el valor de $x$ en cada una de las siguientes igualdades:

   *a*) $8^{3^{2x}} = 512^{3^x}$
   *b*) $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^{x+4} = 296$
   *c*) $64^{x-2} = 2^{x+3}$

*Solución.*

*a*) Como $8 = 2^3$, $512 = 2^9$ y $9 = 3^2$ se tiene que

$$8^{3^{2x}} = 2^{3^{2x+1}} \text{ y } 512^{3^x} = 2^{3^{x+2}}.$$

Luego, se obtiene (por la inyectividad de la exponenciación) que

$$3^{2x+1} = 3^{x+2}$$

lo que implica que (nuevamente por la inyectividad de la exponenciación)

$$2x + 1 = x + 2$$

y así $x = 1$.

*b*) Primero factorizamos el término $2^x$ y obtenemos que la igualdad se reescribe como:

$$2^x\left(\frac{1}{2}+2+16\right)=296.$$

Luego, se reduce a la siguiente:

$$2^x\left(\frac{37}{2}\right)=296,$$

que a su vez implica $2^x=16$. Por lo tanto, $x=4$.

*c*) Como $64=2^6$ se tiene que

$$64^{x-2}=2^{6x-12}.$$

Reemplazando esto en la igualdad se obtiene

$$2^{6x-12}=2^{x+3}.$$

Luego, al igualar los exponentes, se tiene la siguiente igualdad:

$$6x-12=x+3,$$

que al resolver se obtiene $x=3$.

$\square$

6. Sea $n\in\mathbb{N}$. Determine el valor de la expresión

$$\left(\frac{5^n+5^{-n}}{25^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.2}$$

*Solución.* Notemos que

$$\frac{5^n+5^{-n}}{25^n+1}=\frac{5^n+\dfrac{1}{5^n}}{25^n+1}.$$

Luego,

$$\frac{5^n+\dfrac{1}{5^n}}{25^n+1}=\frac{\dfrac{5^{2n}+1}{5^n}}{25^n+1}.$$

Aplicando producto de extremos y medios obtenemos que

$$\frac{\dfrac{5^{2n}+1}{5^n}}{25^n+1} = \frac{25^n+1}{(25^n+1)(5^n)},$$

que se simplifica a

$$\frac{25^n+1}{(25^n+1)(5^n)} = \frac{1}{5^n}.$$

Por lo tanto, el valor de la expresión (3.2) es $\dfrac{1}{5}$. □

7. Sean $x$ y $b$ dos números reales positivos tales que $x^x = b+1$. Calcule el valor de

$$\sqrt[x^{x^{x+1}}]{3^{(b+1)^{(b+1)}}}$$

*Solución.* Debemos notar que

$$x^{x^{x+1}} = x^{x^x \times x}$$

que a su vez

$$x^{x^x \times x} = \left(x^x\right)^{x^x}.$$

Desde que $x^x = b+1$, se obtiene que

$$\sqrt[x^{x^{x+1}}]{3^{(b+1)^{(b+1)}}} = \sqrt[(b+1)^{b+1}]{3^{(b+1)^{(b+1)}}} = 3.$$

□

## Logaritmos

Dado un número real positivo $a$ y un número real positivo $b$ tal que $b \neq 1$, la expresión

$$\log_b(a)$$

se denomina el **logaritmo** de $a$ en **base** $b$, y se define como la solución de la siguiente igualdad:

$$b^x = a,$$

donde la incógnita es el exponente de la potencia.

Cuando $b = 10$ se suele escribir $\log(a)$ en lugar de $\log_{10}(a)$. De manera similar, si $b = e$ se escribe $\ln(a)$ en lugar de $\log_e(a)$, donde $e$ es el número de Euler o número neperiano. En este caso, $\ln$ se denomina el **logaritmo natural**.

Los logaritmos también cuentan con una serie de propiedades, aquí solo mencionaremos algunas de ellas (para mayores detalles consultar (Cotrina, 2015)). Comenzamos con

$$\log_b(ac) = \log_b(a) + \log_b(c)$$

que nos dice que el logaritmo de un producto se puede expresar como la suma de logaritmos con la misma base.

Continuamos con las siguientes:

$$\log_b(a^m) = m\log_b(a) \;\text{ y }\; \log_{b^m}(a) = \frac{1}{m}\log_b(a).$$

Estas dos propiedades son conocidas coloquialmente como la **regla del sombrero**.

Finalmente, la siguiente establece que es posible cambiar la base por otra como:

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}.$$

Esta es usualmente conocida como **cambio de base**.

## Problemas

1. Calcule el valor de cada una de las siguientes expresiones:

   *a*) $\log\left(\frac{5}{8}\right) + \log\left(\frac{125}{4}\right) - \log\left(\frac{625}{32}\right)$

   *b*) $\log_3\left[\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + 6\log_2(\sqrt{2}) + 5\right]$

   *c*) $\dfrac{\log_2(4) - \log_{1/2}(4)}{\log_3(243) - \log_{1/3}(81)}$

   *Solución.*

   *a*) Es claro que

   $$\log\left(\frac{5}{8}\right) + \log\left(\frac{125}{4}\right) = \log\left(\frac{5 \times 125}{8 \times 4}\right) = \log\left(\frac{625}{32}\right),$$

   por lo que el valor de la expresión es 0.

*b*) Como $\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$ y $\log_2(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}$, se tiene que

$$\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + 6\log_2(\sqrt{2}) + 5 = (-1)^2 + 6 \times \frac{1}{2} + 5 = 9.$$

Luego, $\log_3(9) = 2$.

*c*) Desde que $4 = 2^2$, $243 = 3^5$ y $81 = 3^4$, se deduce

$$\frac{\log_2(4) - \log_{1/2}(4)}{\log_3(243) - \log_{1/3}(81)} = \frac{2-(-2)}{5-(-4)} = \frac{4}{9}.$$

□

2. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

*a*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ x \geqslant 1 \ \rightarrow\ \log_2(x) < \log_3(x)\ ]$.

*b*) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\ xy > 0 \ \rightarrow\ \log(xy) = \log(x) + \log(y)\ ]$

*Solución.*

*a*) Para $x = 1$ se tiene que $\log_2(1) = \log_3(1) = 0$.

*b*) Para $x = y = -1$ se verifica que $xy = 1 > 0$ y, por ende, $\log(xy) = 0$, pero no están definidos $\log(x)$ y $\log(y)$.

□

3. Si $a = \log(3)$ y $b = \log(2)$, determine, en términos de $a$ y $b$, el valor de cada una de las siguientes expresiones:

*a*) $\log_{30}(16)$

*b*) $\log(108) + \log(45)$

*Solución.*

*a*) Desde que $16 = 2^4$ se tiene que

$$\log_{30}(16) = 4\log_{30}(2). \tag{3.3}$$

Por el uso de cambio de base de logaritmos se obtiene

$$\log_{30}(2) = \frac{\log(2)}{\log(30)}.$$

Por otro lado, es claro que

$$\log(30) = \log(3) + \log(10).$$

Así, al reemplazar todo lo obtenido en (3.3) y del hecho que $\log(10) = 1$ se tiene que

$$\log_{30}(16) = 4\frac{b}{a+1}.$$

*b*) Es claro que

$$\log(108) + \log(45) = \log(108 \times 45)$$

y desde que $108 = 2^2 \times 3^3$ y $45 = 3^3 \times 5$, se tiene que

$$\log(108 \times 45) = \log(2^2 \times 3^5 \times 5).$$

Convenientemente se escribe

$$\log(2^2 \times 3^5 \times 5) = \log(2 \times 3^5 \times 10).$$

Así, se deduce que

$$\begin{aligned}\log(108) + \log(45) &= \log(2) + 5\log(3) + \log(10)\\ &= b + 5a + 1.\end{aligned}$$

□

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ tales que $a^x = 15^z = b^y$. Despeje $x$ e $y$ en términos de $a$, $b$ y $z$. Si además se cumple

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z},$$

determine $ab$.

*Solución.* Primero se despeja $x$, para ello se toma logaritmo en base $a$ y se obtiene

$$x = z\log_a(15).$$

De manera similar se despeja $y$, obteniéndose

$$y = z\log_b(15).$$

Luego, se reemplaza los valores de $x$ e $y$ ya obtenidos y se deduce

$$\frac{1}{z\log_a(15)} + \frac{1}{z\log_b(15)} = \frac{1}{z}.$$

Se procede a cancelar $z$ y aplicar cambio de base en los logaritmos

$$\log_{15}(a) + \log_{15}(b) = 1,$$

lo que implica que $\log_{15}(ab) = 1$. Así, es claro que $ab = 15$. □

5. Para cualquier $n > 10^{10}$ se asume que $\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}$. Determine el valor de

$$10^{20}\left[\ln\left(2 + \frac{1}{10^{20}}\right) - \ln(2)\right].$$

*Solución.* Primero se debe observar que:

$$\ln\left(2 + \frac{1}{10^{20}}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{2 + \frac{1}{10^{20}}}{2}\right),$$

que a su vez puede re-escribirse como:

$$\ln\left(\frac{2 + \frac{1}{10^{20}}}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2\times 10^{20}}\right).$$

Luego,

$$10^{20}\left[\ln\left(2 + \frac{1}{10^{20}}\right) - \ln(2)\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{2\times 10^{20}}\right)^{10^{20}}.$$

Como $10^{20} > 10^{10}$ se sigue que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2\times 10^{20}}\right)^{10^{20}} = \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{2}.$$

□

6. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Si $\log(x) + \log(y) + \log(z) = 0$, calcule el valor de

$$\left[\frac{\log(z^2)}{\log(xy)}\right]^{\dfrac{\log(yz)}{\log(x)}}$$

*Solución.* Es claro que

$$\log(x) + \log(y) + \log(z) = \log(x) + \log(yz) = \log(xy) + \log(z).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\log(z^2)}{\log(xy)}\right]^{\dfrac{\log(yz)}{\log(x)}} &= \left[\frac{2\log(z)}{-\log(z)}\right]^{\dfrac{-\log(x)}{\log(x)}} \\
&= (-2)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

7. Sea $p$ un número natural mayor que 100. Determine el valor de $e^J$, donde

$$J = \left(\frac{\sum_{k=1}^{p} \sqrt[p]{\ln(k)}}{\sum_{k=1}^{p} \sqrt[p]{\log(k)}}\right)^p.$$

*Solución.* Primero, por cambio de base se tiene que $\ln(k) = \ln(10)\log(k)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p} \sqrt[p]{\ln(k)} &= \sum_{k=1}^{p} \sqrt[p]{\ln(10)\log(k)} \\
&= \sqrt[p]{\ln(10)} \sum_{k=1}^{p} \sqrt[p]{\log(k)}.
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $J = \ln(10)$. Por lo tanto, $e^J = e^{\ln(10)} = 10$. □

8. Para fabricar el balón oficial de Rusia 2018 (Telstar 18), se necesita lo siguiente:

- Cantidad de cuero: $S = 4\pi r^2$
- Cantidad de aire: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

donde $r$ es el radio de la pelota.

*a*) Determine:

- El radio de la pelota $r$ en términos de la cantidad de aire $V$.
- La cantidad de cuero $S$ en términos de la cantidad de aire $V$.

*b*) Si se cumple que:

$$\log S = a \log V + b \log \pi + c \log 6,$$

determine el valor de las constantes reales $a$, $b$ y $c$.

*Solución.*

*a*) De $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ se tiene que

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Finalmente, de $S = 4\pi r^2$ y lo anterior se obtiene

$$S = 4\pi \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}^{\,2}.$$

*b*) De la relación, determinada en el apartado anterior, entre $S$ y $V$ se deduce

$$\begin{aligned}
\log(S) &= \log\left(4\pi\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}^{2}\right) \\
&= \log(4\pi) + \log\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}^{2}\right) \\
&= \log(4\pi) + \frac{2}{3}\log\left(\frac{3V}{4\pi}\right) \\
&= \log(4\pi) + \frac{2}{3}\left(\log(3V) - \log(4\pi)\right) \\
&= \frac{1}{3}\log(4\pi) + \frac{2}{3}\log(3V) \\
&= \frac{1}{3}\left(2\log(2) + \log(\pi)\right) + \frac{2}{3}\left(\log(3) + \log(V)\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\log(2) + \log(3)\right) + \frac{1}{3}\log(\pi) + \frac{2}{3}\log(V) \\
&= \frac{2}{3}\log(6) + \frac{1}{3}\log(\pi) + \frac{2}{3}\log(V).
\end{aligned}$$

Luego $a = \dfrac{2}{3},\ b = \dfrac{1}{3}$ y $c = \dfrac{2}{3}$.

□

9. El valor de una inversión ($V$) varía a lo largo del tiempo ($t$) según la siguiente fórmula:

$$V = Ae^{0.08t},$$

donde $A$ es el monto que se invierte inicialmente en dólares y $t$ es el tiempo medido en años. (Considere $\sqrt[5]{e^2} = 1.5$ y $\ln(2) = 0.6$).

*a*) ¿En cuánto tiempo se duplicará la inversión inicial?

*b*) ¿A cuánto ascenderá una inversión de 200 000 dólares si se invierte durante 5 años?

*c*) Si el valor de una inversión durante 5 años ascendió a 150 000 dólares, ¿cuánto fue la inversión inicial?

*Solución.*

*a*) Nos piden determinar el tiempo $t$ de tal manera que $V = 2A$, es decir

$$2A = Ae^{0.08t}$$

que luego de simplificar $A$ se obtiene

$$2 = e^{0.08t}.$$

Al aplicar logaritmo natural se reduce a la siguiente igualdad:

$$\ln(2) = 0.08t,$$

de donde se tiene que $t = \dfrac{0.6}{0.08} = 7.5$ años.

*b*) Dados $A = 200\,000$ dólares y $t = 5$, nos piden determinar $V$,

$$\begin{aligned} V &= 200\,000\, e^{0.08\times 5} \\ &= 200\,000\, e^{0.4} \\ &= 200\,000 \times \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $V = 300\,000$ dólares.

*c*) Dados $t = 5$ y $V = 150\,000$, nos piden determinar el valor de $A$,

$$\begin{aligned} 150\,000 &= A\, e^{0.08\times 5} \\ &= A\, e^{0.4} \\ &= A \times \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por ende, $A = 100\,000$ dólares.

□

10. En Economía, la ecuación de demanda es una ecuación que expresa la relación que existe entre $q$ y $p$, donde $q$ es la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio unitario de $p$ unidades monetarias.

    Suponga que, para cierto artículo, la ecuación de demanda viene dada por

    $$p = b - a \log(q + 1), \tag{3.4}$$

    donde $a, b$ son constantes reales positivas y $p$ es el precio unitario en soles al que un comprador está dispuesto a pagar por $q$ unidades del bien. Además, se sabe que por nueve unidades un comprador está dispuesto a gastar $3a$ soles por unidad.

*a*) Determine el valor de $b$ en términos de $a$.

*b*) Determine el precio unitario, en términos de $a$, para el cual no se demandan unidades; es decir, cuando la cantidad demandada es nula.

*c*) Determine la demanda para la cual el precio unitario es la mitad del precio para el cual no se demandan unidades.

*d*) Exprese $q$ en términos de $a$ y $p$.

*Solución.*

*a*) De los datos se deduce que $q = 9$ cuando $p = 3a$. Luego

$$3a = b - a\log(10),$$

de donde se deduce que $b = 4a$.

*b*) Para $q = 0$ se obtiene

$$p = 4a - a\log(1).$$

Así, $p = 4a$, es decir que el precio unitario correspondiente es $4a$ soles.

*c*) De los datos se tiene que $p = 2a$. Luego, se cumple

$$2a = 4a - a\log(q+1)$$

que luego de simplificar $a$ se obtiene

$$\log(q+1) = 2,$$

que a su vez implica

$$q + 1 = 100,$$

de donde se deduce que la demanda correspondiente es $q = 99$ unidades.

*d*) De la expresión (3.4) se despeja primero el logaritmo y se obtiene

$$\log(q+1) = \frac{b-p}{a}$$

y desde que $b = 4a$ se deduce lo siguiente:

$\square$

## Productos notables

Los **productos notables** permiten, en general, acelerar el cálculo, factorizar o desarrollar expresiones algebraicas.

El primer producto notable es el **binomio al cuadrado**, es decir

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

donde $a$ y $b$ son dos números reales cualquiera. La prueba de este producto notable proviene básicamente de la propiedad distributiva de los números reales.

Como consecuencia del binomio al cuadrado se tienen las **identidades de Legendre**

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \text{ y } (a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

Otro producto notable es **la diferencia de cuadrados** que consiste en expresar esta diferencia de potencias con exponente dos como un producto entre la suma y la resta de las bases, es decir

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

donde $a$ y $b$ son dos números reales cualesquiera.

Existe una cantidad considerable de productos notables; sin embargo, aquí solo se han mencionado las identidades cuadráticas más usadas.

## Problemas

1. Calcule el valor de $\sqrt[16]{17(2^4 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) + 1}$.

   *Solución.* Es importante notar que $17 = 2^4 + 1$. Luego,

   $$\begin{aligned} 17(2^4 - 1) &= (2^4 + 1)(2^4 - 1) \\ &= 2^8 - 1. \end{aligned}$$

   De igual forma

   $$(2^8 - 1)(2^8 + 1) = 2^{16} - 1.$$

   También,

   $$(2^{16} - 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sqrt[16]{17(2^4-1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1} &= \sqrt[16]{2^{32}-1+1}\\ &= \sqrt[16]{2^{32}}\\ &= 2^2\\ &= 4.\end{aligned}$$

□

2. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $x+y+z=20$ y $x^2+y^2+z^2=300$. Determine el valor de

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2. \tag{3.5}$$

*Solución.* Como $x+y+z=20$, se tiene que

- $x+y=20-z$
- $y+z=20-x$
- $x+z=20-y$

de donde

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= 400-40z+z^2\\ (y+z)^2 &= 400-40x+x^2\\ (x+z)^2 &= 400-40y+y^2\end{aligned}$$

Luego, al reemplazar las igualdades obtenidas en (3.5) se obtiene

$$\begin{aligned}(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2 &= 3\times 400+x^2+y^2+z^2-40(x+y+z)\\ &= 1200+300-40\times 20\\ &= 700.\end{aligned}$$

□

3. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

   *a*) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [\ a^3-b^3=(a^2-b^2)(a+b)\ ]$.
   *b*) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [\ a^2-b^2=a-b\ \rightarrow\ a=b\ ]$.
   *c*) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [\ (a-b)^3=a^3+3a^2b-3ab^2-b^3\ ]$.

*d*) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [\ a^2 + b^2 = (a+b)^2\ ]$.

*e*) $\forall a, b \in \mathbb{R}, [\ (a+b)^2 - (a-b)^2 = 2ab\ ]$.

*f*) $\forall a, b \in \mathbb{R}, [\ (a+b)^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\ ]$.

*Solución.*

*a*) Para $a = 2$ y $b = 1$, se tiene que $a^3 - b^3 = 7$ pero $(a^2 - b^2)(a+b) = 9$.

*b*) Para $a = 3$ y $b = -2$, se cumple $a^2 - b^2 = 5 = a - b$ pero $a \neq b$.

*c*) Para $a = 1$ y $b = -1$, se tiene que $(1-(-1))^3 = 8$ pero $(1)^3 + 3(1)^2(-1) - 3(1)(-1)^2 - (-1)^3 = -4$.

*d*) Para $a = 1$ y $b = -1$, se verifica que $1^2 + (-1)^2 = 2$; sin embargo, $(1 + (-1))^2 = 0$.

*e*) Para $a = b = 1$, se observa que $(1 + (-1))^2 - (1 - (-1))^2 = 4$ pero $2(1)(-1) = -2$.

*f*) Para $a = b = 1$, se obtiene que $(1+1)^3 = 8$ y $(1+1)(1^2 - (1)(1) + 1^2) = 2$.

$\square$

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(1 - a - b)(1 + a + b + a^2 + 2ab + b^2) = 1$. Calcule el valor de $a + b$.

*Solución.* Primero notemos que

$$\big(1 - (a+b)\big)\big(1 + (a+b) + (a+b)^2\big) = 1 - (a+b)^3.$$

Luego, se sigue que

$$\begin{aligned} 1 - (a+b)^3 &= 1 \\ (a+b)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a + b = 0$. $\square$

5. Simplifique $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^3$

*Solución.* Realicemos primero la siguiente notación:

$$a = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \text{ y } b = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Así, nos piden simplificar $a^3 - b^3$, que es una diferencia de cubos y se puede expresar como

$$(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} a-b &= \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De igual forma,

$$\begin{aligned} a^2+ab+b^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \\ &= \frac{2(\sqrt{2}^2+1^2)}{4} + \frac{\sqrt{2}^2-1^2}{4} \\ &= \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a^3 - b^3 = \dfrac{7}{4}$. □

6. Sea $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $x + \dfrac{1}{x} = 3$, calcule el valor de $x^3 + x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$.

*Solución.* Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 &= 3^2 \\ x^2+2+\frac{1}{x^2} &= 9 \\ x^2+\frac{1}{x^2} &= 7. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 &= 3^3\\
x^3+3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3} &= 27\\
x^3+3(3)+\frac{1}{x^3} &= 27\\
x^3+\frac{1}{x^3} &= 18.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x^3+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=25.$$

□

7. Calcule el valor simplificado de cada una de las siguientes expresiones:

   *a*) $\dfrac{51^3-26^3-25^3}{51\times 26\times 25}$

   *b*) $(5\,000)^3-(4\,999)^3-(4\,999)^2-5(4999)(10)^3$

   *c*) $(\sqrt[3]{2}-1)\times(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$

*Solución.*

*a*) Notemos que $51=25+26$. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}
51^3 &= (25+26)^3\\
51^3 &= 25^3+3\times 25\times 26\times(25+26)+26^3\\
51^3-26^3-25^3 &= 3\times 25\times 26\times 51\\
\frac{51^3-26^3-25^3}{25\times 26\times 51} &= 3.
\end{aligned}$$

*b*) En este caso se observa una diferencia de cubos.

$$\begin{aligned}
5000^2+4999\times 5000+4999^2 &= 5000^3-4999^3\\
5000^3-4999^3-4999\times 5000-4999^2 &= 5000^2.
\end{aligned}$$

*c*) Acá también se tiene una diferencia de cubos.

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{2}-1)\times(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1) &= (\sqrt[3]{2}-1)\times(\sqrt[3]{2}^{2}+\sqrt[3]{2}+1)\\ &= \sqrt[3]{2}^{3}-1^{3}\\ &= 2-1\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

8. Sean $x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=0$. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$\left(\frac{x^2+yz}{x^2}\right)\left(\frac{y^2+xz}{y^2}\right)\left(\frac{z^2+xy}{z^2}\right).$$

*Solución.* De $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=0$ se tiene que

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{x}=-\frac{y}{z}$$

que luego de sumar las fracciones es equivalente a

$$\frac{x^2+yz}{yx}=-\frac{y}{z}. \tag{3.6}$$

De forma similar se deduce que

$$\frac{y^2+xz}{yz}=-\frac{z}{x} \tag{3.7}$$

$$\frac{z^2+yx}{zx}=-\frac{x}{y}. \tag{3.8}$$

Así, de (3.6), (3.7) y (3.8) se sigue que

$$\left(\frac{x^2+yz}{yx}\right)\left(\frac{y^2+xz}{yz}\right)\left(\frac{z^2+yx}{zx}\right)=\left(-\frac{y}{z}\right)\left(-\frac{z}{x}\right)\left(-\frac{x}{y}\right)=-1$$

□

## Racionalización

El proceso de racionalización consiste generalmente en eliminar los radicales que aparecen en el denominador de una fracción; para ello, se hace uso frecuentemente de las leyes de exponentes y/o de los productos notables. En ese sentido, se presentan a continuación dos de los casos más comunes:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \text{ y } \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}},$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números adecuados. Luego, se hace uso de las siguientes igualdades:

$$b = \sqrt{b}^2 \text{ y } b - c = (\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c}),$$

respectivamente, para deducir que

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \text{ y } \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$$

## Problemas

1. Racionalice y simplifique las siguientes expresiones:

*a*) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$

*b*) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

*c*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$

*d*) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}$

*e*) $\dfrac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{10}$

*f*) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}$

*g*) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$

*Solución.*

*a*) En este caso, al racionalizar el denominador se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2}} \\
&= \frac{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}}{3}.
\end{aligned}$$

*b*) Primero racionalizamos el numerador y seguido el denominador, como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\
&= \frac{\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}}{2+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{1}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} \\
&= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

*c*) Para racionalizar el denominador usamos la diferencia de cubos, es decir:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} \times \frac{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \times 1 + 1^2}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \times 1 + 1^2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \times 1 + 1^2}{\sqrt[3]{3}^3 - 1^3} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3} \times 1 + 1^2}{2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1}{2}.
\end{aligned}
$$

*d*) Veamos,

$$
\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} &= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{6\sqrt{2}(3+\sqrt{3})} \\
&= \frac{(3-\sqrt{3})}{6(3+\sqrt{3})} \\
&= \frac{3-\sqrt{3}}{6(3+\sqrt{3})} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
&= \frac{(3-\sqrt{3})^2}{6(3^2-\sqrt{3}^2)} \\
&= \frac{12-6\sqrt{3}}{36} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}
$$

*e*) Racionalizamos el primer sumando de la siguiente manera;

$$\begin{aligned}
\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-2\sqrt{10} &= \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-2\sqrt{10}\\
&= \frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{2}^2}-2\sqrt{10}\\
&= \frac{3(7+2\sqrt{10})}{3}-2\sqrt{10}\\
&= 7+2\sqrt{10}-2\sqrt{10}\\
&= 7.
\end{aligned}$$

*f*) Al racionalizar cada fracción se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\\
&= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}^2-1^2}\\
&= \sqrt{2}-1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}\\
&= \sqrt{3}-\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} &= \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}\\
&= \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}^2-\sqrt{3}^2}\\
&= \sqrt{4}-\sqrt{3}\\
&= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Luego, se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} &= \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}\\ &= 1.\end{aligned}$$

*g*) Al racionalizar cada fracción se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{3}-1} &= \frac{4}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\\ &= \frac{4(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2}\\ &= 2(\sqrt{3}+1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\\ &= \frac{2(2-\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2}\\ &= 2(2-\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Así, la expresión se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{3}-1}+\frac{2}{2+\sqrt{3}} &= 2(\sqrt{3}+1)+2(2-\sqrt{3})\\ &= 2\sqrt{3}+2+4-2\sqrt{3}\\ &= 6.\end{aligned}$$

□

2. Si $x=\sqrt{3}-1$, determine el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{2}{\sqrt[4]{\sqrt{3}(x-1)(x^2+1)+1}}.$$

*Solución.* Desde que $x = \sqrt{3} - 1$, se sigue que $x + 1 = \sqrt{3}$. Luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt[4]{\sqrt{3}(x-1)(x^2+1)+1}} &= \frac{2}{\sqrt[4]{(x+1)(x-1)(x^2+1)+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt[4]{(x^2-1)(x^2+1)+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt[4]{(x^4-1)+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt[4]{x^4}} \\
&= \frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}-1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\
&= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2 - 1^2} \\
&= \sqrt{3} + 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

3. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $b > c > d$. Si se cumple que

$$\frac{7}{6 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - \sqrt{6}} = a - \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{d},$$

calcule el valor de $\log_a(bcd)$.

*Solución.* Primero procedamos a racionalizar la fracción como sigue:

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{6-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{6}} &= \frac{7}{2(3-\sqrt{2})+\sqrt{3}(3-\sqrt{2})} \\
&= \frac{7}{(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})} \\
&= \frac{7}{(3-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})} \times \left[\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right] \times \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{7\left(6-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{(3^2-\sqrt{2}^2)(2^2-\sqrt{3}^2)} \\
&= \frac{7\left(6-3\sqrt{3}+2\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{7\times 1} \\
&= 6-\sqrt{27}+\sqrt{8}-\sqrt{6}.
\end{aligned}
$$

Luego, desde que $b>c>d$, se deduce que $a=6,\ b=27,\ c=8$ y $d=6$. Así,

$$
\begin{aligned}
\log_a(bcd) &= \log_6(27\times 8\times 6) \\
&= \log_6(6^4) = 4.
\end{aligned}
$$

□

4. Si $x = \dfrac{4}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt[4]{5}+1\right)}$, calcule el valor de

$$(x+1)^4.$$

*Solución.* Al racionalizar $x$ se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt[4]{5}+1\right)} &= \frac{4}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt[4]{5}+1\right)} \times \frac{\sqrt[4]{5}-1}{\sqrt[4]{5}-1} \\
&= \frac{4(\sqrt[4]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}^2-1^2)} \\
&= \frac{4(\sqrt[4]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} \\
&= \frac{4(\sqrt[4]{5}-1)}{\sqrt{5}^2-1^2} \\
&= \sqrt[4]{5}-1.
\end{aligned}
$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= (\sqrt[4]{5}-1+1)^4\\ &= 5.\end{aligned}$$

□

## Polinomios

Un **polinomio** $p(x)$ de variable $x$ es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $n$ es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se denominan **coeficientes**, que pueden ser enteros, racionales o reales. En ese sentido, el conjunto de polinomios con coeficientes enteros, racionales y reales se suele denotar por $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$, respectivamente.

Se dice que el polinomio $p(x)$ tiene **grado** $n$, lo que escribiremos por $\operatorname{grad}(p) = n$, cuando $x^n$ es la mayor potencia de $x$ que aparece en $p(x)$ con coeficiente $a_n \neq 0$. El coeficiente $a_n$ se denomina **coeficiente principal** del polinomio. Además, el coeficiente $a_0$ se denomina **término independiente** del polinomio.

Si el coeficiente principal es uno, $a_n = 1$, entonces el polinomio se denomina **mónico**. En caso $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, el polinomio se denomina **constante**. Si además el término independiente es cero, $a_0 = 0$, el polinomio es usualmente llamado **polinomio nulo**. De lo anterior se aprecia que todo polinomio constante, excepto el polinomio nulo, tiene grado cero. El polinomio nulo es el único polinomio que no tiene grado bien definido.

Dado un polinomio $p(x)$, se denota por $p(a)$ a la **evaluación** del polinomio en el valor $a$, que consiste en reemplazar $x$ por $a$ y efectuar las operaciones aritméticas. En ese sentido, existen dos evaluaciones conocidas en la literatura

$$p(0) = a_0 \ \text{ y } \ p(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0,$$

que nos indican que la evaluación en $0$ nos permite calcular el término independiente y que su evaluación en $1$ nos da como resultado la suma de todos sus coeficientes.

En los conjuntos $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$ se establecen las operaciones usuales de suma y producto de polinomios. Luego, se dice que dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son **iguales** cuando el polinomio $p(x)-q(x)$ es el polinomio nulo. Si ninguno de los polinomios es el polinomio nulo, se sigue que ellos son iguales cuando tienen el mismo grado y los mismos coeficientes. También es claro que dos polinomios son iguales si y solo si:

$$\forall x \in \mathbb{R}, [\, p(x) = q(x) \,].$$

Sean $d(x)$ y $D(x)$ dos polinomios no nulos. Si $\operatorname{grad}(D) \geqslant \operatorname{grad}(d)$, entonces existen otros dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$D(x) = d(x)q(x) + r(x),$$

donde el polinomio $r(x)$ o es el polinomio nulo o es tal que $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(d)$. En este caso, los polinomios $D(x)$, $d(x)$ $q(x)$ y $r(x)$ se denominan **dividendo**, **divisor**, **cociente** y **resto**, respectivamente. Al proceso de determinar los polinomios cociente y resto se denomina **división de polinomios**. En ese sentido, podemos encontrar en la literatura un método de división propuesto por Horner, el cual se usa en la mayoría de ejercicios; se recomienda revisar la sección 5 del capítulo 2 de (Cotrina, 2015) para mayor información sobre el método de Horner. Existen otros métodos, pero que no son considerados en el presente manuscrito.

Un polinomio no constante $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ se dice que es **primo** o **irreductible** en $\mathbb{Q}[x]$ cuando no es el producto de dos polinomios de grado menor en $\mathbb{Q}[x]$. De manera similar se define el concepto de polinomios primos en $\mathbb{R}[x]$. Un caso interesante es el polinomio $x^2-2$ que es primo en $\mathbb{Q}[x]$, pero no es primo en $\mathbb{R}[x]$, pues $x^2-2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

**Factorizar** un polinomio consiste en expresar tal polinomio como el producto de polinomios primos. En ese sentido, existen varios mecanismos para factorizar un polinomio, entre ellos están el factor común, el método del aspa simple, el método de los divisores binómicos, etc.

Un número real $a$ se denomina **raíz** de un polinomio $p(x)$ si su evaluación da como resultado cero, es decir $p(a) = 0$.

## Problemas

1. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $x+4$ es uno sus factores y $3$ es una de sus raíces. Si $\operatorname{grad}(p) = 2$ y $p(-1) = 12$, determine $p(x)$.

   *Solución.* Como $3$ es una raíz, se tiene que $x-3$ es un factor de $p(x)$. Desde que $\operatorname{grad}(p) = 2$ y $x+4$ también es un factor de $p(x)$, se deduce que

   $$p(x) = a(x+4)(x-3),$$

   donde $a \in \mathbb{Z}$.

   Como $p(-1) = 12$, se tiene que $a(-1+4)(-1-3) = 12$, es decir $-12a = 12$ de donde $a = -1$. Por lo tanto,

   $$p(x) = -(x+4)(x-3).$$

   □

2. Dados los siguientes polinomios:

$$p(x) = -5(x^2 - 3x - 1)^6(2 - x)^5 \text{ y } q(x) = (1 + x)(1 + x^2)(x - x^2) + x^5.$$

*a*) Determine el término independiente y la suma de coeficientes del polinomio suma, $p(x) + q(x)$.

*b*) Determine el grado de los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $p(x)q(x)$.

*Solución.*

*a*) Para determinar el término independiente se debe evaluar en cero. Así,

$$\begin{aligned} p(0) &= -5(0^2 - 3(0) - 1)^6(2 - 0)^5 = -160 \\ q(0) &= (1 + 0)(1 + 0^2)(0 - 0^2) + 0^5 = 0 \\ p(0) + q(0) &= -160 \end{aligned}$$

De manera similar, para calcular la suma de coeficientes se debe evaluar en uno. Luego,

$$\begin{aligned} p(1) &= -5(1^2 - 3(1) - 1)^6(2 - 1)^5 = -3645 \\ q(1) &= (1 + 1)(1 + 1^2)(1 - 1^2) + 1^5 = 1 \\ p(1) + q(1) &= -3644 \end{aligned}$$

*b*) Es claro que $\text{grad}(p) = 2 \times 6 + 5 = 17$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} q(x) &= (1 + x)(1 + x^2)(x - x^2) + x^5 \\ &= (1 + x + x^2 + x^3)(x - x^2) + x^5 \\ &= x - x^5 + x^5 \\ &= x \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\text{grad}(q) = 1$. Por ende, $\text{grad}(pq) = 18$.

$\square$

3. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(x - 1) = 16x^{96} - 2x^{99} + 2x + 3$. Calcule la suma de coeficientes de $p(x)$.

*Solución.* Para calcular la suma de coeficientes de un polinomio es suficiente evaluar en uno. Así, se necesita que $x - 1 = 1$, lo que implica $x = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} p(1) &= 16(2)^{96} - 2(2)^{99} + 2(2) + 3 \\ &= 2^4(2)^{96} - 2(2)^{99} + 2(2) + 3 \\ &= 2^{100} - 2^{100} + 4 + 3 \\ &= 7. \end{aligned}$$

□

4. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(2x + 1) = -(1 + 2x)^7 + (2x - 1)(2x + 9)^2 + 3$. Determine el término independiente y la suma de coeficientes de $p(x)$.

*Solución.* Por un lado, para calcular el término independiente de un polinomio se debe evaluar en cero. Así, se hace $2x + 1 = 0$, de donde se tiene que $2x = -1$. Luego, se procede a reemplazar este valor en $p(2x + 1)$ y se obtiene

$$p(0) = -(-1 + 1)^7 + (-1 - 1)(-1 + 9)^2 + 3 = -125.$$

Por otro lado, para calcular la suma de coeficientes se debe evaluar en uno. Así, se hace $2x+1 = 1$ deduciéndose que $2x = 0$. Luego, se reemplaza en $p(2x+1)$ y se obtiene

$$p(1) = -(0 + 1)^7 + (0 - 1)(0 + 9)^2 + 3 = -79.$$

□

5. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(x) = (x + 1)^3 - (x - 2)^3 - 2(x + 1)^2 - (x - 2)^2$.

   *a*) Determine el término independiente y la suma de coeficientes de $p(x)$.

   *b*) Determine $\text{grad}(q)$, donde $q(x) = p(x + 1) - p(x - 1)$.

*Solución.*

*a*) Desarrollando se tiene que:

$$\begin{aligned} (x + 1)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ (x - 2)^3 &= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\ (x + 1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ (x - 2)^2 &= x^2 - 4x + 4 \\ p(x) &= 6x^2 - 9x + 3 \end{aligned}$$

Así, el término independiente es $3$ y la suma de coeficientes es $6+(-9)+3 = 0$.

*b*) Desde que $p(x) = 6x^2 - 9x + 3$, se tiene que:

$$\begin{aligned} q(x) &= p(x+1) - p(x-1) \\ &= 6[(x+1)^2 - (x-1)^2] - 9[(x+1) - (x-1)] \\ &= 24x - 18 \end{aligned}$$

deduciéndose que $\operatorname{grad}(q) = 1$.

$\square$

6. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$p(2x-3) = (2x+3)^{4m} + 2(12x-6)^{2m} + (2x+1)^{2m}.$$

Calcule el valor de $m$ sabiendo que el término independiente de $p(x)$ es $1600$.

*Solución.* El término independiente se calcula como $p(0)$, por lo que $2x - 3 = 0$ implica $2x = 3$. Luego, al reemplazar, se obtiene

$$p(0) = 6^{4m} + 2(12)^{2m} + 4^{2m}.$$

Así,

$$\begin{aligned} 6^{4m} + 2(12)^{2m} + 4^{2m} &= 1600 \\ (6^{2m})^2 + 2 \cdot 6^{2m}2^{2m} + (4^m)^2 &= 1600 \\ (6^{2m})^2 + 2 \cdot 6^{2m}4^m + (4^m)^2 &= 1600 \\ (6^{2m} + 4^m)^2 &= 1600 \\ (6^{2m} + 4^m) &= 40 \end{aligned}$$

de donde $m = 1$. $\square$

7. Sean $d \in \mathbb{Z}$ y $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$p(x) = \frac{3d}{5}x^{d-4} + 4x^{7-d} - 2d.$$

Determine el valor de $d$ y el grado de $p(x)$.

*Solución.* Si $p \in \mathbb{Z}[x]$, los coeficientes son enteros. Así, $\dfrac{3d}{5} \in \mathbb{Z}$, de donde se deduce que $d$ es múltiplo de 5.

Los exponentes de la variable $x$ son no negativos, esto es

$$0 \leqslant d - 4 \text{ y } 0 \leqslant 7 - d,$$

lo que implica que $4 \leqslant d \leqslant 7$. De esto y el hecho de que los exponentes también deben ser enteros, se obtiene que $d = 5$.

Luego, $p(x) = 4x^2 + 3x - 10$ y $\operatorname{grad}(p) = 2$. □

8. Sea $p(x)$ un polinomio tal que $p(1 - x) = 3p(x) + 4x + 7$, determine la suma de coeficientes de $p(x)$.

*Solución.* Evaluando en $x = 1$ y $x = 0$ se obtiene lo siguiente

$$p(1) = 3p(0) + 7 \tag{3.9}$$
$$p(0) = 3p(1) + 11 \tag{3.10}$$

respectivamente. Luego, al reemplazar (3.10) en (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned} p(1) &= 3(3p(1) + 11) + 7 \\ &= 9p(1) + 40 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $p(1) = -5$, siendo esto la suma de coeficientes de $p(x)$. □

9. Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $q(x)$ es el cociente de dividir $p(x)$ por el polinomio $d(x) = x^2 + x - 2$. Si $p(0) = 11$, $p(1) = 20$ y $q(0) = 2$, determine el resto de dividir $p(x)$ entre $d(x)$.

*Solución.* Como $\operatorname{grad}(d) = 2$, por el algoritmo de la división, el residuo $r(x)$ tiene grado a lo más 1, es decir que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $r(x) = ax + b$. Así, se debe verificar que:

$$p(x) = (x^2 + x - 2)q(x) + ax + b.$$

Desde que $q(0) = 2$ y $p(0) = 11$, se tiene que

$$\begin{aligned} p(0) &= -2q(0) + b \\ 11 &= -4 + b \\ 15 &= b. \end{aligned}$$

Por otro lado, del dato $p(1) = 20$ se obtiene

$$\begin{aligned} p(1) &= a + 15 \\ 20 &= a + 15 \\ 5 &= a. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo es $r(x) = 5x + 15$. □

10. Determine el residuo de dividir $D(x)$ entre $d(x)$, donde

$$D(x) = 4x^{78} + 32x^{75} + 6x^{41} + 12x^{40} + 5x^4 + 1 \text{ y } d(x) = x + 2.$$

*Solución.* Como el divisor es de grado uno, se aplica el teorema del resto (ver Teorema 52 del capítulo 2 de (Cotrina, 2015)) para obtener el residuo. Así, se hace $d(x) = 0$, lo que implica $x = -2$. Luego se reemplaza este valor en $D(x)$ y se obtiene el residuo $r$

$$\begin{aligned} r &= D(-2) \\ &= 4(-2)^{78} + 32(-2)^{75} + 6(-2)^{41} + 12(-2)^{40} + 5(-2)^4 + 1 \\ &= 2^2 \times 2^{78} - 2^5 \times 2^{75} - 3 \times 2 \times 2^{41} + 3 \times 2^2 \times 2^{40} + 5 \times 2^4 + 1 \\ &= 2^{80} - 2^{80} - 3 \times 2^{42} + 3 \times 2^{42} + 5 \times 2^4 + 1 \\ &= 5 \times 16 + 1 \\ &= 81. \end{aligned}$$

Por ende, el residuo es $81$. □

11. Sean $m \in \mathbb{R}$ y $D(x), d(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que

$$D(x) = x^3 + (-3 - \sqrt{7})x^2 + (2\sqrt{7} - 15)x + 15\sqrt{7} + m \text{ y } d(x) = x - \sqrt{7}.$$

Si la división de $D(x)$ por $d(x)$ tiene como residuo $3m - 8$, calcule el valor de $m$.

*Solución.* Desde que $\operatorname{grad}(d) = 1$, se aplica el teorema del resto para determinar el residuo. Así, primero se hace $d(x) = 0$, lo que implica que $x = \sqrt{7}$. Luego,

$$\begin{aligned} 3m - 8 &= D(\sqrt{7}) \\ &= (\sqrt{7})^3 + (-3 - \sqrt{7})(\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7} - 15)\sqrt{7} + 15\sqrt{7} + m \\ &= 7\sqrt{7} - 21 - 7\sqrt{7} + 14 - 15\sqrt{7} + 15\sqrt{7} + m \\ &= -7 + m. \end{aligned}$$

De donde se obtiene que $m = 1/2$. □

12. Dados los polinomios

$$D(x) = 8x^5 + 14x^4 + 5x^3 + 16x^2 + 3x + 2 \text{ y } d(x) = 4x^2 + x + 3,$$

determine el polinomio cociente de dividir $D(x)$ entre $d(x)$.

*Solución.* Al aplicar el método de Horner se obtiene la Tabla 3.1.

| 4 | 8 | 14 | 5 | 16 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | | $-2$ | $-6$ | | | |
| $-3$ | | | $-3$ | $-9$ | | |
| | | | | 1 | 3 | |
| | | | | | $-2$ | $-6$ |
| | 2 | 3 | $-1$ | 2 | 4 | $-4$ |

Tabla 3.1

De donde se tiene que el cociente es $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$. □

13. Determine el cociente y el resto de dividir $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$ entre $x^3 + 1$.

*Solución.* Al aplicar el método de Horner se obtiene la Tabla 3.2

| 1 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | 0 | 0 | $-1$ | | |
| 0 | | | 0 | 0 | $-1$ | |
| $-1$ | | | | 0 | 0 | $-1$ |
| | 1 | 1 | 1 | $-2$ | $-2$ | $-2$ |

Tabla 3.2

De donde el cociente y el residuo son $q(x) = x^2 + x + 1$ y $r(x) = -2x^2 - 2x - 2$, respectivamente. □

14. Luego de aplicar el método de Horner a una división se obtuvo la Tabla 3.3.

$$
\begin{array}{c|ccc|cc}
m & m & n & m & n & m \\
\hline
n & & n & p & & \\
p & & & n & p & \\
 & & & & p & p^2 \\
\hline
 & n & n & p & &
\end{array}
$$

Tabla 3.3

Determine el resto de la respectiva división.

*Solución.* De la segunda columna se tiene que $n = \dfrac{m}{m} = 1$.

De la tercera columna se observa $\dfrac{2n}{m} = n$, deduciéndose que $m = 2$.

De la cuarta columna se nota $\dfrac{m+n+p}{m} = p$, lo cual implica que $\dfrac{3+p}{2} = p$. Así, $p = 3$.

Luego el resto es

$$
\begin{aligned}
r(x) &= (n+2p)x + (m+p^2) \\
&= (1+6)x + (2+9) \\
&= 7x + 11.
\end{aligned}
$$

□

15. Dados los polinomios

$$D(x) = x^5 + x^3 - x^2 + 2x + 10 \text{ y } d(x) = x^2 + 1,$$

determine el cociente y residuo de la división de $D(x)$ entre $d(x)$. Además, si $D_0(x)$ y $q_0(x)$ son dos polinomios tales que

$$D_0(x) = d(x)q_0(x) + D(x),$$

determine el residuo de dividir $D_0(x)$ por $d(x)$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $0$ | $1$ | $-1$ | $2$ | $10$ |
| $0$ | | $0$ | $-1$ | | | |
| $-1$ | | | $0$ | $0$ | | |
| | | | | $0$ | $0$ | |
| | | | | | $0$ | $1$ |
| | $1$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $2$ | $11$ |

Tabla 3.4

*Solución.* Al aplicar el método de Horner se tiene la siguiente Tabla 3.4
De donde el cociente y residuo de la división son

$$q(x) = x^3 - 1 \text{ y } r(x) = 2x + 11,$$

respectivamente.
Así, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} D(x) &= d(x)q(x) + r(x) \\ x^5 + x^3 - x^2 + 2x + 10 &= (x^2 + 1)(x^3 - 1) + 2x + 11. \end{aligned}$$

Luego, notemos que:

$$\begin{aligned} D_0(x) &= d(x)q_0(x) + D(x) \\ &= d(x)q_0(x) + d(x)q(x) + r(x) \\ &= d(x)[q(x) + q_0(x)] + r(x). \end{aligned}$$

Desde que $\text{grad}(r) = 1 < \text{grad}(d) = 2$, el resto de dividir $D_0(x)$ entre $d(x)$ es

$$2x + 11.$$

$\square$

16. Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$p(x) = 10x^5 + x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 9x + a,\ q(x) = x - 1 \text{ y } r(x) = 2x + 3.$$

Si $p(x)$ es divisible por $q(x)$, determine el cociente de dividir $p(x)$ entre $q(x)r(x)$.

*Solución.* Usando el teorema del resto en la división de $p(x)$ entre $q(x)$ se tiene que su resto es $p(1) = 9 + a$. Como $p(x)$ es divisible por $q(x)$ entonces este resto es cero, es decir, $9 + a = 0$ con lo cual $a = -9$.

Multiplicando $q(x)$ y $r(x)$ se obtiene $2x^2 + x - 3$, luego al efectuar la división por el método de Horner se tiene la siguiente tabla:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | $10$ | $1$ | $-9$ | $16$ | $-9$ | $-9$ |
| $-1$ | | $-5$ | $15$ | | | |
| $3$ | | | $2$ | $-6$ | | |
| | | | | $-4$ | $12$ | |
| | | | | | $-3$ | $9$ |
| | $5$ | $-2$ | $4$ | $3$ | $0$ | $0$ |

Tabla 3.5

de donde se deduce que el cociente es $5x^3 - 2x^2 + 4x + 3$. □

17. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $\text{grad}(p) = 4$ y al dividirlo por $(x^2 - x)(x + 2)$ da como residuo al polinomio constante 2. Si $p(2) = 42$ y $p(3) = 212$, determine el polinomio cociente de dicha división.

*Solución.* Primero se debe notar que el polinomio cociente $q(x)$ tiene a lo más grado 1, por lo cual este se puede escribir de la siguiente forma:

$$q(x) = ax + b.$$

De donde se deduce que:

$$p(x) = (ax + b)(x^2 - x)(x + 2) + 2.$$

Luego, como $p(2) = (2a + b)(2)(4) + 2 = 42$ se obtiene

$$2a + b = 5. \tag{3.11}$$

También, $p(3) = (3a + b)(6)(5) + 2 = 212$ que se simplifica a

$$3a + b = 7. \tag{3.12}$$

Así, de (3.11) y (3.12) se deduce que $a = 2$ y $b = 1$. Por lo tanto, $q(x) = 2x + 1$. □

18. Sean $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ y $p(x), d(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$p(x) = ax^3 - bx^2 + x - 1 \text{ y } d(x) = x^2 + x + 1.$$

Si la división de $p(x)$ entre $d(x)$ tiene como resto $r(x) = ax + a$, determine $a$, $b$ y el cociente de la división.

*Solución.* Al aplicar el método de Horner se obtiene la Tabla 3.6

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $a$ | $-b$ | $1$ | $-1$ |
| $-1$ | | $-a$ | $-a$ | |
| $-1$ | | | $a+b$ | $a+b$ |
| | $a$ | $-b-a$ | $a$ | $a$ |

Tabla 3.6

Luego, el cociente de la división es $q(x) = ax - b - a$. Sumando las dos últimas columnas de la Tabla 3.6 se obtiene

$$\begin{aligned} a &= 1 - a + a + b \\ a &= -1 + a + b \end{aligned}$$

de donde se deduce que $a = 2$ y $b = 1$.
Finalmente, al reemplazar estos valores, el cociente es $q(x) = 2x - 3$. □

19. Sea $n$ un número natural mayor que 1 y $p_1(x), p_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$p_1(x) = x^n - nx + n \quad \text{y} \quad p_2(x) = x^2 - x - 2.$$

Si la suma de coeficientes del cociente de dividir $p_1$ entre $p_2$ es $5$, determine la suma de coeficientes del resto de dicha división.

*Solución.* Sean $q(x)$ el cociente y $r(x)$ el resto, para $x = 1$ en el algoritmo de la división se tiene que

$$p_1(1) = p_2(1)q(1) + r(1)$$

de aquí $r(1) = 11$. Por lo tanto, la suma de coeficientes del resto es $11$. □

20. Determine $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con las siguientes condiciones:

- $\operatorname{grad}(p) = 3$;
- $p(0) = 15$;
- $p(x)$ es divisible por $x + 1$;
- $5$ es una raíz de $p(x)$;
- la división de $p(x)$ entre $x - 2$ tiene resto igual a $-9$.

*Solución.* La primera condición implica que el polinomio debe ser de la siguiente forma:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Luego, de lo anterior y la segunda condición se deduce que

$$p(0) = d = 15.$$

La tercera condición, por el teorema del resto, dice que $p(-1) = 0$. Luego, de lo anterior se tiene que

$$-a + b - c + 15 = 0. \tag{3.13}$$

Por definición de raíz, la cuarta condición implica que $p(5) = 0$. De donde se deduce que

$$125a + 25b + 5c + 15 = 0,$$

que se simplifica a la siguiente expresión:

$$25a + 5b + c + 3 = 0. \tag{3.14}$$

De (3.13) se tiene que $b = a + c - 15$, que al reemplazar en (3.14) se obtiene que

$$30a + 6c - 72 = 0,$$

que se simplifica a la siguiente expresión

$$5a + c - 12 = 0,$$

que a su vez implica que $c = 12 - 5a$.

Finalmente, por el teorema del resto se tiene que la quinta condición implica $p(2) = -9$. Así,

$$\begin{aligned} 8a + 4b + 2c + 15 &= -9 \\ 8a + 4b + 2c &= -24 \\ 8a + 4(a + c - 15) + 2c &= -24 \\ 12a + 6c &= 36 \\ 2a + c &= 6 \\ 2a + (12 - 5a) &= 6 \\ 12 - 3a &= 6 \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Deduciéndose que $b = -11$ y $c = 2$. Por lo tanto, $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 2x + 15$. □

21. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que

$$p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Calcule el valor de $\dfrac{a+b}{c^2}$, sabiendo que $p(x)$ es divisible por $(x-1)(x^2-2x-1)$.

*Solución.* El polinomio $x - 1$ es un factor de $p(x)$. Así, $p(1) = 0$, es decir

$$a + b + c - 9 = 0. \tag{3.15}$$

Al dividir $p(x)$ entre $x^2 - 2x - 1$ por el método de Horner se tiene la Tabla 3.7

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | $2$ | $-3$ | $-8$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $2$ | | $4$ | $2$ | | | |
| $1$ | | | $2$ | $1$ | | |
| | | | | $-8$ | $-4$ | |
| | | | | | $2a-14$ | $a-7$ |
| | $2$ | $1$ | $-4$ | $a-7$ | $0$ | $0$ |

Tabla 3.7

De donde se tiene que $b + 2a = 18$ y $c + a = 7$, que al sumarse resulta

$$3a + b + c = 25.$$

Luego, la expresión (3.15) se simplifica a la siguiente:

$$\begin{aligned} 2a + 9 &= 25 \\ 2a &= 16 \\ a &= 8. \end{aligned}$$

Finalmente, se deduce que $b = 2$ y $c = -1$. Por lo tanto,

$$\frac{a+b}{c^2} = 10.$$

$\square$

22. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros con las siguientes características:

- $\mathrm{grad}(p) = 4$;
- $p(3) = 212$;
- La división de $p(x)$ entre $(x^2 - x)(x + 2)$ tiene por residuo 2;
- El resto de dividir $p(x)$ entre $(x - 2)$ es 42.

Determine el polinomio $p(x)$. Además, calcule la suma de sus coeficientes y su término independiente.

*Solución.* Desde que el residuo de dividir $p(x)$ entre $(x^2 - x)(x + 2)$ es 2, por el algoritmo de la división se tiene que

$$p(x) = (x^2 - x)(x + 2)q(x) + 2. \tag{3.16}$$

Luego, al evaluar $x = 1$ en (3.16), obtenemos $p(1) = 2$, es decir la suma de coeficientes es 2.

Al evaluar $x = 0$ en (3.16), se obtiene $p(0) = 2$. Así, el término independiente es 2.

Como $\mathrm{grad}(p) = 4$ se deduce que $q(x)$ en (3.16) debe tener grado 1, es decir

$$q(x) = ax + b.$$

Así, $p(x) = (x^2 - x)(x + 2)(ax + b) + 2$. Ahora, como $p(3) = 212$ y por el Teorema de Resto $p(2) = 42$ se obtiene

$$\begin{aligned} 212 &= 30(3a + b) + 2 \\ 42 &= 8(2a + b) + 2, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $a = 2$ y $b = 1$. Por lo tanto,

$$p(x) = (x^2 - x)(x + 2)(2x + 1) + 2.$$

□

23. Sea $p(x)$ un polinomio tal que $p(x + 1) = ax^2 + bcx + \left(\dfrac{1}{b} - c\right)$, donde

$$a = (1 + \sqrt{3})^4 + (1 - \sqrt{3})^4,\ b = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \text{ y } c = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}.$$

*a*) Determine el polinomio $p(x)$.

*b*) Determine el cociente y el resto de dividir $p(x)$ entre $x^2 + 1$.

*Solución.*

*a*) Primero, el valor simplificado de $a$ es

$$\begin{aligned} a &= (1 + \sqrt{3})^4 + (1 - \sqrt{3})^4 \\ &= (4 + 2\sqrt{3})^2 + (4 - 2\sqrt{3})^2 \\ &= 2(28) \\ &= 56. \end{aligned}$$

Segundo, el producto de $b$ y $c$ es

$$\begin{aligned} bc &= \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \times \frac{1}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= 1 \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $\dfrac{1}{b} - c = 0$.

Así, $p(x+1) = 56x^2 + x$. Luego, empleando un cambio de variable, se obtiene

$$p(x) = 56x^2 - 111x + 55.$$

| 1 | 56 | $-111$ | $55$ |
|---|---|---|---|
| 0 | | $0$ | $-56$ |
| $-1$ | | | |
| | 56 | $-111$ | $-1$ |

Tabla 3.8

*b*) Al aplicar el método de Horner, se tiene la Tabla 3.8.
Por lo tanto, el cociente es $56$ y el resto es $-111x - 1$.

$\square$

24. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si la división de $x^n + ax + b$ entre $x^2 - 2x + 1$ es exacta, determine $a$ y $b$ en términos de $n$.

*Solución.* Como la división es exacta, al aplicar el método de Horner se obtiene la Tabla 3.9

| 1 | 1 | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 2 | -1 | | | | |
| -1 | | | 4 | $\cdots$ | | | |
| | | | | $\ddots$ | | | |
| | | | | | $2n-4$ | $-n+2$ | |
| | | | | | $-n+3$ | $2n-2$ | $-n+1$ |
| | 1 | 2 | 3 | $\cdots$ | $n-1$ | 0 | 0 |

Tabla 3.9

De las últimas dos columnas de la Tabla 3.9, se concluye lo siguiente:

$$a = -n \text{ y } b = n - 1.$$

$\square$

25. La Tabla 3.10 representa la división, por el método de Horner, del polinomio $p(x)$ entre el polinomio $t(x)$.

| $a$ | $d$ | $e$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | | $f$ | $b$ | |
| $2a$ | | | $12$ | $k$ |
| | $2$ | $3$ | $25$ | $k$ |

Tabla 3.10

Determine el dividendo, divisor y residuo de tal división.

*Solución.* De la última columna de la Tabla (3.10) se deduce que $h = 0$. De la segunda y tercera columna se observa que

$$d = 2a \text{ y } e + f = 3a.$$

También se nota de la tercera fila, que $b = 4$ y $k = 6a$. Pero de la segunda fila, se nota que $f = 2b$ y $b = 4a$. Esto implica que $f = 8$ y $a = 1$. En consecuencia, $d = 2$ y $e = -5$.

Luego, de la cuarta columna se obtiene que

$$g + b + 12 = 25,$$

de donde $g = 9$. Por lo tanto, el dividendo es $2x^3 - 5x^2 + 9x$, el divisor es $x^2 - 4x - 2$ y finalmente el resto es $25x + 6$. $\square$

26. Sean $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio de grado 3 tal que

$$p(-1) = p(0) = p(1) = 0,$$

y $q(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ un polinomio de grado 2 tal que su término independiente y la suma de sus coeficientes son $-1$ y $2$, respectivamente.

*a*) Determine $a, b, c$ y $d$.

*b*) Con los valores de $a, b, c$ y $d$ obtenidos en el apartado anterior, determine el cociente de dividir $p(x)$ entre $q(x)$.

*Solución.*

*a*) Como el término independiente de $q$ es $-1$, se tiene que

$$c = -1.$$

De la suma de coeficientes se deduce que

$$3a + 2b = 3.$$

De igual forma con respecto al polinomio $p$, de $p(0) = 0$ se obtiene

$$d = 0.$$

Ahora, del hecho que $p(1) = p(-1) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -a + b &= -1, \end{aligned}$$

que a su vez implica $a = 1$ y $b = 0$.

*b*) Los polinomios son

$$p(x) = x^3 - x \text{ y } q(x) = 3x^2 - 1.$$

Luego, aplicando el método de Horner se obtiene la Tabla 3.11

$$\begin{array}{c|cc|cc} 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 1/3 & \\ 1 & & & 0 & 0 \\ \hline & 1/3 & 0 & -2/3 & 0 \end{array}$$

Tabla 3.11

de donde el cociente es $\frac{1}{3}x$ y el resto es $-\frac{2}{3}x$.

$\square$

27. Al factorizar el polinomio mónico $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado 2, se obtiene que:

$$p(x) = (x - a)(x - 2).$$

Determine el valor de $a$ de tal modo que el polinomio $q(x) = p(5 - x)$ tenga la misma factorización.

*Solución.* Note que

$$\begin{aligned} q(x) &= p(5-x) \\ &= (5-x-a)(5-x-2) \\ &= (5-a-x)(3-x) \\ &= (x-3)(x-(5-a)). \end{aligned}$$

Por condición del ejercicio se debe cumplir

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-a)(x-2) \\ (x-3)(x-(5-a)) &= (x-a)(x-2), \end{aligned}$$

de donde se deduce que $a = 3$. □

28. Factorice el polinomio

$$p(x) = (x^2 + x - 1)^2 - (2x + 1)^2.$$

*Solución.* Aplicando diferencia de cuadrados se obtiene que

$$p(x) = (x^2 + 3x)(x^2 - x - 2),$$

luego factorizando $x$ en el primer factor y aplicando aspa simple en el segundo factor se tiene que

$$p(x) = x(x+3)(x-2)(x+1).$$

□

29. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio de grado 2, con coeficientes enteros, que al factorizar por aspa simple se obtiene $(ax + b)(ax + c)$. Si 2 es una raíz de $p(x)$, determine los valores de $a$, $b$ y $c$.

*Solución.* Se debe cumplir que $ax^2 + bx + c = (ax + b)(ax + c)$, lo que implica

$$a^2 = a,\ ac + ab = b \text{ y } bc = c.$$

Como $a \neq 0$, pues $p(x)$ es un polinomio de grado 2, se tiene de la primera igualdad que $a = 1$. Luego, de la segunda igualdad uno deduce que $c = 0$. Así,

$$p(x) = x^2 + bx = x(x+b).$$

Desde que 2 es una raíz, se concluye que $b = -2$. □

30. Sean $a$ y $b$ dos números enteros. Factorice el polinomio

$$p(x) = ax(bx + a) + b^2(x - 1) + a^2.$$

*Solución.* Primero se escribe el polinomio ordenado y completo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} p(x) &= abx^2 + a^2x + b^2x - b^2 + a^2 \\ &= abx^2 + (a^2 + b^2)x + a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Luego, por aspa simple se obtiene que

$$p(x) = (ax + a + b)(bx + a - b).$$

□

## Ecuaciones polinomiales

Una **ecuación polinomial** es una expresión de la siguiente forma

$$p(x) = 0, \tag{3.17}$$

donde $p(x)$ es un polinomio. El **conjunto solución** de la ecuación polinomial (3.17) es el conjunto

$$\{a \in \mathbb{R} : \text{ el polinomio evaluado en } a \text{ es cero, es decir } p(a) = 0\}.$$

Es importante notar que la ecuación polinomial (3.17) no significa que el polinomio $p(x)$ sea igual al polinomio nulo, en el sentido de igualdad de polinomios. Asimismo, es importante mencionar que si el polinomio tiene grado $n \in \mathbb{N}$, entonces el polinomio posee a lo más $n$ raíces, incluyendo raíces iguales, y que esto a su vez implica que la ecuación polinomial también tiene a lo más $n$ soluciones.

Si $\operatorname{grad}(p) = 1$, entonces la ecuación polinomial (3.17) se reescribe como sigue:

$$ax + b = 0,$$

usualmente llamada **ecuación lineal**.

De manera similar al caso anterior, cuando $\operatorname{grad}(p) = 2$, la ecuación polinomial (3.17) se reescribe de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

la cual es llamada **ecuación cuadrática**.

La existencia de solución a una ecuación cuadrática está fuertemente relacionada con el **discriminante** $\Delta(p)$ del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, el cual es definido como

$$\Delta(p) = b^2 - 4ac.$$

Cuando $\Delta(p) < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución. Cuando $\Delta(p) \geqslant 0$, la ecuación cuadrática tiene solución y se puede probar que dichas soluciones son

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta(p)}}{2a}.$$

Como se puede observar, si el discriminante es nulo se tiene una única solución. Cuando no hubiese lugar a confusión sobre el polinomio $p(x)$, escribiremos $\Delta$ en lugar de $\Delta(p)$.

Un resultado importante debido a Cardano y Viette (ver Teorema 61 del capítulo 2 de (Cotrina, 2015)) nos dice que en una ecuación cuadrática con solución es posible saber la suma y producto de las raíces sin necesidad de conocer exactamente quiénes son dichas raíces. A saber, si $r_1$ y $r_2$ son las soluciones de la ecuación cuadrática, entonces $r_1 + r_2 = -b/a$ y $r_1 \times r_2 = c/a$.

## Problemas

1. Demuestre que todo polinomio de grado 1, mónico y con coeficientes enteros tiene una raíz entera.

   *Solución.* Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grado 1 y mónico, esto significa que

   $$p(x) = x + b,$$

   donde $b \in \mathbb{Z}$. Ahora, para determinar su raíz, se iguala el polinomio a cero, es decir se resuelve la ecuación

   $$x + b = 0,$$

   de donde se deduce que $-b \in \mathbb{Z}$ es su raíz. □

2. Indique el conjunto solución de la ecuación

   $$6x - \frac{1}{2}(2x - 3) = 3(1 - x) - \frac{7}{6}(x + 2)$$

*Solución.* Al simplificar la expresión se obtiene

$$
\begin{aligned}
6x - \frac{1}{2}(2x-3) &= 3(1-x) - \frac{7}{6}(x+2) \\
6x - x + \frac{3}{2} &= 3 - 3x - \frac{7}{6}x - \frac{7}{3} \\
6x - x + 3x + \frac{7}{6}x &= 3 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} \\
\frac{55}{6}x &= -\frac{5}{6} \\
x &= -\frac{1}{11}.
\end{aligned}
$$

Así, el conjunto solución es $\{-1/11\}$. □

3. Encuentre los valores de $u$ para que la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2ux - 3u = 0$$

tenga solución única.

*Solución.* Existe solución única si y solo si el discriminante es cero, es decir $\triangle = 0$. Como $\Delta = 4u^2 + 12u$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
4u^2 + 12u &= 0 \\
4u(u+3) &= 0,
\end{aligned}
$$

lo que implica que $u = 0$ o $u = -3$. □

4. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 313, calcular el menor de dichos números.

*Solución.* Sean $x$ y $x+1$, los números naturales consecutivos, entonces

$$x^2 + (x+1)^2 = 313.$$

La igualdad anterior se convierte en la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^2 + 2x - 312 = 0$$

pero el polinomio se puede factorizar por aspa simple quedando la ecuación de la siguiente manera:

$$(x-12)(x+13)=0.$$

Luego, $x = 12$ o $x = -13$, pero como $x$ debe ser natural se concluye que $x = 12$. □

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y el polinomio cuadrático

$$p(x) = (a^2 - b^3)x^2 + (b^3 - c)x + (c - a^2)$$

*a*) Calcule el resto de dividir $p(-x)$ entre $x-1$.

*b*) Sean $x_1$ y $x_2$ las raíces de $p(x)$. Calcule ${x_1}^{x_2} + {x_2}^{x_1} - x_1x_2 + 1$.

*Solución.*

*a*) Por el teorema del resto se hace $x-1=0$, esto implica que el resto es $p(-1) = 2c - 2b^3$.

*b*) Factorizando por aspa simple

$$p(x) = \left((a^2-b^3)x + a^2 - c\right)(x-1),$$

de aquí $x_1 = \dfrac{c-a^2}{a^2-b^3}$ y $x_2 = 1$. Por lo tanto,

$${x_1}^{x_2} + {x_2}^{x_1} - x_1x_2 + 1 = 2.$$

□

6. Dado el polinomio

$$p(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)^2 - 5\left(x^2 - 5x + 6\right) + 6,$$

determine la suma y el producto de sus raíces.

*Solución.* Por aspa simple se tiene que

$$p(x) = (x^2 - 5x + 3)(x^2 - 5x + 4).$$

Luego, por el Teorema de Cardano-Viette obtenemos lo siguiente:

- La suma y el producto de las raíces del primer factor, $x^2 - 5x + 3$, son $5$ y $3$, respectivamente.
- La suma y el producto de las raíces del segundo factor, $x^2 - 5x + 4$, son $5$ y $4$, respectivamente.

Finalmente, concluimos que la suma de las raíces de $p(x)$ es $10$ y que el producto de sus raíces es $12$. $\square$

7. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación cuadrática

$$x^2 + ax + 2a = 0$$

tiene raíces reales a $x_1$ y $x_2$. Determine el valor de $(x_1 + 2)(x_2 + 2)$.

*Solución.* Como $x_1$ y $x_2$ son raíces reales, entonces por el Teorema de Cardano-Viette se cumple que:

$$x_1 + x_2 = -a \text{ y } x_1 x_2 = 2a.$$

Luego,

$$\begin{aligned}(x_1 + 2)(x_2 + 2) &= x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 \\ &= 2a + 2(-a) + 4 \\ &= 4.\end{aligned}$$

$\square$

8. Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $a + b + c = -4$. Si las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son $\left\{3 + \dfrac{4}{\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right\}$, determine las raíces de la siguiente ecuación:

$$bx^2 + cx + a = 0$$

*Solución.* Al racionalizar las raíces de la ecuación inicial tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \frac{4}{\sqrt{2}} & x_2 &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \\ &= 3 + \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} & &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \times \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \\ &= 3 + 2\sqrt{2} & &= (\sqrt{2}-1)^2 \\ & & &= 3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Al aplicar el Teorema de Cardano-Viette, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 &= 1 = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Luego, $b = -6a$ y $c = a$.

Al reemplazar en el dato $a + b + c = -4$, se tiene que

$$a - 6a + a = -4.$$

Por lo tanto, $a = 1$, $b = -6$, $c = 1$.

Ahora, la ecuación por resolver es

$$-6x^2 + x + 1 = 0,$$

que luego de factorizar por aspa simple se escribe como

$$(3x + 1)(-2x + 1) = 0.$$

Luego, las raíces son $-\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{1}{2}$. □

9. Resuelva la ecuación

$$(x^2 - 2x + 3)^2 - x^2 + 2x - 9 = 0.$$

*Solución.* Al realizar el siguiente cambio de variable $x^2 - 2x = a$ se tiene que la ecuación se simplifica a la siguiente:

$$\begin{aligned} (a + 3)^2 - a - 9 &= 0 \\ a^2 + 6a + 9 - a - 9 &= 0 \\ a(a + 5) &= 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $a = 0$ o $a = -5$, es decir

$$x^2 - 2x = 0 \text{ o } x^2 - 2x + 5 = 0.$$

La primera igualdad implica que $x = 0$ o $x = 2$. La segunda no tiene solución real. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{0, 2\}$. □

10. Si $x_1$ y $x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 6x + 4 = 0,$$

calcule el valor de $\dfrac{4}{6 - x_1} + \dfrac{4}{6 - x_2}$.

*Solución.* Por el Teorema de Cardano-Viette se tiene que

$$x_1 + x_2 = 6 \text{ y } x_1 x_2 = 4.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{4}{6 - x_1} + \frac{4}{6 - x_2} &= 4\left(\frac{12 - (x_1 + x_2)}{36 - 6(x_1 + x_2) + x_1 x_2}\right) \\
&= 4\left(\frac{12 - 6}{36 - 6(6) + 4}\right) \\
&= 6.
\end{aligned}$$

□

11. Sean $a$ y $b$ dos números reales tales que $a < b < 0$. Resuelva la ecuación

$$\frac{x^2 - a}{b^2 - a^2} = \frac{x + a}{a^2 - b^2}$$

*Solución.* Es claro que

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - a}{b^2 - a^2} &= \frac{x + a}{a^2 - b^2} \\
x^2 - a &= -(x + a) \\
x^2 + x &= 0 \\
x(x + 1) &= 0.
\end{aligned}$$

Luego, las soluciones son $0$ y $-1$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{0, -1\}$. □

12. A partir de la ecuación

$$\log\left(x^{\log(x)}\right) - b\log(x) + a = 0, \tag{3.18}$$

cuyo conjunto solución es denotado por $\mathscr{C}$, justifique la falsedad de las siguientes proposiciones:

*a*) $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ [\ \mathscr{C} \neq \varnothing\ ]$.

*b*) $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ [\ \mathscr{C} \neq \varnothing\ \rightarrow\ n(\mathscr{C}) = 2\ ]$.

*Solución.*

*a*) Para $a = 1$ y $b = 0$, la ecuación (3.18) se puede reescribir como

$$(\log(x))^2 + 1 = 0$$

que no admite solución real, por tanto $\mathscr{C} = \varnothing$.

*b*) Para $a = 1$ y $b = 2$, la ecuación (3.18) se reduce a la siguiente:

$$(\log(x))^2 - 2\log(x) + 1 = 0,$$

de donde $\log(x) = 1$, es decir $x = 10$ es la única solución. Por lo tanto, $n(\mathscr{C}) = 1$.

□

13. La suma de las soluciones de la siguiente ecuación:

$$3 \times 2^{6x} - 2^{3x+3} + 4 = 0$$

se puede expresar como $\log_8(a)$. Determine el valor de $a$.

*Solución.* Usando el cambio de variable $m = 2^{3x}$, la ecuación se transforma en la siguiente ecuación cuadrática

$$3m^2 - 8m + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son $m = \dfrac{2}{3}$ y $m = 2$.

Si $m = \dfrac{2}{3}$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{3x_1} &= \frac{2}{3} \\ 3x_1 &= \log_2\left(\frac{2}{3}\right) \\ x_1 &= \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Si $m = 2$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{3x_2} &= 2 \\ 3x_2 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\left[\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + 1\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\log_2\left(\frac{2}{3}\right) + \log_2(2)\right] \\ &= \frac{1}{3}\log_2\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= \log_8\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = \dfrac{4}{3}$. □

14. Determine el valor de $x$ en la ecuación:

$$\frac{1 + \log_2 x}{1 + \log_x 2} = \log_x (4x).$$

*Solución.* Usando las propiedades elementales de logaritmos, se tiene que la ecuación se reduce a la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \dfrac{1}{\log_x 2}}{1 + \log_x 2} &= \log_x 4 + \log_x x \\ \frac{1 + \dfrac{1}{\log_x 2}}{1 + \log_x 2} &= 2\log_x 2 + 1 \\ \frac{1}{\log_x 2} &= 2\log_x 2 + 1. \end{aligned}$$

Al considerar el siguiente cambio de variable $m = \log_x 2$, se obtiene

$$\frac{1}{m} = 2m + 1.$$

Esto nos permite llegar a la siguiente ecuación cuadrática:

$$2m^2 + m - 1 = 0,$$

que luego de factorizar por aspa simple se reescribe como

$$(2m - 1)(m + 1) = 0,$$

cuyas soluciones son $m = \frac{1}{2}$ y $m = -1$. Luego, $x = 4$ y $x = \dfrac{1}{2}$, respectivamente. Sin embargo, $x = \dfrac{1}{2}$ no es solución de la ecuación, dado que $1 + \log_x 2$ debería ser no nulo. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{4\}$. $\square$

15. Si duplicamos el lado de un cuadrado, su área aumenta en $147$ cm$^2$. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

*Solución.* Sea $x$ cm la medida del lado del cuadrado, luego

$$\begin{aligned}(2x)^2 &= x^2 + 147\\ 3x^2 &= 147\\ x^2 &= 49,\end{aligned}$$

de donde $x = 7$ o $x = -7$. Como $x \geqslant 0$, por ser una longitud, se concluye que el lado del cuadrado mide 7 cm. $\square$

16. La base de un rectángulo mide $5$ cm más que la altura. Si disminuimos la altura en $2$ cm, el área del nuevo rectángulo será 60 cm$^2$, determine las longitudes de los lados del rectángulo inicial.

*Solución.* Sea $x$ cm la medida de la base de un rectángulo inicial. Así, su altura es $x - 5$ cm. Luego,

$$\begin{aligned}x(x-7) &= 60\\ x^2 - 7x - 60 &= 0\\ (x-12)(x+5) &= 0,\end{aligned}$$

de donde $x = 12$ o $x = -5$. Como $x \geqslant 0$, por ser longitud, se concluye que la base del rectángulo mide 12 cm y su altura 7 cm. $\square$

17. Manuel compró una determinada cantidad de artículos, por un total de 450 dólares. Después de un tiempo regresa a comprar con la misma cantidad de dinero, pero se da con la sorpresa de que cada artículo ha subido 3 dólares, por lo que se vio obligado a comprar 5 artículos menos con el mismo monto. Determine la cantidad de artículos que compró inicialmente y el precio de cada uno.

    *Solución.* Sean $p$ el precio el unitario y $x$ el número de artículos. El dinero por considerar es 450 dólares. Luego, se deben cumplir

$$\begin{aligned} px &= 450 \\ (p+3)(x-5) &= 450, \end{aligned}$$

de donde

$$px = (p+3)(x-5),$$

que a su vez se simplifica a

$$3x - 5p = 15.$$

Desde que $p = \dfrac{450}{x}$, se tiene que

$$\begin{aligned} 3x - 5\left(\frac{450}{x}\right) &= 15 \\ 3x^2 - 15x - 2250 &= 0 \\ x^2 - 5x - 750 &= 0 \\ (x-30)(x+25) &= 0, \end{aligned}$$

de donde $x = 30$ o $x = -25$, pero como $x$ es el número de artículos, debe ser positivo. Por lo tanto, $x = 30$ artículos y $p = 15$ dólares. □

18. Koala & Company ha construido un edificio de 60 apartamentos. Del pasado se sabe que si ellos cobran una renta mensual de 150 dólares por apartamento, todas las viviendas son ocupadas, pero por cada incremento de 3 dólares en la renta, un apartamento queda vacante. Calcule la renta total recaudada si se alquilaron 50 apartamentos.

    *Solución.* Sea $x$ el número de incrementos de \$3 en la renta realizados a partir de los \$150. Luego, la renta es

$$R(x) = (60 - x)(150 + 3x).$$

Si se alquilaron 50 apartamentos, se tiene que $x = 10$. Así, $R(10) = 9000$ dólares. □

19. Highland coffee planea introducir al mercado peruano dos tipos de café, a partir de la mezcla de cafés reconocidos por los consumidores. Para elaborar un paquete del tipo I, empleará "$a$" kilogramos de café Tunki y "$b$" kilogramos de café Altomayo. Asimismo, para elaborar un paquete de tipo II empleará "$a$" kilogramos de café Tunki y "$c$" kilogramos de café Mocha. Se conoce que un paquete del tipo II posee un kilo más que el de tipo I, además

$$bc = 12.$$

Determine el número de kilos de café altomayo y de café Mocha que requiere la compañía para elaborar cada uno de los paquetes.

*Solución.* Según los datos establecidos, se nota que:

$$\begin{aligned} \text{Total de kilos del paquete del tipo I} &= a + b \\ \text{Total de kilos del paquete del tipo II} &= a + c \end{aligned}$$

Como $a + b + 1 = a + c$, se deduce que $c = b + 1$. De $bc = 12$ se obtiene que

$$\begin{aligned} (b+1)b &= 12 \\ b^2 + b - 12 &= 0 \\ (b+4)(b-3) &= 0 \end{aligned}$$

deduciéndose que $b = 3$ (por ser una cantidad no negativa) y por consecuencia $c = 4$.

Por lo tanto, la compañía requiere $3$ kilogramos de café Altomayo y $4$ kilogramos de café Mocha para los paquetes I y II, respectivamente. $\square$

20. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

*a*) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, la ecuación $ax = b$ tiene solución única.

*b*) Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación cuadrática

$$bx^2 + ax + c = 0$$

tiene dos soluciones reales.

*Solución.*

*a*) Para $a = 0$ y $b = 1$, la ecuación no tiene solución.

*b*) Para $a = 0$, $b = 1$ y $c = 1$, se tiene que $b^2 - 4ac = 1 > 0$. Sin embargo, la ecuación con estos valores es

$$x^2 + 1 = 0,$$

que no posee soluciones reales.

$\square$

21. El profesor Percy dicta un polinomio mónico de segundo grado a sus alumnos y les pide que determinen las raíces de dicho polinomio, uno de sus alumnos se equivoca al escribir el término independiente y obtiene como raíces 5 y 3, otro alumno se equivoca en el término de primer grado y obtiene como raíces a -2 y 6.

    *a*) Determine el polinomio de segundo grado que dictó el profesor Percy.

    *b*) Calcule el mayor valor de la diferencia de raíces del polinomio que dictó el profesor Percy.

*Solución.* Sea

$$p(x) = x^2 + bx + c$$

el polinomio que dictó el profesor Percy.

*a*) El primer alumno escribió

$$x^2 + bx + d,$$

con $c \neq d$, sumando sus raíces se tiene $-b = 5 + 3$, de donde $b = -8$.
El segundo alumno escribió

$$x^2 + ex + c,$$

con $e \neq b$, multiplicando sus raíces se tiene $c = (-2)(6)$ de aquí $c = -12$.
Por lo tanto,

$$p(x) = x^2 - 8x - 12.$$

*b*) Usando la fórmula para calcular las raíces del polinomio se obtiene

$$x_1 = 4 + 2\sqrt{7} \text{ y } x_2 = 4 - 2\sqrt{7}.$$

Luego, el mayor valor de la diferencia de estas raíces es $x_1 - x_2 = 4\sqrt{7}$.

$\square$

## Fracciones racionales

Una **fracción racional** es una expresión de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} \tag{3.19}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios y $q(x)$ no es el polinomio nulo.

Si en la fracción racional (3.19) se tiene que $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(q)$, este se denomina **propia**; caso contrario se dice que es **impropia**.

El **método de descomposición de fracciones parciales** consiste básicamente en descomponer una fracción racional propia como la suma de fracciones racionales propias. En ese sentido, dependiendo de quién sea el polinomio $q(x)$, la fracción racional (3.19) tendrá una descomposición especial; cada uno de estos casos puede revisarse en la sección 8 del capítulo 2 de (Cotrina, 2015).

## Problemas

1. De la siguiente descomposición en fracciones parciales

$$\frac{8}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

determine $A+B+a+b$.

*Solución.* Haciendo la descomposición

$$\frac{8}{(x-1)(x-3)} = \frac{M}{x-1} + \frac{N}{x-3} = \frac{M(x-3)+N(x-1)}{(x-1)(x-3)},$$

de donde

$$8 = M(x-3)+N(x-1),$$

deduciéndose que $M=-4$ y $N=4$. Luego la descomposición es

$$\frac{4}{x-3} - \frac{4}{x-1}.$$

Por lo tanto, $A+B+a+b=4$. □

2. Descomponer como suma de fracciones parciales la siguiente fracción:

$$\frac{10x^3-10x^2-50x}{x^4-2x^3-13x^2+14x+24}.$$

Además, determine la suma de los numeradores de dichas fracciones parciales.

*Solución.* Factorizando el denominador obtenemos

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = (x+1)(x-2)(x+3)(x-4).$$

Luego,

$$\frac{10x^3 - 10x^2 - 50x}{(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-4},$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} 10x^3 - 10x^2 - 50x \quad = \quad & A(x-2)(x+3)(x-4)+ \\ & B(x+1)(x+3)(x-4)+ \\ & C(x+1)(x-2)(x-4)+ \\ & D(x+1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

Luego, evaluando conveniente en $x = -1$, se obtiene que $A = 1$. Al evaluar en $x = 2$, se tiene que $B = 2$. De manera similar con $x = -3$ se deduce que $C = 3$. Finalmente, al reemplazar $x = 4$ en la anterior igualdad se consigue ver que $D = 4$. Así,

$$\frac{10x^3 - 10x^2 - 50x}{(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} + \frac{4}{x-4}.$$

Por lo tanto, $A + B + C + D = 10$. □

3. Realice la descomposición en fracciones parciales de:

$$\frac{x+3}{(x+2)(x+3)^2}$$

*Solución.* Simplificando tenemos

$$\frac{x+3}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{1}{(x+2)(x+3)}.$$

Luego, su descomposición en fracciones parciales es de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

De donde

$$1 = A(x+3) + B(x+2),$$

tomando $x = -3$ y $x = -2$ se deduce que $A = 1$ y $B = -1$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3}.$$

□

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{n^2+5n+6}$$

*Solución.* Se observa que

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &= \frac{1}{3 \times 4} \\ \frac{1}{20} &= \frac{1}{4 \times 5} \\ \frac{1}{30} &= \frac{1}{5 \times 6} \\ &\vdots \\ \frac{1}{n^2+5n+6} &= \frac{1}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

Sin embargo, del ejercicio anterior se tiene que

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(x+2)(x+3)} &= \sum_{x=1}^{n} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) \\
&= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \\
&= \frac{n}{3n+9}.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Sean las fracciones racionales:

$$M = \frac{ax^2 + bx + 1}{(x+2)^2} \ \text{ y } \ N = \frac{2x+1}{bx^2 + x + 2},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si $M$ es una fracción propia y $N$ es un fracción impropia, determine el valor de $a^3 + b^3$.

*Solución.* A partir de que $M$ es una fracción propia, se tiene que

$$\operatorname{grad}(ax^2 + bx + 1) < \operatorname{grad}((x+2)^2),$$

lo que implica $a = 0$.

Asimismo, como $N$ es una fracción impropia, se tiene que

$$\operatorname{grad}(2x+1) \geqslant \operatorname{grad}(bx^2 + x + 2),$$

y esto a su vez implica $b = 0$. Por lo tanto, $a^3 + b^3 = 0$. $\square$

6. Dada la siguiente igualdad:

$$\frac{bx+a}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{ax+b}{(x^2-2x+1)},$$

calcule $b - a$.

*Solución.* Al sumar las fracciones del lado derecho se obtiene la fracción del lado izquierdo, así

$$\begin{aligned}\frac{bx+a}{(x-1)^2} &= \frac{1}{(x-1)} + \frac{ax+b}{(x^2-2x+1)}\\ &= \frac{1}{(x-1)} + \frac{ax+b}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(x-1)+(ax+b)}{(x-1)^2}\\ &= \frac{(1+a)x+(b-1)}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

De igualar los numeradores, resulta

$$bx+a=(1+a)x+(b-1),$$

de donde

$$b=1+a \text{ y } a=b-1.$$

Finalmente, de cualquiera de las dos igualdades anteriores se tiene que $b-a=1$. □

7. Luego de simplificar, resuelva e indique el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{2(x^2-x+1)}{x^3+1} - \frac{3(x^3+8+6x^2+12x)}{(x+1)(x+2)^3} = \frac{1}{2}$$

*Solución.* Se observa que $x \neq -1$ y $x \neq -2$. Luego, desde que

$$\begin{aligned}x^3+1 &= (x+1)(x^2-x+1)\\ (x+2)^3 &= x^3+8+6x^2+12x\end{aligned}$$

la ecuación puede escribirse como sigue

$$\frac{2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} - \frac{3(x+2)^3}{(x+1)(x+2)^3} = \frac{1}{2}$$

que al simplificar nos permite obtener

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+1}&=\frac{1}{2}\\
-\frac{1}{x+1}&=\frac{1}{2}\\
x+1&=-2\\
x&=-3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-3\}$. □

8. Considere la siguiente fracción racional:

$$\frac{ax^3+x^2}{x(x^2-1)},$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Si la fracción es propia, determine el valor de $a$ y su descomposición en fracciones parciales.

*Solución.* Por ser propia, se tiene que

$$\operatorname{grad}(ax^3+x^2) < \operatorname{grad}(x(x^2-1)),$$

esto implica que $a=0$. Luego, la fracción se puede descomponer en fracciones parciales mediante la siguiente expresión:

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1},$$

de donde se tiene la siguiente identidad:

$$x=A(x-1)+B(x+1),$$

de la cual se deduce que $A=B=\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right).$$

□

# 4
# Desigualdades

Dos números reales pueden ser comparados en términos de orden mediante la noción de *desigualdad*. Sean dos números reales $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, los cuales se desea comparar. Asumiendo que se sabe distinguir cuándo un número es positivo, negativo o nulo, se tienen las siguientes definiciones:

- Se dice que $a$ es **menor** o **estrictamente menor** que $b$ cuando $b - a$ es positivo, en este caso se escribe $a < b$.
- Se dice que $a$ es **mayor** o **estrictamente mayor** que $b$ cuando $a - b$ es positivo, en este caso se escribe $a > b$.
- Se dice que $a$ es **menor o igual** que $b$ cuando $b - a$ es cero o positivo, en este caso se escribe $a \leqslant b$.
- Se dice que $a$ es **mayor o igual** que $b$ cuando $a - b$ es cero o positivo, en este caso se escribe $a \geqslant b$.

## Intervalos

Un **intervalo** es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que cualquier número entre dos elementos del subconjunto también pertenece a dicho subconjunto. Es decir, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si se cumple

$$\forall x, z \in I, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad [x < y < z \longrightarrow y \in I].$$

El conjunto vacío y un conjunto unitario (esto es, que tiene un solo elemento) son considerados intervalos, pero son llamados **intervalos degenerados**.

## Problemas

1. Dados los intervalos $A = ]-\infty, 2]$, $B = [-3, 6[$ y $C = ]2, +\infty[$, determine si los siguientes conjuntos son intervalos

   *a*) $A \cup B$

   *b*) $A - B$

   *c*) $(B \cup C) - A$

   *d*) $B \Delta C$

   *Solución.*

   *a*) Notemos que $A \cup B = ]-\infty, 6[$ es un intervalo, puesto que

   $$\forall a, b \in A \cup B, \forall x \in \mathbb{R}, \ [a < x < b \ \rightarrow \ x \in A \cup B] .$$

   *b*) Es claro que $A - B = ]-\infty, -3[$ es un intervalo, dado que

   $$\forall a, b \in A - B, \forall x \in \mathbb{R}, \ [a < x < b \ \rightarrow \ x \in A - B] .$$

   *c*) Primero observemos que $B \cup C = [-3, +\infty[$, luego $(B \cup C) - A = ]2, +\infty[$ es un intervalo, puesto que

   $$\forall a, b \in (B \cup C) - A, \forall x \in \mathbb{R}, \ [a < x < b \ \rightarrow \ x \in (B \cup C) - A] .$$

   *d*) No es complicado notar que $B \Delta C = [-3, 2] \cup [6, +\infty[$ no es un intervalo, ya que $0 \in B\Delta C, 7 \in B\Delta C$, pero 3 no pertenece al conjunto $B\Delta C$.

   $\square$

2. Use la definición de intervalo para demostrar que el siguiente conjunto es un intervalo:

   $$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge e < x^2 + x + 1 < \pi \right\} .$$

*Solución.* Sean $x, z \in A$ e $y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y < z$. Desde $x$ y $z$ son positivos y como $x < y$, se tiene que $y > 0$.

A continuación se mostrará que $y$ cumple la segunda condición para pertenecer al conjunto $A$. Primero, se observa que

$$x^2 < y^2 < z^2$$
$$x < y < z$$

Luego, al sumar ambas expresiones y al resultado sumarle 1, se obtiene

$$x^2 + x + 1 < y^2 + y + 1 < z^2 + z + 1.$$

Como $e < x^2 + x + 1$ y $z^2 + z + 1 < \pi$, se deduce que $e < y^2 + y + 1 < \pi$. Por lo tanto, $y \in A$ y por consecuencia $A$ es un intervalo. $\square$

## Inecuaciones

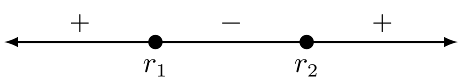
Para un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a > 0$, si el discriminante es positivo, es decir

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

se tienen dos raíces distintas

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

las cuales se pueden denotar por $r_1 < r_2$. Haciendo un análisis de signos, se obtienen tres zonas




De esta manera, el conjunto solución de la inecuación $p(x) \geqslant 0$ es

$$(-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty)$$

y de la inecuación $p(x) \leqslant 0$ es

$$[r_1, r_2].$$

Cuando $\Delta = 0$, las raíces son repetidas y así $r = -b/(2a)$. El conjunto solución de la inecuación $p(x) \geqslant 0$ es $\mathbb{R}$ y de la inecuación $p(x) \leqslant 0$ es el intervalo degenerado $\{r\}$. Para $\Delta < 0$, el conjunto solución de la inecuación $p(x) \geqslant 0$ es $\mathbb{R}$ y de la inecuación $p(x) \leqslant 0$ es el conjunto vacío.

## Problemas

1. Use la siguiente propiedad: $\forall x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(ax + by + cz) \leqslant \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \qquad (4.1)$$

para demostrar que:

*a*) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ [2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2]$.

*b*) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \{0\},\ \left[9 \leqslant (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\right]$.

*Solución.*

*a*) Sean $\alpha$ y $\beta$ dos números reales cualesquiera. Consideremos $a = y = \alpha$, $x = b = \beta$ y $c = z = 0$ al reemplazar en la propiedad (4.1), se tiene que

$$(\alpha\beta + \beta\alpha + 0) \leqslant \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + 0^2)}\sqrt{(\beta^2 + \alpha^2 + 0^2)},$$

que a su vez implica $2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2$.

*b*) Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ tres números reales diferentes de cero. Usando la desigualdad (4.1) con $a = \alpha, x = \dfrac{1}{\alpha}, b = \beta, y = \dfrac{1}{\beta}, c = \gamma, z = \dfrac{1}{\gamma}$ se tiene al reemplazar y elevar al cuadrado que:

$$9 = \left(\alpha\frac{1}{\alpha} + \beta\frac{1}{\beta} + \gamma\frac{1}{\gamma}\right)^2 \leqslant \left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right).$$

□

2. Resuelva la siguiente desigualdad $\max\{4, 9 - x\} \geqslant 3x + 6$.

*Solución.* Al resolver tendremos que analizar dos casos:

- Primero, supongamos que $9 - x \geqslant 4$, es decir $x \leqslant 5$. La desigualdad por resolver se simplifica a la siguiente:

$$9 - x \geqslant 3x + 6,$$

de donde se deduce que $x \leqslant \dfrac{3}{4}$. Esto implica que en este caso se resuelve en $\left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right]$.

- Segundo, supongamos que $9 - x < 4$, es decir $x > 5$. Luego, la desigualdad por resolver se reduce a
$$4 \geqslant 3x + 6.$$
La inecuación anterior no tiene solución.

Finalmente, el conjunto solución es la unión de los dos casos estudiados, es decir que el conjunto solución es

$$\left]-\infty, \frac{3}{4}\right] \cup \varnothing = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right].$$

$\square$

3. Determine el conjunto solución de la inecuación:

$$x^2 - \left(\frac{1}{a^2 b}\right) x + \frac{1}{a^2} \leqslant 0,$$

donde $a^2 + b^2 = 1$ y además $\min\{b - a, a\} > 0$.

*Solución.* Al usar $a^2 + b^2 = 1$, el polinomio cuadrático se factoriza de la siguiente manera:

$$x^2 - \left(\frac{1}{a^2 b}\right) x + \frac{1}{a^2} = x^2 - \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b}\right) x + \frac{1}{a^2} = \left(x - \frac{b}{a^2}\right)\left(x - \frac{1}{b}\right),$$

cuyas raíces son $r_1 = \dfrac{b}{a^2}$ y $r_2 = \dfrac{1}{b}$.

Como $\min\{b - a, a\} > 0$, se tiene que $b - a > 0$ y $a > 0$, lo que implica que $b > a > 0$. Esto nos permite concluir que $r_2 < r_1$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\left[\dfrac{1}{b}, \dfrac{b}{a^2}\right]$. $\square$

4. Una gran empresa de bienes raíces es propietaria de 96 departamentos, los cuales pueden ser alquilados cada uno en \$550 mensuales. Sin embargo, por cada \$25 mensuales de aumento en el alquiler de cada uno, se tendrán 3 departamentos desocupados sin posibilidad de ser alquilados. Si la empresa desea recibir por lo menos \$54600 mensuales, ¿cuál será el máximo alquiler mensual de cada departamento?

*Solución.* Sea $x$ el número de aumentos de $\$25$. Luego, cuando el alquiler mensual es $\$(550 + 25x)$, se alquilan solo

$$96 - 3x$$

departamentos. Lo que recibe la empresa será

$$\$(550 + 25x)(96 - 3x).$$

Si la empresa desea recibir por lo menos $\$54600$ mensuales, entonces este dinero no puede ser menor que $\$54600$. Así,

$$\begin{aligned} (550 + 25x)(96 - 3x) &\geqslant 54600 \\ -75x^2 + 750x + 52800 &\geqslant 54600 \\ x^2 - 10x + 24 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Al resolver esta inecuación se tiene que $x \in [4, 6]$, pero como $x$ es un número natural, los valores de $x$ solo pueden ser $4, 5, 6$. Por lo tanto, la máxima renta mensual será $550 + 25(6) = 700$ dólares. □

5. La empresa A paga a sus trabajadores \$10 por artículo vendido más una cantidad fija de \$500. Otra empresa B de la competencia paga \$12 por artículo y \$400 de sueldo fijo. ¿ Cuántos artículos debe vender como mínimo un trabajador para ganar más dinero en la empresa B que en la A?.

   *Solución.* Sea $x$ la cantidad de artículos vendidos por el vendedor. En la empresa A ganaría

   $$\$500 + 10x$$

   y en la empresa B ganaría

   $$\$400 + 12x.$$

   Para que gane más en la empresa B debe ocurrir que

   $$400 + 12x > 500 + 10x,$$

   lo cual implica que $x > 50$. Luego, el trabajador debe vender como mínimo 51 artículos. □

6. Un editor puede vender 14000 ejemplares de un libro al precio de \$25 cada uno. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 ejemplares.

*a*) Determine el precio máximo que deberá fijarse a cada ejemplar con el objeto de lograr ingresos de por lo menos $\$350000$.

*b*) Determine el precio al que se obtiene el máximo ingreso.

*Solución.* Sea $x$ el número de incrementos de un dólar en el precio. El ingreso se obtiene por

$$I = (14000 - 400x)(25 + x).$$

*a*) Dado que los ingresos deben ser de por lo menos $\$350000$, planteamos la inecuación:

$$(14000 - 400x)(25 + x) \geqslant 350000,$$

que al factorizar $400$ en el primer factor se obtiene

$$400(35 - x)(25 + x) \geqslant 400 \times 875,$$

que a su vez se simplifica y reduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (35 - x)(25 + x) &\geqslant 875 \\ -x^2 + 10x + 875 &\geqslant 875 \\ x^2 - 10x &\leqslant 0 \\ x(x - 10) &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Luego de resolver la inecuación cuadrática, se tiene que

$$0 \leqslant x \leqslant 10.$$

Así, para $x = 10$, el precio máximo es $\$35$.

*b*) Al completar cuadrados sobre la expresión que determina el ingreso, se obtiene:

$$I = -400(x - 5)^2 + 360000,$$

de donde se deduce que este es máximo cuando $x = 5$, siendo el precio respectivo de $\$30$.

□

7. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

*a*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [x^2 - 3x + 2 > 0]$.

*b*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [(x^3 < x^2) \longrightarrow (0 < x < 1)]$.

*c*) $\forall a, b, x \in \mathbb{R} - \{0\},\ \left[ax < b \to x < \dfrac{b}{a}\right]$.

*d*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [x < 5 \to x^2 < 25]$.

*Solución.*

*a*) Para $x = 1$, tenemos que $1^2 - 3(1) + 2 = 0$.

*b*) Para $x = -1$ se tiene $(-1)^3 = -1$ y $(-1)^2 = 1$. Así $-1 < 1$ pero $0 \nless -1$.

*c*) Para $a = -1$, $b = 1$ y $x = 1$ se tiene que $ax < b$, pero $x > \frac{b}{a}$.

*d*) Para $x = -6$ se tiene que $x < 5$, pero $x^2 > 25$.

$\square$

8. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < c < d$. Determine una inecuación cuyo conjunto solución sea el conjunto:

$$[a, b] \cup \{c, d\}\,.$$

*Solución.* Una posible inecuación es:

$$(x - a)(x - b)(x - c)^2(x - d)^2 \leqslant 0.$$

$\square$

9. Sean $a$ y $b$ dos números reales tales que $a < b < 0$. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2 - a}{b^2 - a^2} > \frac{x + a}{a^2 - b^2}.$$

*Solución.* Es claro que $b^2 - a^2 < 0$. Luego, al simplificar la inecuación se obtiene:

$$x^2 - a < -(x + a),$$

que se reduce a la siguiente inecuación cuadrática:

$$x^2 + x < 0,$$

y que luego de factorizar se obtiene:

$$x(x + 1) < 0.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $]-1, 0[$. $\square$

10. Determine el conjunto solución de la inecuación:

$$(x-1)^{2017}(x+3)^2 \leqslant 0. \tag{4.2}$$

*Solución.* Si $x = -3$, entonces se cumple la desigualdad (4.2). Luego, cuando $x \neq -3$, se tiene que $(x+3)^2 > 0$. Así, la inecuación (4.2) se simplifica a la siguiente:

$$(x-1)^{2017} \leqslant 0$$

y dado que el exponente 2017 es impar, este también se simplifica y la inecuación se reduce a la siguiente:

$$x - 1 \leqslant 0.$$

De donde se deduce que el conjunto solución es el intervalo $]-\infty, 1]$. □

11. Sea $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Si $p(x-2) = x^2 - 7x + 10$, determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$p(x+4) - p(x-4) \geqslant 0.$$

*Solución.* Con el cambio de variable $y = x - 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} p(y) &= (y+2)^2 - 7(y+2) + 10 \\ &= y^2 - 3y. \end{aligned}$$

Luego, se aplica el siguiente cambio de variable $y = x + 4$ y se obtiene

$$\begin{aligned} p(x+4) &= (x+4)^2 - 3(x+4) \\ &= x^2 + 5x + 4. \end{aligned}$$

De manera similar para el cambio de variable $y = x - 4$ se obtiene

$$\begin{aligned} p(x-4) &= (x-4)^2 - 3(x-4) \\ &= x^2 - 11x + 28. \end{aligned}$$

Así, se observa de manera inmediata que

$$p(x+4) - p(x-4) = 16x - 24.$$

Finalmente, la inecuación a resolver es la siguiente

$$16x - 24 \geqslant 0,$$

cuyo conjunto solución es $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. □

12. Resuelva la siguiente inecuación: $(x^3+1)^{2017}(x^2-4)^{2019} > 0$

*Solución.*

$$(x+1)^{2017}(x^2+x+1)^{2017}(x+2)^{2019}(x-2)^{2019} > 0$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x^2+x+1 > 0$, ya que $\Delta = -3 < 0$. Luego la expresión se reduce a la siguiente:

$$(x+1)^{2017}(x+2)^{2019}(x-2)^{2019} > 0,$$

cuyos exponentes se simplifican y se obtiene la inecuación:

$$(x+1)(x+2)(x-2) > 0.$$

Por lo tanto, el conjunto solución $]-2,-1[\ \cup\ ]2,+\infty[$. □

## Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real $x \in \mathbb{R}$ se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto cumple la igualdad $|x| = \sqrt{x^2}$. Por ello, es posible calcular el conjunto solución de una ecuación que involucra el valor absoluto usando ecuaciones cuadráticas.

Para resolver inecuaciones que involucran el valor absoluto se puede usar la definición, pero en ocasiones la siguiente observación es útil. Para $a > 0$ se cumple

- $|x| < a \quad \leftrightarrow \quad -a < x < a$
- $|x| > a \quad \leftrightarrow \quad x > a \vee x < -a$

El valor absoluto cumple una propiedad muy importante llamada **desigualdad triangular**: dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

La prueba de la desigualdad triangular no es muy complicada, y queda como ejercicio para el lector interesado. Además, la demostración puede revisarse en el libro de (Zúñiga, 2013), ver Capítulo II, Teorema II 1.29.

Por otro lado, el valor absoluto permite definir el concepto de distancia entre dos puntos en la recta real como sigue: dados $a, b \in \mathbb{R}$, la **distancia** entre $a$ y $b$ es denotada por $d(a,b)$ y se define como:

$$d(a,b) = |b-a|.$$

## Problemas

1. Resuelva la siguiente ecuación: $2 - |x| = \sqrt{|x|}$.

   *Solución.* Debido a que toda raíz cuadrada es un número positivo o cero, se tiene que $2 - |x| \geqslant 0$, que a su vez implica $|x| \leqslant 2$. Por consiguiente, $x \in [-2, 2]$. Por otro lado, al elevar al cuadrado tanto el lado izquierdo como el lado derecho de la igualdad se obtiene
   $$|x|^2 - 4|x| + 4 = |x|.$$
   La expresión anterior se convierte en la siguiente ecuación:
   $$|x|^2 - 5|x| + 4 = 0.$$
   Factorizando por aspa simple se reescribe como:
   $$(|x| - 4)(|x| - 1) = 0,$$
   de donde se deduce que $|x| = 1$ o $|x| = 4$. Como $|x| \leqslant 2$, concluimos que $|x| = 1$ y por ende el conjunto solución es $\{-1, 1\}$. $\square$

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < -2$ y $b > 2$, determine el valor de verdad de cada una de las siguientes igualdades:

   *a*) $|-3ab| = 3ab$.

   *b*) $\left|\dfrac{3a}{5b}\right| = -\dfrac{3a}{5b}$.

   *c*) $|2(a+2)(b-2)| = 2(a+2)(2-b)$.

   *d*) $\left|\dfrac{a+2}{-a-2}\right| = 1$.

   *Solución.*

   *a*) Falsa, pues $-3ab > 0$ y por ende $|-3ab| = -3ab$.

   *b*) Verdadera, pues $\dfrac{3a}{5b} < 0$ y por lo tanto $\left|\dfrac{3a}{5b}\right| = -\dfrac{3a}{5b}$.

   *c*) Verdadera, pues $a + 2 < 0$ y $b - 2 > 0$ implican que $2(a+2)(b-2) < 0$. Luego
   $$|2(a+2)(b-2)| = -2(a+2)(b-2) = 2(a+2)(2-b).$$

*d*) Verdadera, pues $|-a-2| = |a+2|$.

$\square$

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a > b$ y $c > a - b$. Determine el conjunto solución de la ecuación
$$|x-a| + |x-b| = c$$

*Solución.* Para resolver la ecuación debemos analizar por zonas como sigue:

- Si $x \geqslant a$, entonces $|x-a| = x-a$ y $|x-b| = x-b$. Por lo tanto, la ecuación se reduce a
$$x - a + x - b = c$$
que al despejar $x$ se obtiene que
$$x = \frac{a+b+c}{2}.$$
Como $\dfrac{a+b+c}{2} > a$, tenemos que dicho valor de $x$ es una solución.
- Si $b \leqslant x < a$, entonces $|x-a| = a-x$ y $|x-b| = x-b$. Por ende, la ecuación se reduce a la siguiente
$$a - x + x - b = c \leftrightarrow a - b = c,$$
lo cual es una contradicción; esto implica que en este intervalo no hay solución alguna.
- Si $x < b$, entonces $|x-a| = a-x$ y $|x-b| = b-x$. Por lo tanto, la ecuación se simplifica a la siguiente:
$$a - x + b - x = c \leftrightarrow x = \frac{a+b-c}{2}$$
como $\dfrac{a+b-c}{2} < b$, tenemos una solución.

Por ende, el conjunto solución es
$$\left\{\frac{a+b-c}{2}, \frac{a+b+c}{2}\right\}.$$

$\square$

4. Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:

   *a*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ |-x-5| = |x| + 5\ ].$
   *b*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ |x+5| = 2 \ \rightarrow\ x = -3\ ].$
   *c*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ x < 0 \ \rightarrow\ |x+1| = -1 - x\ ].$
   *d*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ |2x-5| = 3 \ \rightarrow\ x = 4\ ].$

   *Solución.*

   *a*) Para $x = -1$, tenemos que $|-(-1)-5| = 4 \neq 6 = |-1| + 5$.
   *b*) Para $x = -7$, tenemos que $|-7+5| = 2$; sin embargo, $-7 \neq -3$.
   *c*) Para $x = -1/2$, se tiene $|x+1| = 1/2$ y $-1 - x = -1/2$.
   *d*) Para $x = 1$, se tiene que $|2(1) - 5| = 3$, pero $1 \neq 4$.

   □

5. Resuelva e indique el conjunto solución de la ecuación

$$|x+3| + |2x-4| = 10.$$

   *Solución.* Observemos que los puntos donde se anulan los polinomios $x+3$ y $2x-4$ son $-3$ y $2$, respectivamente. Luego:

   - Para $x < -3$ se tiene que la ecuación se reduce a la siguiente expresión:

$$(-x-3) + (-2x+4) = 10,$$

     que se simplifica a

$$-3x + 1 = 10,$$

     de donde $x = -3$, que no es solución en el intervalo indicado.

   - Para $-3 \leqslant x < 2$, la ecuación se reescribe como

$$(x+3) + (-2x+4) = 10,$$

     que al simplificar se obtiene

$$-x + 7 = 10,$$

     de donde $x = -3$.

- Para $x \geqslant 2$, la ecuación se reescribe como

$$(x + 3) + (2x - 4) = 10,$$

y simplifica a la siguiente ecuación

$$3x - 1 = 10,$$

deduciéndose que $x = 11/3$.

Por tanto, el conjunto solución es $\{-3, \frac{11}{3}\}$. □

6. Si $a > b > 0$, resuelva la ecuación $|x + a| - |x - a| = 2b$.

*Solución.* Si $x < -a$, se tiene que la ecuación se simplifica a:

$$-(x + a) + (x - a) = 2b.$$

Luego, $2(a + b) = 0$, lo cual es una contradicción pues la suma de dos positivos es un número positivo.

Si $-a \leqslant x < a$, se tiene que la ecuación se simplifica a:

$$(x + a) + (x - a) = 2b.$$

Deduciéndose que $x = b$.

Si $x \geqslant a$, se tiene en la ecuación se simplifica a

$$(x + a) - (x - a) = 2b.$$

Luego, $a = b$, lo cual es una contradicción pues $a > b$. Por lo tanto, el conjunto solución es $\{b\}$. □

7. Resuelva cada una de las siguientes desigualdades:

*a*) $|4 - 9x| \leqslant 5$

*b*) $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| > 1$

*c*) $11\,|5 - 2x| < 3\,|x + 1|$

*d*) $\left|\dfrac{2x - 1}{x - 2}\right| \leqslant 1$

*e*) $3x^2 + 5|x| - 2 < 0$

*f*) $|x - a| > |x - b|$, donde $a > b$.

*g*) $|x|^2 + |x| > 2$

*h*) $|x - 3| > -1$

*i*) $|5x - 4| \leqslant |3x + 2| + 2|x - 3|$

*Solución.*

*a*) Utilizando las propiedades del valor absoluto tenemos

$$\begin{aligned}|4-9x| \leqslant 5 &\leftrightarrow -5 \leqslant 4-9x \leqslant 5\\ &\leftrightarrow -9 \leqslant -9x \leqslant 1\\ &\leftrightarrow -1 \leqslant 9x \leqslant 9\\ &\leftrightarrow -\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1\\ &\leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{9}, 1\right]\end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es $\left[-\frac{1}{9}, 1\right]$.

*b*) Utilizando las propiedades del valor absoluto, tenemos

$$\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| > 1 \leftrightarrow x+1 \neq 0, \frac{2x-1}{x+1} > 1 \vee \frac{2x-1}{x+1} < -1.$$

La inecuación $\frac{2x-1}{x+1} > 1$ se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} > 1 &\leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 > 0\\ &\leftrightarrow \frac{x-2}{x+1} > 0.\end{aligned}$$

Así, $x \in \left]-\infty, -1\right[ \cup \left]2, +\infty\right[$.

La otra inecuación $\frac{2x-1}{x+1} < -1$ se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+1} < -1 &\leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 < 0\\ &\leftrightarrow \frac{3x}{x+1} < 0.\end{aligned}$$

De donde $x \in \left]-1, 0\right[$.

Por lo tanto, el conjunto solución es $\left]-\infty, -1\right[ \cup \left]-1, 0\right[ \cup \left]2, +\infty\right[$.

*c*) Utilizando las propiedades del valor absoluto tenemos

$$11\,|5-2x| < 3\,|x+1| \leftrightarrow -3\,|x+1| < 11(5-2x) < 3\,|x+1|\,,$$

es decir que debemos resolver las siguientes inecuaciones a la vez

$$-3\,|x+1| < 11(5-2x) \wedge 11(5-2x) < 3\,|x+1|\,.$$

La primera se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -3\,|x+1| < 11(5-2x) &\leftrightarrow |x+1| > \frac{11}{3}(2x-5) \\ &\leftrightarrow x+1 < -\frac{11}{3}(2x-5) \vee x+1 > \frac{11}{3}(2x-5) \\ &\leftrightarrow x < \frac{52}{25} \vee x < \frac{58}{19} \\ &\leftrightarrow x < \frac{58}{19}. \end{aligned}$$

Para la segunda inecuación se procede como sigue:

$$\begin{aligned} 11(5-2x) < 3\,|x+1| &\leftrightarrow |x+1| > \frac{11}{3}(5-2x) \\ &\leftrightarrow x+1 < -\frac{11}{3}(5-2x) \vee x+1 > \frac{11}{3}(5-2x) \\ &\leftrightarrow x > \frac{58}{19} \vee x > \frac{52}{25} \\ &\leftrightarrow x > \frac{52}{25}. \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es $\left]\frac{52}{25}, \frac{58}{19}\right[$.

*d*) Utilizando las propiedades del valor absoluto tenemos:

$$\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| \leqslant 1 \leftrightarrow x \neq 2 \wedge |2x-1| \leqslant |x-2|.$$

Luego, la desigualdad del lado derecho se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |2x-1|^2 &\leqslant |x-2|^2 \\ 4x^2-4x+1 &\leqslant x^2-4x+4 \\ 3x^2-3 &\leqslant 0 \\ x^2 &\leqslant 1 \\ |x| &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo $[-1, 1]$.

*e*) Primero notemos que

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5|x| - 2 < 0 &\leftrightarrow 3|x|^2 + 5|x| - 2 \\ &\leftrightarrow (3|x| - 1)(|x| + 2) < 0. \end{aligned}$$

Ahora, desde que $|x| + 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la última desigualdad es equivalente a la siguiente $3|x| - 1 < 0$. En consecuencia, el conjunto solución es $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

*f*) Se procede primero a elevar al cuadrado, y seguido a formar una diferencia de cuadrados, es decir

$$\begin{aligned} |x - a| > |x - b| &\leftrightarrow (x - a)^2 > (x - b)^2 \\ &\leftrightarrow (x - a)^2 - (x - b)^2 > 0 \\ &\leftrightarrow (2x - a - b)(b - a) > 0. \end{aligned}$$

Como $a > b$, se tiene que $b - a < 0$, lo que a su vez implica que la última desigualdad se reduce a

$$2x - a - b < 0.$$

Luego, se deduce que el conjunto solución es $\left]-\infty, \frac{a+b}{2}\right[$.

*g*) Se procede como sigue:

$$\begin{aligned} |x|^2 + |x| > 2 &\leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 > 0 \\ &\leftrightarrow (|x| + 2)(|x| - 1) > 0 \\ &\leftrightarrow |x| > 1 \\ &\leftrightarrow x > 1 \ \vee \ x < -1. \end{aligned}$$

Así, el conjunto solución es $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

*h*) Se sabe que el valor absoluto de un número es no negativo, es decir $|x - 3| \geqslant 0$. También se sabe que $0 > -1$, luego por transitividad tenemos

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ [|x - 3| > -1].$$

Por consiguiente, el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

*i*) Primero se observa que:

$$5x - 4 = (3x + 2) + (2x - 6).$$

Luego, al aplicar la desigualdad triangular, se obtiene que

$$\begin{aligned} |5x - 4| &= |3x + 2 + 2x - 6| \\ &\leqslant |3x + 2| + |2x - 6|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

□

8. Partiendo de la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ [xy \leqslant |x||y|], \tag{4.3}$$

demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\ ||x| - |y|| \leqslant |x - y|\ ]$.

*Solución.* Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, de la propiedad (4.3), se tiene que

$$-2|x||y| \leqslant -2xy,$$

que a su vez implica

$$x^2 + y^2 - 2|x||y| \leqslant x^2 + y^2 - 2xy,$$

es decir $(|x| - |y|)^2 \leqslant (x - y)^2$. De donde se deduce que

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$

□

9. Al cierre del primer semestre del presente año, el ingreso $(x)$, percibido por cada empresa exportadora de espárragos en el Perú, satisface la inecuación

$$|x - 2 \times 10^6| \leqslant 3 \times 10^5.$$

Si se sabe que Green Perú SAC alcanzó el máximo ingreso en este periodo y que Sociedad Agrícola Virú obtuvo el mínimo, determine los ingresos obtenidos por las dos empresas mencionadas.

*Solución.* De la inecuación $|x - 2 \times 10^6| \leqslant 3 \times 10^5$ obtenemos

$$-3 \times 10^5 \leqslant x - 2 \times 10^6 \leqslant 3 \times 10^5,$$

de esto se tiene que

$$1.7 \times 10^6 \leqslant x \leqslant 2.3 \times 10^6.$$

Luego los ingresos obtenidos por Green Perú SAC ascienden a 2.3 millones de dólares y los ingresos obtenidos por Sociedad Agrícola Virú a 1.7 millones de dólares. □

10. El diámetro ideal de una almendra para ser seleccionada como de exportación es de $0.5$ cm, pero se aceptan aquellas que estén dentro de los límites de tolerancia que son de $0.480$ cm y $0.520$ cm, inclusive. Exprese estas condiciones para el diámetro de una almendra con respecto al diámetro ideal, usando el valor absoluto.

*Solución.* Sea $d$ el diámetro de una almendra seleccionada para exportación. Como los límites de tolerancia son de $0.480$ cm y $0.520$ cm, se tiene que:

$$0.48 \leqslant d \leqslant 0.52$$

y cuando comparamos con el diámetro ideal, se obtiene:

$$-0.02 \leqslant d - 0.5 \leqslant 0.02.$$

Luego, al usar el valor absoluto se tiene la siguiente expresión:

$$|d - 0.5| \leqslant 0.02.$$

□

11. En cierto país, una moneda es declarada falsa si se verifica la inecuación $\left|\dfrac{x-50}{10}\right| \geqslant \dfrac{3}{2}$, donde $x$ es el número de caras obtenidas al lanzar 100 veces la moneda al aire. ¿Para qué valores de $x$ la moneda no es falsa?

*Solución.* Para que una moneda no sea declarada como falsa se debe cumplir

$$\left|\frac{x-50}{10}\right| < \frac{3}{2}.$$

Al usar propiedades del valor absoluto se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-50}{10}\right| < \frac{3}{2} &\leftrightarrow -\frac{3}{2} < \frac{x-50}{10} < \frac{3}{2} \\ &\leftrightarrow -15 < x-50 < 15 \\ &\leftrightarrow 35 < x < 65. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores de $x$ para que la moneda no sea falsa son $36, 37, \ldots, 64$. □

12. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que $d(a,b) = d(a,c) + d(c,b)$, $a \neq c$ y $b \neq c$ . Demuestre que la inecuación cuadrática

$$x^2 - (a+b)x + ab < 0 \tag{4.4}$$

posee solución.

*Solución.* De la definición de distancia en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$d(a,b) = d(a,c) + d(c,b) = |a-b| = |a-c| + |c-b|.$$

Si denotamos por $u = a - c$ y $v = c - b$, entonces $u + v = a - b$. Por lo tanto, la hipótesis es equivalente a que

$$|u+v| = |u| + |v|.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned} (u+v)^2 &= (|u| + |v|)^2 \\ u^2 + 2uv + v^2 &= u^2 + 2|uv| + v^2 \\ uv &= |uv|. \end{aligned}$$

Esto implica que $uv \geqslant 0$, es decir $(a-c)(c-b) \geqslant 0$. De los datos se tiene que $(a-c)(c-b) > 0$, que operando y agrupando obtenemos

$$c^2 - (a+b)c + ab < 0.$$

Por lo tanto, se observa que $c$ es una solución de la inecuación (4.4). □

13. Determine el (o los) valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ de forma que la ecuación en $x$:

$$|x-a| + |x+a| = |x|$$

tenga conjunto solución no vacío.

*Solución.* Al aplicar la desigualdad triangular a los números $x-a$ y $x+a$ se tiene que

$$|2x| = |(x-a)+(x+a)| \leqslant |x-a|+|x+a|.$$

Luego, $|2x| \leqslant |x|$ y esto es equivalente a $|x|=0$, de donde $x=0$. Pero si reemplazamos este valor en la ecuación inicial obtenemos

$$|-a|+|a|=0,$$

de donde se deduce que $a=0$. Así, para que la ecuación tenga conjunto solución no vacío, $a$ debe tomar el valor de cero. $\square$

14. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones:

    *a*) $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\ [\ d(a,c) \leqslant d(a,b)+d(b,c)\ ]$.
    *b*) $\forall a,c \in \mathbb{R}\ [\ d(|a|,|c|) \leqslant d(a,c)\ ]$.

    *Solución.*

    *a*) Por la desigualdad triangular se tiene que

    $$|a-c| = |a-b+b-c| \leqslant |a-b|+|b-c|.$$

    Así, por definición de distancia se sigue que $d(a,c) \leqslant d(a,b)+d(b,c)$.

    *b*) De la desigualdad triangular se tiene que

    $$|a| = |(a-c)+c| \leqslant |a-c|+|c|$$

    y de igual forma

    $$|c| = |(c-a)+a| \leqslant |c-a|+|a|.$$

    Desde que $|a-c| = |c-a|$ se tiene que

    $$-|a-c| \leqslant |a|-|c| \leqslant |a-c|,$$

    es decir $||a|-|c|| \leqslant |a-c|$. Por lo tanto, $d(|a|,|c|) \leqslant d(a,c)$.

    $\square$

15. Dado $k>0$, se define la relación

    $$R_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} :\ |x-y|<k)\}\,.$$

*a*) Sean $k$ y $s$ números positivos, pruebe que si $(x, y) \in R_k$ y $(y, z) \in R_s$, entonces $(x, z) \in R_{k+s}$.

*b*) Pruebe que
$$\bigcap_{k>0} R_k = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x = y\}.$$

*Solución.*

*a*) Si $(x, y) \in R_k$ y $(y, z) \in R_s$, entonces $|x - y| < k$ y $|y - z| < s$. Luego, por la desigualdad triangular se tiene que
$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leqslant |x - y| + |y - z| < k + s,$$
es decir $(x, z) \in R_{k+s}$.

*b*) Sea $(a, b) \in \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x = y\}$, es decir $a = b$, notemos que para cualquier $k > 0$ se tiene $|a - b| = 0 < k$. Esto significa que $\forall k > 0, (a, b) \in R_k$. Así, hemos probado que $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x = y\} \subset \bigcap_{k>0} R_k$.
Ahora, si existe $(a, b) \in \bigcap_{k>0} R_k$ tal que $(a, b) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x = y\}$, entonces $|a - b| > 0$. Así, en particular $(a, b) \in R_{|a-b|}$. Pero esto significaría que $|a - b| < |a - b|$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, ocurre la igualdad entre los conjuntos.

$\square$

16. Justifique por qué son falsas las siguientes proposiciones:

*a*) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ [\ x^2 > a \ \leftrightarrow \ \sqrt{a} < x\ ]$.

*b*) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ [\ |a| < |b| \ \rightarrow \ a < b\ ]$.

*c*) $\forall a, b \in \mathbb{R}, \ [\ a < b \ \rightarrow \ |a| < |b|\ ]$.

*d*) $\forall x, y \in \mathbb{N}, \ [\ \sqrt{x + y} \leqslant 2 \ \rightarrow \ xy \leqslant 2\ ]$.

*e*) La inecuación $\sqrt{x^2} - x > 0$ no tiene solución.

*f*) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \ [\ |x^2 - 1| < x^2\ ]$

*Solución.*

*a*) Para $a = 1$ y $x = -2$, se observa que $(-2)^2 = 4 > 1$ y $\sqrt{1} = 1 > -2$.

*b*) Para $a = -1$ y $b = -2$, se tiene que $|-1| < |-2|$ pero $-1 > -2$.

*c*) Para $a = -2$ y $b = -1$, se cumple que $-2 < -1$ y $|-2| > |-1|$.

*d*) Para $x = 3$ e $y = 1$, se tiene que $\sqrt{3+1} = 2 \leqslant 2$; pero $3 \times 1 = 3 > 2$.

*e*) Para $x = -1$, se tiene que $\sqrt{(-1)^2} - (-1) = \sqrt{1} + 1 = 2 > 0$, es decir $x = -1$ es una solución de la inecuación.

*f*) Para $x = \frac{1}{2}$, se observa que $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right| = \frac{3}{4} > \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

□

17. Determine el producto de las soluciones enteras de la inecuación:

$$\sqrt{3x - x^2} > -\sqrt{2}.$$

*Solución.* Por la restricción del radical se tiene que $3x - x^2 \geqslant 0$, es decir:

$$3x - x^2 \geqslant 0 \leftrightarrow x(x-3) \leqslant 0,$$

lo cual implica que $x \in [0, 3]$. Así, el conjunto solución es el intervalo $[0, 3]$. Por lo tanto, las soluciones enteras son 0, 1, 2 y 3, cuyo producto es 0. □

18. Determine la suma de soluciones enteras de las inecuaciones:

$$x^2 \leqslant 2x < x^2 + 1.$$

*Solución.* La inecuación $x^2 \leqslant 2x$ se resuelve como sigue:

$$x^2 \leqslant 2x \;\leftrightarrow\; x(x-2) \leqslant 0,$$

de donde $x \in [0, 2]$. De igual forma, la inecuación $2x < x^2 + 1$ se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2x < x^2 + 1 &\leftrightarrow 0 < x^2 - 2x + 1 \\ &\leftrightarrow\; 0 < (x-1)^2, \end{aligned}$$

de donde $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Luego, el conjunto solución es $[0, 2] - \{1\}$. Por lo tanto, la suma de soluciones enteras es 2. □

19. ¿Para qué valores de $k$, la inecuación cuadrática

$$|k-3|x^2 + 2x + \left|\frac{k-1}{k-3}\right| > 0$$

tiene conjunto solución igual a $\mathbb{R}$?

*Solución.* Primero se observa que $k-3\neq 0$, por lo que $k\in\mathbb{R}-\{3\}$. Ahora, como el conjunto solución es $\mathbb{R}$ y $|k-3|>0$, se debe cumplir que el discriminante del polinomio cuadrático es negativo, es decir

$$\begin{aligned} 2^2-4|k-3|\left|\frac{k-1}{k-3}\right|<0 &\leftrightarrow 4-4|k-1|<0 \\ &\leftrightarrow 1<|k-1| \\ &\leftrightarrow 1<k-1 \ \vee \ k-1<-1 \\ &\leftrightarrow k>2 \ \vee \ k<0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $k\in]-\infty,0[\cup]2,+\infty[-\{3\}$. □

## Máximo entero

El **máximo entero** de un número real $x$ se puede definir como $[\![x]\!]=n\in\mathbb{Z}$ donde $n$ satisface

$$n\leqslant x<n+1.$$

La función máximo entero $[\![\cdot]\!]:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ en ocasiones es llamada también *función suelo*. Se puede mostrar que un número $x$ es entero si y solo si $[\![x]\!]=x$.

## Problemas

1. Demuestre la veracidad de la siguiente proposición:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left[\ \left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]=\left[\!\!\left[\frac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\!\right]\ \right]$$

*Solución.* Como $[\![x]\!]\leqslant x$, para cualquier $x\in\mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{[\![x]\!]}{n}\leqslant\frac{x}{n}\quad\wedge\quad\left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]\leqslant\frac{x}{n}$$

para cualquier $n\in\mathbb{N}$. De la primera desigualdad se deduce que

$$\left[\!\!\left[\frac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\!\right]\leqslant\left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right] \tag{4.5}$$

De la segunda se deduce que $n\left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]\leqslant x$. Luego, del hecho que $n\left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]\in\mathbb{Z}$, se obtiene $n\left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]\leqslant[\![x]\!]$, esto a su vez implica $\left[\!\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\!\right]\leqslant\frac{[\![x]\!]}{n}$. Nuevamente, del hecho que $\left[\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\right] \in \mathbb{Z}$ se deduce

$$\left[\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\right] \leqslant \left[\!\left[\frac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\right] \tag{4.6}$$

Por lo tanto, de (4.5) y (4.6), se tiene que $\left[\!\left[\frac{[\![x]\!]}{n}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{x}{n}\right]\!\right]$. $\square$

2. Demuestre que:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ [[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n]\,.$$

*Solución.* Como $[\![x]\!] \leqslant x < [\![x]\!] + 1$, sumando $n$ en cada lado, se tiene lo siguiente

$$[\![x]\!] + n \leqslant x + n < ([\![x]\!] + n) + 1.$$

Como $n \in \mathbb{Z}$, se observa que $x + n$ está entre dos enteros consecutivos. Por lo tanto, $[\![x+n]\!] = [\![x]\!] + n$. $\square$

3. Indique la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

   *a*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ 0 \leqslant x - [\![x]\!] < 1\ ]\,.$
   *b*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ [\![x]\!] \geqslant 0 \to x \geqslant 0\ ].$
   *c*) $\forall x, y \in \mathbb{R}, [\ x < y \to [\![x]\!]\ < [\![y]\!]\ ].$
   *d*) $\forall x, y \in \mathbb{R}, [\ [\![x+y]\!] \leqslant [\![x]\!] + [\![y]\!]\ ].$
   *e*) $\forall x, y \in \mathbb{R}, [\ [\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]\ \vee\ [\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1\ ].$
   *f*) $\forall x \in \mathbb{R},\ [\ \left([\![x]\!] + 1\right)^2 = x^2 + 2[\![x]\!] + 1\ ].$
   *g*) $\forall x \in \mathbb{R}\ [\ [\![x]\!] < 1\ \to\ 0 \leqslant x < 1\ ].$
   *h*) $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ [\ [\![xy]\!] = [\![x]\!][\![y]\!]\ ].$
   *i*) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\ |x| = |y|\ \to\ |[\![x]\!]| = |[\![y]\!]|\ ].$

*Solución.*

   *a*) Verdadera, por definición de máximo entero, se tiene que $[\![x]\!] \leqslant x < [\![x]\!] + 1$, lo cual despejando correctamente se obtiene

$$0 \leqslant x - [\![x]\!] < 1.$$

*b*) Verdadera, pues $[\![x]\!] \leqslant x$ y $0 \leqslant [\![x]\!]$.

*c*) Falsa, pues el contraejemplo consiste en tomar $x = 0.1,\ y = 0.2$. En efecto, notemos que $x < y$ y $[\![x]\!] = [\![y]\!] = 0$. Así, no satisface que $[\![x]\!] < [\![y]\!]$.

*d*) Falsa, pues para $x = 0.1,\ y = 0.9$ no se verifica la veracidad de la proposición. En efecto, notemos que $[\![x+y]\!] = 1 \nleqslant [\![x]\!] + [\![y]\!] = 0$.

*e*) Verdadera. Para todo $x$ e $y$ en $\mathbb{R}$, se tiene la siguiente propiedad:

$$[\![x]\!] \leqslant x < [\![x]\!] + 1 \ \text{ y } \ [\![y]\!] \leqslant y < [\![y]\!] + 1.$$

Luego, para todo $x$ e $y$ en $\mathbb{R}$,

$$[\![x]\!] + [\![y]\!] \leqslant x + y < [\![x]\!] + [\![y]\!] + 2.$$

Expresando las desigualdades convenientemente, obtenemos lo siguiente:

$$[\![x]\!]+[\![y]\!] \leqslant x+y < [\![x]\!]+[\![y]\!]+1 \ \vee \ [\![x]\!]+[\![y]\!]+1 \leqslant x+y < [\![x]\!]+[\![y]\!]+2$$

Luego $[\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] \ \vee \ [\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] + 1$.

*f*) Falsa, pues para $x = \dfrac{1}{2}$, tenemos que:

$$\left(\left[\!\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\!\right] + 1\right)^2 = 1 \neq \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left[\!\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\!\right] + 1.$$

*g*) Falsa, pues para $x = -2$, se tiene que $[\![x]\!] = -2$ y $x \notin [0, 1[$.

*h*) Falsa, pues para $x = y = 3/2$, se tiene que $[\![xy]\!] = 2$, pero $[\![x]\!][\![y]\!] = 1$.

*i*) Falsa, pues para $x = 1/2$ e $y = -1/2$, pues, $|1/2| = |-1/2|$; sin embargo, $|[\![1/2]\!]| = 0 \neq 1 = |[\![-1/2]\!]|$.

$\square$

4. Sea la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : [\![x]\!] = [\![y]\!]\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pruebe que si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

   *Solución.* En efecto, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $[\![x]\!] = [\![y]\!]$ y $[\![y]\!] = [\![z]\!]$. Esto implica $[\![x]\!] = [\![z]\!]$, es decir $(x, z) \in R$. $\square$

5. Resuelva la siguiente desigualdad: $\big|x - |x|\big| \geqslant \big|x - 1 - [\![x]\!]\big|$.

*Solución.* Como $|x| \geqslant x$ y $[\![x]\!] + 1 > x$, se tiene que

$$\begin{aligned} \big|x - |x|\big| \geqslant \big|x - 1 - [\![x]\!]\big| &\leftrightarrow |x| - x \geqslant 1 + [\![x]\!] - x \\ &\leftrightarrow |x| \geqslant 1 + [\![x]\!]. \end{aligned}$$

Si $x \geqslant 0$ entonces $x \geqslant [\![x]\!] + 1$, lo que nos da una contradicción. Ahora, si $x < 0$ entonces $[\![x]\!] \leqslant -1$. Esto a su vez implica que $[\![x]\!] + 1 \leqslant 0$, pero como $x < 0$ se cumple que $|x| > 0$. Por lo tanto, el conjunto solución es el intervalo $]-\infty, 0[$. □

6. Resuelva la siguiente igualdad:

$$[\![x - a]\!] = a,$$

donde $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

*Solución.* La igualdad $[\![x - a]\!] = a$ implica que $a \in \mathbb{Z}$, pero por dato $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Por ende, no existe solución. □

## Conjuntos acotados

Un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es **acotado superiormente** si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ [x \leqslant M].$$

A dicha constante se le denomina **cota superior**. Análogamente, un conjunto no vacío es **acotado inferiormente** cuando

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ [x \geqslant M]$$

y a dicha constante se le denomina **cota inferior**.

## Problemas

1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Pruebe que el conjunto:

$$B = \{x \in A :\ x^{2016} + x^{2015} < 1\}$$

es acotado superiormente.

*Solución.* Por definición del conjunto $B$ se tiene que $B \subset A$. Como $A$ es acotado superiormente, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant M$ para todo $x \in A$, en particular $x \leqslant M$ para todo $x \in B$. Por lo tanto, $B$ es acotado superiormente. □

2. Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   *a*) Si $B$ no es acotado superiormente y $B \subset A$, entonces $A$ es acotado superiormente.

   *b*) Si $A$ es un conjunto finito, entonces es acotado superiormente.

   *c*) Si $A$ es un conjunto infinito, entonces no es acotado superiormente.

   *Solución.*

   *a*) Falsa, pues el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente y $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$; sin embargo, $\mathbb{R}$ no es acotado superiormente.

   *b*) Verdadera, si $A$ es un conjunto finito, entonces basta tomar el mayor de sus elementos y este sería una cota superior.

   *c*) Falsa, por ejemplo el conjunto $A = [1, 2]$ es infinito y acotado superiormente.

   □

3. Pruebe que si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente, el conjunto $B = \{-a \in \mathbb{R} : \ a \in A\}$ es acotado inferiormente.

   *Solución.* Si $A$ es acotado superiormente, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$ se tiene que $a \leqslant M$; o equivalentemente $-a \geqslant -M$. En otras palabras $-M \leqslant b$, para todo $b \in B$. Por lo tanto, $B$ es acotado inferiormente. □

4. Muestre que el conjunto $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente probando la siguiente afirmación:
$$\forall M \in \mathbb{R}, \ \exists n \in \mathbb{N}, \ [\ M < n\ ].$$

   *Solución.* Como nos dicen que $M$ es cualquier número real, tenemos que:

   - Si $M < 1$ entonces basta considerar $n = 1 \in \mathbb{N}$.
   - Si $M \geqslant 1$, aplicamos la propiedad de máximo entero que nos dice que
$$[\![M]\!] \leqslant M < [\![M]\!] + 1$$
     pero desde que $M \geqslant 1$ entonces $[\![M]\!] \geqslant 1$, de donde existe $n = [\![M]\!] + 1 \in \mathbb{N}$ tal que $M < n$.

   □

## Valores extremos

Para definir el *supremo* y el *ínfimo* de un subconjunto de los números reales es necesario primero formalizar la idea de *máximo* y *mínimo* de un conjunto.

El **máximo** de un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es un número real $m = \text{máx}\, A$ que cumple la siguiente condición:

$$m \in A \quad \wedge \quad \forall x \in A,\ [x \leqslant m].$$

El **mínimo** de un conjunto no vacío se define análogamente. En este último caso $m = \text{mín}\, A$ cuando

$$m \in A \quad \wedge \quad \forall x \in A,\ [x \geqslant m].$$

Para un conjunto no vacío $A$ y acotado superiormente, el **conjunto de cotas superiores** es denotado por $\text{CotSup}\, A$. Para un conjunto acotado inferiormente $B$, el **conjunto de cotas inferiores** es denotado por $\text{CotInf}\, B$. Es posible probar que para $A$ considerado anteriormente $\text{CotSup}\, A$ es acotado inferiormente y posee un mínimo. Análogamente para $B$, se puede probar que $\text{CotInf}\, B$ es acotado superiormente y posee un máximo. El **supremo** de $A$ es la menor de las cotas superiores, es decir:

$$\sup A = \text{mín}\, \text{CotSup}\, A.$$

El **ínfimo** de $B$ es la mayor de la cotas inferiores, esto es:

$$\text{ínf}\, A = \text{máx}\, \text{CotInf}\, A.$$

## Problemas

1. Sea $A = ]-\infty, 2[$, pruebe que $\sup A = 2$.

   *Solución.* No es complicado notar que 2 es una cota superior de $A$. Luego,

   $$\sup(A) \leqslant 2.$$

   Si $\sup(A) < 2$, entonces $\sup(A) < \dfrac{\sup(A) + 2}{2} < 2$. Así, se tiene que

   $$\frac{\sup(A) + 2}{2} \in A,$$

   siendo esto una contradicción. Por lo tanto, $\sup(A) = 2$. □

2. Demuestre que el supremo de un conjunto acotado superiormente es único.

   *Solución.* Sea $A$ un conjunto acotado superiormente y supongamos que $S_1$ y $S_2$ son supremos de $A$. Nuestro objetivo será mostrar que $S_1 = S_2$, lo que probaría que el supremo es único. Como $S_1$ es una cota superior, $S_2 \leqslant S_1$ (ya que $S_2$ es la menor de las cotas superiores). Análogamente se tiene que $S_1 \leqslant S_2$. Por lo tanto, $S_1 = S_2$. $\square$

3. Demuestre que el ínfimo del conjunto $A = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ es 0.

   *Solución.* Es fácil ver que 0 es una cota inferior del conjunto $A$, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple
$$0 \leqslant \frac{1}{n}.$$
   Así, $0 \leqslant \text{ínf}(A) \leqslant \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $0 < \text{ínf}(A)$, entonces se tiene que
$$n \leqslant \frac{1}{\text{ínf}(A)}$$
   para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde el conjunto de los números naturales es acotado, lo que nos da una contradicción. Por lo tanto, $\text{ínf}(A) = 0$. $\square$

4. Sean $A,\ B$ y $C$ conjuntos no vacíos acotados superiormente. Si se cumple que
$$\forall a \in A, \forall b \in B,\ \exists c \in C,\ [\ a + b \leqslant c\ ].$$
   Pruebe que
$$\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(C).$$
   *Solución.* Dado que, para todo $a \in A$ y todo $b \in B$, existe $c \in C$ tal que
$$a + b \leqslant c \leqslant \sup(C),$$
   la última desigualdad es por la definición de supremo del conjunto $C$. Así, hemos probado que
$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ [\ a + b \leqslant \sup(C)\ ]. \tag{4.7}$$
   Por otro lado, para cada $b \in B$, de (4.7) se tiene que
$$\forall a \in A,\ \ [\ a \leqslant \sup(C) - b\ ]$$

es decir $\sup(C) - b$ es cota superior de $A$. Luego,

$$\sup(A) \leqslant \sup(C) - b.$$

Ahora, dado que $b \in B$ fue aplicado de manera arbitraria, hemos probado que

$$\forall b \in B, \ \ [\ b \leqslant \sup(C) - \sup(A)\ ],$$

es decir, $\sup(C) - \sup(A)$ es una cota superior del conjunto $B$. Así,

$$\sup(B) \leqslant \sup(C) - \sup(A).$$

Por lo tanto,

$$\sup(A) + \sup(B) \leqslant \sup(C).$$

$\square$

5. Determine el máximo entero del supremo de $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 - x - 1 < 0\}$.

   *Solución.* El conjunto $A$ resulta ser el conjunto solución de la inecuación

$$x^2 - x - 1 < 0.$$

   En ese sentido, se procede a resolver la inecuación como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 < 0 &\leftrightarrow \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0 \\ &\leftrightarrow \ \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2} \\ &\leftrightarrow \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

   Deduciéndose que $A = \left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$. Luego, $\sup(A) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, $[\![\sup(A)]\!] = 1$. $\square$

6. Determine la suma del ínfimo y supremo del conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{||x+1| - 2|}{1 - |x|} \geqslant 1$$

*Solución.* A partir de la inecuación, se tiene la siguiente restricción:

$$1 - |x| > 0,$$

luego $-1 < x < 1$. A partir de esto, se deduce que $|x+1| = x+1$.

Así, la inecuación inicial queda como:

$$\frac{|x-1|}{1-|x|} \geqslant 1.$$

Notemos que $|x-1| = -x+1$, luego

$$-x + 1 \geqslant 1 - |x| \Rightarrow x \leqslant |x|.$$

La última inecuación cumple para todo $x \in \mathbb{R}$. De donde el conjunto solución es el intervalo $\mathscr{C} = ]-1, 1[$ y por consiguiente $\inf(\mathscr{C}) + \sup(\mathscr{C}) = -1 + 1 = 0$. $\square$

7. Determine el ínfimo y supremo del conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ x - \sqrt{x} < 6 \ \vee \ \sqrt{x^2 - 3x - 4} \leqslant -x\}.$$

*Solución.* Se observa que la desigualdad

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} \leqslant -x \tag{4.8}$$

tiene como restricción:

$$x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \leftrightarrow (x-4)(x+1) \geqslant 0,$$

y además $-x \geqslant 0$, es decir $x \leqslant 0$. Así, $x \in ]-\infty, -1]$. Luego, la desigualdad (4.8) se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x - 4} \leqslant -x &\leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leqslant x^2 \\ &\leftrightarrow x \geqslant -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

De donde $x \in \left[-\dfrac{4}{3}, -1\right]$.

Por otro lado, la inecuación

$$x - \sqrt{x} < 6 \tag{4.9}$$

tiene como restricción a $x \geqslant 0$, debido a la raíz cuadrada. Luego, la inecuación (4.9) se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x} - 6 &< 0 \\ (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 6 &< 0 \\ (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3) &< 0. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{x}+2 > 0$, se tiene que la inecuación anterior se reduce a

$$\sqrt{x} - 3 < 0 \leftrightarrow \sqrt{x} < 3.$$

Por lo que $x \in [0, 9[$.

Finalmente, el conjunto $A$ es igual a $\left[-\frac{4}{3}, -1\right] \cup [0, 9[$ y por consiguiente $\text{ínf}(A) = -\frac{4}{3}$ y $\sup(A) = 9$. $\square$

# Referencias


Cotrina, J. (2015). *Fundamentos de matemáticas*. Fondo Editorial de la Universidad del Pacífico.

Halmos, P. (1998). *Naive set theory*. Springer New York.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2011). *Precalculus: Mathematics for calculus* (5.ª ed.). Brooks Cole.

Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. Prentice Hall.

Sydsaeter, K., & Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall.

Zúñiga, J. (2013). *Precálculo*. Fondo Editorial de la Universidad del Pacífico.