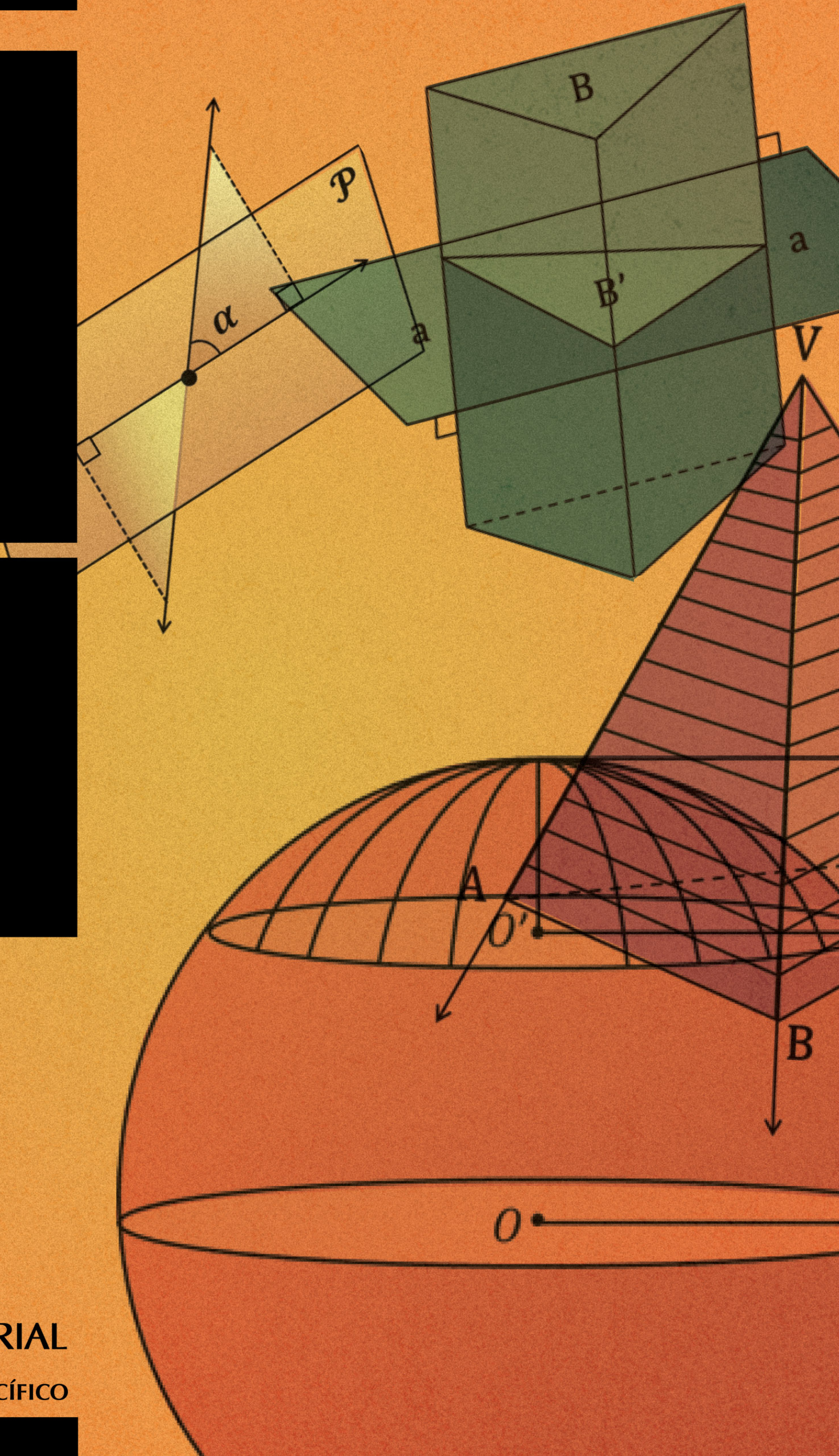
GEOMETRÍA DEL ESPACIO: EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RICARDO SIU KOOCHOY

CARLOS ANDALUZ ZÚÑIGA



96

Apuntes de Estudio

FONDO EDITORIAL
UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

GEOMETRÍA DEL ESPACIO: EJERCICIOS Y PROBLEMAS

RICARDO
SIU KOOCHOY

CARLOS
ANDALUZ ZÚÑIGA

96

Apuntes de Estudio

FONDO
EDITORIAL
UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

De esta edición:

© Universidad del Pacífico
Jr. Gral. Luis Sánchez Cerro 2141
Lima 15072, Perú

GEOMETRÍA DEL ESPACIO: EJERCICIOS Y PROBLEMAS
Ricardo Siu Koochoy y Carlos Andaluz Zúñiga

1.ª edición: octubre de 2019
Diseño de la cáratula: Ícono Comunicadores
ISBN e-book: 978-9972-57-418-4
doi: http://dx.doi.org/10.21678/978-9972-57-418-4

BUP

Siu Koochoy, Ricardo.
Geometría del espacio: ejercicios y problemas / Ricardo Siu Koochoy, Carlos Andaluz Zúñiga. -- 1a edición. -- Lima: Universidad del Pacífico, 2019.
187 p. -- (Apuntes de estudio ; 96)

1. Geometría del espacio--Problemas, ejercicios, etc.
I. Andaluz Zúñiga, Carlos.
II. Universidad del Pacífico (Lima)

516.23 (SCDD)

A nuestros padres.

Índice

Prólogo

Geometría del espacio: ejercicios y problemas fue escrito por los profesores a partir de su desempeño como docentes en la Universidad del Pacífico desde los años 1976 y 1995, respectivamente, sobre la base de sus notas de clase.

Este libro puede ser utilizado como texto básico, ya que se explican las características simples de los elementos de la geometría del espacio sin mayor rigor académico. Se demuestran ciertos teoremas y se encarga al lector la demostración de los otros.

Los capítulos se refieren a rectas y planos en el espacio, a superficies y ángulos diedros y triedros, así como a los poliedros clásicos: prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera.

Todos los temas son tratados de una manera sencilla y concisa, y se complementan con más de 200 ejercicios y problemas, entre resueltos y propuestos.

1. Introducción

La palabra «espacio» proviene del latín *spatium*. Generalmente se refiere a la región que ocupa un objeto. Tiene, sin embargo, diferentes acepciones que dependen del contexto en el que es usada. Así, tenemos que el espacio físico es el lugar donde existen los objetos; el espacio exterior comprende las regiones que se encuentran fuera de la atmósfera terrestre; el espacio público se refiere al lugar de libre tránsito de las personas; el espacio geográfico es el lugar en el que se desenvuelve una población e interactúa con el medio ambiente; y el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $x = (x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$, tal que $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots, n$, que pertenece al espacio euclidiano n-dimensional.

1.1 Geometría plana

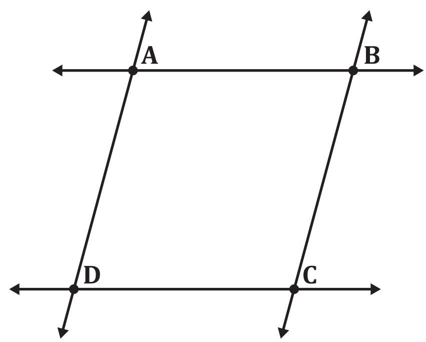
La Geometría Plana estudia las propiedades y las medidas de objetos que están contenidos en el espacio euclidiano bidimensional $\mathbb{R}^2$, como son rectas, ángulos, polígonos (triángulos, cuadriláteros, entre otros) y figuras planas en general.

1.2 Geometría del espacio

La Geometría del Espacio es la rama de la Matemática que analiza las propiedades y las medidas de objetos que están contenidos en el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$, como son rectas, planos, superficies, ángulos diedros y triedros, y poliedros, como el prisma, la pirámide, el cilindro, el cono y la esfera.

1.3 Plano

Del latín *planus*, la idea aproximada de un plano nos la da una hoja delgada de papel al ser extendida. El plano carece de espesor y es ilimitado en todos sus sentidos y direcciones. Se lo suele representar con un paralelogramo *ABCD* ilimitado.



Todo plano divide al espacio en dos semiespacios, situados a uno y a otro lado del plano.

Teorema:

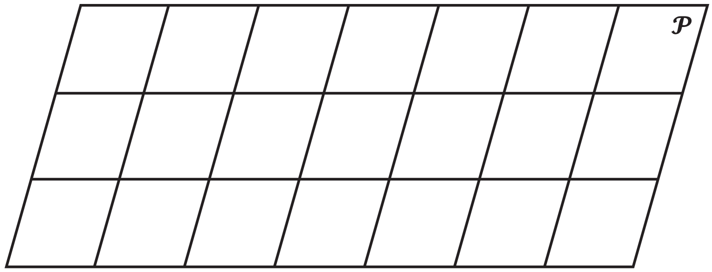
Si dos puntos *A* y *B* pertenecen al mismo semiespacio, entonces el segmento *AB* estará contenido en este semiespacio y no cortará al plano.

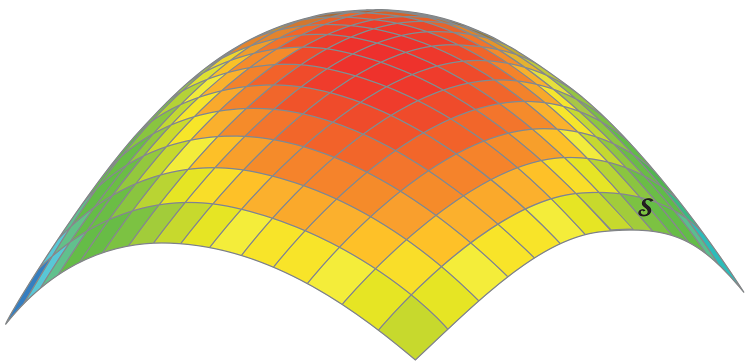
Un plano se determina en cualquiera de los casos siguientes:

a) Conocidos una recta y un punto exterior a ella.
b) Conocidas dos rectas que se cortan (secantes).
c) Conocidas dos rectas que no se cortan (paralelas no coincidentes).
d) Conocidos tres puntos no alineados.

1.4 Superficie

La palabra «superficie» proviene de los vocablos latinos *super* (sobre) y *facies* (cara). Usualmente se la usa para referirse a una de las caras de un plano; por ejemplo, la superficie del terreno donde se asienta un edificio. Sin embargo, no todas las superficies son planas; por ejemplo, la superficie esférica o parte de ella.


𝒫


𝒮

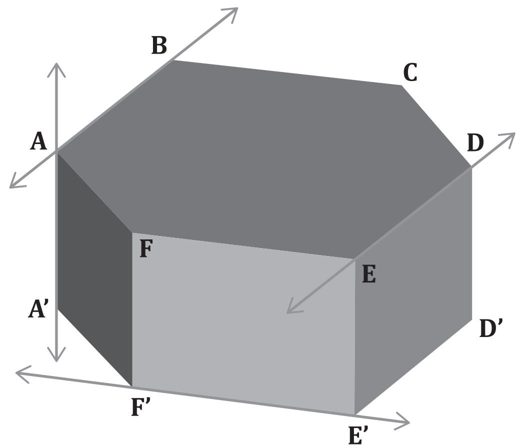
2. Rectas y planos en el espacio

2.1 Rectas en el espacio

2.1.1 Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio

Dadas 2 rectas distintas en $\mathbb{R}^3$, estas pueden ser:

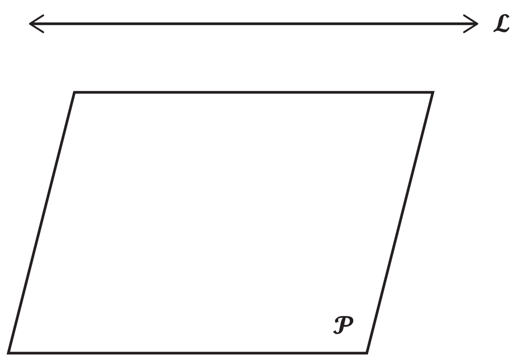
a) Paralelas: si pertenecen al mismo plano y no se intersecan. Ejemplo: *AB* y *DE*.
b) Secantes: si tienen un único punto en común (en este caso, las 2 rectas pertenecen al mismo plano). Ejemplo: *AB* y *AA'*.
c) Alabeadas: si no pertenecen al mismo plano. Ejemplo: *AA'* y *DE*; *AA'* y *E'F'*.
d) Ortogonales: son rectas del espacio tales que, si se traza una paralela a una de ellas y que esté contenida en el plano de la otra, forman un ángulo de 90°. Ejemplo: *AA'* y *E'F'*.
e) Perpendiculares: son aquellas rectas ortogonales que pertenecen al mismo plano. Ejemplo: *AA'* y *A'F'*.



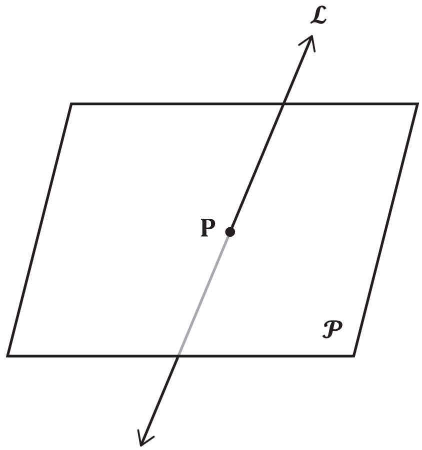
2.1.2 Intersección de una recta y un plano

Dadas una recta $\mathcal{L}$ y un plano $\mathcal{P}$ que pertenecen a $\mathbb{R}^3$, puede ocurrir que:

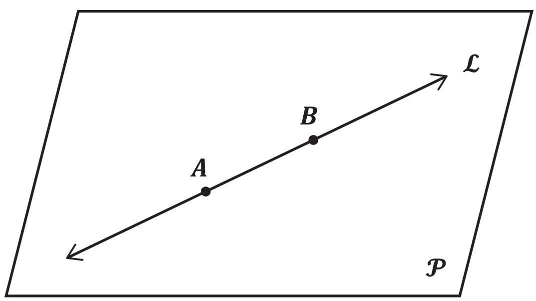
a) La recta y el plano sean paralelos si no se intersecan.



b) La recta y el plano sean secantes si tienen un único punto $\boldsymbol{P}$ en común.

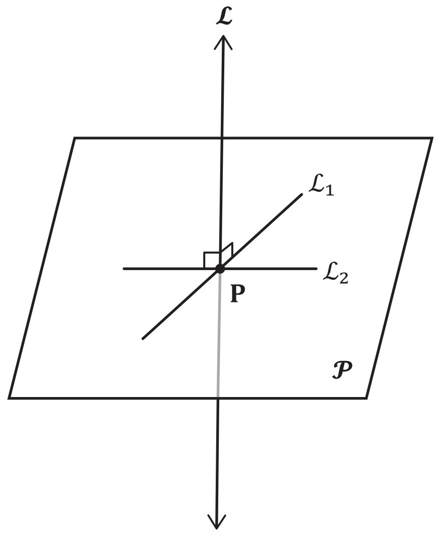


c) La recta esté contenida en el plano si tienen 2 puntos A y B, como mínimo, en común. En este caso, todos los puntos de la recta pertenecen al plano.



2.1.3 Recta perpendicular a un plano

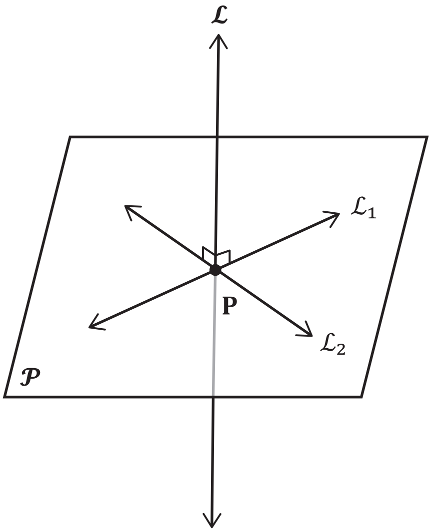
Una recta $\mathcal{L}$ es perpendicular a un plano $\mathcal{P}$ si y solo si la recta $\mathcal{L}$ es perpendicular a 2 rectas secantes distintas, como mínimo, del plano $\mathcal{P}$.



Si la recta $\mathcal{L}$ es perpendicular a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$, que están contenidas en $\mathcal{P}$, será perpendicular a todas las rectas contenidas en $\mathcal{P}$.

Si una recta no es perpendicular a todas las rectas de un plano que pasen por el punto de intersección, dicha recta se considera oblicua al plano.

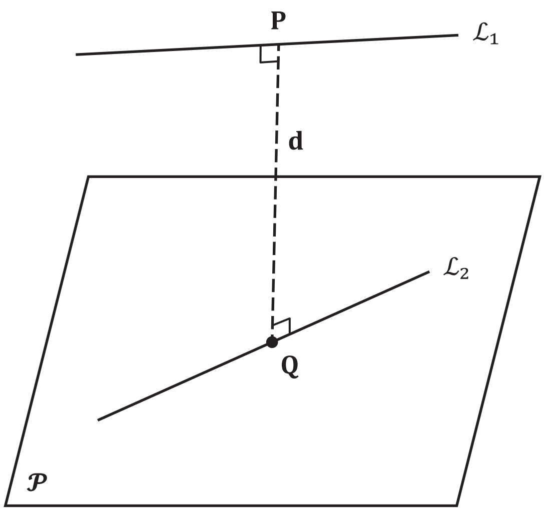
Lo anterior se resume en el siguiente teorema: si 2 rectas se intersecan y hay una recta que es perpendicular a ambas en su punto de intersección, esta recta es perpendicular al plano que aquellas determinan.



$\mathcal{L} \perp \mathcal{P}$

2.1.4 Distancia mínima entre 2 rectas alabeadas

Dadas 2 rectas alabeadas (no coplanares ni secantes), la mínima distancia entre ellas es la longitud del segmento perpendicular a ambas.



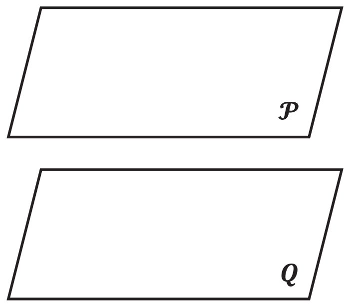
$d = PQ$

2.2 Planos en el espacio

2.2.1 Posiciones relativas de 2 planos en el espacio

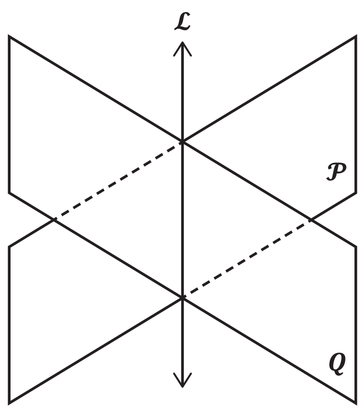
Dados 2 planos distintos en $\mathbb{R}^3$, estos pueden ser:

a) Paralelos: si no tienen ningún punto en común.



$$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \phi$$

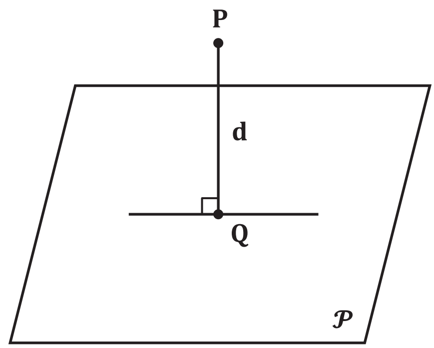
b) Secantes: si su intersección es una recta.



$$\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \mathcal{L}$$

2.2.2 Distancia de un punto a un plano

Es la longitud del segmento perpendicular al plano trazado desde el punto.

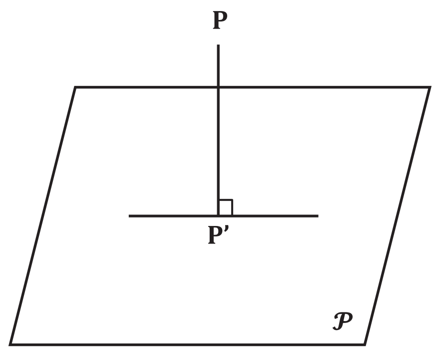


$d = PQ$

2.2.3 Proyección de un punto y de una recta sobre un plano

2.2.3.1 Proyección de un punto sobre un plano

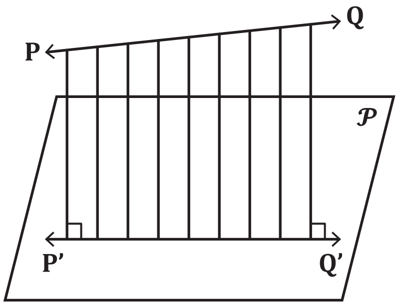
Es el pie de la perpendicular al plano trazada desde el punto.



$Proy_{\mathcal{P}}\, P = P'$

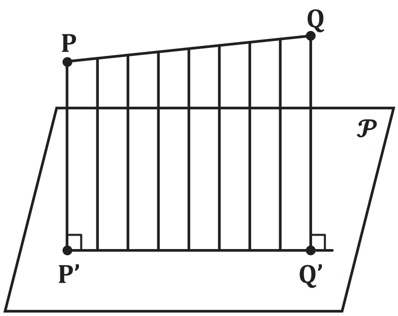
2.2.3.2 Proyección de una recta sobre un plano

Es el conjunto de los puntos del plano que corresponden a las proyecciones de los puntos de la recta.



$$Proy_{\mathcal{P}}\ \overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{P'Q'}$$

En el caso de la proyección de un segmento sobre un plano, se obtiene el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento dado.



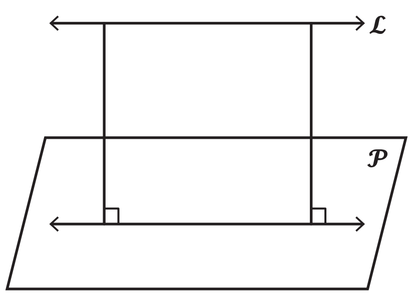
$$Proy_{\mathcal{P}}\ \overline{PQ} = \overline{P'Q'}$$

2.2.4 Ángulo formado por una recta y un plano

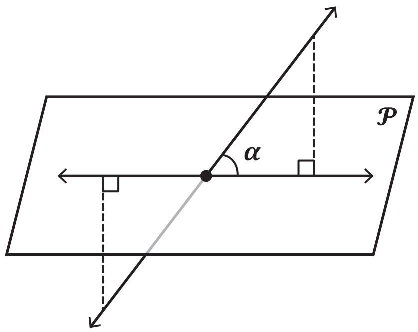
Se lo define como el ángulo formado por la recta y su proyección sobre el plano.

Se presentan 3 casos:

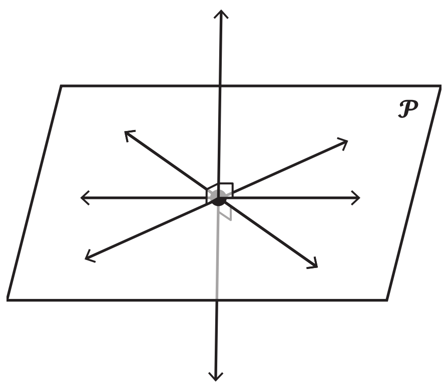
a) Si la recta es paralela al plano, el ángulo es nulo.



b) Si la recta es oblicua al plano, el ángulo es agudo.



c) Si la recta es perpendicular al plano, el ángulo es recto. Nótese que todas las rectas contenidas en el plano y que pasan por el pie de la perpendicular son perpendiculares a la recta dada.



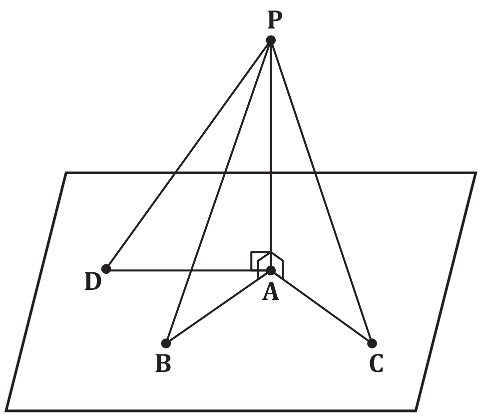
2.2.5 Teoremas relativos a planos en el espacio

Teorema de los segmentos perpendicular y oblicuo a un plano

Si desde un punto exterior a un plano se traza un segmento perpendicular y varios segmentos oblicuos, se cumple que:

a) El segmento perpendicular es de menor longitud que cualquier segmento oblicuo.
b) Los segmentos oblicuos, cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular, son congruentes.
c) De dos segmentos oblicuos, cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es de mayor longitud aquel cuyo pie dista más del pie de la perpendicular.

Del gráfico siguiente (*BA* = *AC y DA* > *AC*), se desea demostrar que:



a) *PA* < *PC*

b) *PB* = *PC*

c) *PD* > *PC*

Demostración:

a) El triángulo *PAC* es rectángulo en el vértice *A*.

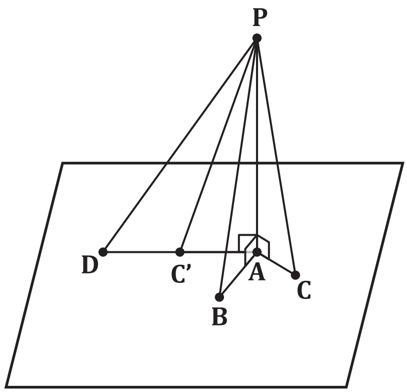
   PA es uno de sus catetos y *PC* es la hipotenusa.

   Por ende, *PA* < *PC*.

b) Los triángulos rectángulos *PAB y PAC* son congruentes (*LAL*).

   En consecuencia, *PB* = *PC*.

c) Como *DA* > *AC*, escojamos *C'* en $\overline{AD}$ tal que *PC'* = *PC*.



En el triángulo obtusángulo $PC'D$ (ángulo C' obtuso y ángulo D agudo), se cumple que:

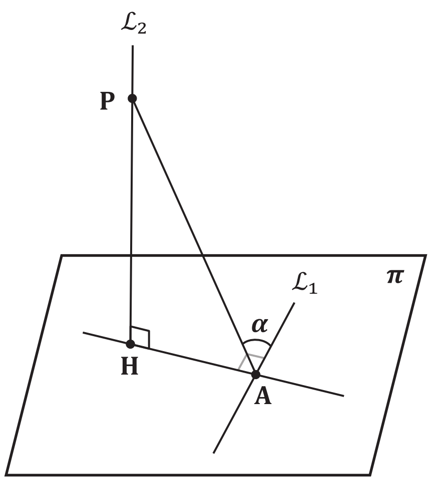
$$PD > PC'.$$

Es decir: $PD > PC$

Teorema de las 3 perpendiculares

Si desde el pie H de una recta perpendicular $\mathcal{L}_2$ a un plano π se traza otra perpendicular HA a una recta cualquiera $\mathcal{L}_1$ de dicho plano, todo segmento de recta que une un punto cualquiera P de $\mathcal{L}_2$ con el punto de intersección A de las 2 últimas ($\overline{HA}$ y $\mathcal{L}_1$) es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_1$ contenida en el plano.

Se tiene el plano π que contiene a la recta $\mathcal{L}_1$.
Sea H el pie de la recta $\mathcal{L}_2$ perpendicular al plano π.
Se traza $\overline{HA}$ perpendicular a $\mathcal{L}_1$.
Se une el punto $P \in \mathcal{L}_2$ con el punto A y se obtiene el segmento PA.

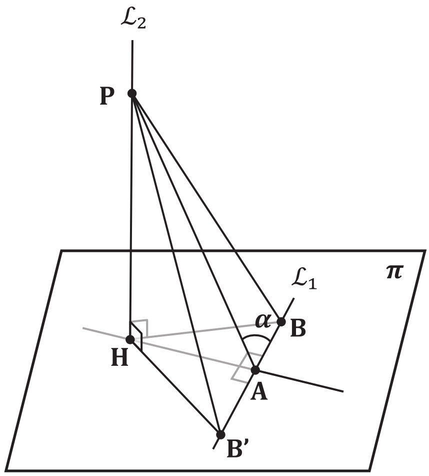


Se debe demostrar que $\overline{PA}$ es perpendicular a $\mathcal{L}_1$.

Es decir: $\alpha = 90°$.

Demostración:

Ubiquemos los puntos B y B' pertenecientes a la recta $\mathcal{L}_1$ tal que $AB = AB'$ y unamos P con B y B'. Por la propiedad de la mediatriz, $HB = HB'$. En consecuencia:



$\Delta\ PHB \cong \Delta\ PHB'$ (LAL)

$\overline{PH}$ común, $\sphericalangle\ PHB \cong \sphericalangle\ PHB'$, $\overline{HB} \cong \overline{HB'}$

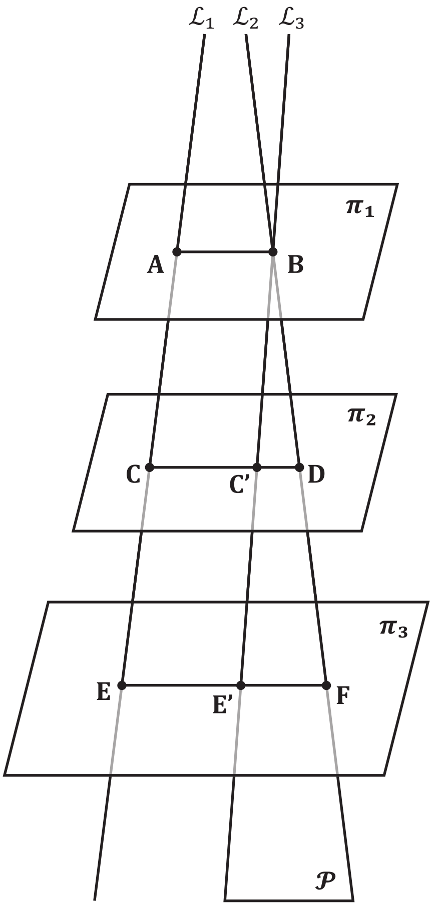
De donde:

$$\overline{PB} \cong \overline{PB'}$$

Finalmente: $\overline{PA}$ es mediatriz de $\overline{BB'}$
El ángulo α es recto.

Teorema de Thales en el espacio

Tres o más planos paralelos determinan segmentos proporcionales sobre 2 rectas secantes cualesquiera.



En la figura adjunta:

π_1, π_2, π_3: 3 planos paralelos.

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$: 2 rectas secantes a los planos.

A, C y E: puntos de intersección de $\mathcal{L}_1$ con planos π_1, π_2, π_3, respectivamente.

B, D y F: puntos de intersección de $\mathcal{L}_2$ con planos π_1, π_2, π_3, respectivamente.

Se desea demostrar que:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

Demostración:

Trazar $\mathcal{L}_3$ paralela a $\mathcal{L}_1$ por $\mathcal{B}$, la cual corta a π_2 y π_3 en los puntos C' y E', respectivamente.

Por el teorema de los segmentos de paralelas comprendidas entre planos paralelos: $AC = BC'$ y $CE = C'E'$.

Las rectas $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ determinan el plano P que corta a los planos π_2 y π_3 en $\overline{C'D}$ y en $\overline{E'F}$, respectivamente. De donde: $\overline{C'D} \,//\, \overline{E'F}$.

Por semejanza de los triángulos $BC'D$ y $BE'F$:

$$\frac{BC'}{BE'} = \frac{BD}{BF}$$

O, mejor:

$$\frac{BC'}{BC' + C'E'} = \frac{BD}{BD + DF}$$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{BC'}{(BC' + C'E') - BC'} = \frac{BD}{(BD + DF) - BD}$$

Es decir:

$$\frac{BC'}{C'E'} = \frac{BD}{DF}$$

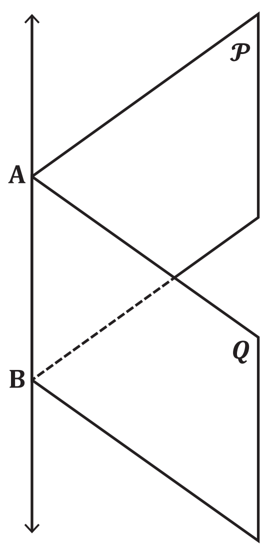
Con lo cual:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

3. Ángulos diedros

3.1 Ángulos diedros

Son aquellos formados por la unión de 2 semiplanos no coplanares que tienen una recta común llamada arista del ángulo diedro.



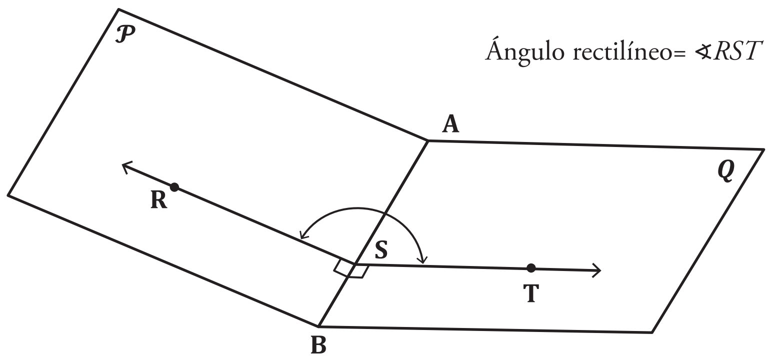
$\overleftrightarrow{AB}$: arista

$\mathcal{P}$ *y* Q: caras

$\mathcal{P} - \overleftrightarrow{AB} - Q$: ángulo diedro

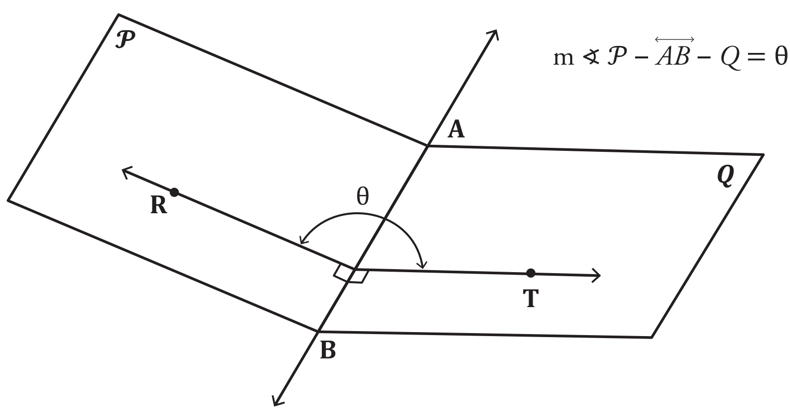
3.1.1 Ángulo rectilíneo de un ángulo diedro

El ángulo rectilíneo o ángulo plano de un diedro es el ángulo que forman 2 rayos, contenidos en cada cara del diedro, y que son perpendiculares a su arista.

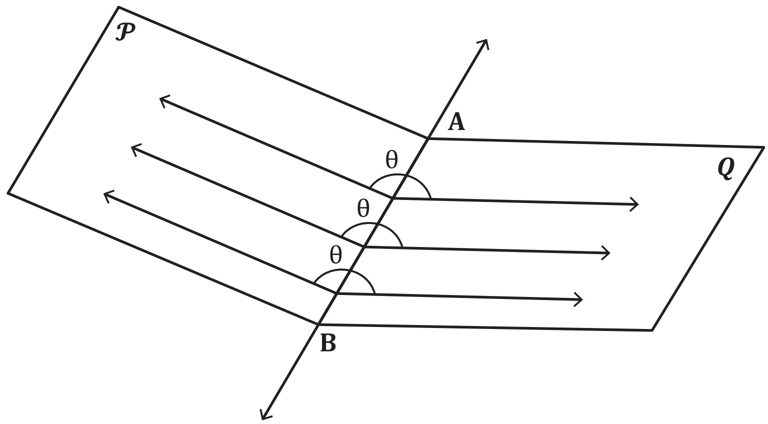


3.1.2 Medida de un ángulo diedro

La medida del ángulo diedro $\mathcal{P} - \overleftrightarrow{AB} - Q$ es la medida θ de cualquiera de sus ángulos rectilíneos.



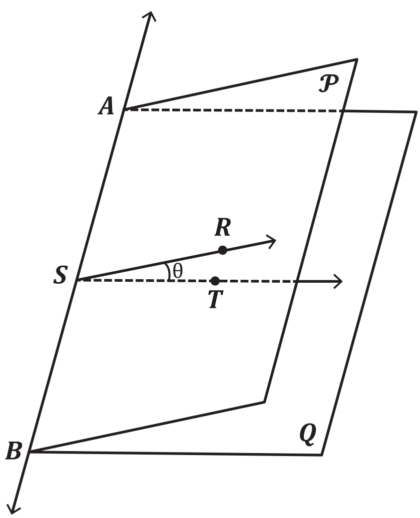
Todos los ángulos rectilíneos de un ángulo diedro son congruentes dado que tienen sus 2 lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido.



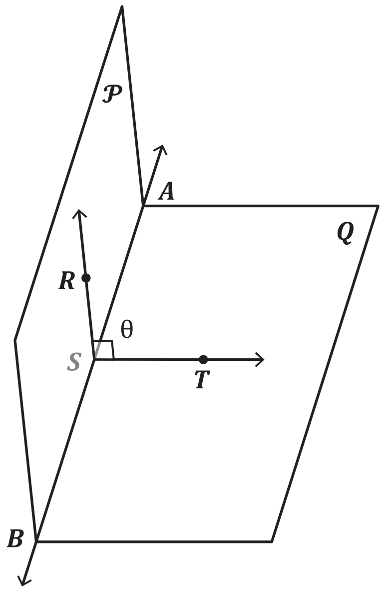
3.1.3 Clasificación de los ángulos diedros

3.1.3.1 Por su medida

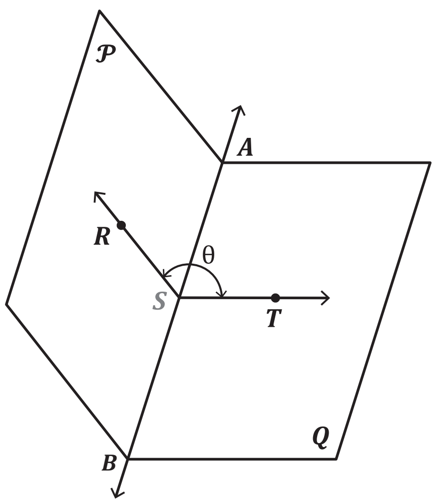
Dependiendo de la medida del ángulo rectilíneo de un ángulo diedro, este puede ser agudo, recto u obtuso.



$\mathcal{P} - \overleftrightarrow{AB} - Q$ es agudo si $\theta < 90°$



$\mathcal{P} - \overleftrightarrow{AB} - Q$ es recto si $\theta = 90°$

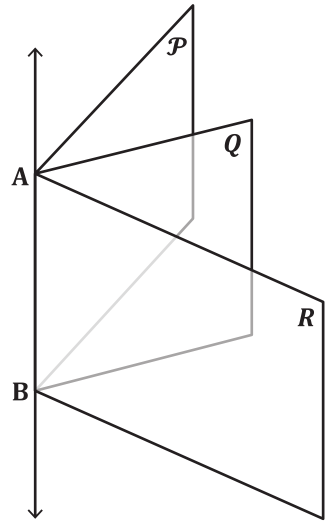


$\mathcal{P} - \overleftrightarrow{AB} - Q$ es obtuso si $\theta > 90°$

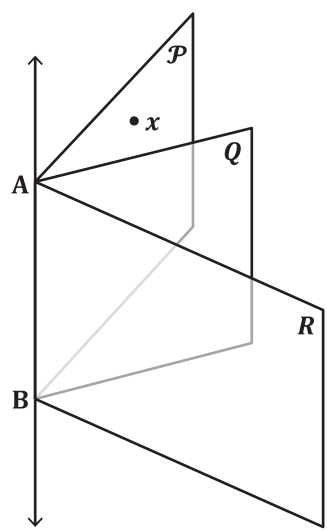
3.1.3.2 Por su posición

Los ángulos diedros pueden ser:

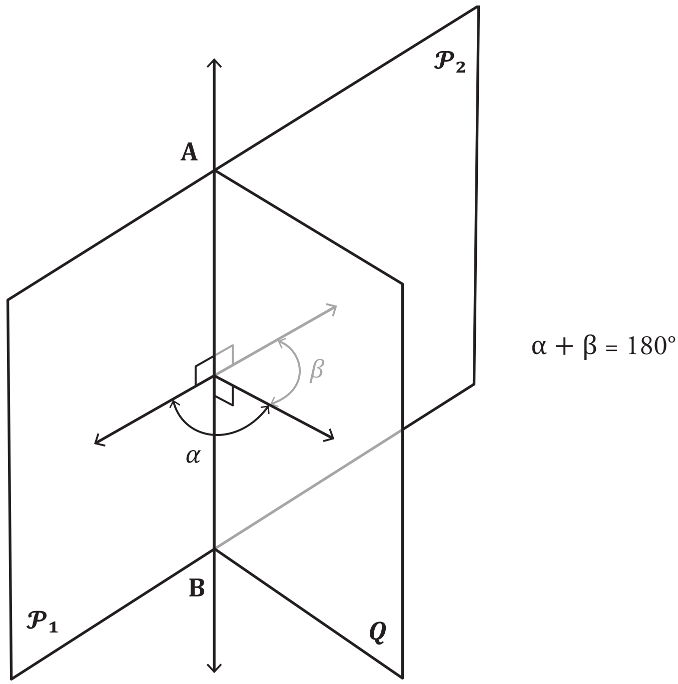
a) Consecutivos: si tienen una arista y una cara comunes. Así, tenemos que $P - \overleftrightarrow{AB} - Q$ y $Q - \overleftrightarrow{AB} - R$ son ángulos diedros consecutivos, ya que $\overleftrightarrow{AB}$ es su arista común y Q es la cara común.



Se requiere que ambos diedros no tengan puntos interiores en común, como no es el caso de $P - \overleftrightarrow{AB} - Q$ y $P - \overleftrightarrow{AB} - R$ (ya que el punto x es interior a ambos). En este caso, los ángulos diedros indicados no son ángulos consecutivos.

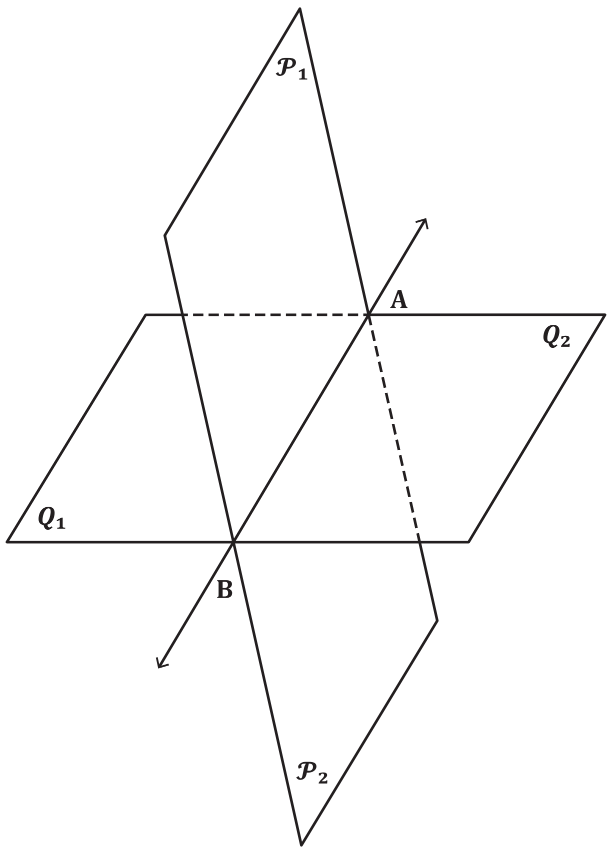


b) Adyacentes: si son ángulos consecutivos cuyas caras no comunes son coplanares. Por ejemplo, los ángulos diedros $\mathcal{P}_1 - \overleftrightarrow{AB} - Q$ y $\mathcal{P}_2 - \overleftrightarrow{AB} - Q$.



c) Opuestos por la arista: si tienen la misma arista y las caras de uno de ellos son semiplanos opuestos de las caras del otro. Se forman 2 pares de ángulos diedros opuestos por la arista, a saber:

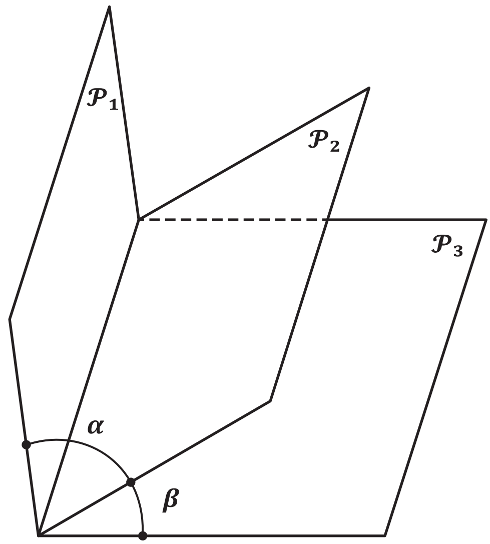
$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 - \overleftrightarrow{AB} - Q_2 \text{ y } \mathcal{P}_2 - \overleftrightarrow{AB} - Q_1 \\ \mathcal{P}_1 - \overleftrightarrow{AB} - Q_1 \text{ y } \mathcal{P}_2 - \overleftrightarrow{AB} - Q_2 \end{cases}$$



3.1.3.3 Por sus características

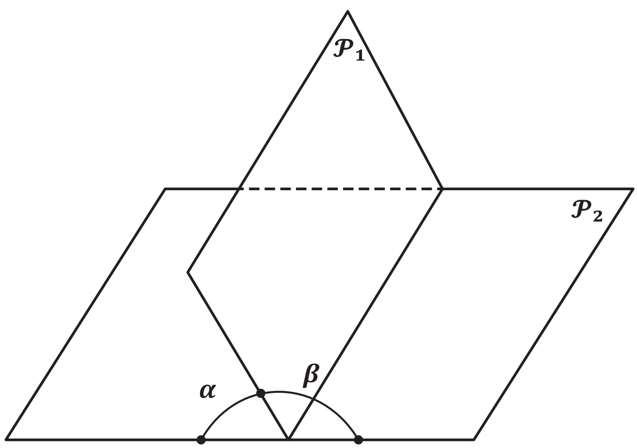
Los ángulos diedros pueden ser:

a) Complementarios: si sus ángulos rectilíneos suman 90°.



$\alpha + \beta = 90°$

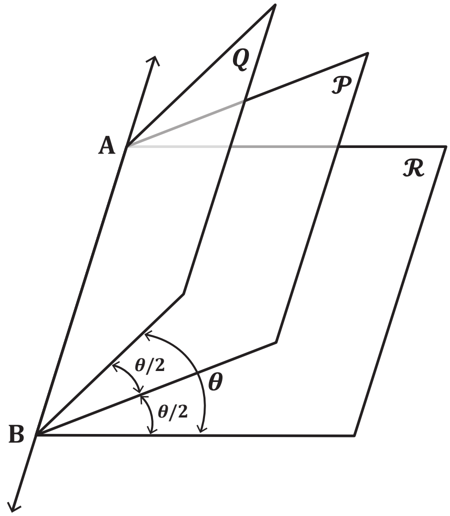
b) Suplementarios: si sus ángulos rectilíneos suman 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

3.1.4 Semiplano bisector de un ángulo diedro

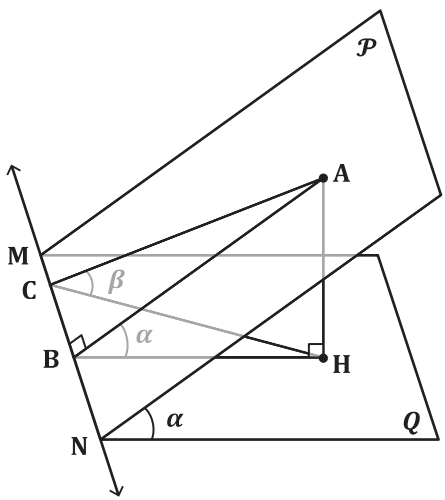
Es aquel semiplano que divide al ángulo diedro en 2 ángulos diedros congruentes y cuyo origen coincide con la arista del ángulo diedro.



El plano $\mathcal{P}$ es el semiplano bisector del ángulo diedro $Q - \overleftrightarrow{AB} - \mathcal{R}$, y se cumple que todo punto del plano $\mathcal{P}$ equidista de las caras del diedro (planos Q y $\mathcal{R}$).

3.1.5 Recta de máxima pendiente en un ángulo diedro

Dado el ángulo diedro $\mathcal{P} - \overleftrightarrow{MN} - Q$, la recta contenida en una de sus caras (plano $\mathcal{P}$) que forma el mayor ángulo con la otra cara (plano Q) es la recta AB perpendicular a la arista del ángulo diedro.



H es la proyección del punto A sobre el plano Q.

La recta AB es perpendicular a la arista MN del ángulo diedro $\mathcal{P} - \overleftrightarrow{MN} - Q$. La recta AC no es perpendicular a dicha arista.

La recta AB contenida en el plano $\mathcal{P}$, es aquella que forma el máximo ángulo con el plano Q, es decir:

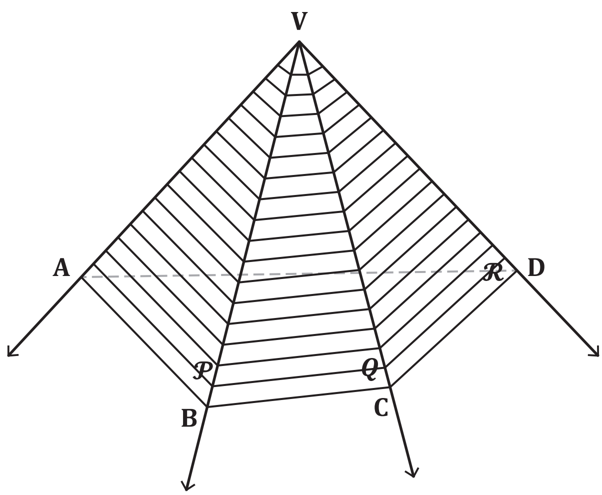
$$\alpha > \beta$$

Además: α es la medida del ángulo rectilíneo del ángulo diedro.

4. Ángulos poliedros

4.1 Ángulos poliedros

Se denomina ángulo poliedro o anguloide a la región del espacio limitada por los planos que se forman al unir un punto V con los vértices de un polígono $ABC\ldots M$ que está contenido en un plano que no contiene a V.



Considere los planos $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ como los determinados por los puntos V, A, B; V, B, C; V, C, D y V, D, A, respectivamente.

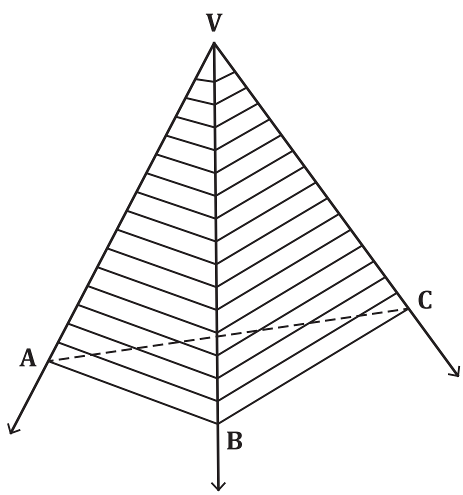
Los elementos del ángulo poliedro $V - ABCD$ mostrado en la figura anterior son:

Vértice	:	V
Aristas	:	$\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$ y $\overleftrightarrow{VD}$
Caras	:	son los ángulos formados por cada 2 aristas consecutivas $\measuredangle AVB$, $\measuredangle BVC$, $\measuredangle CVD$ y $\measuredangle DVA$
Diedros	:	$\mathcal{P} - \overleftrightarrow{VB} - Q$
		$\mathcal{Q} - \overleftrightarrow{VC} - R$
		$\mathcal{R} - \overleftrightarrow{VD} - S$
		$\mathcal{S} - \overleftrightarrow{VA} - P$

De acuerdo con el número de caras del ángulo poliedro, se denomina ángulo triedro al que tiene 3 caras, ángulo tetraedro al que tiene 4 caras, ángulo pentaedro al que tiene 5 caras, y así sucesivamente.

4.2 Ángulos triedros

Son aquellos ángulos poliedros formados por 3 caras. Es el ángulo poliedro de menor número de caras.

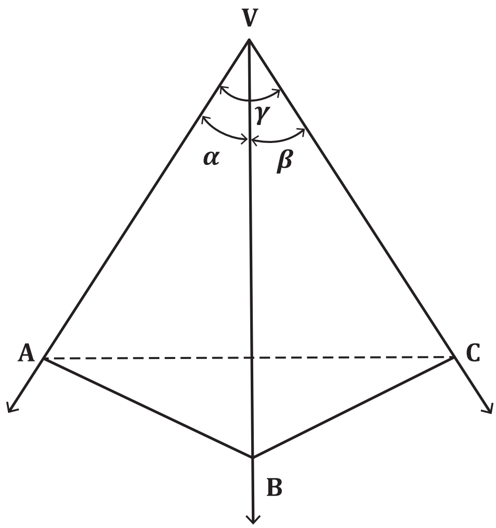


$V - ABC$

4.2.1 Clasificación de los ángulos triedros

4.2.1.1 Por sus caras

Dependiendo del número de caras congruentes, el ángulo triedro puede ser equilátero o isósceles, si tiene 3 o 2 caras congruentes, respectivamente, o escaleno si todas sus caras son diferentes.



Equilátero $\alpha = \beta = \Upsilon$

Isósceles $\alpha = \beta \neq \Upsilon$

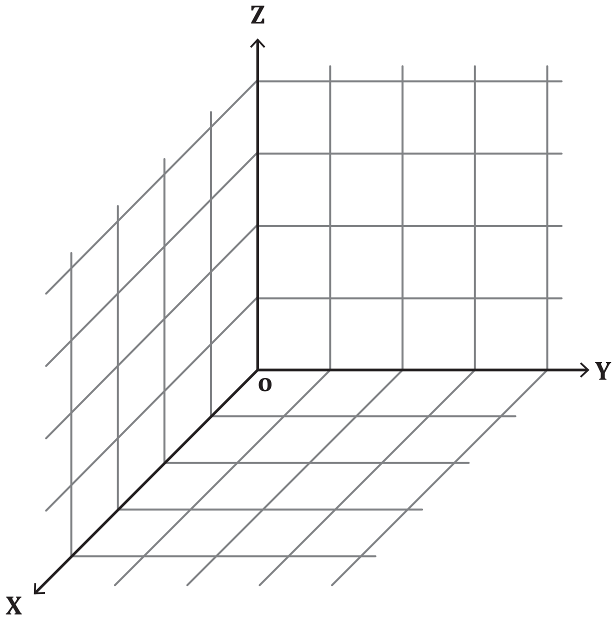
Escaleno $\alpha \neq \beta \neq \Upsilon$

4.2.1.2 Por el número de caras rectas

El ángulo triedro puede ser:

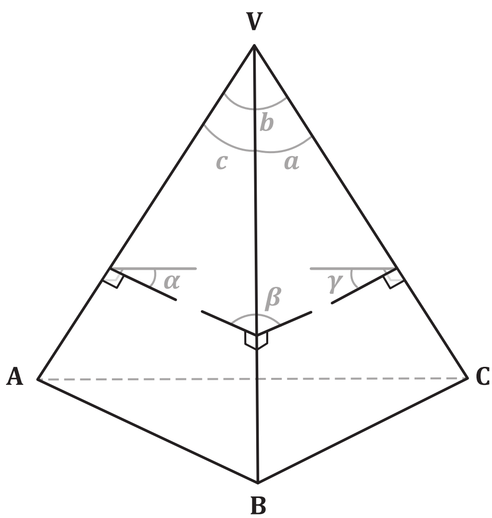
a) Rectangular: si tiene una cara de 90°.
b) Birrectangular: si tiene 2 caras de 90° y 2 ángulos diedros rectos.
c) Trirrectangular: si tiene 3 caras de 90° y 3 ángulos diedros rectos.

El ángulo triedro trirrectangular $O - XYZ$ es utilizado como el sistema de coordenadas cartesianas espacial $\mathbb{R}^3$.



4.3 Propiedades de los ángulos triedros

En el triedro V-ABC siguiente, se cumple que:



a) $b - c < a < b + c$

b) $0° < a + b + c < 360°$

c) $180° < \alpha + \beta + \Upsilon < 540°$

d) Si $\alpha = \beta \Rightarrow a = b$
Si $a = b \Rightarrow \alpha = \beta$

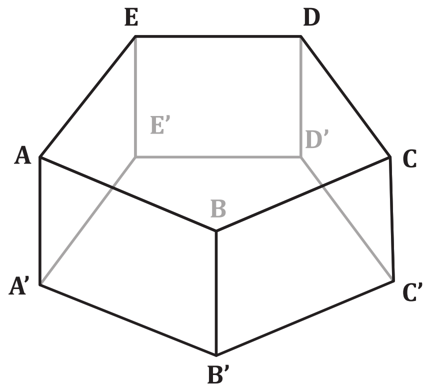
5. Poliedros

5.1 Definición

Un poliedro es el sólido geométrico limitado por 4 o más regiones poligonales no coplanares llamadas «caras», de modo que las intersecciones de cada 2 regiones contiguas constituyen las aristas del poliedro. «Poliedro» proviene de los vocablos griegos *polys* (muchas) y *edra* (caras o bases), que forman la palabra *polyedron* (muchas caras).

5.2 Elementos de los poliedros

En el heptaedro (poliedro de 7 caras) que se muestra a continuación, se distinguen los siguientes elementos:



10 vértices:	*A*, *A'*, *B*, *B'*, *C*, *C'*, *D*, *D'*, *E* y *E'*.
7 caras:	son los polígonos que limitan al poliedro: *AA'B'B*, *BB'C'C*, *CC'D'D*, *DD'E'E*, *EE'A'A*, *ABCDE* y *A'B'C'D'E'*.
15 aristas:	*AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* y *EE'* (laterales). *AB*, *BC*, *CD*, *DE* y *EA* (de la base superior). *A'B'*, *B'C'*, *C'D'*, *D'E'* y *E'A'* (de la base inferior).
Ángulos diedros:	son los ángulos formados por 2 caras consecutivas; por ejemplo, el ángulo formado por las caras *AA'B'B* y *AA'E'E*.
Ángulos poliedros:	son los ángulos formados en los vértices del poliedro; por ejemplo: *A–A'BE*, *B–AB'C*, *C–BC'D*, etc.
Diagonales:	son los segmentos que unen 2 vértices no coplanares.

5.3 Clasificación de los poliedros

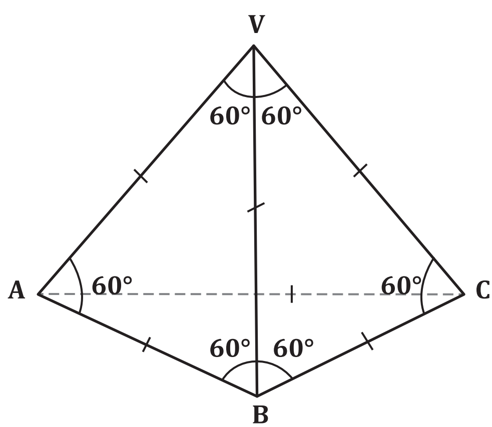
5.3.1 Por número de caras

4 caras:	tetraedro
5 caras:	pentaedro
6 caras:	hexaedro
7 caras:	heptaedro
8 caras:	octaedro

9 caras:	enneaedro o nonaedro
10 caras:	decaedro
11 caras:	endecaedro
12 caras:	dodecaedro
13 caras:	tridecaedro
14 caras:	tetradecaedro
15 caras:	pentadecaedro
16 caras:	hexadecaedro
17 caras:	heptadecaedro
18 caras:	octadecaedro
19 caras:	nonadecaedro
20 caras:	icosaedro
30 caras:	tricontaedro
40 caras:	tetracontaedro

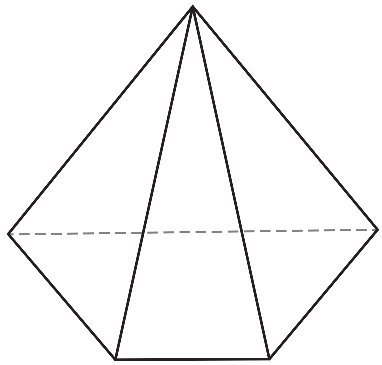
5.3.2 Por la forma de sus caras

a) Regulares: si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y todos sus ángulos diedros y ángulos poliedros son respectivamente congruentes. Por ejemplo, el tetraedro regular.



Los triángulos *VAB*, *VBC*, *VCA* y *ABC* son equiláteros.

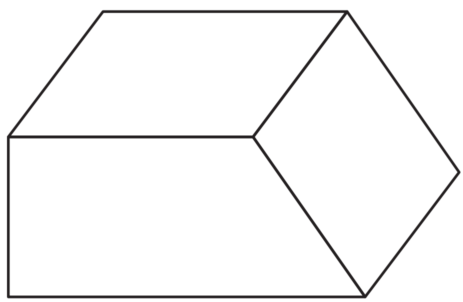
b) Irregulares: los que no son regulares.



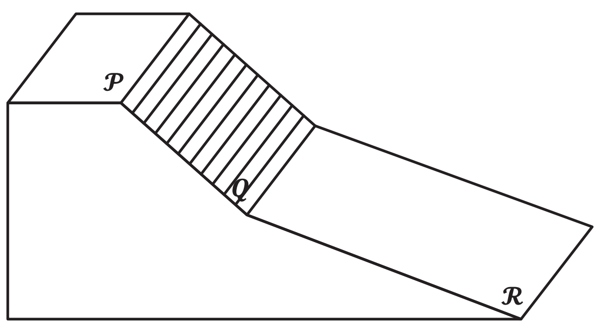
Las caras laterales son triángulos y la base es un cuadrilátero.

5.3.3 Por la disposición de sus caras

a) Convexos: si el plano que contiene a cualquiera de sus caras deja al poliedro en el mismo semiespacio.



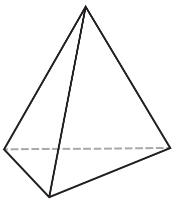
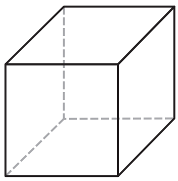
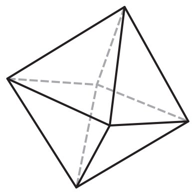
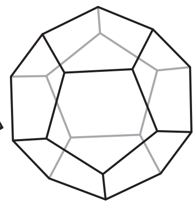
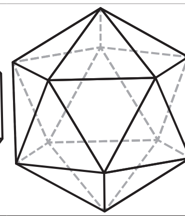
b) Cóncavos: si el plano que contiene a alguna de sus caras no deja al poliedro en el mismo semiespacio.



Se nota que al prolongar la cara $\mathcal{Q}$, las caras $\mathcal{P}$ y $\mathcal{R}$ del poliedro quedan en semiespacios distintos ($\mathcal{P}$ queda por debajo y $\mathcal{R}$ queda por encima del plano que contiene a la cara $\mathcal{Q}$).

5.4 Poliedros regulares convexos

Solo hay 5 poliedros regulares convexos. Se muestra a continuación cuáles son estos y cuáles son sus elementos.

	Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
					
CARAS	4 triángulos equiláteros	6 cuadrados	8 triángulos equiláteros	12 pentágonos regulares	20 triángulos equiláteros
VÉRTICES	4	8	6	20	12
ARISTAS	6	12	12	30	30

5.5 Teorema de Euler

En todo poliedro convexo se cumple que $C+V = A+2$, donde C, V y A son el número de caras, vértices y ángulos del poliedro, respectivamente.

Así pues, se cumple que, en el poliedro del acápite 5.2: 10+7 = 15+2.

Igualmente, del cuadro anterior se comprueba que:

Hexaedro: 6+8 = 12+2
Dodecaedro: 12+20 = 30+2
Icosaedro: 20+12 = 30+2

5.6 Teorema de la suma de los ángulos interiores de las caras de un poliedro

Sea un poliedro que tiene C caras, las cuales tienen n_1, n_2,…, n_c lados. La suma de los ángulos interiores de sus caras viene dada por:

$$S = 180°(n_1 - 2) + 180°(n_2 - 2) + \cdots + 180°(n_c - 2)$$

Es decir:

$$S = 180°(n_1 + n_2 + \cdots + n_c) - 180°(2 + 2 + \cdots + 2)$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_c}{2} = A$$

Entonces:

$$S = 180°(2A) - 180°(2C)$$

De donde:

$$S = 180°(2)(A - C)$$

$$S = 360°(A - C)$$

Como:

$$C + V = A + 2 \Rightarrow A - C = V - 2,$$

se obtiene que:

$$S = 360°(V - 2)$$

5.7 Ejercicios resueltos

1. En un poliedro convexo, la suma del número de caras, vértices y aristas es 102. ¿Cuántas caras tiene el poliedro si la suma de las medidas de los ángulos internos de todos ellos es 9.360°?

   Solución:

   Se conoce que: $C + V + A = 102$ ....(1)

   $360°\,(V - 2) = 9.360° \Rightarrow V = 28$.........(2)

   $C + V = A + 2 \Rightarrow A = C + V - 2$...........(3)

   (2) y (3) en (1): $C + 28 + (C + 28 - 2\,) = 102$

   De donde: $2C = 102 - 54 \Rightarrow C = 24$

2. Un poliedro de *n* vértices está conformado por 6 triángulos, 8 cuadriláteros y 10 pentágonos. Determine *n*.

   Solución:

   El número de caras del poliedro es $C = 6 + 8 + 10 = 24$.

   El número de aristas del poliedro es $A = \frac{6(3)+8(4)+10(5)}{2} = 50$

   (se divide entre 2 pues cada arista pertenece a 2 caras distintas).

   De donde, el número de vértices será:

$$V = (A + 2) - C$$

$$n = (50 + 2) - 24 = 28$$

3. Los ángulos de todas las caras de un prisma suman 13.680°. ¿Cuántas diagonales tiene el polígono de cada una de las bases?

   Solución:

   A partir de $S = 360°(V - 2)$, se obtiene:

$$V = \frac{S}{360°} + 2 = \frac{13.680°}{360°} + 2 = 40$$

   Como las 2 bases tienen igual número de vértices, cada una de ellas tendrá $\frac{40}{2} = 20$ vértices → 20 lados.

   De donde, el número de diagonales de cada una de las bases es:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{20 \times 17}{2} = 170$$

4. Las caras de un icosaedro regular son triángulos equiláteros. Determine cuántas aristas concurren en un vértice cualquiera.

   Solución:

   El icosaedro posee 20 caras → $C = 20$.

   El número total de aristas es A $= \frac{20 \times 3}{2} = 30$

   (se divide entre 2 pues cada arista pertenece a 2 caras distintas).

   De acuerdo con el teorema de Euler:

   $C + V = A + 2 \rightarrow V = A + 2 - C = 30 + 2 - 20 = 12$ vértices

   Las 20 caras triangulares tendrían $20 \times 3 = 60$ aristas en total; sin embargo, en cada uno de los vértices concurren «n» aristas. Por lo tanto:

$$\frac{60}{n} = 12 \Rightarrow n = 5$$

   En cada uno de los 12 vértices del icosaedro concurren 5 aristas.

5.8 Ejercicios propuestos

1. Emplee el teorema de Euler para hallar el número de aristas concurrentes en cada uno de los vértices de un dodecaedro regular.

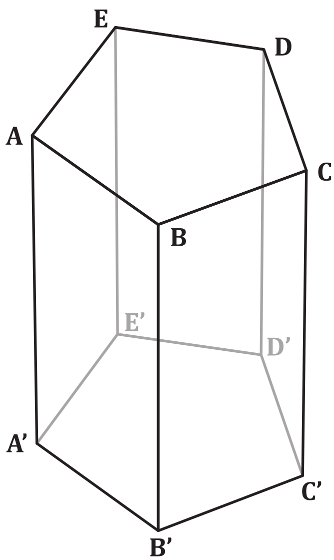
   Rpta.: 3.

2. ¿Cuántos triángulos equiláteros se requieren para formar las caras de los únicos poliedros regulares que existen?

   Rpta.: 32.

6. El prisma

Es el poliedro que tiene 2 regiones poligonales congruentes y paralelas como bases de este, y sus caras laterales son regiones paralelográmicas. Se muestra a continuación un prisma pentagonal:



2 bases:
ABCDE y A'B'C'D'E'

5 caras laterales:
AA'B'B, ……… , EE'A'A

5 aristas laterales:
AA', BB', CC', DD' y EE'

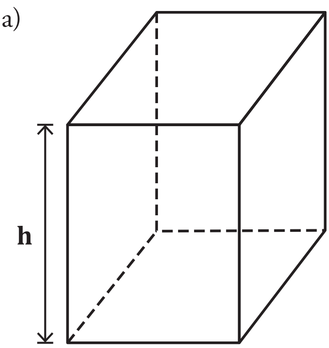
10 aristas de la base:
AB, BC, ……… , D'E' y E'A'

El prisma es regular si las bases son polígonos regulares congruentes y las aristas laterales son perpendiculares a dichas bases.

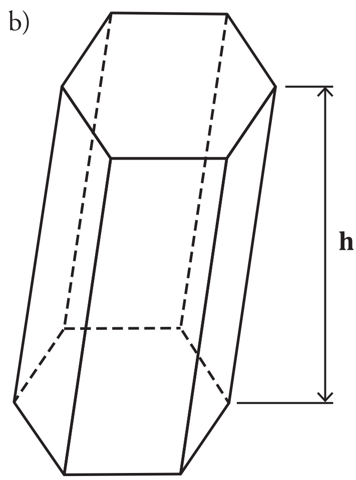
6.1 Clasificación de los prismas

a) Prisma recto: aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases. En el prisma rectangular mostrado, la altura mide igual que las aristas laterales.
b) Prisma oblicuo: aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases. En el prisma hexagonal mostrado, la altura no es congruente con las aristas laterales.

a)

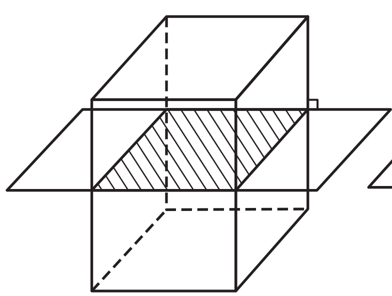


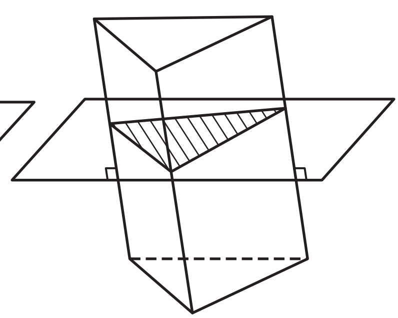
b)



6.2 Secciones de un prisma

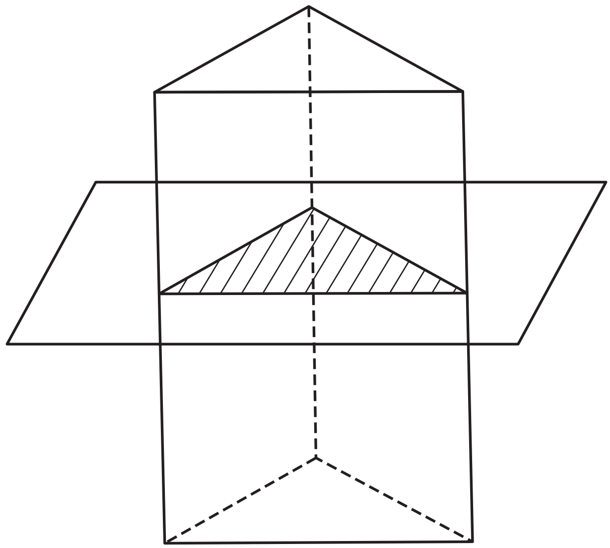
a) Sección recta: es la intersección del prisma con un plano perpendicular a sus aristas laterales.

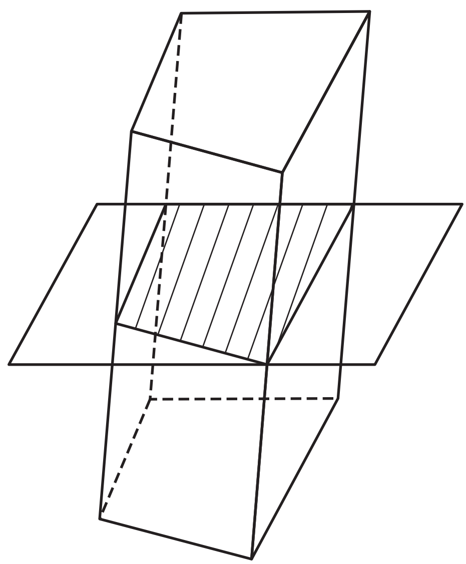




Solo si el prisma es recto, la sección recta es congruente con las bases.

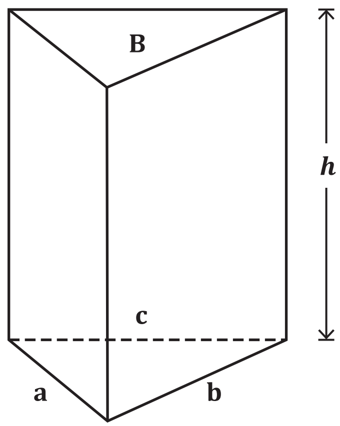
b) Sección transversal: es la intersección del prisma con un plano paralelo a las bases.





La sección transversal siempre es congruente con las bases.

6.3 Áreas y volumen de un prisma recto

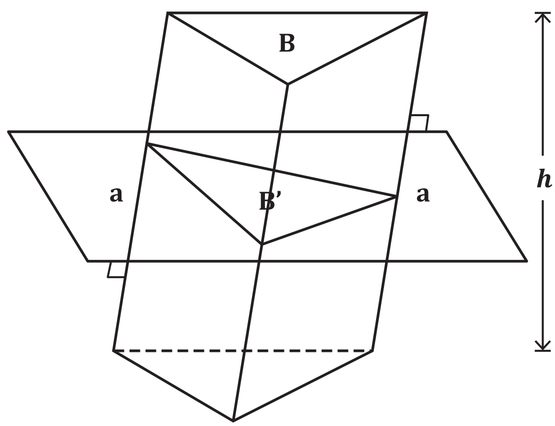


A_L : *área lateral*
$A_L = ah + bh + ch = (a + b + c)h$
$A_L = 2ph(2p$: *perímetro de la base*$)$

A_T : *área total*
$A_T = A_L + 2B$
$A_T = 2ph + 2B$

V : *volumen*
$V =$ *área de la base* $\times$ *altura*
$V = Bh$

6.4 Áreas y volumen de un prisma oblicuo

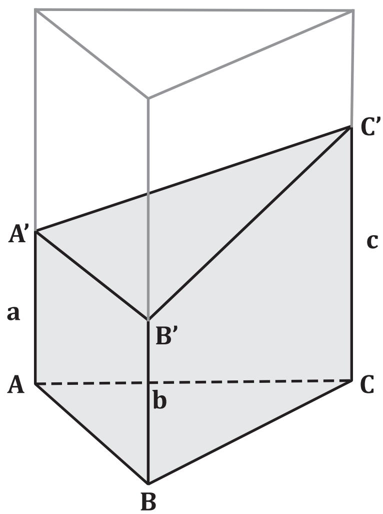


a: *arista lateral*
h: *altura del prisma*
$2p'$: *perímetro de la sección recta*
B': *área de la sección recta*

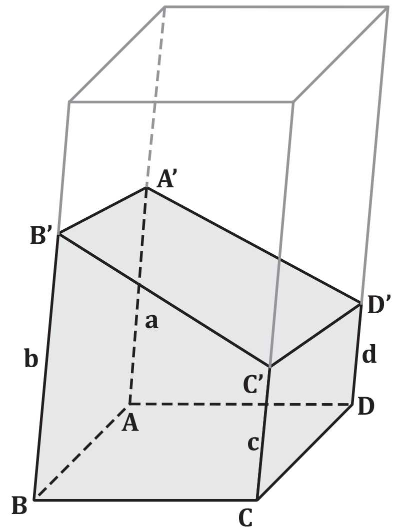
$$A_L = 2p'a = 2ph$$
$$A_T = 2p'a + 2B'$$
$$V = B'a = Bh$$

6.5 Tronco de prisma

Es el sólido geométrico que se obtiene al cortar un prisma con un plano que no es paralelo al plano que contiene a sus bases.



Tronco de prisma recto

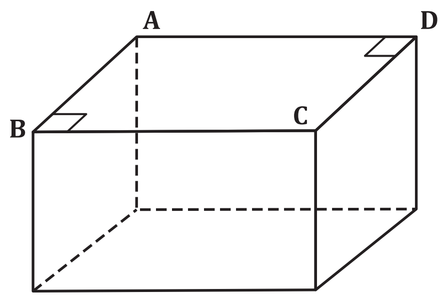


Tronco de prisma oblicuo

6.6 Paralelepípedo

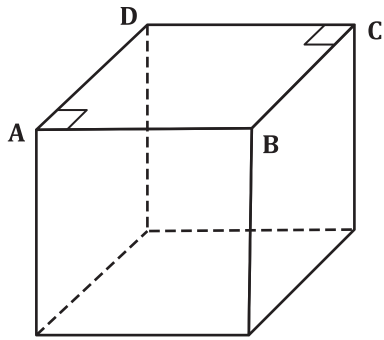
Es el prisma cuyas bases son paralelogramos. Se muestran ejemplos de paralelepípedo rectos.

Paralelepípedo rectangular u ortoedro



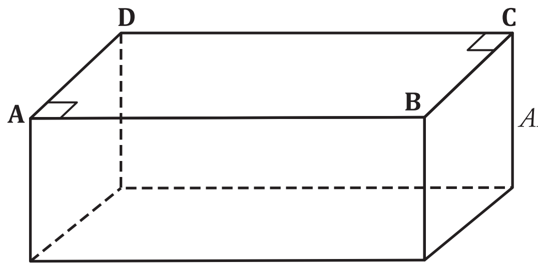
ABCD: rectángulo

Hexaedro regular o cubo



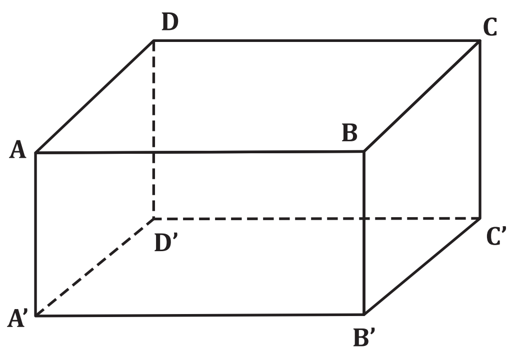
ABCD: cuadrado

Paralelepípedo propiamente dicho

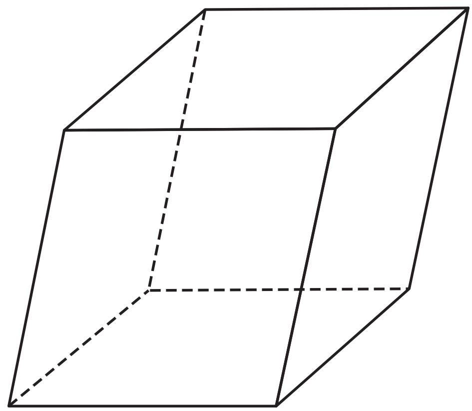


ABCD: paralelogramo

Todo paralelepípedo tiene 4 diagonales (*AC', BD',CA'* y *DB'*), así como 12 diagonales de las caras (*AB', A'B, BC', B'C, CD', C'D, DA', D'A, AC, BD, A'C'* y *B'D'*).



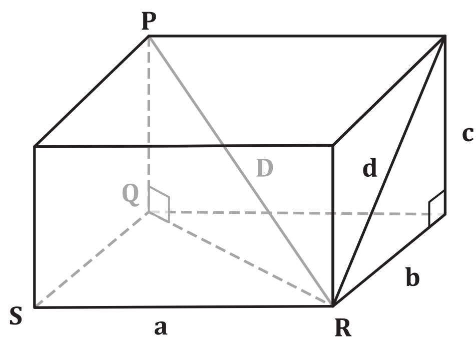
Un caso particular es el del romboedro, que tiene sus bases y sus caras laterales en forma de rombo. No es un poliedro regular porque sus caras no son polígonos regulares.



6.6.1 Propiedades de los paralelepípedos

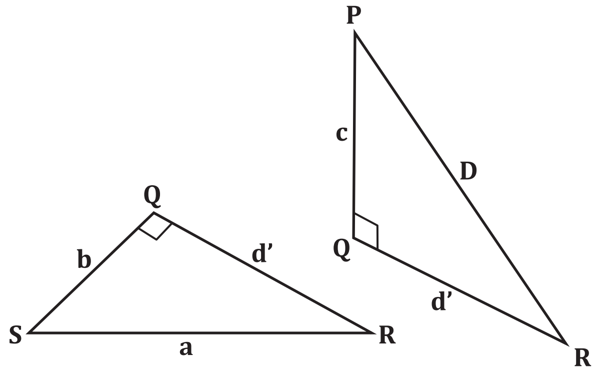
I. Las caras opuestas de un paralelepípedo son congruentes y paralelas.
II. Las diagonales de un paralelepípedo se bisecan mutuamente.
III. En todo paralelepípedo rectangular, se cumple que:

a) El cuadrado de la diagonal de una cara es igual a la suma de los cuadrados de los lados de dicha cara.



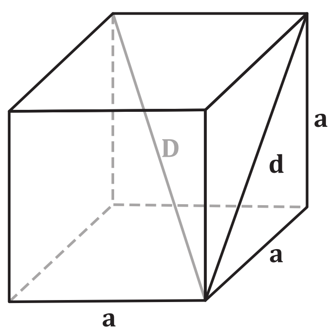
$$d^2 = b^2 + c^2$$

b) El cuadrado de la diagonal del paralelepípedo es igual a la suma de los cuadrados de las 3 aristas que concurren en un vértice.



$$D^2 = (d')^2 + c^2$$
$$(d')^2 = a^2 + b^2$$
$$\therefore D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

IV. En un hexaedro regular, se cumple que:



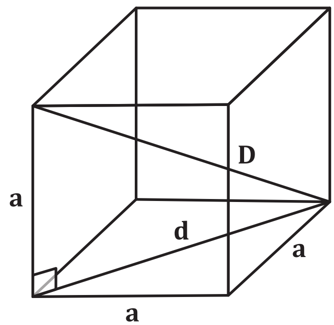
$$d = a\sqrt{2}$$
$$D = a\sqrt{3}$$
$$A_L = 4a^2$$
$$A_T = 6a^2$$
$$V = a^3$$

6.7 Ejercicios resueltos

1. La diagonal de un cubo mide D m. Determine su volumen.

   Solución

   Se tiene que:



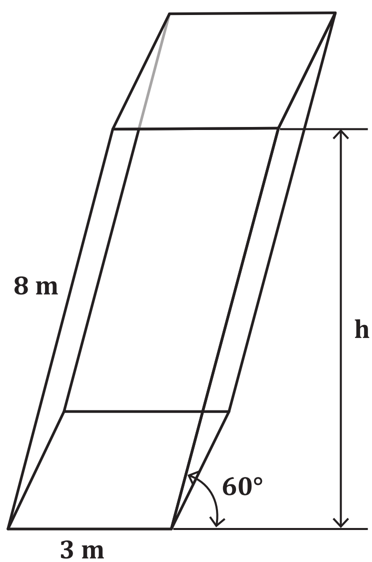
$$V = a^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$d = a\sqrt{2}$$
$$D = a\sqrt{3} \longrightarrow a = \frac{D}{\sqrt{3}} \ldots\ldots\ldots(2)$$

De (2) en (1):

$$V = \left[\frac{D}{\sqrt{3}}\right]^3 = \frac{D^3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,D^3}{9}$$

2. ¿Cuál es el volumen de un prisma oblicuo si la arista mide 8 m y forma un ángulo de 60° con la base que es un cuadrado de 3 m de largo?

Solución:



El volumen pedido es:

$$V = Bxh = (3)^2 \times h = 9h$$

De la figura:

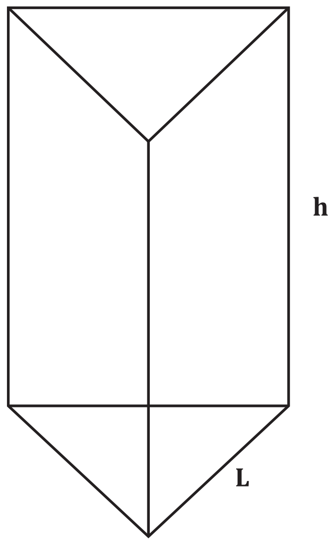
$$\text{sen}60° = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\text{ m}$$

Con lo cual:

$$V = 9(4\sqrt{3}) = 36\sqrt{3}\text{ m}^3$$

3. Un prisma recto de $6\sqrt{3}\ m^3$ de volumen tiene como base un triángulo equilátero. Calcule el perímetro del triángulo si el área de cada una de las caras laterales del prisma es 24 m².

Solución:



Del gráfico:

$V = 6\sqrt{3} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}.h$..................(1)

$B = Lh = 24$..........................(2)

De (1):

$24 = L^2h = Lh(L)$ ....(3)

(2) en (3):

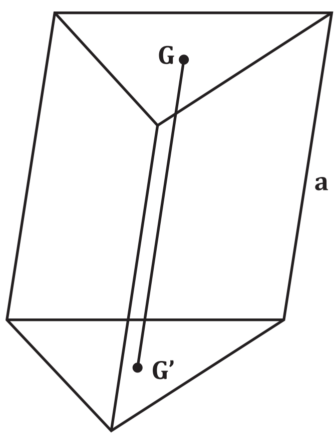
$$24 = 24L \Longrightarrow L = 1$$

El perímetro del triángulo es 3 m.

4. Se tiene un prisma oblicuo de base triangular cuya sección recta tiene 40 m^2 de área. Calcule su volumen si los baricentros de las bases distan 6 m entre sí.

Solución:

Se sabe que el volumen de un prisma de sección recta de área B' y de arista lateral a es $V = B'a$.



Si $GG' = 6$ m $\Longrightarrow a = 6$ m

De donde:

$V = 40(6) = 240$ m^3

5. Si el área lateral de un prisma triangular recto es 405 m^2, determine el área de la base si la altura del prisma mide 12,5 m.

   Solución:

   Se conoce que:

$$A_L = Per.\ base \times altura$$

$$405 = 3L \times 12{,}5$$

   De donde, el lado del triángulo equilátero es:

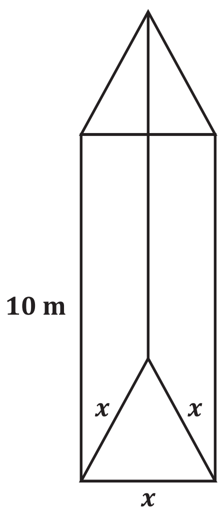
$$L = \frac{405}{3(12{,}5)} = 10{,}8 \text{ m}$$

   Con lo cual, el área del triángulo de la base es:

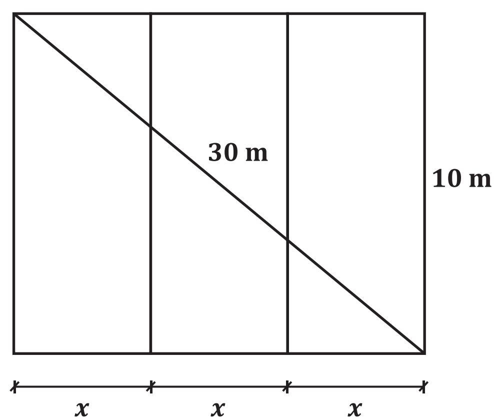
$$A = \frac{10{,}8^2\sqrt{3}}{4} = 29{,}16\,\sqrt{3} \text{ m}^2$$

6. A partir de un rectángulo de 30 m de diagonal se construyen las caras laterales de un prisma triangular regular de 10 m de altura. Calcule el volumen del prisma.

   Solución:



El desarrollo del prisma es:



Se tiene que:

$$(3x)^2 + (10)^2 = (30)^2$$

$$9x^2 = 800 \Rightarrow x^2 = \frac{800}{9}$$

El área del triángulo de la base es:

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{800}{9}\right)\sqrt{3}}{4} = \frac{(200)\sqrt{3}}{9}\text{ m}^2$$

De donde, el volumen del prisma es:

$$V = A.h = \frac{(200)\sqrt{3}}{9}.10 = \frac{(2.000)\sqrt{3}}{9}\text{ m}^3$$

7. Un dm^3 de plomo pesa 11,34 kg. ¿Cuántas balas de 24,5 g se podrán hacer con un cubo de ese metal de 0,144 m de altura?

   Solución:

   1 dm^3 equivale a $(0{,}1\text{m})^3 = 0{,}001\text{ m}^3$

   11,34 kg equivalen a 11.340 g

   Encontremos cuál es el volumen de una bala:

$$24{,}5\text{ g} \times \frac{0{,}001\text{ m}^3}{11.340\text{ g}} = \frac{0{,}0245}{11.340}\text{ m}^3$$

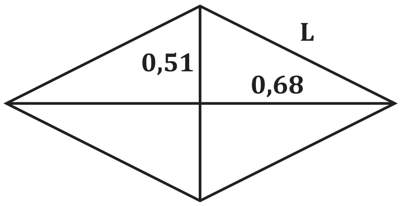
   Se cuenta con $(0{,}144)^3$ m^3 de plomo contenido dentro del cubo.

   El número de balas que se puede hacer es:

$$\frac{(0{,}144)^3}{0{,}0245/_{11.340}} = 1.382\text{ balas}$$

8. Si el área lateral de un prisma recto, cuya base es un rombo de 1,02 m y 1,36 m de diagonales, es 2,04 m^2, ¿cuál es el volumen del prisma?

Solución:



Las semidiagonales del rombo miden $0{,}51 = 3(0{,}17)$ m y $0{,}68 = 4(0{,}17)$ m

El lado del rombo medirá $L = 5(0{,}17)$ m

El área lateral es:

$$A_L = 4Lh = 4[5(0{,}17)]h = 2{,}04 = 12(0{,}17)$$

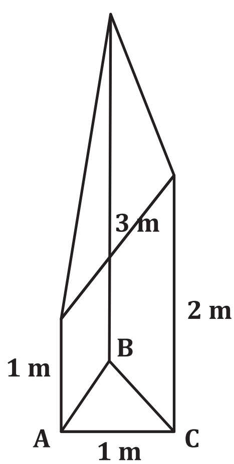
De donde la altura h medirá: $\frac{12}{20} = 0{,}6$ m

Finalmente, el volumen del prisma será:

$$V = Bh = \left[\frac{1}{2}(1{,}02)(1{,}36)\right] 0{,}6$$

$$V = 0{,}41616 \text{ m}^3$$

9. Un tronco de prisma recto tiene una base triangular equilátera de 1 m de lado. Calcule el volumen si las aristas laterales miden 1 m, 2 m y 3 m, respectivamente.



El volumen del tronco de prisma de base B y aristas h_a, h_b, y h_c es:

$$V = \frac{1}{3}B(h_A + h_B + h_C)$$

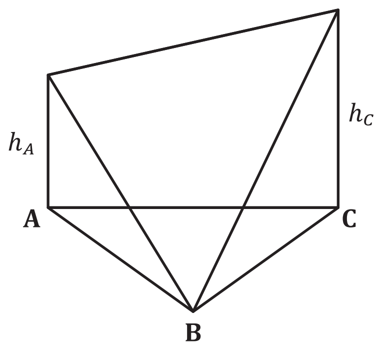
$$V = B\,\frac{(h_A + h_B + h_C)}{3}$$

Es decir:

$$V = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{1+3+2}{3}$$

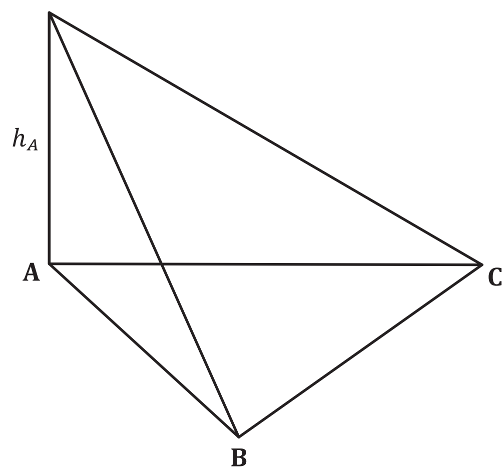
$$V = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{m}^3$$

En el caso siguiente, el volumen será:



$$V = B \times \frac{h_A + h_C}{3}$$

Finalmente, en el caso de una pirámide:

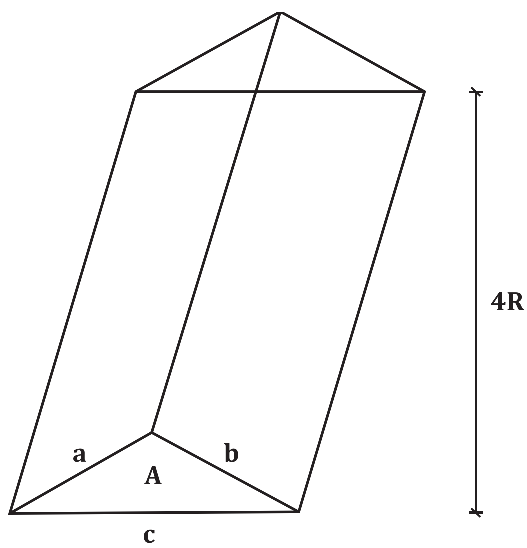


$$V = B \times \frac{h_A}{3} = \frac{1}{3}B.h_A$$

10. Un prisma oblicuo tiene como base un triángulo de lados 10, 11 y 12 m. Calcule el volumen del prisma si se conoce que su altura es el cuádruplo del radio de la circunferencia circunscrita a la base.

Solución:

Se tiene que:



El volumen del prisma de base A y altura $4R$ es:

$$V = Ah = A(4R)$$

Además:

$$A = \frac{abc}{4R} \Longrightarrow 4R = \frac{abc}{A}$$

De donde:

$$V = A\left[\frac{abc}{A}\right] = abc$$

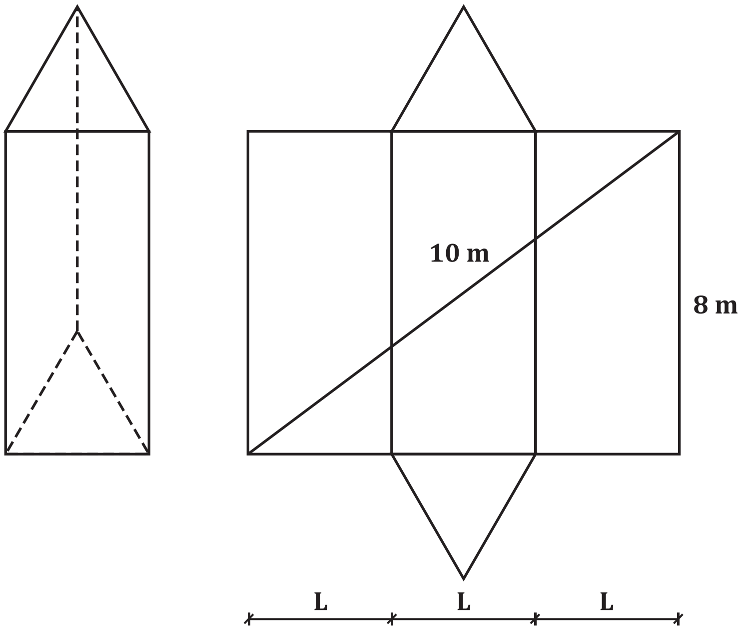
Es decir:

$$V = (10)(11)(12) = 1.320 \text{ m}^3$$

11. La altura de un prisma triangular regular es 8 m. Determine el área total del prisma si se sabe que el desarrollo de su superficie lateral es un rectángulo de 10 m de diagonal.

Solución:

Se tiene que:



El área pedida es:

$$A_T = (3L)(8) + 2\left[\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right]$$

Además:

$$(3L)^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow 9L^2 = 36 \Rightarrow L = 2 \text{ m}$$

Entonces:

$$A = 24(2) + 2\left[\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right] = (48 + 2\sqrt{3}) \text{ m}^2$$

12. La base de un prisma recto es un hexágono regular de 4 m de lado. Calcule su volumen si se sabe que su superficie total es $216\sqrt{3}$ m^2.

Solución:

El área de cada una de sus bases es $B = 6\left[\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\right] = 24\sqrt{3}$ m^2

El área de su superficie lateral de altura h es:

$$A_L = Per.\ base\ x\ altura = 6(4)h = 24h$$

Del dato:

$$2(24\sqrt{3}) + 24h = 216\sqrt{3}$$

$$h = \frac{168\sqrt{3}}{24} = 7\sqrt{3}\ \text{m}$$

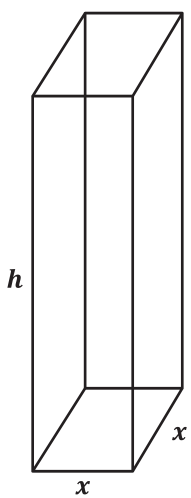
Con lo cual, el volumen es:

$$V = B\,x\,h = (24\sqrt{3})(7\sqrt{3})$$

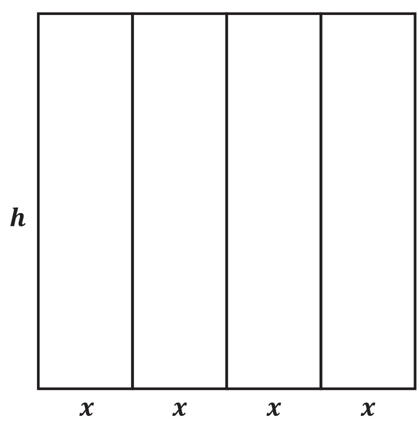
$$V = 504\ \text{m}^3$$

13. La base de un prisma recto es un cuadrado, al igual que el desarrollo de la superficie lateral del mismo. Determine el volumen del prisma en función del lado h del cuadrado mayor.

Solución:



El desarrollo de la superficie lateral es:



$$\Rightarrow\ h = 4x$$

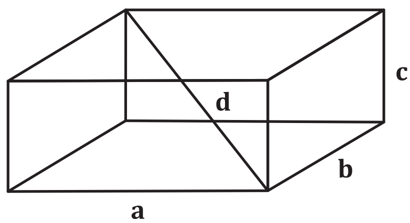
$$x = \frac{h}{4}$$

El volumen pedido es:

$$V = Bh = x^2h = (\frac{h}{4})^2h = \frac{h^3}{16}$$

14. Calcule el área total de un prisma rectangular conocidas la suma de sus aristas, 92 m, y la medida de una de sus diagonales, $3\sqrt{21}$ m.

Solución:



Se tiene que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 = (3\sqrt{21})^2 = 189 \ldots\ldots (1)$$

Además:

$$4(a + b + c) = 92$$
$$a + b + c = 23 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Entonces:

$$(a + b + c)^2 = 23^2 = 529$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 529$$

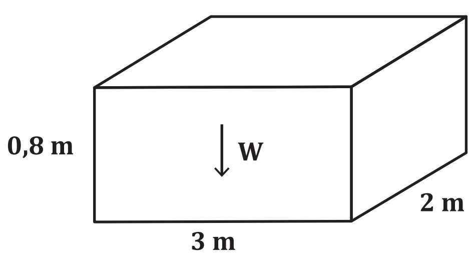
De (1): $$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{189} + \underbrace{2(ab + ac + bc)}_{S_{TOTAL}} = 529$$

De donde:

$$S_{TOTAL} = 529 - 189 = 340 \text{ m}^2$$

15. Un prisma recto tiene por base un rectángulo de 2 m y 3 m de lados y una altura de 0,8 m. Si se lo sumerge en el agua, determine la altura de la parte que emerge conocida la densidad 0,8 $^{\text{g}}/_{\text{cm}^3}$ del cuerpo.

Solución:



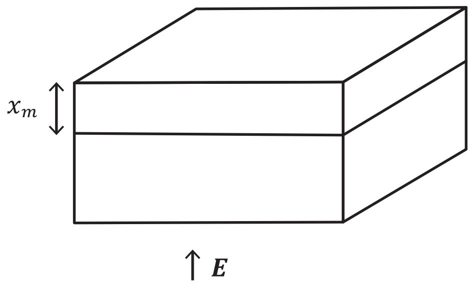
El peso del prisma recto viene dado por $W = mg = \rho V g$,

en donde $\rho = 0{,}8 \, \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 800 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Es decir:

$$W = 800[2X3X0{,}8] \text{ g}$$
$$W = 3.840 \text{ g}$$

Por otro lado, el principio de Arquímedes señala que «Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen del fluido desalojado».



Si la altura que emerge es x_m:

$$E = \rho_{H_2O}. Vol_{desalojado}.g$$

$$E = 1000[2(3)(0.8 - x)]g$$

$$E = 6000(0.8 - x)g$$

Como $W = E$:

$$3.840 \text{ g} = 6.000(0,8 - x) \text{ g}$$

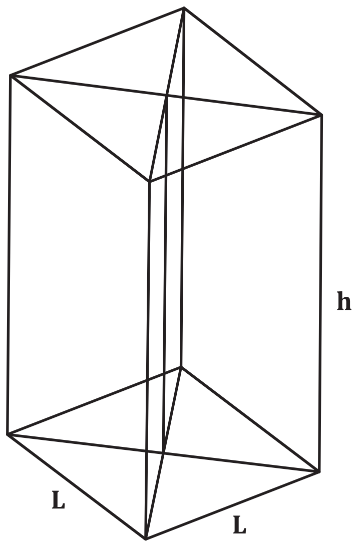
$$0,8 - x = \frac{3.840}{6.000} = 0,64$$

De donde:

$$x = 0,16 \text{ m}$$

16. Las diagonales de un rombo, base de un prisma recto, están en la relación de 3 a 4. Calcule la medida del lado del rombo si el volumen y la altura del prisma están en relación de 6 a 1.

Solución:



Se tiene que:

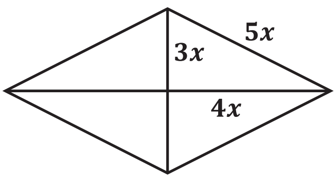
$$V = B \times h$$

$$B = \frac{V}{h} \Rightarrow B = 6$$

Si las semidiagonales del rombo miden 3x y 4x, el lado del rombo medirá 5x, y se cumplirá que:

$$B = \frac{(6x)(8x)}{2} = 6$$

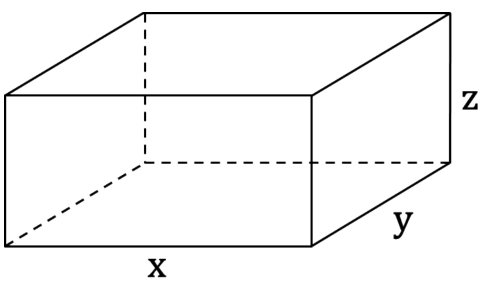
$$x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ u.\ l.$$



De donde, el lado del rombo de la base mide 5(1/2) = 2,5 *u. l.*

17. Determine el área total de un ortoedro cuyas diagonales de sus caras miden $\sqrt{85}$, $\sqrt{157}$, *y* $\sqrt{170}$ m.

Solución:



Sean *x, y, z* las dimensiones de las aristas del ortoedro.

Se pide:

$$2(xy + xz + yz)$$

Se tiene que:

$$x^2 + y^2 = 157 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$x^2 + z^2 = 170 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$y^2 + z^2 = 85 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

De (2) – (1):

$$z^2 - y^2 = 13 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

De (3) y (4):

$$z^2 = \frac{85 + 13}{2} = 49 \Longrightarrow z = 7 \text{ m}$$

En (2):

$$x^2 + 49 = 170 \Rightarrow x = 11 \text{ m}$$

En (3):

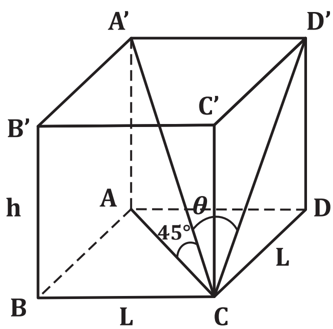
$$y^2 + 49 = 85 \Rightarrow y = 6 \text{ m}$$

De donde, el área total del ortoedro es:

$$2[66 + 77 + 42] = 370 \text{ m}^2$$

18. La diagonal de un prisma cuadrangular regular forma un ángulo de 45° con el plano de la base. ¿Cuánto mide el ángulo formado por esta diagonal con la diagonal de la cara lateral que la interseca?

Solución:



Se pide: determine la medida del ángulo θ.

Si L es la longitud del cuadrado de la base y h es la altura del prisma:

AC = $L\sqrt{2}$
tan $45° = 1 \Rightarrow AA' = AC \Longrightarrow h = L\sqrt{2}$

Se tiene que:

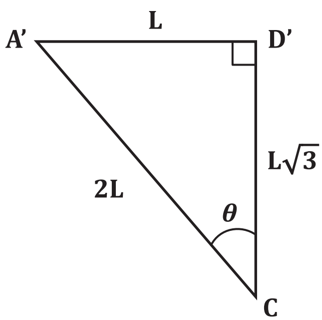
$$(A'C)^2 = (AA')^2 + (AC)^2 = 2L^2 + 2L^2 = 4L^2$$

$$A'C = \sqrt{4L^2} = 2L$$

En el triángulo CDD':

$$D'C = \sqrt{(L)^2 + (L\sqrt{2})^2} = L\sqrt{3}$$

En el triángulo *A'D'C*:



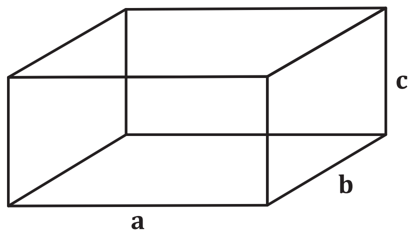
$$\text{sen}\,\theta = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 30°$$

19. Las 3 aristas principales de un paralelepípedo recto, de 180 m² de área total, suman 17 m. ¿Cuál es el área lateral si la diagonal de la base mide 10 m?

Solución:

Sean a, b y c las 3 aristas principales:



$$A_{Lateral} = 2(ac + bc)$$

Se tiene que:

$$a + b + c = 17$$

$$2(ab + ac + bc) = 180$$

$$a^2 + b^2 = 10^2 = 100$$

Entonces:

$$(a + b + c)^2 = 17^2$$

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{100} + c^2 + \underbrace{2(ab + ac + bc)}_{180} = 289$$

$$100 \quad + c^2 + \quad 180 \quad = 289$$

$$c^2 = 9 \Longrightarrow c = 3\text{m}$$

Con lo cual:

$$a + b = 17 - 3 = 14$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 196$$

$$100 + 2ab = 196$$

$$ab = 48$$

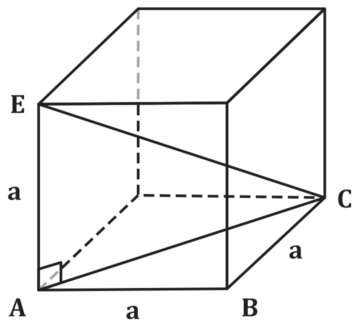
De donde:

$$2(48 + ac + bc) = 180$$

$$A_{Lateral} = 2(ac + bc) = 84 \text{ m}$$

20. Calcule la distancia de un vértice de un hexaedro regular de arista «a» a la diagonal de este.

Solución:

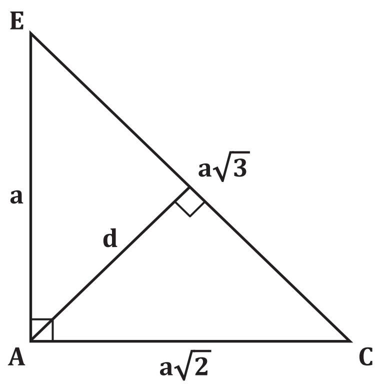


Se pide hallar la distancia de *A* a la diagonal *CE*.

El triángulo *CAE* es recto en *A*:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$EC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$



El área del triángulo *CAE* es:

$$\frac{1}{2}a(a\sqrt{2}) \text{ o } \frac{1}{2}d(a\sqrt{3})$$

De donde:

$$\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{ad\sqrt{3}}{2} = d = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

6.8 Ejercicios propuestos

1. Determine el número de caras de un prisma que posee 543 aristas.

   Rpta.: 181.

2. Determine la fórmula que corresponde al volumen de un prisma recto en función de su área lateral (S_L) y de la apotema (ap) de sus bases.

   Rpta.: $V = \frac{S_L \times ap}{2}$.

3. Las dimensiones de un prisma rectangular están en progresión aritmética. La segunda de sus dimensiones, expresada en m^3, es igual a su volumen. Determínela si una de sus diagonales mide 3 m.

   Rpta.: $\frac{\sqrt{55}}{5}$ m.

4. El volumen de un prisma recto, cuyas aristas laterales miden 26 cm, es 5.200 cm^3. Determine cuánto mide el radio de la circunferencia que ciscunscribe a la base cuadrada del prisma.

   Rpta.: 10 cm.

5. Las áreas de las bases de 2 prismas y sus respectivas alturas están en relación de 1 a 3 y de 2 a 3, respectivamente. ¿Cuánto mide la menor de las áreas, si la menor altura mide 4 m y el mayor volumen es 324 m^3?

   Rpta.: 18 m^2.

6. Un paralelepípedo recto de 164 m^2 de área total, tiene 5 m como medida de la diagonal de las bases y 17 m como suma de las 3 dimensiones. Calcule la altura del paralelepípedo.

   Rpta.: 10 m.

7. Las aristas de un ortoedro miden 5 m, $5\sqrt{2}$ m y 5 m. ¿Cuánto mide el menor ángulo formado por sus diagonales?

   Rpta.: 60°.

8. Calcule el radio de la circunferencia circunscrita a la base cuadrangular de un prisma recto de aristas laterales de 10 m de altura, si se conoce que el volumen es 180 m^3.

   Rpta.: 3 m.

9. Calcule cuánto debe medir la diagonal de un hexaedro regular para que su volumen sea 8 veces el de otro cubo cuya arista mide $\sqrt{3}$ m.

   Rpta.: 6 m.

10. En un prisma cualquiera, se toma uno de los vértices de una de las bases y se lo une con todos los vértices de la otra base. Determine el volumen obtenido en función del volumen V del prisma.

    Rpta.: $V/3$.

11. El lado de un cubo mide 2 m. Se unen 3 de sus vértices de modo que se forma un triángulo equilátero. Calcule el área de la proyección ortogonal de dicho triángulo sobre una cara del cubo.

    Rpta.: 2 m^2.

12. Se unen los puntos medios de cada cara de un hexaedro regular de 6 m de arista. Determine el volumen del sólido obtenido.

    Rpta.: 36 m^3.

13. Un recipiente de forma cúbica contiene 14 m^3 de agua. Se introduce un cubo macizo de hierro cuya arista es la mitad de la del recipiente. Si el agua se eleva hasta la parte superior del recipiente, determine su volumen.

    Rpta.: 16 m^3.

14. En un prisma recto cuadrangular, los lados de la base miden a y $\sqrt{11}a$, y la arista lateral, $2a$. Calcule el ángulo que forman 2 diagonales del prisma, cuyos extremos están en 2 vértices opuestos de la base.

    Rpta.: 60°.

15. Un punto $\mathcal{P}$ dista $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$ m de las caras de un triedro trirrectangular. Calcule la distancia de $\mathcal{P}$ al vértice del triedro.

    Rpta.: $\sqrt{18}$ m.

16. El área de un cuadrado *ABCD* es 100 m^2 y el área de su proyección *ABMN* sobre un plano es 80 m^2. Calcule la distancia de *CD* al plano.

    Rpta.: 6 m.

17. Los triángulos equiláteros *ABC* y *BCD* forman el diedro *BC*, que mide 60°. Si *BC* = 6 m, calcule la distancia entre los puntos *A* y *D*.

    Rpta.: $3\sqrt{3}$ m.

18. En un triedro *OABC*, los diedros *OA* y *OB* miden 80° y 60°, respectivamente. Se traza *OF*, bisectriz del ángulo *AOB*. Calcule la medida del ángulo diedro *OC*, si se sabe que $m\sphericalangle AOF = m\sphericalangle FOC$.

    Rpta.: 140°.

19. En un cubo de 2 m de arista, calcule la distancia del centro de una cara cualquiera a los vértices de la cara opuesta.

    Rpta.: $\sqrt{6}$ m.

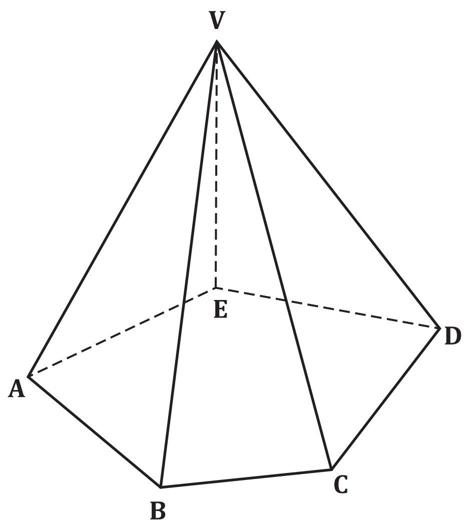
20. Una de las aristas de la base de un paralelepípedo rectangular mide $9\sqrt{3}$ m, la altura del paralelepípedo mide 45 m y el área total es $(648 + 1.890\sqrt{3})$ m^2. Determine el ángulo formado entre la diagonal del paralelepípedo y el plano de la base.

    Rpta.: 60°.

7. La pirámide

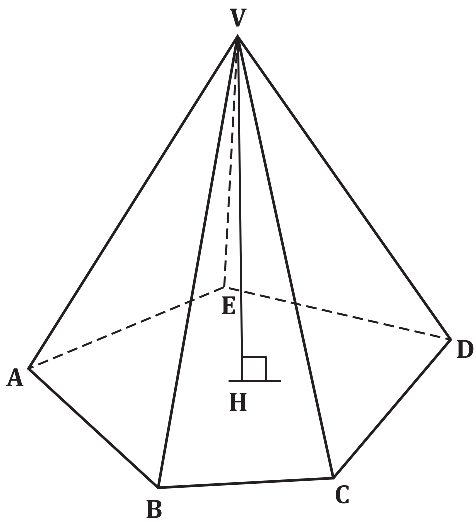
Es el poliedro que se obtiene al unir un punto V con los vértices del polígono $AB......M$.

V no pertenece al plano que contiene al polígono.



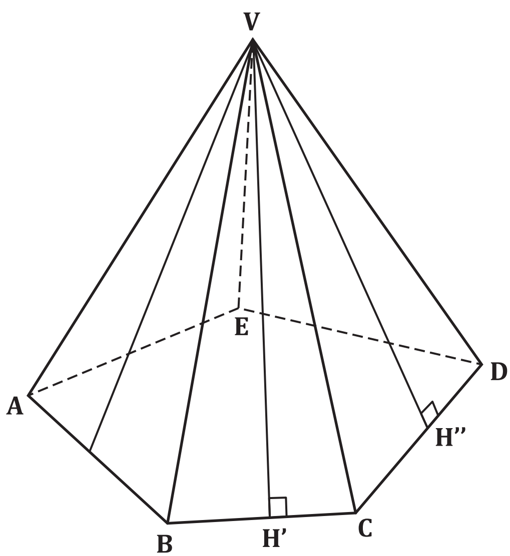
V: vértice
Base: $ABCDE$

La altura de una pirámide es la distancia del vértice *V* al plano que contiene a la base.



VH: altura

La apotema es la altura de cada una de las caras laterales trazadas desde el vértice *V*.



VH': apotema de la cara *VBC*

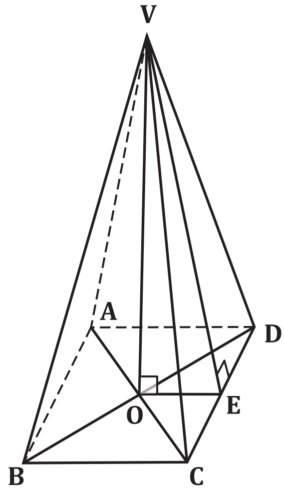
VH'': apotema de la cara *VCD*

La apotema de la pirámide es la apotema de cualquiera de sus caras si todas ellas son congruentes.

7.1 Clasificación de las pirámides

a) Por la forma de la base:

- Regular, si la base es un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.



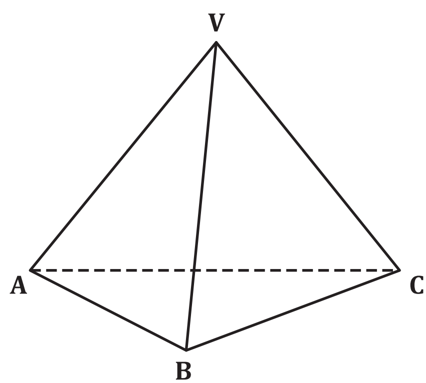
O: pie de la altura y centro del polígono de la base.

VE: apotema de la pirámide.

- Irregular, si la base es un polígono irregular.

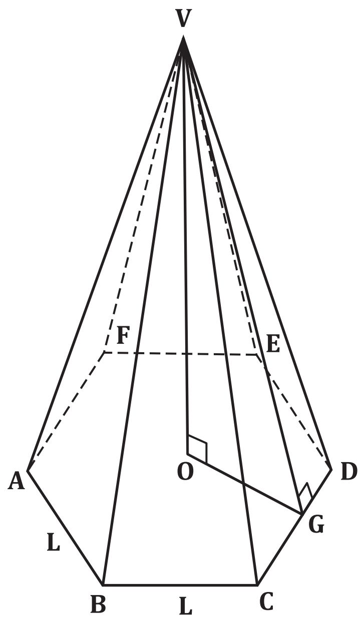
b) Por el número de lados de la base:

- Pirámide triangular, si tiene una base triangular y posee 4 caras. Si todas las caras son triángulos equiláteros, se denomina tetraedro regular y cualesquiera de sus caras se considera como base de la pirámide.



- Pirámide cuadrangular, si tiene una base cuadrangular.
- Pirámide pentagonal, si tiene una base pentagonal, y así sucesivamente.

7.2 Áreas y volumen de una pirámide regular



L: lado del polígono de la base

b: área de la base

$2p$: perímetro de la base

VO: altura de la pirámide (h)

VG: apotema de la pirámide (ap)

OG: apotema de la base (ap')

Si una pirámide regular tiene como base un polígono de *n* lados, se tiene que:

$$A_L = n.A_{cara} = n\left[\frac{1}{2}L \times VG\right]$$

$$A_L = \frac{1}{2}(nl)(VG)$$

$$A_L = \frac{1}{2}(perímetro\ de\ la\ base)(apotema\ de\ la\ pirámide)$$

$$A_L = \frac{1}{2}(2p)(ap) = p \times ap$$

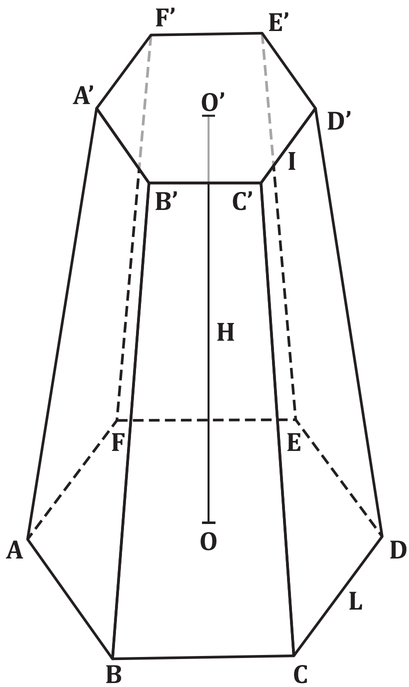
$$A_T = A_L + b = p \times ap + \frac{2p}{2}ap'$$

$$A_T = p \times ap + p \times ap' = p(ap + ap')$$

$$V = \frac{1}{3} b \times h$$

7.3 Tronco de pirámide

Es el sólido geométrico que se obtiene al cortar una pirámide con un plano paralelo al plano que contiene a la base.



L: lado del polígono de la base B_1

l: lado del polígono de la base B_2

H: altura del tronco de la pirámide

El tronco de pirámide regular tiene 2 bases, B_1 y B_2, cuyos perímetros son $2p_1$ y $2p_2$, respectivamente, y las caras laterales son trapecios. La apotema (ap) del tronco de la pirámide es la altura de cualquiera de sus caras laterales. Las apotemas de las bases B_1 y B_2 son ap_1 y ap_2, respectivamente.

7.4 Áreas y volumen de un tronco de pirámide regular

Si se tiene un tronco de pirámide regular, cuyas bases son polígonos regulares de n lados, de acuerdo con el acápite anterior, se obtiene que:

$$A_L = n.A_{cara} = n\left[\frac{L+l}{2}\times ap\right]$$

$$A_L = \frac{nL+nl}{2}\times ap = \frac{2p_1+2p_2}{2}\times ap$$

$$A_L = (p_1+p_2)\times ap$$

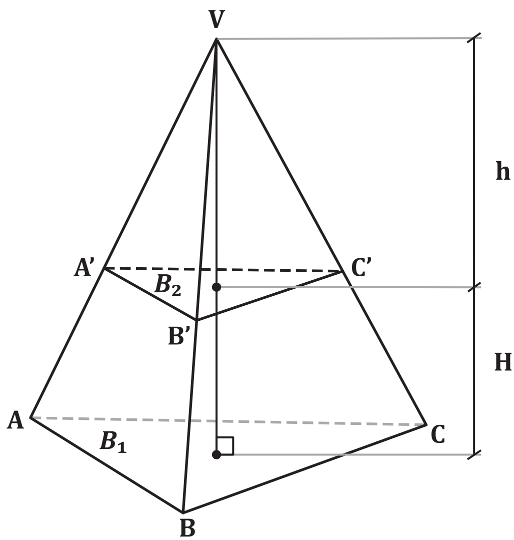
$$A_T = A_L + B_1 + B_2 = (p_1+p_2)\times ap + \frac{2p_1}{2}(ap_1) + \frac{2p_2}{2}(ap_2)$$

$$A_T = (p_1+p_2)\times ap + p_1\times ap_1 + p_2\times ap_2$$

Por otro lado, procederemos a demostrar que el volumen del tronco de pirámide viene dado por la fórmula siguiente:

$$V = \frac{1}{3}[B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\,]\times H$$

Demostración:



El volumen del tronco de pirámide $ABC - A'B'C'$ se obtiene de la siguiente diferencia:

$$V_T = V_{V-ABC} - V_{V-A'B'C'}$$

$$V_T = \frac{1}{3}B_1\,(H+h) - \frac{1}{3}B_2h$$

$$V_T = \frac{1}{3}(B_1H + B_1h - B_2h)\text{.......}(1)$$

Se trata de expresar h en función de B_1, B_2 y H.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{B_1}{B_2} = \left(\frac{H+h}{h}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{H+h}{h} = \frac{H}{h} + 1$$

De donde:

$$\frac{h}{H}=\frac{1}{\frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}}-1}=\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}$$

$$h=H\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}\text{.......}(2)$$

(2) en (1):

$$V_T=\frac{1}{3}\left[B_1H+(B_1-B_2)\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}-\sqrt{B_2}}H\right]$$

$$V_T=\frac{1}{3}[B_1+(\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2})\sqrt{B_2}]H$$

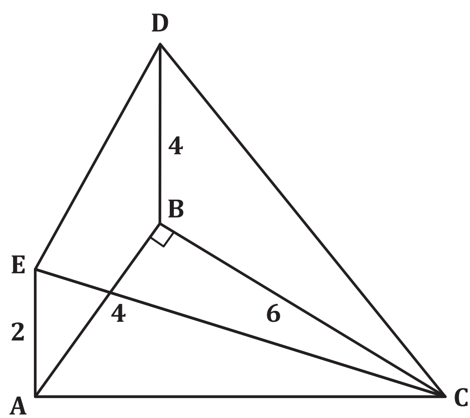
Finalmente:

$$V_T=\frac{1}{3}[B_1+\sqrt{B_1B_2}+B_2]H$$

7.5 Ejercicios resueltos

1. Los lados de un triángulo rectángulo ABC miden AB = 4 m y BC = 6 m. Por los vértices A y B se trazan las perpendiculares, AE = 2 m y BD = 4 m, al plano que contiene al triángulo. Determine el volumen de la pirámide C - $ABDE$.

   Solución:



Se puede considerar que el trapecio $ABDE$, de área $\frac{2+4}{2}\times 4 = 12$ m², es la base de la pirámide C - $ABDE$. Como la altura de esta es BC = 6 m, el volumen pedido es:

$$V=\frac{1}{3}(12)(6) = 24 \text{ m}^3$$

Otro modo de resolverlo:

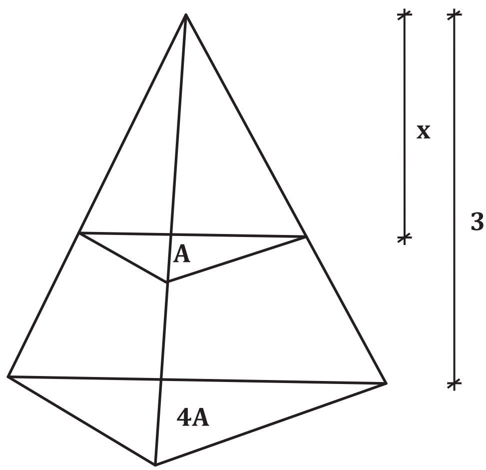
El volumen de la pirámide es equivalente al volumen de un prisma cuya base es $B = A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(4 \times 6) = 12\ m^2$ y cuya altura es el promedio de las alturas AE, BD y CC. Es decir: $\bar{h} = \frac{1}{3}(2 + 4 + 0) = 2$ m.

De donde:

$$V = B \times \bar{h} = 12(2) = 24\ \mathrm{m}^3$$

2. Calcule a qué distancia del vértice de una pirámide triangular de 3 m de altura se la debe cortar con un plano paralelo a la base para que las áreas de la sección recta y de la base estén en una razón de 1 a 4.

Solución:



Sea x la distancia pedida.

Se debe cumplir que:

$$\frac{A}{4A} = \left(\frac{x}{3}\right)^2$$

Es decir:

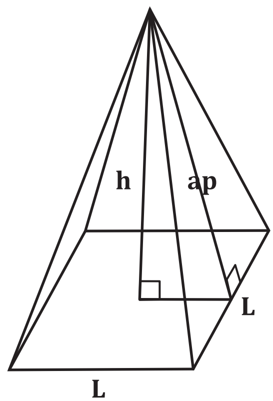
$$\frac{1}{2} = \frac{x}{3}$$

De donde:

$$x = 1{,}5\ \mathrm{m}$$

3. La base de una pirámide regular es un cuadrado, su altura mide 24 m y su volumen es 288 m^3. Determine el área total de la pirámide.

Solución:



Se tiene que:

$$V = 288 = \frac{1}{3}(L^2)h$$

$$L^2 = \frac{288(3)}{24} = 36$$

$$L = 6 \text{ m}$$

Entonces:

$$ap^2 = h^2 + (\frac{L}{2})^2 = 24^2 + 3^2$$

$$ap = \sqrt{585} = 3\sqrt{65} \text{ m}$$

De donde:

$$A_T = L^2 + 4\left[\frac{L\ x\ ap}{2}\right]$$

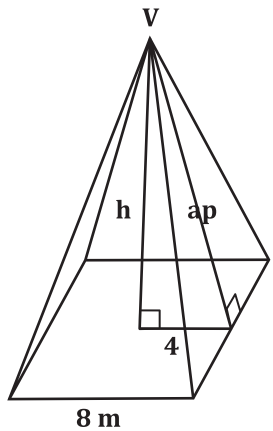
$$A_T = 36 + 2(6)(3\sqrt{65})$$

$$A_T = 36 + 36\sqrt{65} \text{ m}^2$$

4. El área total de una pirámide regular de base cuadrangular de 8 m de lado es $32(2 + \sqrt{13})$ m^2. Determine la altura de la pirámide.

Solución:

Se tiene que:



$$A_{TOTAL} = B + \frac{per.\,base}{2} x\ ap\ pir$$

$$A_{TOTAL} = 8^2 + \frac{32}{2} x\ ap\ pir$$

$$64 + 16\ ap\ pir = 64 + 32\sqrt{13}$$

De donde:

$$ap\ pir = \frac{32\sqrt{13}}{16} = 2\sqrt{13}\text{ m}$$

Finalmente:

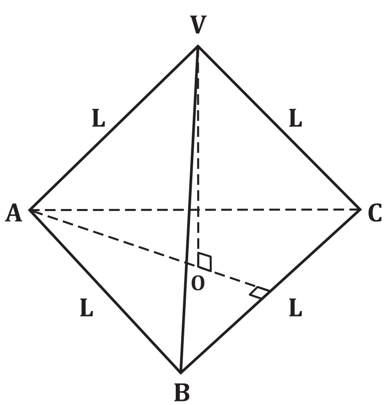
$$h^2 = ap^2 - 4^2 = (2\sqrt{13})^2 - 16$$

$$h^2 = 52 - 16 = 36$$

$$h = 6\text{ m}$$

5. Calcule el volumen de un teraedro regular cuya arista mide L m.

   Solución:



Se tiene que: $V = \frac{1}{3} B\ x\ h$

$$V = \frac{1}{3} A_{\Delta ABC}\ x\ VO$$

Además:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

$$AL = \frac{L\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3} AL = \frac{L\sqrt{3}}{3}$$

En el triángulo AOV:

$$(VO)^2 = (AV)^2 - (AO)^2$$

$$(VO)^2 = L^2 - (\tfrac{L\sqrt{3}}{3})^2 = L^2 - \tfrac{L^2}{3} = \tfrac{2}{3}L^2$$

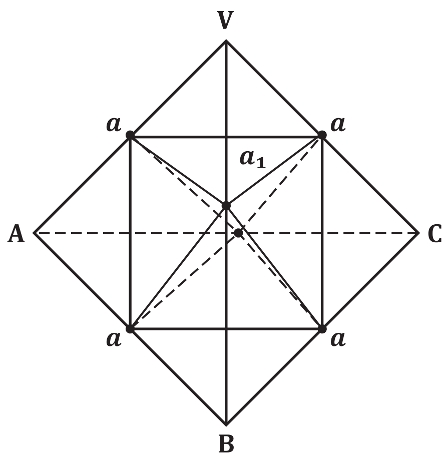
$$VO = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}L$$

De donde:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3$$

6. Un tetraedro regular tiene un volumen de 100 m^3. Determine el volumen del sólido formado al unir los puntos medios de las aristas del tetraedro.

Solución:



Sea a la arista del tetraedro regular.

Se tiene que: $V = 100 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$.........(1)

Al unir los puntos medios de las aristas, se forma un octaedro regular cuya arista a_1 m mide $a/2$ m, ya que une los puntos medios de 2 lados de un triángulo de lado a m.

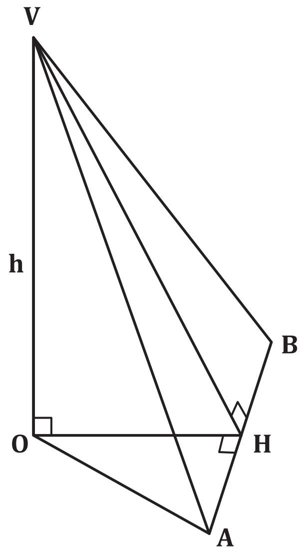
Por otro lado, $V_{Oct} = \frac{\sqrt{2}}{3}{a_1}^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{12}a^3\right)$........................(2)

(1) en (2):

$$V_{Oct} = \frac{1}{2}(100) = 50 \text{ m}^3$$

7. Determine el volumen de una pirámide hexagonal regular si las aristas laterales miden el triple de los lados de la base cuyo perímetro es $6a$.

Solución:



A partir de la cara lateral *VAB*:

$$AB = \frac{6a}{6} = a \Longrightarrow AH = HB = \frac{a}{2}$$

$$OA = l_6 = AB = a$$

$$OH = \sqrt{(OA)^2 - (AH)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$VB = 3a$$

Entonces:

$$VH = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$VH = \frac{\sqrt{35}}{2}a$$

De donde:

$$VO = \sqrt{(VH)^2 - (OH)^2}$$

$$VO = \sqrt{\left(\frac{35a^2}{4}\right) - \left(\frac{3a^2}{4}\right)} = 2\sqrt{2}a$$

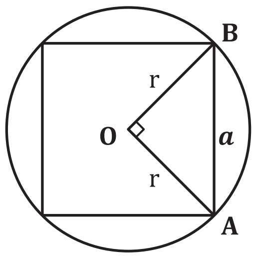
Con lo cual:

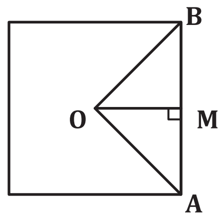
$$V = \frac{1}{3}B\ x\ h = \frac{1}{3}\left(\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}\right)(2\sqrt{2}a)$$

$$V = \sqrt{6}\ a^3$$

8. La base de una pirámide regular es un cuadrado inscrito en una circunferencia de $12\sqrt{2}$ m de radio. Determine el área total de la pirámide si se conoce que su apotema mide 30 m.

Solución:





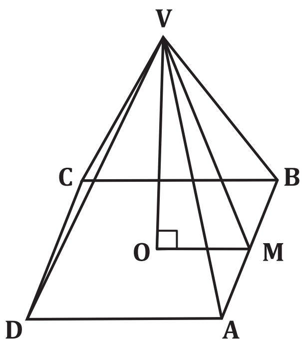
Se tiene que:

$$r = 12\sqrt{2}\text{ m}$$

$$a = r\sqrt{2} = 24\text{ m}$$

$$OM = \frac{a}{2} = 12\text{ m} = ap$$

$$VM = 30\text{ m} = ap'$$



Entonces:

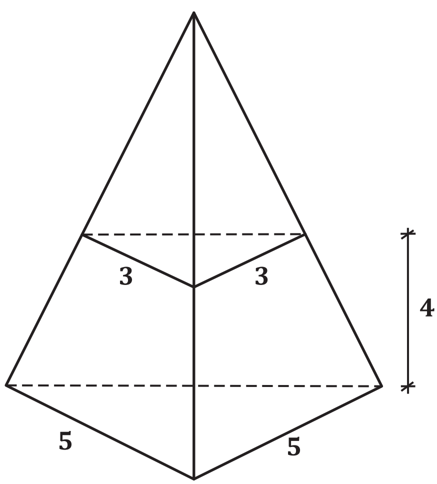
$$A_T = p(ap + ap')$$

$$A_T = \frac{1}{2}(4)(24)[12 + 30]$$

$$A_T = 2.016\text{ m}^2$$

9. Un tronco de pirámide de 4 m de altura posee dos bases triangulares de 3 y 5 m de lado. Determine su volumen.

Solución:



De acuerdo con la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}H(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}),$$

se tiene que:

$$V = \frac{1}{3}(4)\left(\frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{25(9)3}{16}}\right)$$

Es decir:

$$V = \frac{4}{3}\left(\frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{5(3)}{4}\sqrt{3}\right)$$

$$V = \frac{4}{3}\left(\frac{49\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{3}\ \text{m}^3$$

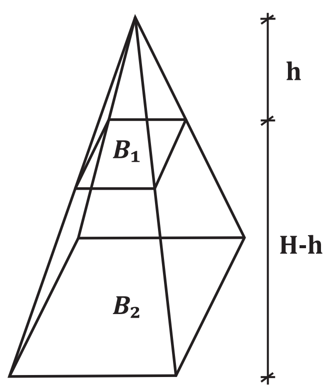
10. Una pirámide hexagonal tiene la misma altura que un tronco de pirámide equivalente de 4 m² y 9 m² de área de sus bases. Determine el área de la base de la pirámide hexagonal.

Solución:

Sea H–h la altura de la pirámide hexagonal y B, su base. El volumen de la pirámide es:

$$V_{Pir} = \frac{1}{3}B(H-h)$$

El volumen del tronco de pirámide corresponde a la diferencia de los volúmenes de las 2 pirámides:



$$V_{Tronco} = \frac{1}{3}B_2H - \frac{1}{3}B_1h$$

Se debe cumplir que:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{4}{9} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Es decir:

$$\frac{2}{3} = \frac{h}{H} \Longrightarrow h = \frac{2}{3}H$$

Entonces:

$$V_{Pir} = \frac{1}{3}B(H-h) = \frac{1}{3}B\left(H - \frac{2}{3}H\right) = \frac{1}{3}B(\frac{1}{3}H)$$

$$V_{Tronco} = \frac{1}{3}(9)H - \frac{1}{3}(4)h$$

$$V_{Tronco} = \frac{1}{3}\left[(9)H - 4\left(\frac{2}{3}H\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{19}{3}H\right]$$

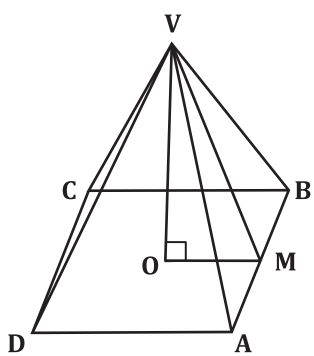
Con lo cual:

$$\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3}H\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{19H}{3}\right)$$

$$B = 19 \text{ m}^2$$

11. ¿Cuánto miden la apotema y la altura de una pirámide cuadrangular regular conocidas la arista lateral de 30 m y la arista de la base de 24 m?

Solución:



Se sabe que:

$$VA = 30 \text{ m}$$

$$AH = \frac{AB}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ m}$$

$$OH = 12 \text{ m}$$

En el triángulo *VHA*:

$$(ap\ pir)^2 = (VH)^2 = (VA)^2 - (AH)^2$$

$$ap\ pir = \sqrt{30^2 - 12^2} = 6\sqrt{21} \text{ m}$$

Además:

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(24\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

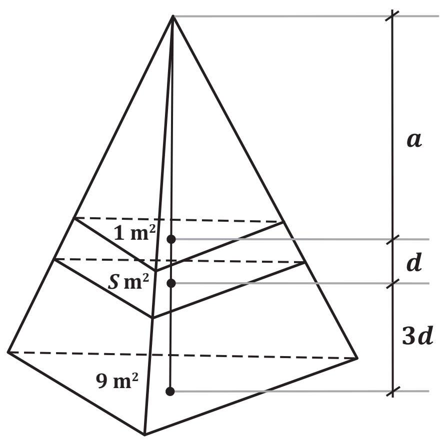
En el triángulo VOA:

$$(altura)^2 = (VO)^2 = (VA)^2 - (AO)^2$$

$$altura = \sqrt{30^2 - (12\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{17}\ \text{m}$$

12. Las bases de un tronco de pirámide miden 1 m² y 9 m². ¿Cuánto mide el área de la sección transversal que dista de la base mayor una cantidad que es el triple de la distancia a la otra base?

Solución:



Se tiene que:

$$\frac{9}{1} = \left(\frac{4d + a}{a}\right)^2 \Longrightarrow 3 = \frac{4d + a}{a} = \frac{4d}{a} + 1$$

$$\frac{4d}{a} = 2 \Rightarrow \frac{d}{a} = \frac{1}{2} \text{..(1)}$$

Además:

$$\frac{S}{1} = \left(\frac{d + a}{a}\right)^2 \Longrightarrow \sqrt{S} = \frac{d+a}{a} = \frac{d}{a} + 1 \text{ ...(2)}$$

(1) en (2):

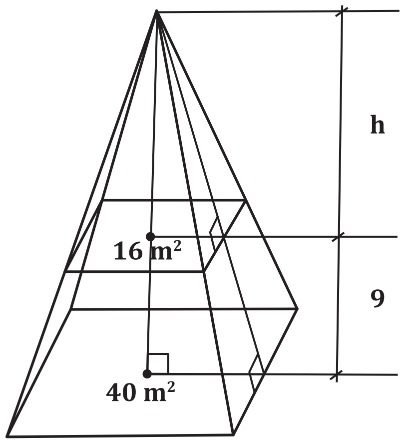
$$\sqrt{S} = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5$$

De donde:

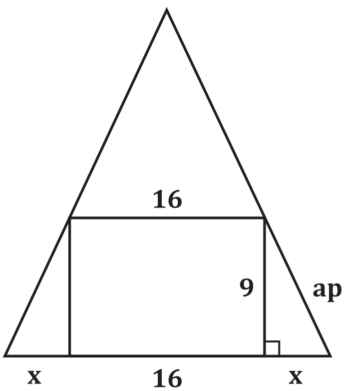
$$S = 2{,}25\ \text{m}^2$$

13. La altura de un tronco de pirámide cuadrangular recto mide 9 m y los lados de los paralelogramos de las bases miden 16 m y 40 m. Calcule la medida de su apotema.

A partir de:



Se obtiene:



$$x + 16 + x = 40 \Longrightarrow x = 12 \text{ m}$$

De donde:

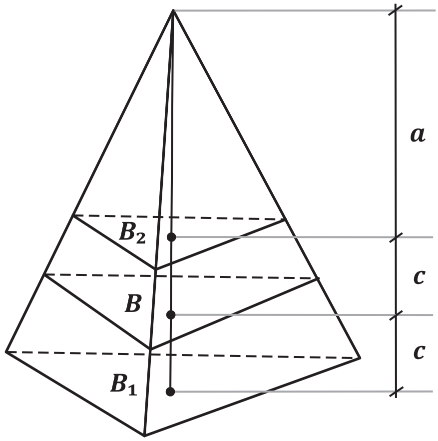
$$(ap)^2 = (9)^2 + (12)^2 = 225$$

$$ap = 15 \text{ m}$$

14. Demuestre que el área de la sección producida por un plano equidistante de las bases de un tronco de pirámide, de bases B_1 y B_2, viene dada por la expresión:

$$\left(\frac{\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}}{2}\right)^2$$

Solución:



Se debe demostrar que:

$$B = \frac{1}{4}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})^2$$

Por la propiedad de semejanza de pirámides:

$$\frac{B}{B_1} = \left(\frac{a+c}{a+2c}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{a+c}{a+2c} \text{ ...(1)}$$

$$\frac{B}{B_2} = \left(\frac{a+c}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_2}} = \frac{a+c}{a} \text{ ...(2)}$$

De (1):

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B}} = \frac{a+c}{c} = \frac{a}{c} + 1 \text{ ......(3)}$$

De (2):

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{B_2}}{\sqrt{B_2}} = \frac{c}{a} \text{ ....(4)}$$

(4) en (3):

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B} - \sqrt{B_2}} + 1$$

Ejecutando operaciones:

$$B - \sqrt{BB_2} = \sqrt{B_1B_2} - \sqrt{BB_2} + \sqrt{BB_1} - B - \sqrt{B_1B_2} + \sqrt{BB_2}$$

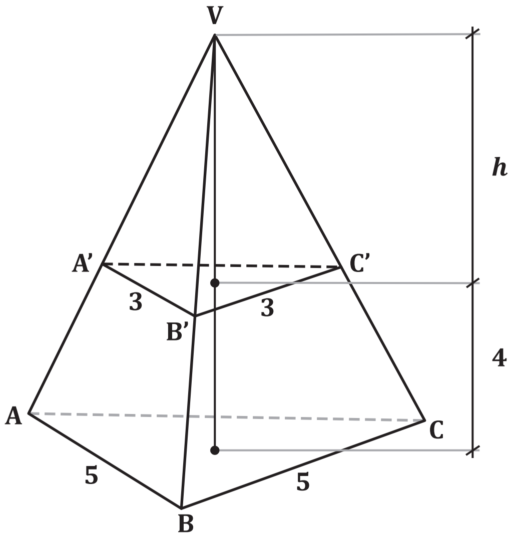
$$2B = \sqrt{BB_1} + \sqrt{BB_2} = \sqrt{B}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})$$

De donde:

$$\sqrt{B} = \frac{\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}}{2} \Rightarrow B = \frac{1}{4}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})^2$$

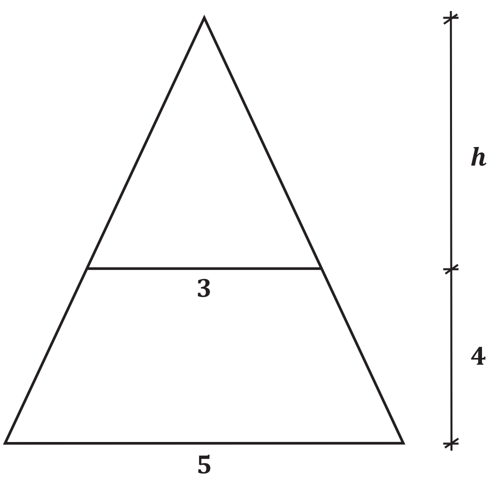
15. Resuelva el problema 9 con la fórmula del volumen de una pirámide.

Solución:



El volumen del tronco de pirámide es la diferencia entre los volúmenes de las pirámides *V-ABC* y *V-A'B'C'*.

Calculemos la altura *h*:



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{h}{3}=\frac{h+4}{5}\Rightarrow\frac{h}{3}=\frac{(h+4)-h}{5-3}$$

De donde:

$$\frac{h}{3}=\frac{4}{2}\Rightarrow h=6\text{ m}$$

Por lo tanto:

$$V_{V-A'B'C'} = \frac{1}{3}(6)\frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$V_{V-ABC} = \frac{1}{3}(10)\frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{125}{6}\sqrt{3}$$

$$\therefore V_{Pedido} = \left(\frac{125}{6} - \frac{9}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{98}{6}\sqrt{3} = \frac{49}{3}\sqrt{3}\ \text{m}^3$$

16. Determine la fórmula del volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas en términos de su altura *h*, de una de sus bases *b* y de la razón de proporcionalidad *r* de los segmentos homólogos de las bases.

    Solución:

    Se sabe que el volumen de un tronco de pirámide viene dado por la fórmula:

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$$

    Si:

$$r = \frac{L}{l} \Longrightarrow r^2 = \frac{B}{b} \Rightarrow B = r^2 b$$

    De donde:

$$V = \frac{h}{3}\left(r^2 b + b + \sqrt{(r^2 b)b}\right)$$

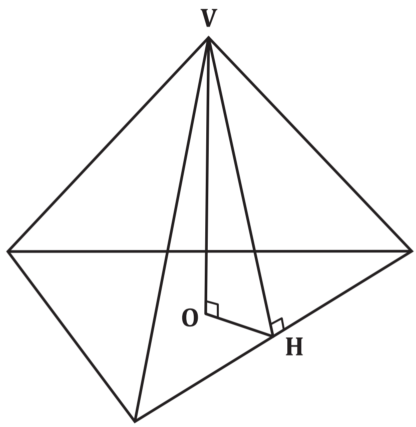
    Finalmente:

$$V = \frac{bh}{3}(r^2 + 1 + r)$$

17. La altura de una pirámide regular es 12 m y su base es un triángulo equilátero de $36\sqrt{3}$ m^2 de área. Determine el área total de la pirámide.

Solución:

Se tiene que:



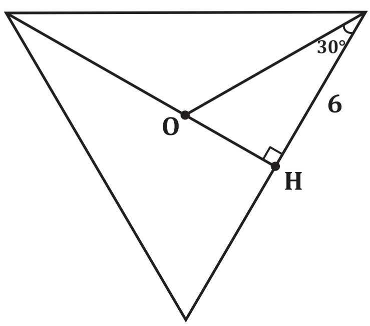
$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \Longrightarrow L^2 = 144 \Rightarrow L = 12 \text{ m}$$

$$OH = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$(VH)^2 = (VO)^2 + (OH)^2$$

$$(VH)^2 = 12^2 + (2\sqrt{3})^2 = 156$$

$$VH = \sqrt{156} = 2\sqrt{39} \text{ m}$$



Entonces:

$$A_T = B + \frac{per.\ base \times apotema\ pirámide}{2}$$

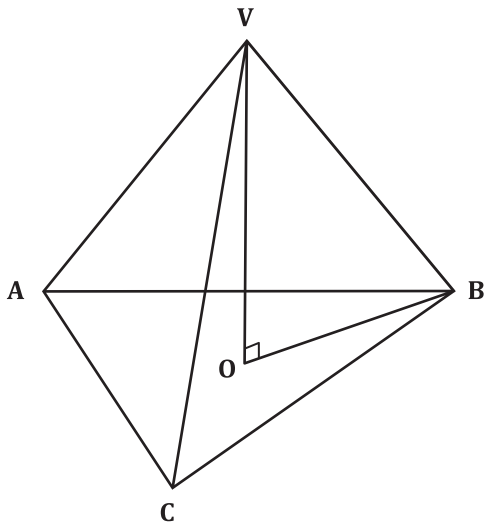
$$A_T = 36\sqrt{3} + \frac{3(12)(2\sqrt{39})}{2}$$

$$A_T = 36\sqrt{3} + 36\sqrt{39}$$

$$A_T = 36\sqrt{3}(1 + \sqrt{13}) \text{ m}^2$$

18. El radio del círculo circunscrito a la base de una pirámide triangular regular mide 5 m y la suma de las aristas laterales es 39 m. Calcule el volumen de la pirámide,

Solución:



Si las 3 aristas laterales suman 39 m, cada una medirá $\frac{39}{3}$ = 13 m.

Si VB = 13 $myOB$ = 5 m:

$$h = VO = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$

El volumen de la pirámide es:

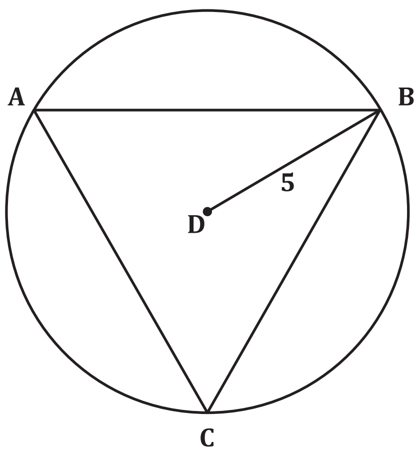
$$V = \frac{1}{3}\frac{L^2\sqrt{3}}{4}h$$

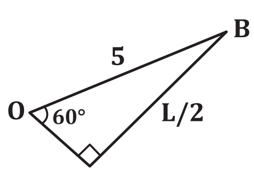
De la figura:

$$\frac{L}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3} \Rightarrow L = 5\sqrt{3}$$

Con lo cual:

$$V = \frac{1}{3}\frac{(5\sqrt{3})^2}{4} = 75\sqrt{3} \text{ m}^2$$





19. El volumen de un tronco de pirámide es 392 m^3. Si la altura es 24 m y una de sus bases tiene 9 m^2 de área, determine el área de la otra base.

Solución:

Se sabe que:

$$V_{Tronco} = \frac{1}{3}[B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2}]h$$

Entonces:

$$392 = \frac{1}{3}[9 + B_2 + \sqrt{9B_2}](24)$$

$$49 = 9 + B_2 + 3\sqrt{B_2}$$

$$B_2 + 3\sqrt{B_2} - 40 = 0$$

De donde:

$$(\sqrt{B_2} + 8)(\sqrt{B_2} - 5) = 0$$

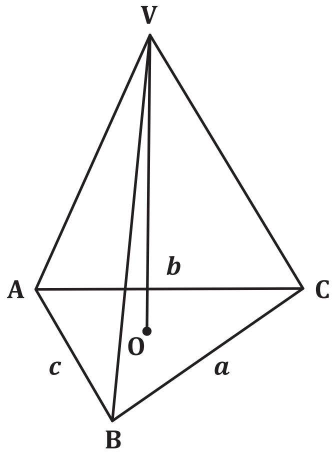
Con lo cual:

$$\sqrt{B_2} - 5 = 0$$

$$B_2 = 25 \text{ m}^2$$

20. Una pirámide tiene por base un triángulo de lados 13, 14 y 15 m. Las 3 aristas laterales son iguales y miden 20 m. Calcule el volumen de la pirámide.

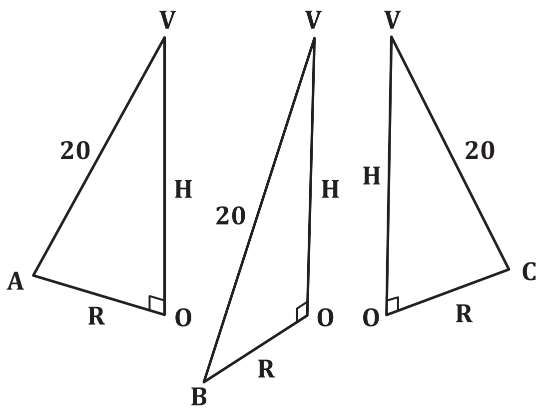
Solución:



Se tiene que:

$$C = 13, b = 14 \ y \ a = 15 \text{ m}$$
$$VA = VB = VC = 20 \text{ m}$$

Si las 3 aristas laterales miden lo mismo, el punto O debe ser el circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita, es decir $OA = OB = OC$) para que en los 3 triángulos que se muestran se cumpla que $H^2 = 20^2 - R^2$:



$$V = \frac{1}{3} A_{Base} x H = \frac{1}{3} A_{Base} x \sqrt{400 - R^2} \text{.................(1)}$$

Se sabe que:

$$A_{Base} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ m}$$

$$A_{Base} = \sqrt{21(6)(7)(8)} = 84 \text{ m}^2 \text{........................(2)}$$

Además:

$$A_{Base} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 84 = \frac{13(14)(15)}{4R}$$

$$R = \frac{2730}{84(4)} = 8{,}125 \text{ m}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(2) y (3) en (1):

$$V = \frac{1}{3}(84)\sqrt{400 - 66}$$

$$V = 511{,}70 \text{ m}^3$$

7.6 Ejercicios propuestos

1. Dos pirámides octogonales regulares se acoplan por sus bases. Determine $C+V+A+S$, donde S es el número en grados que corresponde a la suma de todos los ángulos internos de sus caras.

   Rpta.: 2.930.

2. Se tiene un triedro trirrectangular $OABC$, en donde $OA = 1$ m, $OB = 2$ m, y $OC = 3$ m. Calcule el volumen de la pirámide $OABC$.

   Rpta.: 1 m^3.

3. Si el área de un tetraedro regular es 36 m^2, calcule el área del tetraedro regular que se forma al unir los centros de sus caras.

   Rpta.: 4 m^2.

4. Calcule el volumen de un octaedro regular cuya arista mide a m.

   Rpta.: $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

5. Determine la razón que corresponde al volumen de un octaedro de diagonal D y el cubo de dicha diagonal.

   Rpta.: $\frac{1}{6}$.

6. ¿En qué razón están los volúmenes de un octaedro regular y un tetraedro regular si la arista de aquel midel igual que la altura de este?

   Rpta.: $\frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

7. La altura de una pirámide hexagonal mide 12 m. Determine a qué distancia de la base se debe trazar un plano paralelo a ella para que las 2 partes sean equivalentes en volumen.

   Rpta.: 2,476 m.

8. Las bases de un tronco de pirámide miden 9 m^2 y 25 m^2. Calcule el área de la sección obtenida por un plano equidistante de las bases.

   Rpta.: 16 m^2.

9. Determine el área lateral de un tronco de pirámide regular de 18 m de apertura, 22,5 m de arista lateral y 40 m de lado del triángulo que forma la base mayor.

   Rpta.: 1.431 m^2

10. Una pirámide de 6 m^3 de volumen y 5 m de altura es cortada por un plano paralelo a la base y que pasa a 2 m de ella. Calcule el volumen de la pirámide resultante.

    Rpta.: $\frac{162}{125}$ m^3.

11. Calcule el volumen de piedra que se desperdiciará de un bloque de forma cúbica de 4 m de arista al labrar un octaedro regular inscrito en aquel.

    Rpta.: 53,33 m^3.

12. El área de la sección que resulta de cortar una pirámide cuadrangular regular con un plano que pasa por 2 aristas laterales opuestas es $48\sqrt{2}$ m^2. ¿Cuánto mide el área total de la pirámide si el lado de la base de la pirámide mide 12 m?

    Rpta.: 384 m^2.

13. El área lateral de una pirámide hexagonal regular es 48 m^2. Calcule el lado de la base si se sabe que la apotema de la pirámide mide el cuádruple del radio del círculo circunscrito a la base.

    Rpta.: 2 m.

14. El área de la figura que resulta de cortar una pirámide cuadrangular regular por un plano que pasa por 2 aristas laterales opuestas es 72 m^2. Calcule el volumen de la pirámide si el lado de la base mide 6 m.

    Rpta.: $144\sqrt{2}$ m^3.

15. Las bases de un tronco de pirámide tienen 19 m y 38 m de perímetro. Si el volumen del tronco es 280 m^3, calcule el volumen de la pirámide total.

    Rpta.: 320 m^3.

16. La base de una pirámide regular es un triángulo equilátero inscrito en un círculo de 2 m de radio y la superficie lateral es el doble de la superficie de la base. Calcule su volumen.

    Rpta.: 3 m^3.

17. Las bases de 2 pirámides regulares son cuadrados congruentes de 3 m de lado, situados en el mismo plano y con un lado en común. La altura de la primera pirámide es 8 m y su volumen es el doble que el de la segunda. Calcule la distancia entre los vértices de las pirámides.

    Rpta.: 5 m.

18. Se tiene un cuadrado *ABCD* de lado $\sqrt{2}$ m. Por los vértices *A* y *C* se levantan las perpendiculares *AE* y *CF* de 6 y 2 m, respectivamente, al plano del cuadrado. Finalmente se trazan los segmentos *EB, ED, EF, BF y DF*. (a) Calcule el volumen del sólido generado. (b) Si se traza la diagonal *BD* del cuadrado, determine el volumen de la pirámide *FBDE.*

    Rptas.: a) $\frac{16}{3}$ m^3; b) $\frac{8}{3}$ m^3.

19. El área lateral de un tronco de pirámide regular cuadrangular es 200 m^2, el lado de la base mayor mide 13 m y su volumen es 412 m^3. Determine cuánto mide su apotema.

    Rpta.: 5 m.

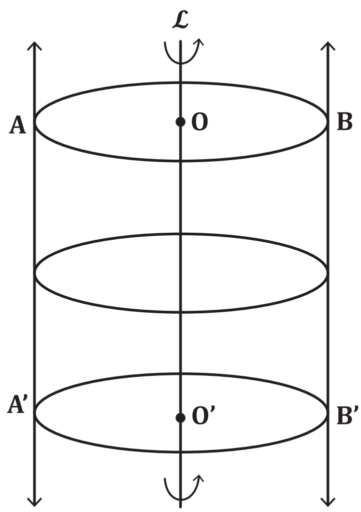
20. Las dimensiones de un cofre en forma de paralelepípedo rectangular son 3”, 4” y 6”. Si en cada medición se puede cometer un error de x” y la máxima diferencia entre las áreas totales posibles del cofre es 52 pulgadas cuadradas, calcule la máxima diferencia entre los volúmenes de las pirámides inscritas en dichos paralelepípedos.

    Rpta.: 18,08 pulgadas cúbicas.

8. El cilindro

8.1 Superficie cilíndrica circular

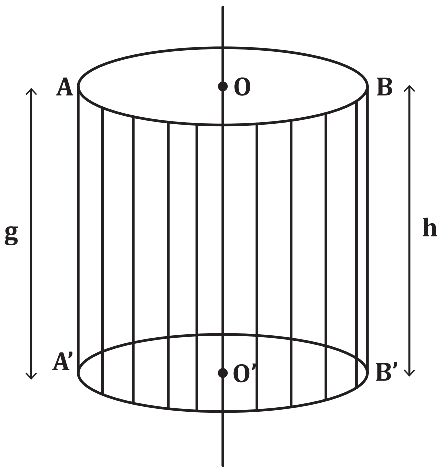
Dada una recta *AA'*, tal que cada uno de sus puntos gira alrededor de una recta $\mathcal{L}$ paralela a ella, la superficie generada recibe el nombre de superficie cilíndrica circular.



$\mathcal{L}$: eje de la superficie cilíndrica

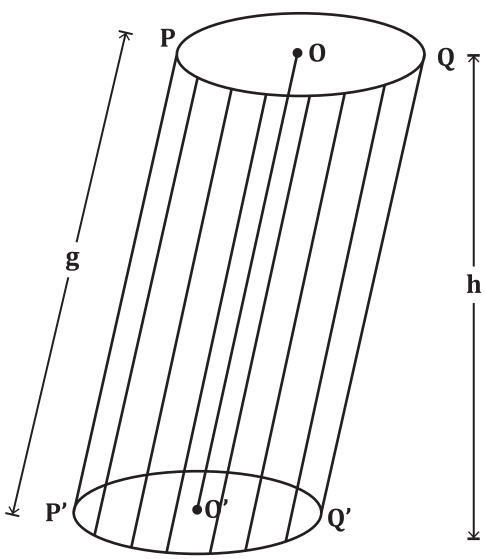
8.2 Cilindro circular recto y cilindro circular oblicuo

- Cilindro circular recto: es el sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y 2 planos perpendiculares al eje.



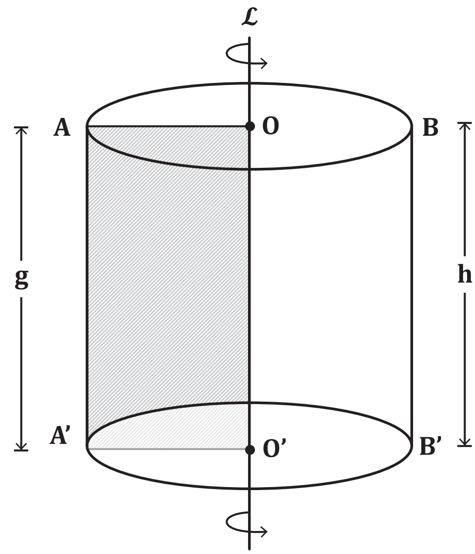
Bases: círculos de centros O y O'
r: radio de las bases
g: generatriz (recta cuyos puntos giran)
h: altura (distancia entre las 2 bases)
(g es perpendicular a las bases)

- Cilindro circular oblicuo: es el sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y 2 planos paralelos que cortan al eje de forma oblicua.



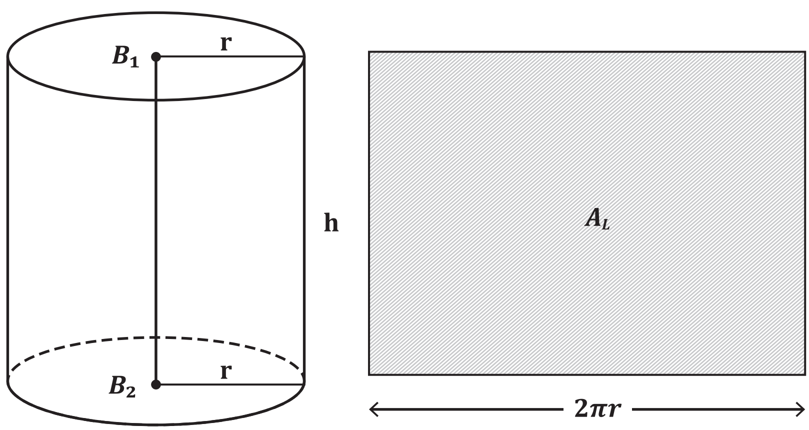
Bases: círculos de centros O y O'
g: generatiz
h: altura
(g no es perpendicular a las bases)

Nota: el cilindro circular recto es el sólido generado por la rotación completa de un rectángulo ($AA'O'O$) alrededor de uno de sus lados (OO').



8.3 Áreas y volumen de un cilindro circular recto

Dado el cilindro circular recto de bases circulares B_1 y B_2, radio r de las bases y altura h, se obtiene:



$A_L = 2\pi r.h$

$A_T = A_L + B_1 + B_2$

$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$

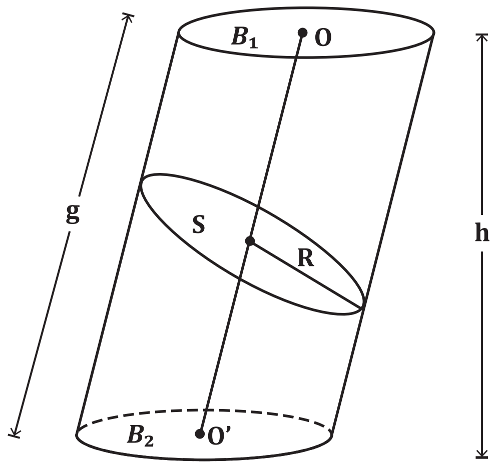
$A_T = 2\pi r(h + r)$

$V = Base \times altura$

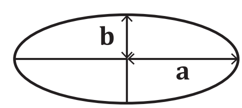
$V = \pi r^2 h$

8.4 Áreas y volumen de un cilindro oblicuo

Dado el cilindro oblicuo de bases elípticas B_1 y B_2, generatiz g, altura h, sección recta circular S (intersección del cilindro con un plano perpendicular a la generatriz) y radio R de la sección recta, se obtiene:



Bases B_1 y B_2:



Área elipse = πab

$A_L = 2\pi Rg$

$A_T = A_L + B_1 + B_2$

$A_T = 2\pi Rg + 2\pi ab$

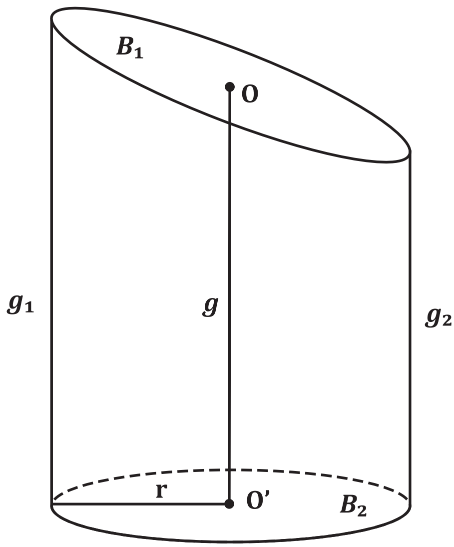
$A_T = 2\pi(Rg + ab)$

$$V = Base \times altura\ o V = \text{Área sección recta} \times generatriz$$

$$V = \pi abh \text{ o } V = \pi R^2 g$$

8.5 Tronco de cilindro circular recto

Es una porción de cilindro circular recto comprendida entre una de sus bases y un plano no paralelo a ella.



g: generatriz media

$$g = OO' = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

$$A_L = 2\pi r g$$

$$A_T = A_L + B_1 + B_2$$

$$A_T = 2\pi r g + \pi ab + \pi r^2$$

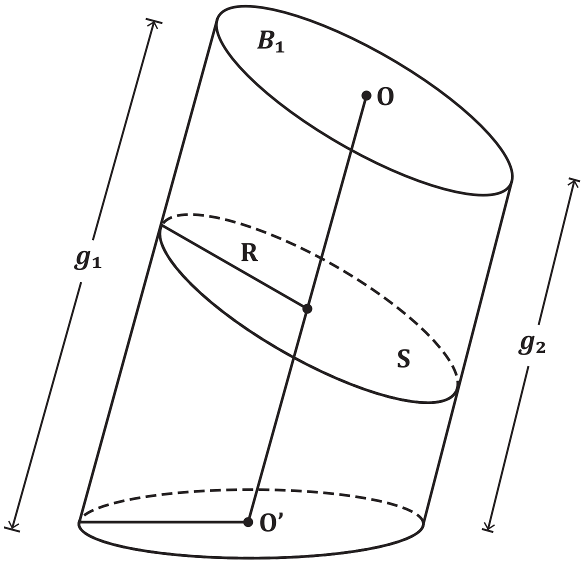
son iguales

$$A_T = 2\pi r(g + r)$$

$$V = Base \times generatriz\ media$$

$$V = \pi r^2 g$$

8.6 Tronco de cilindro oblicuo



g: generatriz media

$$g = OO' = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

S: sección recta

R: radio de la sección recta

$$A_L = 2\pi R g$$

$$A_T = A_L + B_1 + B_2$$

$$A_T = 2\pi R g + B_1 + B_2$$

$$V = \pi R^2 g$$

8.7 Ejercicios resueltos

1. Determine el volumen de un cilindro de radio r de su base y de área lateral S_L.

   Solución:

   Se sabe que:

   $$S_L = 2\pi r h \rightarrow h = \frac{S_L}{2\pi r} \text{.......}(1)$$

   Se pide:

   $$V = 2\pi r^2 h \text{..........................}(2)$$

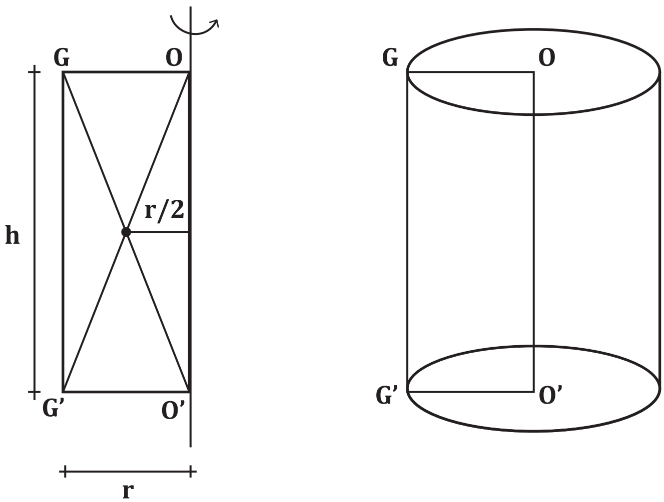
(1) en (2):

$$V = 2\pi^2\left(\frac{S_L}{2\pi r}\right) = \frac{S_L.r}{2}$$

2. Calcule el volumen de un cilindro recto si el área del rectángulo que lo genera es 40 m² y la longitud de la circunferencia que recorre el punto de intersección de las diagonales del rectángulo al generar el cilindro es 10 m.

   Solución:

   Se tiene que el rectángulo generatriz del cilindro es:



$$rh = 40$$

$$2\pi\left(\frac{r}{2}\right) = 10$$

   Entonces:

$$r = \frac{10}{\pi} y h = 4\pi$$

   Con lo cual, el volumen del cilindro recto es:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{10}{\pi}\right)^2 (4\pi) = 400 \text{ m}^3$$

3. ¿Cuántos m² de hojalata se necesitarán para fabricar 250 latas cilíndricas de conserva de 4 cm de radio de la base y 3 cm de altura?

Solución:

Calculemos el área total de hojalata necesaria para fabricar una lata de conserva:

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

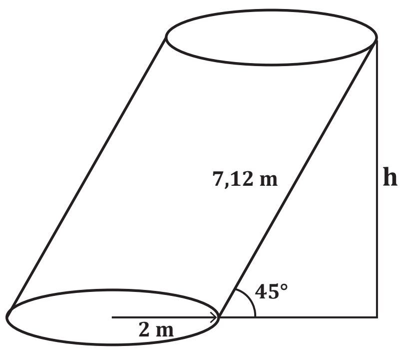
$$A_T = 2\pi(4)[4+3]$$

$$A_T = 56\pi \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, se requerirá un total de $250(56\pi) = 14.000\pi$ cm^2 de hojalata. Es decir, $1,4\pi = 4.398$ m^2.

4. La generatriz de un cilindro oblicuo mide 7,12 m y forma 45° con la base circular de 2 m de radio. Calcule el volumen del cilindro.

   Solución:



Se tiene que la altura h del cilindro cumple con:

$$\text{sen}45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{7,12}$$

De donde:

$$h = 7,12\ sen45° = \frac{7,12\sqrt{2}}{2} = 3,56\sqrt{2} \text{ m}$$

Con lo cual:

$$V = \pi R^2 h = \pi(2)^2(3,56\sqrt{2})$$

$$V = 63,27 \text{ m}^3$$

5. Un tubo cilíndrico de vidrio pesa 80 gramos cuando esta vacío y 140 gramos cuando contiene mercurio en una altura de 4 cm. ¿Cuánto mide el diámetro interior del tubo si la densidad del mercurio es 13,598?

   Solución:

   El peso de una columna de 4 cm de mercurio en el tubo cilíndrico de diámetro interior es 140 − 80 = 60 g.

   Entonces:

$$W = \rho V$$

$$60 = 13{,}598\left[\left(\pi\frac{d^2}{4}\right)4\right]$$

   De donde:

$$d^2 = \frac{60}{13{,}598} = 1{,}404$$

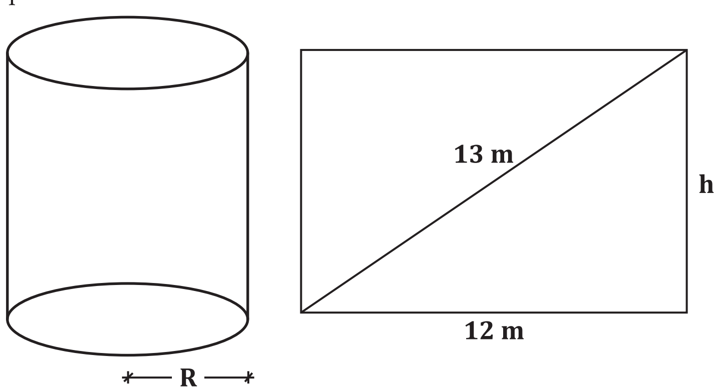
   Finalmente:

$$d = 1{,}185 \text{ cm}$$

6. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo de 12 m de base y 13 m de diagonal. Calcule el volumen del cilindro.

   Solución:

   Se tiene que:



Se deduce que:

$$h^2 = 13^2 - 12^2 = (13 + 12)(13 - 12) = 25$$

$$h = 5 \text{ m}$$

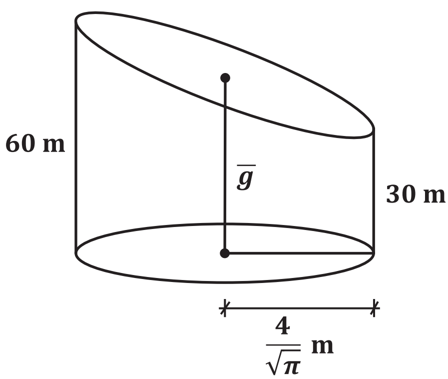
$$2\pi R = 12 => \text{R} = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi}\text{m}$$

Entonces:

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 (5) = \frac{180}{\pi} = 57{,}29 \text{ m}^3$$

7. La generatriz mayor de un tronco de cilindro recto mide 60 m (el doble de la medida de la generatriz menor). Calcule su volumen si el radio de la base mide $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ m.

   Solución:



La generatriz media ($\bar{g}$) mide:

$$\bar{g} = \frac{30+60}{2} = 45 \text{ m}$$

El volumen del tronco de cono es:

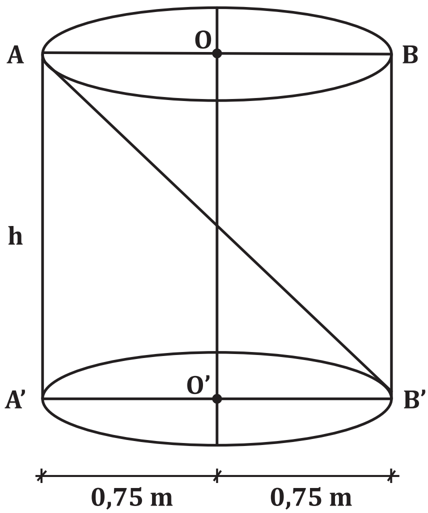
$$V = \pi r^2 \bar{g}$$

$$V = \pi(\frac{4}{\sqrt{\pi}})^2(45)$$

$$V = 720 \text{ m}^3$$

8. La diagonal del rectángulo obtenido al cortar un cilindro con un plano que contenga al eje mide 3 m. Si el diámetro de la base mide 1,5 m, calcule el área lateral del cilindro:

   Solución:



El radio de la base mide $\frac{1,50}{2} = 0,75$ m
Como $AB' = 3$ m, se tiene que:

$$h = AA' = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = 2,60 \text{ m}$$

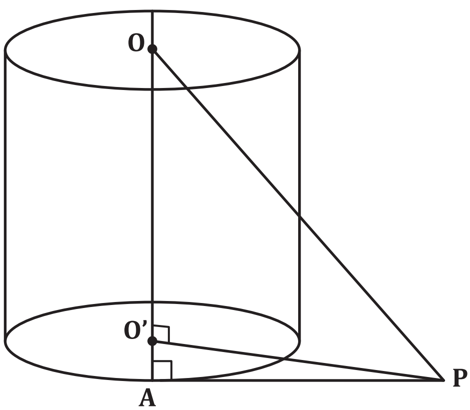
De donde, el área lateral será:

$$A_L = 2\pi r h = 2\pi(0,75)(2,60)$$

$$A_L = 12,25 \text{ m}^2$$

9. La tangente a la base inferior de un cilindro, en un punto cualquiera de ella, tiene por longitud la de la circunferencia de dicha base. La altura del cilindro, al igual que el radio, mide 5 m. ¿Qué distancia separa al extremo de la tangente del centro de la base superior del cilindro?

   Solución:



Se pide que calcule $O'P$:

$$O'P = \sqrt{(OP)^2 + (00')^2}$$

Como: $(OP)^2 = (OA)^2 + (AP)^2$

$$(OP)^2 = 5^2 + [2\pi(5)]^2$$

$$(OP)^2 = 25 + 986,96 = 1011,96 \text{ m}^2$$

y $OO' = h = 5$ m, se tendrá que:

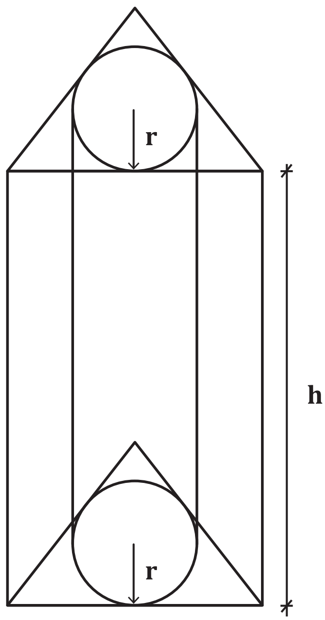
$$O'P = \sqrt{1011,96 + 25} = 32,20 \text{ m}$$

$\Delta\ OO'P$ está en un plano vertical

$\Delta\ O'AP$ está en un plano horizontal

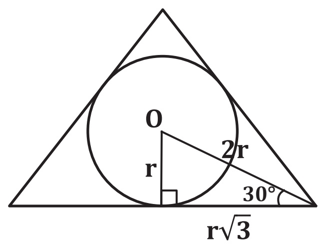
10. En un prisma triangular regular se inscribe un cilindro. ¿En qué relación se encuentran sus áreas laterales?

Solución:



Se tiene que:

Radio del círculo: r
Lado del triángulo: $2r\sqrt{3}$



Entonces:

$$\frac{A_{Prisma}}{A_{cilindro}} = \frac{3[2r\sqrt{3}\ x\ h]}{2\pi r h}$$

De donde:

$$\frac{A_{Prisma}}{A_{cilindro}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

11. El área total de un cilindro circular recto con una tapa es el 90% del área total correspondiente al mismo cilindro circular recto con 2 tapas. Determine el volumen de este en función del radio R de las bases.

Solución:

Si R es el radio de la base y h es la altura del cilindro, se sabe que $V_{Cil} = \pi R^2 h$.

Encontremos h en términos de R.

Del dato:

$$\pi R^2 + 2\pi Rh = 0{,}90[2\pi R^2 + 2\pi Rh]$$

De donde:

$$R + 2h = 0{,}90[2R + 2h]$$

$$R + 2h = 1{,}8R + 1{,}8h$$

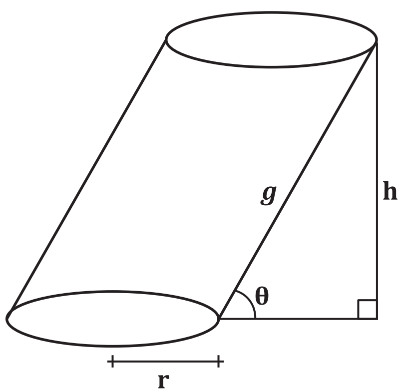
$$0{,}2h = 0{,}8R \Rightarrow h = 4R$$

El volumen pedido es:

$$V_{Cil} = \pi R^2(4R) = 4\pi R^3$$

12. El volumen de un cilindro oblicuo es 63,267 m^3, su generatriz mide 7,12 m y forma un angulo θ con la base circular de 2 m de radio. Determine el ángulo θ.

Solución:



Se tiene que:

$$\text{sen}\theta = \frac{h}{g} \Rightarrow h = g\ \text{sen}\theta$$

$$\text{V} = Bh = \pi r^2 h$$

$$\text{V} = \pi r^2 g\ \text{sen}\theta$$

Es decir:

$$\text{V} = \pi\ (2)^2\ (7{,}12)\ \text{sen}\theta = 63{,}267$$

$$\text{sen}\theta = \frac{63{,}267}{89{,}473} = 0{,}7071$$

Con lo cual:

$$\theta = 45°$$

13. ¿Qué altura debe tener un cilindro de revolución de radio r para que su cuadrado sea media geométrica entre el área lateral y el área de la base?

Solución:

Se debe cumplir que:

$$\frac{2\pi rh}{h^2} = \frac{h^2}{\pi r^2}$$

Es decir:

$$2\pi^2 r^3 h = h^4$$

De donde:

$$h^3 = 2\pi^2 r^3$$

$$h = \sqrt[3]{2\pi^2}\, r$$

14. Una vasija cilíndrica de 31,54 cm de altura interior y de 12,50 cm de radio de la base interior se llena con mercurio (densidad 13.600 $^{kg}/_{m^3}$), agua y aceite (densidad 920 $^{kg}/_{m^3}$) en pesos iguales. Determine la altura que cada uno de estos líquidos alcanza en la vasija.

Solución:

Como $\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho V$

Si se requiere que los pesos de los 3 líquidos sea el mismo:

$$\rho_{Hg} \times V_{Hg} = \rho_{H_2O} \times V_{H_2O} = \rho_{AC} \times V_{AC}$$

Es decir, los volúmenes ($\pi r^2 h$) deben ser inversamente proporcionales a las densidades. Como π y r son constantes, se requiere que las alturas de cada uno de los liquidos sean inversamente proporcionales a las densidades.

Es decir, debemos repartir la altura de 0,25 m en forma inversamente proporcional a:

13,6 1,0 0,92

Lo que equivale a repartirlo de forma directamente proporcional a:

$$\frac{1}{13{,}6} \qquad \frac{1}{1{,}0} \qquad \frac{1}{0{,}92}$$

o

$$\underbrace{1 \times 0{,}92}_{0{,}92} \qquad \underbrace{13{,}6 \times 0{,}92}_{1{,}25} \qquad \underbrace{13{,}6 \times 1}_{13{,}6}$$

De donde:

$$K = \frac{31{,}54}{0{,}92 + 1{,}25 + 13{,}60} = 2$$

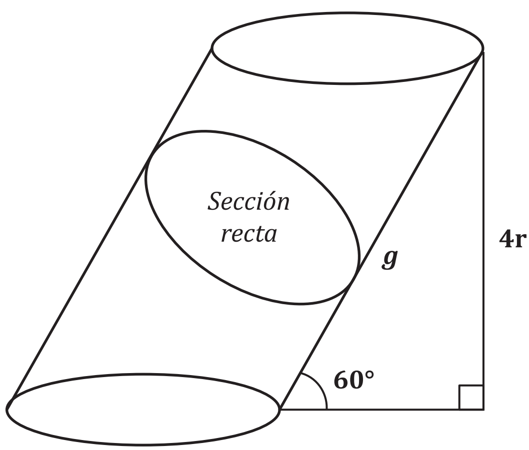
Las alturas serán

Las alturas serán	Hg	1,84 cm
	H_2O	2,50 cm
	$Aceite$	27,20 cm

15. La sección recta de un cilindro oblicuo es un círculo de radio *r*, la generatriz forma 60° con el plano de la base, y la altura del cilindro es el cuádruple del radio de la sección recta. Determine el volumen del cilindro.

Solución:

Se tiene que:



$$V_{Cil} = \pi r^2 g$$

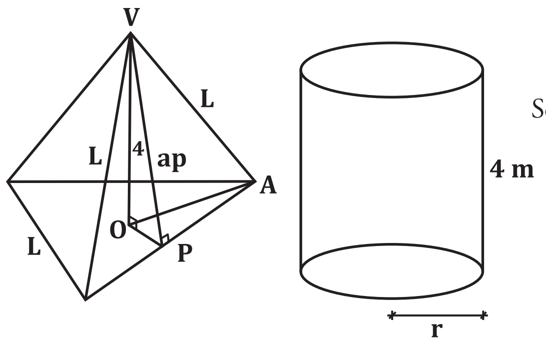
$$4r = \frac{g}{2}\sqrt{3} \Rightarrow g = \frac{8r}{\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$V_{Cil} = \pi r^2 \left(\frac{8r}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8\sqrt{3}\,\pi\, r^3}{3}$$

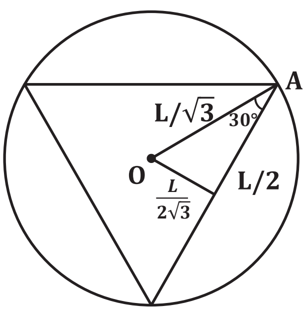
16. Las áreas laterales de un cilindro y de un tetraedro regular de la misma altura, 4 m, son iguales. Calcule dicha área lateral.

Solución:



Se tiene que:

$$A_{L_{Cil}} = 2\pi r(4) = 8\pi r \text{ m}^2$$



$$L^2 = 4^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow L = 2\sqrt{6} \text{ m}$$

$$ap = \sqrt{4^2 + (\frac{L}{2\sqrt{3}})^2}$$

$$ap = \sqrt{16 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

$$A_{L_{Tet}} = 3\left[\frac{1}{2}(2\sqrt{6})(3\sqrt{2})\right]$$

$$A_{L_{Tet}} = 9\sqrt{12} = 18\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Entonces:

$$8\pi r = 18\sqrt{3}$$

$$r = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} = 1{,}24 \text{ m}$$

17. Las áreas totales de 2 cilindros de revolución de radios y alturas proporcionales entre sí están en la relación de 9 a 16. Si la altura del cilindro mayor es 12 m, ¿cuánto mide la altura del otro cilindro?

Solución:

Se sabe que la razón de las áreas totales de 2 cilindros con lados proporcionales corresponde al cuadrado de la razón de los lados de estos. Es decir:

$$\frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

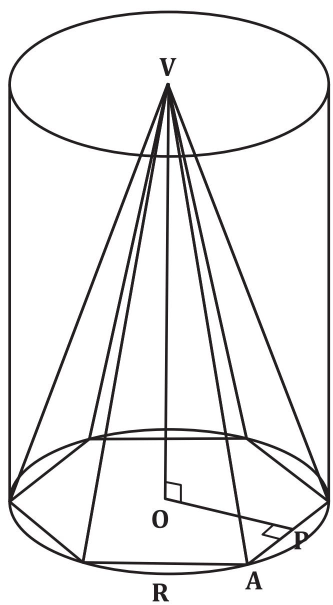
De donde:

$$\frac{9}{16} = \left(\frac{h_1}{12}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{h_1}{12}$$

$$h_1 = 9 \text{ m}$$

18. Calcule el área de la superficie lateral de un cilindro de revolución de 6 m de altura si se sabe que se le puede inscribir una pirámide hexagonal regular cuya área total es igual al área lateral del cilindro.

Solución:



Se tiene que:

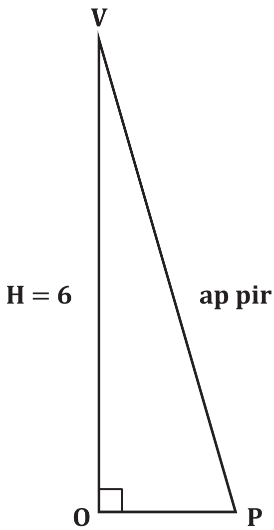
$$A_{T_{pirámide}} = A_{L_{cilindro}}$$

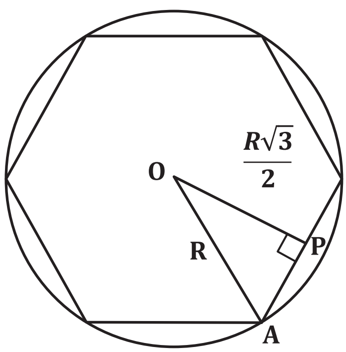
$$\text{B} + \frac{per\ base \times ap\ pir}{2} = 2\pi RH$$

$$6\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{6R \times ap\ pir}{2} = 2\pi R\ (6)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}R + 3\ (ap\ pir) = 12\pi$$

$$ap\ pir = 4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}R\text{......(1)}$$





Además:

$$(ap\ pir)^2 = H^2 + (OP)^2$$

$$(ap\ pir)^2 = 36 + (\frac{R\sqrt{3}}{2})^2$$

$$(ap\ pir)^2 = 36 + \frac{3R^2}{4} (2)$$

(1) en (2):

$$\left(4\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = 36 + \frac{3R^2}{4}$$

$$16\pi^2 - 4\sqrt{3}\,\pi\, R + \frac{3}{4}R^2 = 36 + \frac{3}{4}R^2$$

De donde:

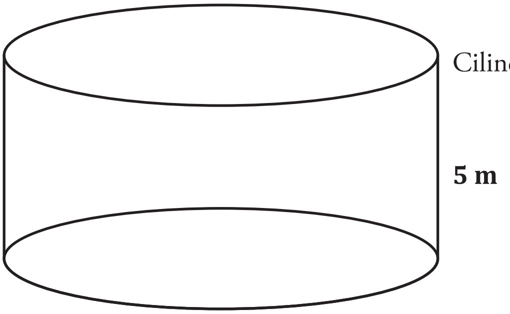
$$R = \frac{16\pi^2 - 36}{4\sqrt{3}\,\pi} = 5{,}6 \text{ m}$$

Finalmente:

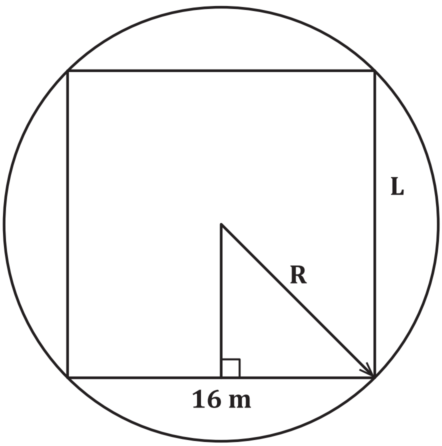
$$A_{L_{cilindro}} = 2\pi(5{,}6)6 = 211{,}12 \text{ m}^2$$

19. En un cilindro de revolución de 5 m de altura se puede inscribir un paralelepípedo rectangular, cuya superficie lateral es 250 m^2. Si una de las dimensiones del rectángulo es 16 m, calcule el área lateral del cilindro.

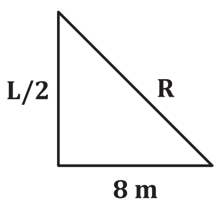
Solución:



Cilindro



Base



Se pide:

$$A_L = 2\pi RH = 2\pi R(5)$$
$$A_L = 10\pi R$$

Cálculo de R:

$$250 = (2L + 2x16)H$$
$$250 = (2L + 32)5$$
$$2L + 32 = 50$$
$$L = 9 \text{ m}$$

Además:

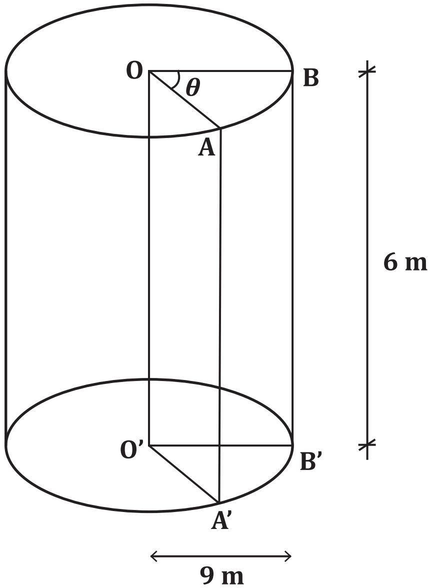
$$R^2 = (\frac{L}{2})^2 + 8^2$$
$$R^2 = 4{,}5^2 + 8^2$$
$$R = 9{,}18 \text{ m}$$

Finalmente:

$$A_L = 10\pi(9{,}18)$$
$$A_L = 91{,}8\pi \text{ m}^2$$

20. Calcule el angulo de la cuña que resulta de cortar un cilindro de revolución, de 9 m de radio y 6 m de altura, por 2 planos que pasan por el eje si su superficie lateral es S m^2.

Solución:



Sea θ el ángulo de la cuña.
La superficie lateral consta de 5 caras:

- $OAA'O$ y $OBB'O$ son rectángulos cuyas áreas son $9 \times 6 = 54 \text{ m}^2$ c/u.

- $ABB'A'$ es una porción del área lateral del cilindro ($2\pi RH$) y su área es:

$$2\pi(9)6 \times \frac{\theta°}{360°} = 0{,}3\pi\theta° \text{ m}^2$$

- OAB y $O'A'B'$ son porciones del área del círculo de radio 9 m y sus áreas son:

$$\pi(9)^2 \times \frac{\theta°}{360°} = 0{,}225\,\pi\theta° \text{ m}^2 \text{ c/u}$$

Entonces:

$$2(54) + 0{,}3\,\pi\theta° + 2(0{,}225\pi\theta°) = S$$
$$0{,}75\pi\theta° = S - 108$$

De donde:

$$\theta° = \frac{S - 108}{0{,}75\pi} \textit{ grados sexagesimales}$$

8.8 Ejercicios propuestos

1. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo de diagonal D y de base igual a b. Calcule el volumen del cilindro.

   Rpta.: $\frac{b^2}{4\pi}\sqrt{D^2 - b^2}$.

2. La circunferencia de la base de un cilindro de revolución mide C y la diagonal que une los extremos de 2 generatrices diametralmente opuestas mide d. Calcule su volumen en función de C y d.

   Rpta.: $\frac{C^2}{4\pi^2}\sqrt{\pi^2 d^2 - C^2}$.

3. ¿Cuánto se ha gastado en el revestimiento de la superficie lateral interior de un pozo circular de 1,2 m de diámetro y 8 m de profundidad a razón de 6 pesos el metro cuadrado?

   Rpta.: 180,96 pesos.

4. Una pieza cilíndrica de madera de 8 m de longitud pesa 785,4 kilos y su densidad es 800 kg por metro cúbico. Se requiere obtener a partir de ella una viga de base cuadrada. Calcule el peso de la viga.

   Rpta.: 500 kg.

5. Una pieza cilíndrica de 5 m de longitud pesa 400π kg y su densidad es $\rho\ {}^{kg}/_{m^3}$. Se escuadra dicha pieza para obtener una viga de base cuadrada. Calcule el peso de dicha viga.

   Rpta.: 800 kg.

6. Calcule el volumen de un cilindro de revolución cuyas bases están inscritas en 2 caras opuestas de un cubo de 64 m^3 de volumen.

   Rpta.: $16\pi\ m^3$.

7. ¿Qué cantidad de agua será necesario verter en un recipiente cilíndrico para que alcance el nivel de la base superior de un cubo sólido de 2 m de lado y que se encuentra inscrito en el cilindro?

   Rpta.: $(4\pi - 8)\ m^3$.

8. Las generatrices mayor y menor de un tronco de cilindro recto miden 6 y 3 m, y el radio de la base mide ${}^{4}/_{\sqrt{\pi}}$ m. Calcule su volumen.

   Rpta.: 72 m^3.

9. Determine el volumen del cilindro circunscrito a una esfera de 16 m^3 de volumen.

   Rpta.: 24 m^3.

10. Un cilindro oblicuo tiene 60° de inclinación y una altura de 3,9 m, y el radio de su sección recta mide $\frac{3}{13}$ m. Determine su área lateral.

    Rpta.: $1{,}2\sqrt{3}\ \pi\ m^2$.

11. La altura de un cilindro mide 2 m. Si la altura aumenta en 6 m, el volumen aumenta lo mismo si el radio fuese el que aumentara en 6 m. Determine el radio original.

    Rpta.: 6 m.

12. Las generatrices de un tronco de cilindro circular recto varían entre 8 y 12 m. Calcule su volumen si se conoce que el eje mayor de la elipse que forma su base superior mide 5 m.

    Rpta.: $22{,}5\pi$ m^3.

13. La sección recta de un túnel es un semicírculo. ¿Cuántos metros cúbicos de material será necesario extraer para construir dicho túnel de 100 m de largo y 8 m de diámetro?

    Rpta.: 800π m^3.

14. La altura de un cono es congruente con el radio de la base de un cilindro recto y viceversa. Si el volumen de este es la mitad del volumen de aquel, calcule la generatriz del cono si se sabe que el área lateral del cilindro es $48\,\pi$ m^2.

    Rpta.: $2\sqrt{37}$ m.

15. El peso específico del bronce es 9,2 kg/m^3. Si los diámetros exterior e interior de un tubo de 8 m de largo son 1,05 y 0,95 m, calcule el peso del tubo.

    Rpta.: $3{,}68\,\pi$ kg.

16. El área lateral de un cilindro de 10 m de radio es igual al área de la base. Calcule la altura.

    Rpta.: 5 m.

17. En un cilindro de revolución de 6 m de altura se inscribe un paralelelpípedo rectangular de 336 m^2 de área lateral. Determine el área lateral del cilindro si una de las dimensiones del rectángulo es 16 m.

    Rpta.: 120π m^2.

18. La altura de un prisma hexagonal regular de lado L coincide con el semiperímetro de la base. Determine el volumen del cilindro de la misma altura e igual área lateral que el prisma.

    Rpta.: $\frac{27L^3}{\pi}$.

19. Determine el área total de la cuña que se forma al cortar un cilindro por 2 planos que contienen al eje y forman un ángulo de 40°. La altura del cilindro es 5 m y el radio mide 4 m.

    Rpta.: 45,13 m².

20. Un depósito abierto de acero, de sección circular, debe contener 392,7 l de agua. Determine la altura y el radio del depósito de modo que se emplee la menor cantidad de superficie de la plancha de acero.

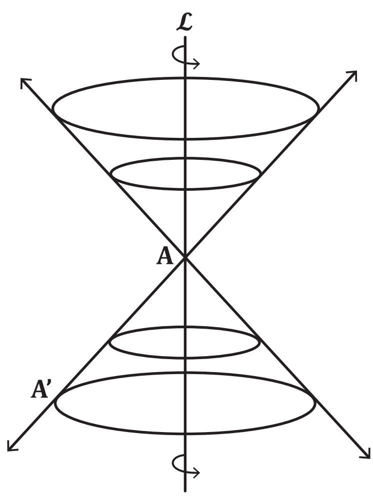
    Rpta.:

    $h = 0{,}5\ m$
    $r = 0{,}5\ m$

9. El cono

9.1 Superficie cónica circular

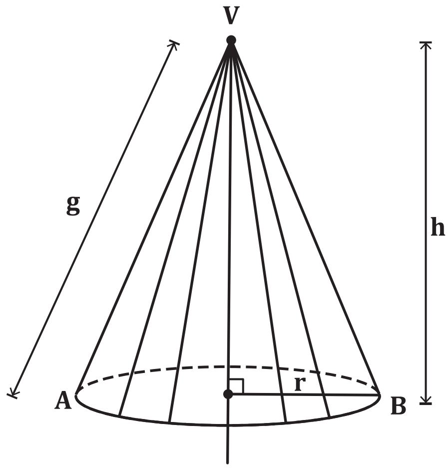
Dada una recta *AA'*, tal que cada uno de sus puntos gira alrededor de una recta $\mathcal{L}$ que contiene a *A* ($\mathcal{L}$ no es paralela ni perpendicular a *AA'*), la superficie generada recibe el nombre de superficie cónica circular.



$\mathcal{L}$: eje de la superficie cónica

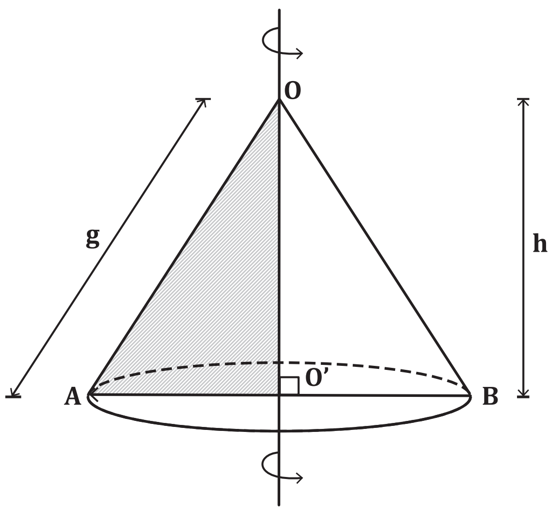
9.2 Cono circular recto

Es el sólido geométrico limitado por una superficie cónica cerrada y un plano perpendicular al eje.



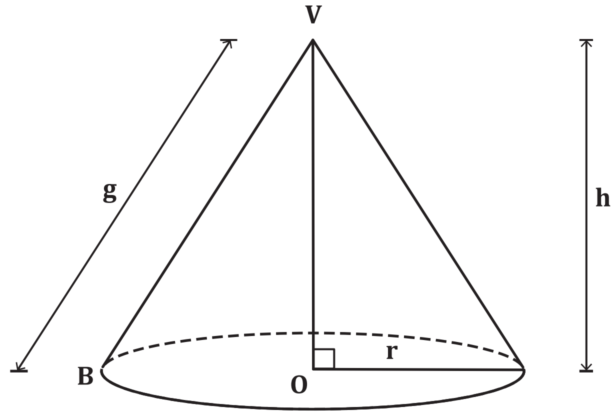
V: vértice del cono
Base: círculo de centro *O*
r: radio de la base
g: generatriz
h: altura (distancia entre el vértice y la base)

El cono circular recto es el sólido generado por la rotación completa de un triángulo rectángulo (*OAO'*) alrededor de uno de sus catetos (*OO'*).



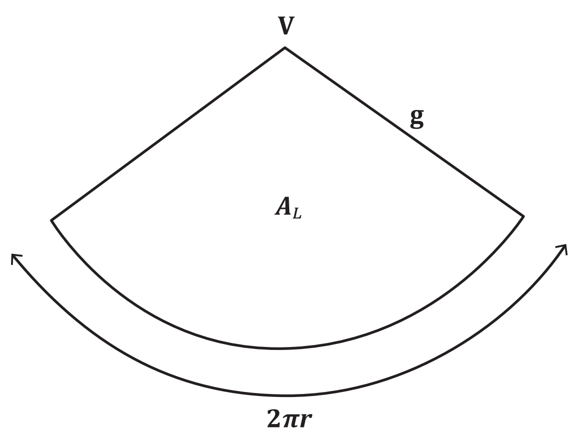
9.3 Áreas y volumen de un cono circular recto

Dado el cono circular recto de base circular *B*, radio *r* de la base, altura *h* y generatriz *g*, se obtiene:



Nótese que se puede construir un cono circular recto a partir de la superficie A_L de la figura siguiente, juntando para ello los puntos *P* y *Q* de modo que se forme una circunferencia que coincidirá con la base circular del cono de radio *r*.

Área lateral: el desarrollo del cono es un sector circular que subtiende un arco, cuya longitud es el perímetro $2\pi r$ de la base.



Para encontrar el área de dicho sector circular, aplicamos una regla de 3:

Si el área del círculo es πg^2 $\Rightarrow$ su perímetro es $2\ \pi g$

Si el área del círculo es A_L $\Rightarrow$ su perímetro es $2\ \pi r$

De donde:

$$\left.\begin{array}{l} \pi g^2 \rightarrow 2\pi g \\ \\ A_L \rightarrow 2\pi r \end{array}\right\} A_L = \frac{2\pi r(\pi g^2)}{2\pi g} = \pi r g$$

Área total:

$$A_T = A_L + B$$

$$A_T = \pi r\mathrm{g} + \pi r^2$$

$$A_T = \pi r(g + r)$$

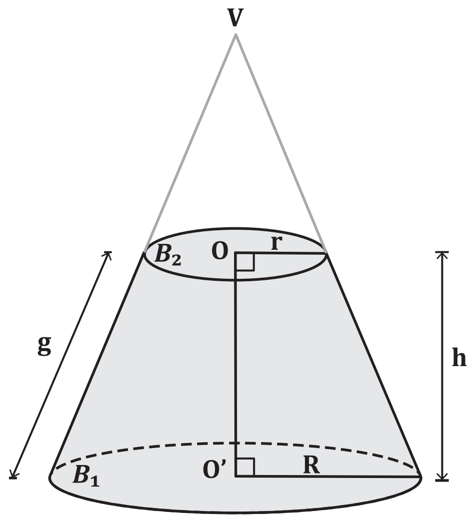
Volumen:

$$V = \frac{1}{3} Base \times altura$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

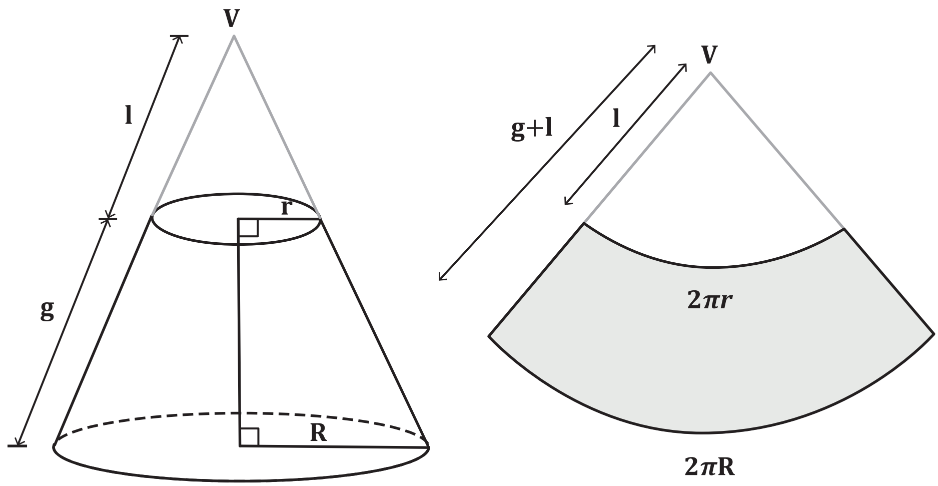
9.4 Tronco de cono circular recto

Es una porción de cono circular recto comprendido entre su base y un plano paralelo a ella.



9.5 Áreas y volumen de un tronco de cono circular recto

Área lateral: se obtiene de restar el área lateral del cono de vértice V y base circular de radio r, del área lateral del cono de vértice V y base circular de radio R.



Como el área lateral de un cono circular recto es

$$A_L = \pi(radio)(generatriz),$$

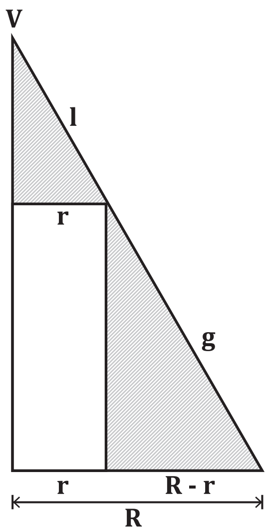
se tiene que:

$$A_{L_{TRONCO}} = \pi(R)(g + l) - \pi(r)l$$

$$A_{L_{TRONCO}} = \pi[Rg + Rl - rl]$$

$$A_{L_{TRONCO}} = \pi[Rg + (R - r)l] \text{.......}(1)$$

A partir de la siguiente figura y por semejanza de triángulos, se obtiene que:



$$\frac{l}{r} = \frac{g}{R - r}$$

$$(R - r)l = rg \text{.......}(2)$$

De (2) en (1):

$$A_{L_{TRONCO}} = \pi[Rg + rg]$$

Finalmente:

$$A_{L_{TRONCO}} = \pi g[R + r]$$

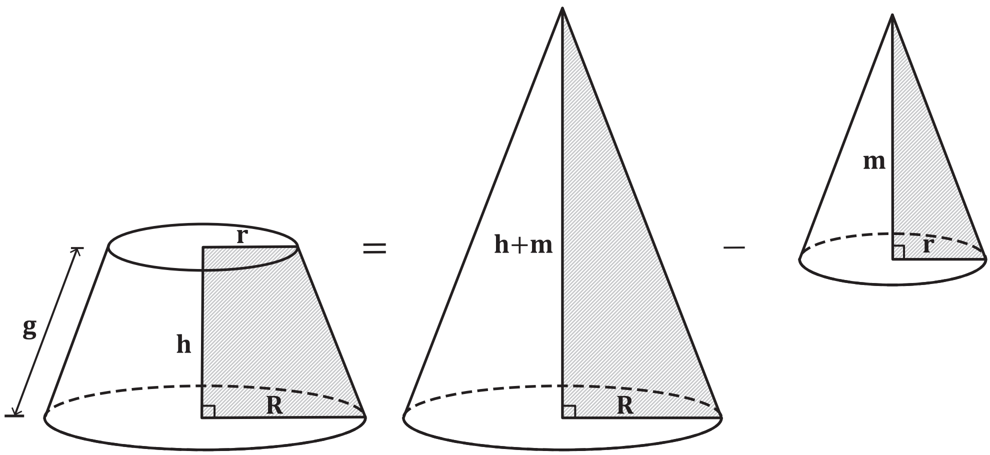
Área total:

$$A_T = A_L + B_1 + B_2$$

$$A_T = \pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$A_T = \pi[g(R + r) + R^2 + r^2\ ]$$

Volumen: se obtiene de restar el volumen V_2 de V_1.



$$V_{TRONCO} = V_1 - V_2$$

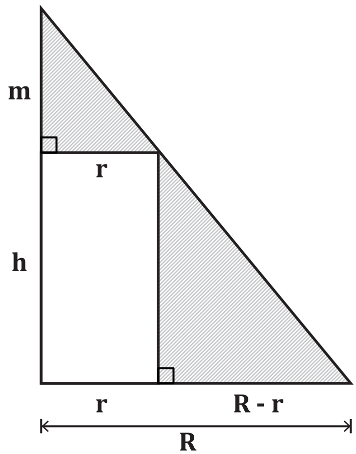
$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi R^2(h+m) - \frac{1}{3}\pi r^2\ m$$

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi[R^2h + R^2m - r^2m]$$

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi[R^2h + (R^2 - r^2)m]$$

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi[R^2h + (R + r)(R - r)m] ....(1)$$

Aplicando semejanza de triángulos en la figura siguiente, se encuentra que:



$$\frac{m}{r} = \frac{h}{R - r}$$

$$m(R - r) = rh ....(2)$$

De (2) en (1):

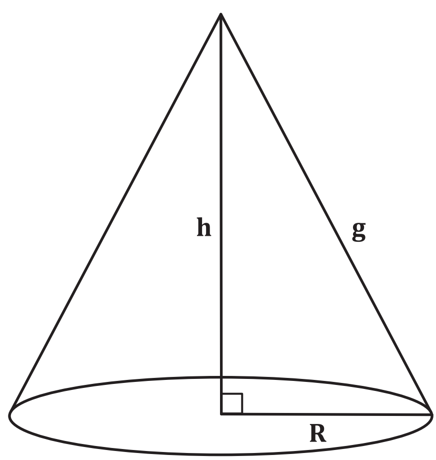
$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi[R^2h + (R + r)rh]$$

$$V_{TRONCO} = \frac{1}{3}\pi h[R^2 + r^2 + Rr]$$

9.6 Ejercicios resueltos

1. Determine en función del radio R la fórmula del volumen de un cono de revolución cuya generatriz mide igual que la circunferencia de la base.

   Solución:

   Se sabe que $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

   Del gráfico:

   $h = \sqrt{g^2 - R^2}$

   Del dato:

   $h = \sqrt{(2\pi R)^2 - R^2}$

   $h = R\sqrt{4\pi^2 - 1}$

De donde:

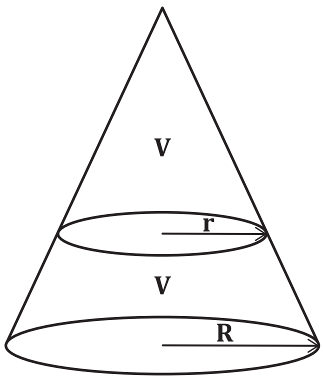
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(R\sqrt{4\pi^2 - 1})$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{4\pi^2 - 1}\ R^3$$

2. El radio de la base de un cono es *R*. ¿Cuánto mide el radio *r* de un círculo paralelo a la base que divide al cono en 2 sólidos equivalentes?

   Solución:

   Se tiene que:



$$\frac{V}{V+V} = (\frac{r}{R})^3$$

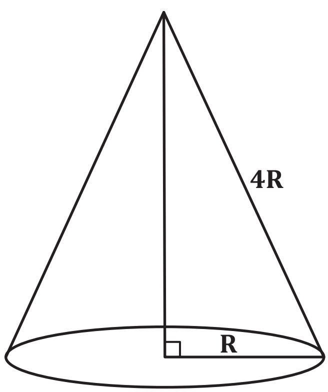
$$\frac{1}{2} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow r^3 = 2R^3$$

De donde:

$$r = \sqrt[3]{2}\ R$$

3. Calculce la generatriz de un cono de 80π m² de área total si se sabe que mide el cuádruple que el radio de la base.

   Solución:



Se tiene que:

$$A_T = \pi R^2 + \pi R(4R) = 80\pi$$

$$5\pi R^2 = 80\pi$$
$$R = 4 \text{ m}$$

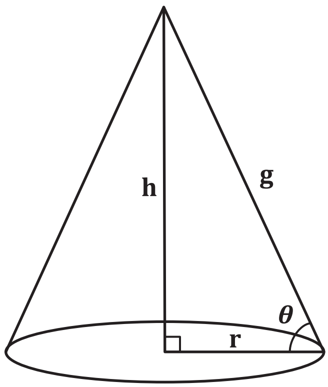
De donde:

$$g = 4R = 16 \text{ m}$$

4. ¿Cuánto mide el ángulo que la generatriz de un cono recto forma en su base si se conoce que el área lateral es el triple que el área de la base?

Solución:

Se tiene que:



$$A_L = \pi r g$$
$$B = \pi r^2$$

Entonces:

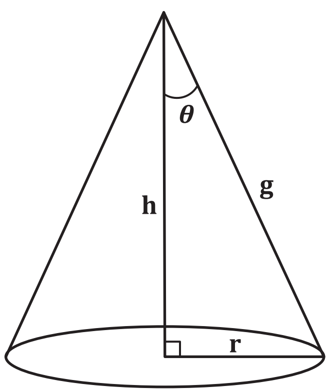
$$\pi r g = 3\pi r^2$$
$$g = 3r$$

De donde:

$$\cos\theta = \frac{r}{g} = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$
$$\theta = arc\cos 1/3 = 70{,}5°$$

5. Si el área lateral de un cono y el área de su base están en relación de 2 a 1, ¿qué ángulo forman la generatriz y la altura del cono?

Solución:



Se tiene que:

$$\frac{A_{Lat}}{A_{Base}} = \frac{\pi R g}{\pi R^2} = \frac{g}{R} = \frac{2}{1}$$

$$g = 2R$$

Entonces:

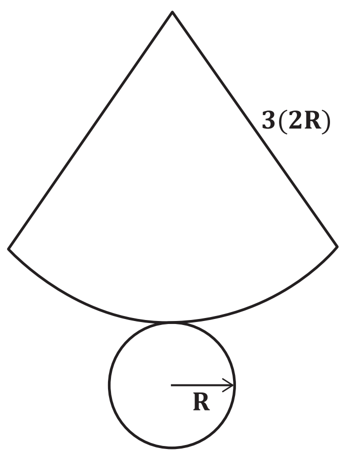
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{R}{g} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 30°$$

6. Si la generatriz de un cono circular recto mide el triple que el diámetro, calcúlela si se sabe que el área total es 28π m^2.

   Solución:

   Se tiene que el desarrollo del cono es:



$$A_T = \pi R^2 + \pi R(6R) + 7\pi R^2$$

$$7\pi R^2 = 28\pi \Rightarrow R = 2\text{ m}$$

De donde:

$$g = 6R = 12\text{ m}$$

7. El volumen de un montículo de arena en forma de cono es 32π m^3. Si su altura mide los $\frac{3}{4}$ de su diámetro, ¿cuál es el área de la base?

   Solución:

   Sea R el radio del circulo de la base y h, la altura del cono. Del dato:

$$h = \frac{3}{4}(2R) = \frac{3}{2}R$$

Entonces:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{\pi R^3}{2} = 32\pi$$

$$R^3 = 64 \Rightarrow R = 4 \text{ m}$$

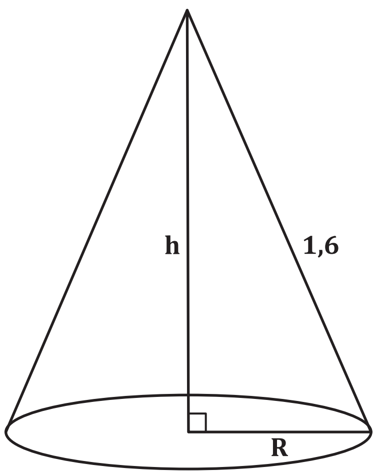
De donde:

$$\text{A} = \pi R^2 = 16\pi \text{ m}^2$$

8. El volumen de un cilindro de 1,60 m de altura es igual a 8 m³. Calcule el volumen de un cono de igual base e igual generatriz que el cilindro.

   Solución:

   Se tiene que:



$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 h \text{.......................} (1)$$

$$h = \sqrt{1{,}6^2 - R^2} \text{......................} (2)$$

(2) en (1):

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{2{,}56 - R^2} \text{...} (3)$$

Además:

$$V_{Cil} = \pi R^2\ (1{,}6) = 8$$

$$R^2 = \frac{8}{1{,}6\pi} = \frac{5}{\pi} \text{......}(4)$$

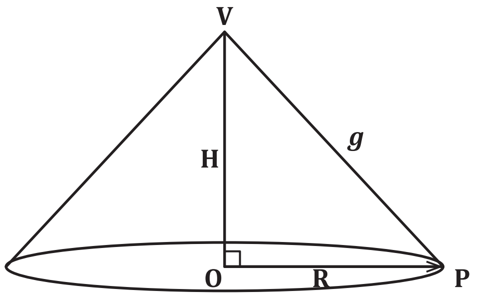
(4) en (3):

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{5}{\pi}\right]\sqrt{2{,}56 - \frac{5}{\pi}}$$

$$V_{cono} = \frac{5}{3}\sqrt{0{,}9685} = 1{,}64 \text{ m}^3$$

9. Calcule el volumen de un cono de revolución cuya generatriz mide 2 m, y la distancia de este al centro de la base es de 1 m.

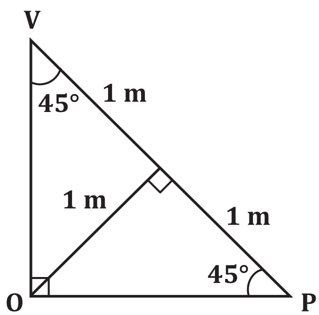
   Solución:



Se tiene que:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

De acuerdo con los datos, el triángulo *VOP* es isósceles rectángulo:



$$OP = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$OV = OP = \sqrt{2} \text{ m}$$

De donde:

$$V = \frac{1}{3}\pi (OP)^2 (OV) = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{2})^3 = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3} \text{m}^3$$

10. La suma de las áreas totales de 2 conos semejantes es 146π m^2. Si la razón de sus generatrices es $\frac{3}{8}$, determine el área total del cono más pequeño.

   Solución:

Se tiene que:

$$A_{T_1} + A_{T_2} = 146\pi$$

$$\frac{A_{T_1}}{A_{T_2}} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{A_{T_1} + A_{T_2}}{A_{T_1}} = \frac{9 + 64}{9}$$

Es decir:

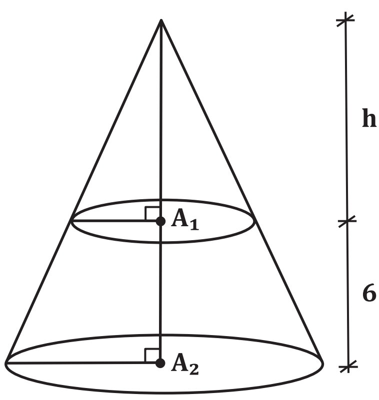
$$\frac{146\pi}{A_{T_1}} = \frac{73}{9}$$

De donde:

$$A_{T_1} = \frac{9(146\pi)}{73} = 18\pi \text{ m}^2$$

11. Las áreas de las bases de un tronco de cono son 18 m² y 32 m². Determine su volumen si la altura mide 6 m.

Solución:



Se sabe que:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{h}{h+6}\right)^2$$

Es decir:

$$\frac{18}{32} = \frac{9}{16} = \left(\frac{h}{h+6}\right)^2 \Longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{h}{h+6}$$

De donde:

$$h = 18 \text{ m}$$

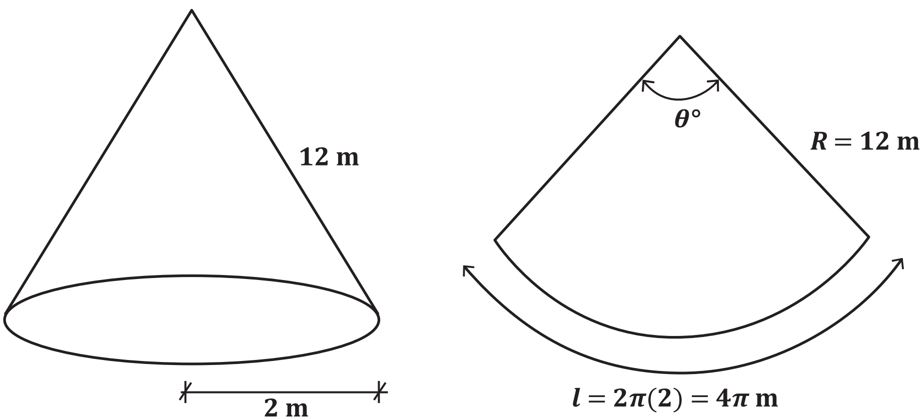
El volumen pedido será:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\pi(32)(18 + 6) - \frac{1}{3}\pi(18)(18)$$

$$V = 256\pi - 108\pi = 148\pi \text{ m}^3$$

12. Calcule el ángulo de la figura formada al desarrollar el área lateral de un cono de revolución de 2 m de radio y 12 m de generatriz.

Solución:



El desarrollo de la superficie lateral del cono es un sector circular, cuyo radio $R = g = 12$ m y cuya longitud del arco es $l = 4\pi$ m.

Por regla de 3:

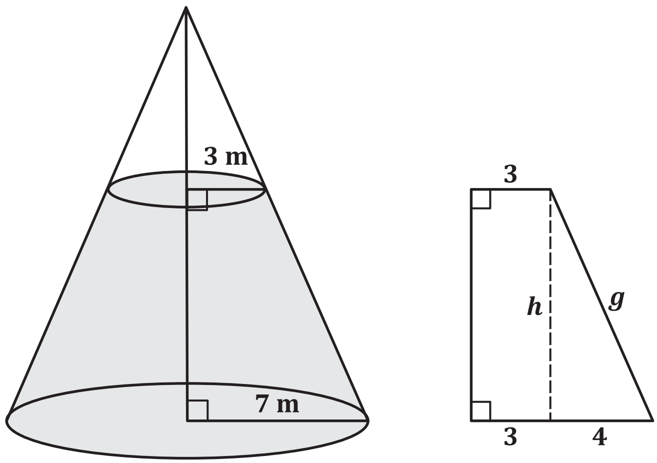
Para un ángulo de $360 \rightarrow L = 2\pi(12) = 24\pi$ m
Para un ángulo de $\theta° \rightarrow l = 4\pi$ m

De donde:

$$\theta° = \frac{4\pi(360°}{24\pi} = 60°$$

13. Los radios de las bases de un tronco de cono miden 3 m y 7 m, respectivamente. Calcule la altura del tronco de cono si la superficie lateral es igual a la suma de las superficies de las bases.

Solución:



De la figura:

$$h = \sqrt{g^2 - 4^2} \text{ ......(1)}$$

Se tiene que:

$$A_{L_{tronco}} = \pi g(R + r) = 10\pi g$$

$$B_1 + B_2 = \pi R^2 + \pi r^2 = (49 + 9)\pi = 58\pi$$

Entonces:

$$10\pi g = 58\pi \Rightarrow g = 5{,}8$$

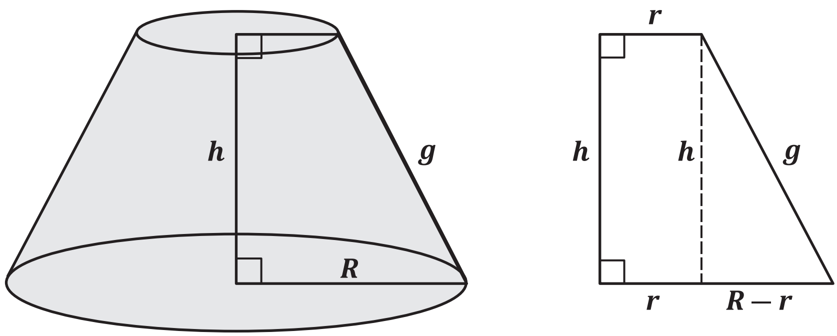
En (1):

$$h = \sqrt{5{,}8^2 - 4^2} = 4{,}2 \text{ m}$$

14. Los radios de las bases de un tronco de cono miden *R* y *r* m (*R* > *r*). ¿ Cuál debe ser su altura para que la superficie lateral sea igual a la suma de las superficies de las bases?

Solución:

Se tiene que:



De la figura anterior:

$$h^2 + (R-r)^2 = g^2 \Rightarrow h^2 = g^2 - (R-r)^2 \text{......(1)}$$

Del dato:

$$\pi(R+r)g = \pi(R^2 + r^2)$$

$$g = \frac{R^2 + r^2}{R+r} \text{ ......(2)}$$

(2) en (1):

$$h^2 = [g + (R-r)][g - (R-r)]$$

$$h^2 = \left[\frac{R^2 + r^2}{R+r} + (R-r)\right]\left[\frac{R^2 + r^2}{R+r} - (R-r)\right]$$

$$h^2 = \frac{R^2 + r^2 + R^2 - r^2}{R+r} . \frac{R^2 + r^2 - (R^2 - r^2)}{R+r}$$

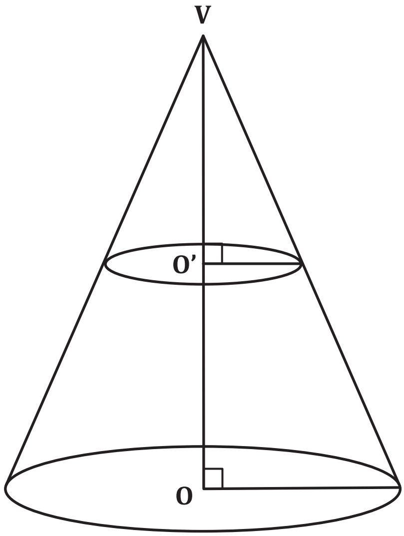
$$h^2 = \frac{2R^2}{R+r} . \frac{2r^2}{R+r}$$

De donde:

$$h = \frac{2Rr}{R+r}$$

15. Si, por el punto medio de la altura de un cono recto, se traza un plano paraelo a las bases, ¿en qué razón estarán los volúmenes de los 2 sólidos obtenidos?

Solución:



El cono de vértice V y centro de la base O tiene por volumen: $\frac{1}{3}\pi R^2 H$

El cono de vértice V y centro de la base O' tiene por volumen:

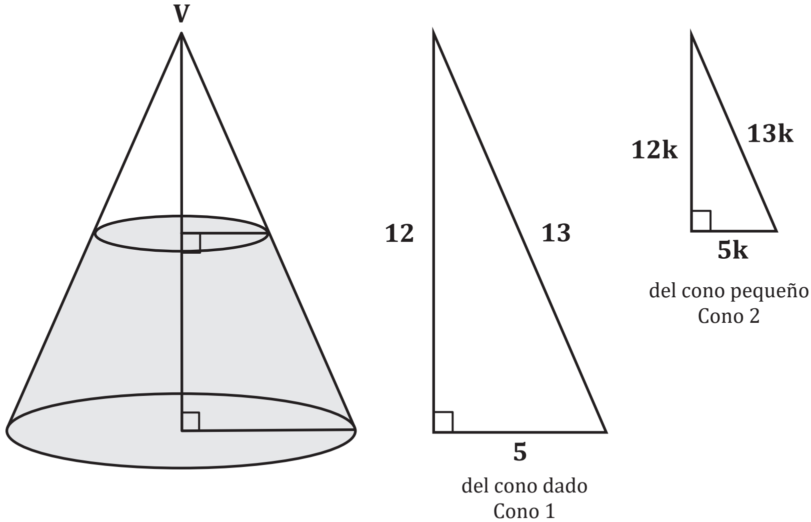
$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{1}{24}\pi R^2 H$$

Entonces, la relación de los volúmenes será:

$$\frac{(1/3)\pi R^2 H}{(1/24)\pi R^2 H} = \frac{1}{8}$$

16. La altura de un cono es 12 m y el radio de la base mide 5 m. ¿A qué distancia del vértice se debe trazar un plano paralelo a la base de modo que la superficie total del cono pequeño formado sea igual que la superficie lateral del cono dado?

Solución:



Se requiere que:

$$A_{Lat\ cono\ 1} = A_{Tot\ cono\ 2}$$

$$\pi(5)(13) = \pi(5k)(13k) + \pi(5k)^2$$

$$65 = 65k^2 + 25k^2 = 90k^2$$

$$k^2 = \frac{65}{90} = \frac{13}{18}$$

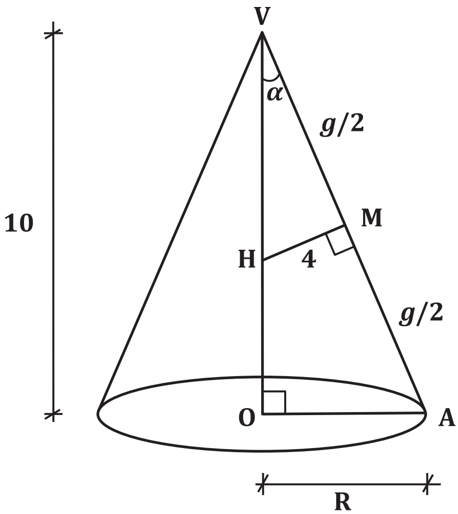
Se pide la distancia $12k$:

$$12k = 12\sqrt{13/18} = 10{,}20 \text{ m}$$

17. La altura de un cono mide 10 m y el segmento de mediatriz de una de sus generatrices, limitada por la altura del cono, mide 4 m. Calcule el área de la superficie lateral del cono.

Solución:

Se tiene que:



Los triángulos *VMH* y *VOA* son rectángulos y semejantes por tener sus 3 ángulos respectivamente congruentes.

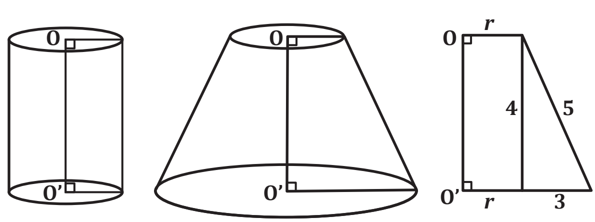
Entonces:

$$\frac{4}{R} = \frac{g/2}{10} \Rightarrow \frac{Rg}{2} = 40 \Rightarrow \mathrm{R}g = 80$$

De donde, el área pedida es $A_L = \pi(Rg) = 80\pi \text{ m}^2$.

18. Un tronco de cono de 5 m de generatriz y 4 m de altura se ha transformado en un cilindro de la misma altura y de base igual a la base menor del tronco del cono, separando 263,89 m^3 del volumen de este. Determine el radio de la base mayor.

Solución:



Se tiene que:

r: radio de la base menor

$r + 3$: radio de la base mayor

$$V_{tronco} - A_{cilindro} = 263{,}89 \text{ m}^3$$

Es decir:

$$\frac{1}{3}\pi h[R^2 + r^2 + Rr] - \pi r^2 h = 263{,}89$$

$$\frac{1}{3}\pi(4)[(r^2 + 6r + 9) + r^2 + (r^2 + 3r)] - \pi r^2(4) = 263{,}89$$

$$\frac{3r^2 + 9r + 9}{3} - r^2 = \frac{263{,}89}{4\pi} = 21$$

$$r^2 + 3r + 3 - r^2 = 21$$

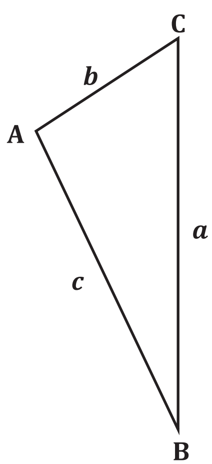
$$3r = 18 \Rightarrow r = 6 \text{ m}$$

De donde:

$$R = r + 3 = 9 \text{ m}$$

19. Un triángulo de lados a = 12,6 m, b = 5 m y c = 10,4 m gira 360º alrededor del lado a. Calcule el volumen del sólido generado.

Solución:

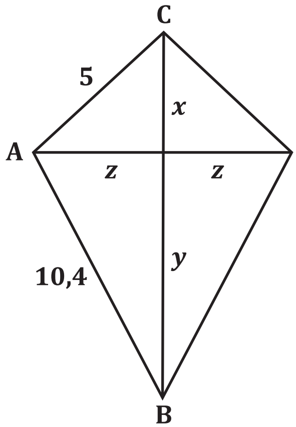


El triángulo ABC es obtusángulo, ya que se cumple que:

$$a^2 > b^2 + c^2$$

$$(12{,}6^2 > 5^2 + 10{,}4^2 \longrightarrow 158{,}76 > 133{,}16)$$

Se tiene que:



Si el triángulo ABC gira 360° alrededor de BC, se forman 2 conos cuyos volúmenes suman:

$$V_T = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi z^2 x + \frac{1}{3}\pi z^2 y$$

$$V_T = \frac{1}{3}\pi z^2 (x + y) = \frac{1}{3}\pi z^2 (12{,}6)$$

$$V_T = 4{,}2\pi z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Cálculo de z:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 5^2 \\ y^2 + z^2 &= 10{,}4^2 \end{aligned}\right\}$$

$$y^2 - x^2 = (10{,}4 + 5)(10{,}4 - 5)$$

$$y^2 - x^2 = 15{,}4(5{,}4) = 83{,}16$$

$$(y + x)(y - x) = 12{,}6(y - x) = 83{,}16$$

$$y - x = 6{,}6$$

De donde:

$$\left\{\begin{aligned} y - x &= 6{,}6 \\ y + x &= 6{,}6 \end{aligned}\right. \longrightarrow \begin{aligned} y &= 9{,}6 \text{ m} \\ x &= 3{,}0 \text{ m} \end{aligned}$$

Entonces:

$$x^2 + z^2 = 5^2 \rightarrow 3^2 + z^2 = 5^2 \Rightarrow z = 4 \text{ m}\ldots\ldots\ldots(2)$$

(2) en (1):

$$V_T = 4{,}2\pi(4)^2 = 67{,}2\pi \text{ m}^3$$

20. En un laboratorio se toma un vaso cónico de 3 Dm de altura y 4 Dm de radio de su base. Se llena el vaso con volúmenes iguales de agua, mercurio y aceite. Calcule el espesor de la capa de agua.

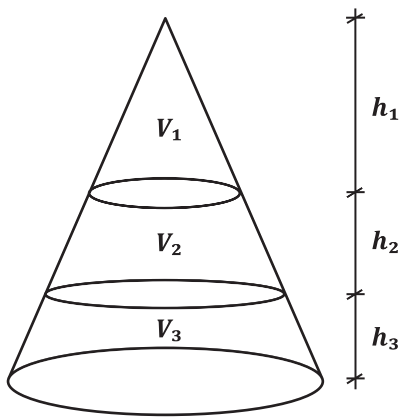
Solución:

Téngase presente que las densidades en $^{g}/_{cm^3}$ son las siguientes:

Aceite	0,92
Agua	1,00
Mercurio	13,58

De acuerdo con esos valores, el mercurio ocuparía la parte inferior del cono y el agua ocuparía la parte central del cono, mientras que el aceite, que tiene la menor densidad, ocuparía la parte superior del cono.

Entonces:



$$V_1 = V_2 = V_3 = V$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 3 \text{ Dm}$$

Se cumplirá que:

$$\frac{V_1}{V_1 + V_2 + V_3} = \left(\frac{h_1}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{3V} = \frac{1}{3} = \left(\frac{h_1}{3}\right)^3 \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

$$\frac{V_1 + V_2}{V_1 + V_2 + V_3} = \left(\frac{h_1 + h_2}{3}\right)^3 \Rightarrow \frac{2V}{3V} = \left(\frac{h_1 + h_2}{3}\right)^3 \ldots\ldots(\beta)$$

De (α) y (β):

$$h_1 = 3\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$h_1 + h_2 = 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{18}$$

De donde:

$$h_2 = (\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{9}) \text{ Dm}$$

9.7 Ejercicios propuestos

1. ¿En qué relación están las áreas laterales de dos conos generados por la rotación de un triángulo rectángulo de catetos a y b?

   Rpta.: $\frac{a}{b}$ o $\frac{b}{a}$.

2. Un triángulo isósceles de 10 m de base y 8 m de altura gira alrededor de una perpendicular a la base levantada en uno de sus extremos. Calcule el volumen engendrado.

   Rpta.: 400π m^3.

3. Se tiene un triángulo isósceles de 6 m de base y 4 m de altura que gira alrededor de una perpendicular a la base, levantada en uno de sus extremos. Calcule el volumen engendrado.

   Rpta.: 72π m^3.

4. La superficie total de un cono es 12π m^2 y su altura mide 4 m. Calcule el radio de la base.

   Rpta.: $0{,}6\sqrt{10}$ m.

5. El volumen de un tronco de cono circular recto es 336π m^3. Si la altura mide 4 m y el radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor, ¿cuánto suman ambos radios?

   Rpta.: 18 m.

6. Un cono tiene 3 m de altura y la suma de su generatriz y el radio de la base es 9 m. Calcule el ángulo del sector circular que se obtiene al desarrollar el área lateral sobre un plano.

   Rpta.: 288°.

7. Determine el volumen de un cono de revolución cuya generatriz mide igual que la circunferencia de la base de radio *r*.

   Rpta.: 6,496 r^3.

8. Si se corta un cono de revolución mediante un plano paralelo a su base, de modo que el área del círculo obtenido por el corte sea la novena parte del área de la base, ¿qué relación hay entre los volúmenes de los sólidos resultantes?

   Rpta.: $^1/_{26}$.

9. La base de un cono de revolución es un círculo de 30 m de radio y la generatriz mide 50 m. Determine el radio de la esfera circunscrita.

   Rpta.: 31,25 m.

10. Los catetos de un triángulo miden 21 y 28 m. Calcule el perímetro de la sección común a los 2 conos que se forman al hacer girar el triángulo alrededor de su hipotenusa.

    Rpta.: 33,6π m^2.

11. El diámetro de la base y la generatriz de un cono circular recto miden lo mismo. Determine el volumen del cono si el radio de la esfera inscrita mide 6 m.

    Rpta.: 648π m^3.

12. Un sector circular de 90°, cuyo radio es 4 m, sirve para construir un cono de revolución. Determine el área total del cono.

    Rpta.: 5π m^2.

13. Un tronco de cono de revolución tiene como bases círculos de 1 m y 3 m de radio. Calcule la altura del tronco de cono si el área lateral es el doble de la suma de las áreas de las bases.

    Rpta.: $\sqrt{21}$ m.

14. Calcule el volumen del sólido engendrado por un paralelogramo, $ABCD$, cuando gira una vuelta completa alrededor de BC si AB = 4 m, BC = 8 m y m$\measuredangle ABC$ = 45°.

    Rpta.: 64π m^3.

15. Las distancias desde un punto de la superficie lateral de un cono al vértice, a la altura y a la base, son 5 m, 3 m y 8 m, respectivamente. Calcule el volumen del cono.

    Rpta.: 324π m^3.

16. El desarrollo del área lateral de un cono es un sector circular de 90°. Si la generatriz del cono mide 4 m, ¿cuál es el volumen del cono?

    Rpta.: $\frac{\sqrt{15}\pi}{3}$ m^3.

17. Calcule el volumen de un tronco de cono circunscrito a una esfera si se sabe que los radios de las bases miden 2 y 8 m.

    Rpta.: 224π.

18. El volumen de un tronco de cono de 12 m de altura es 304π m^3. Si los radios de las bases se diferencian en 2 m, determine el radio de la base mayor.

    Rpta.: 6 m.

19. Calcule el volumen de un cono equilátero cuya generatriz mide 2 m.

    Rpta.: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ m^3.

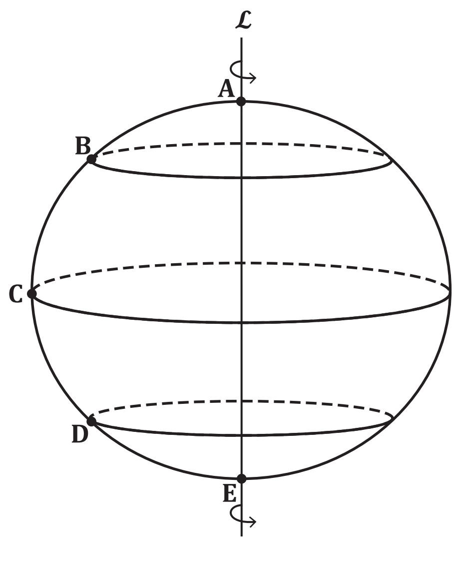
20. Un triángulo de lado a=2, b=5 y c=6 m gira 360° alrededor de a. Calcule el volumen del sólido generado.

    Rpta.: 45,87 m^3.

10. La esfera

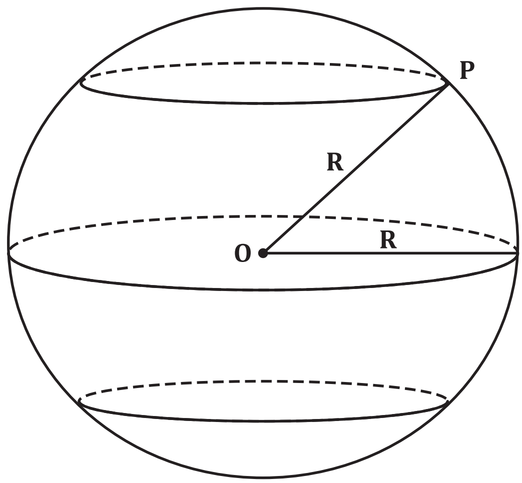
10.1 Superficie esférica

Dada una semicircunferencia, que pasa por los puntos A, B, C, D y E, tal que cada uno de sus puntos gira alrededor de su diámetro, la superficie generada recibe el nombre de superficie esférica.



10.2 Esfera

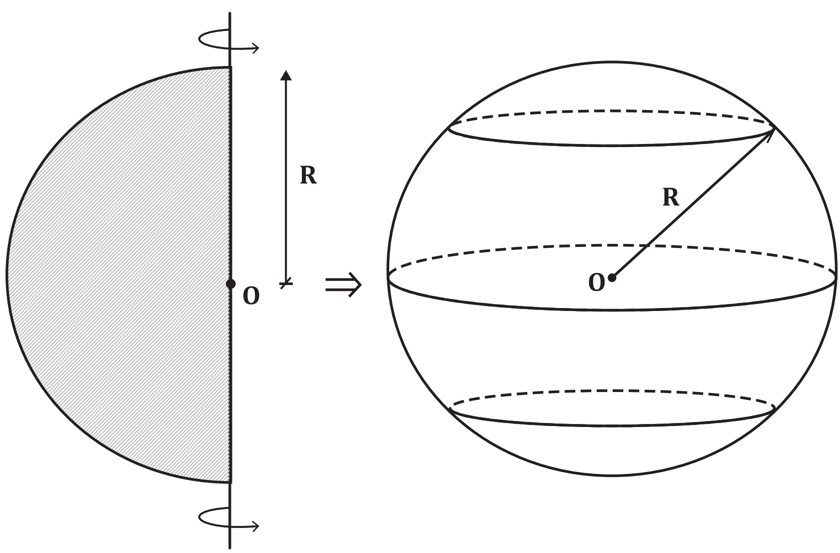
Es el sólido geométrico limitado por una superficie esférica cerrada.



O: centro de la esfera

R: radio de la esfera (distancia entre *O* y un punto cualquiera *P* de la superficie esférica)

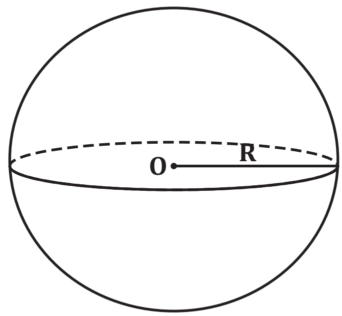
La esfera es el sólido geométrico generado por la rotación completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.



10.3 Teorema del área de la superficie esférica

El área de la superficie esférica de radio R equivale a 4 veces el área de cualquier círculo máximo de la esfera. Es decir:

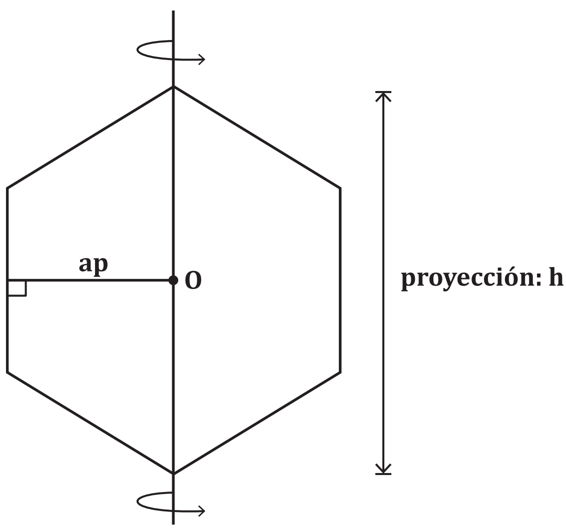
$$A = 4\pi R^2$$



La demostración se basa en el siguiente teorema:

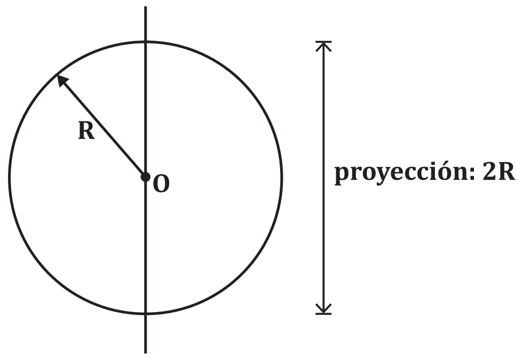
El área de la superficie generada por una poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro es igual al producto de la proyección de la poligonal sobre el eje y la longitud de la circunferencia cuyo radio es la apotema de la poligonal.

Suponga una poligonal de 6 lados:



$$A_{SUP} = h\,(2\pi\, ap)$$

Si el número de lados de la poligonal aumenta indefinidamente, se obtiene una circunferencia y la apotema de la poligonal coincide con el radio R.



$$A_{SUP\ ESFÉRICA} = (2R)(2\pi R) = 4\pi R^2$$

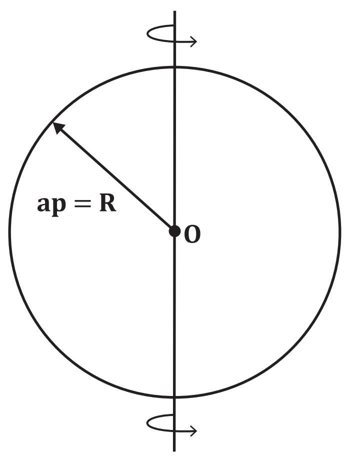
10.4 Teorema del volumen de una esfera

El volumen de una esfera de radio R es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

La demostración se basa en el siguiente teorema:

El volumen del sólido generado por una región poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro es igual a la tercera parte del producto del área de la superficie generada por la poligonal regular y la longitud de la apotema.

De donde:



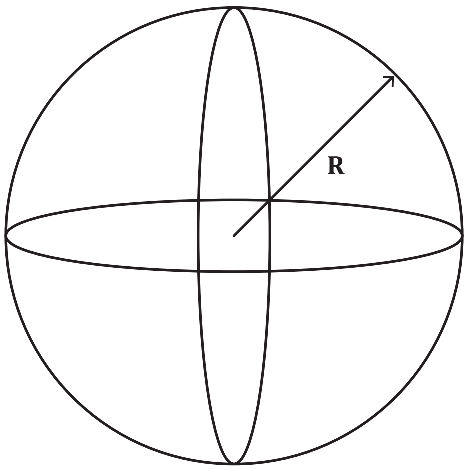
$$V_{ESFERA} = \frac{1}{3}(A_{SUP\ ESF})(ap)$$

$$\therefore V_{ESFERA} = \frac{1}{3}(4\pi R^2)(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

10.5 Ejercicios resueltos

1. ¿Cuál es el volumen de una esfera en función de la longitud C de la máxima circunferencia que se pueda construir sobre la esfera?

   Solución:



Se tiene que:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{.............}(1)$$

Del enunciado:

$$C = 2\pi R \text{..........................}(2)$$

De (2):

$$R = \frac{C}{2\pi}$$

En (1):

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^3$$

De donde:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi C^3}{24\pi^3} = \frac{C^3}{6\pi^2}$$

2. Determine el volumen de una esfera cuyo círculo máximo tiene un área de 9 m^2.

   Solución:

   Se tiene que:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$A=\pi R^2=9$$

   De donde:

$$R=\frac{3}{\sqrt{\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

   (2) en (1):

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^3=\frac{36}{\sqrt{\pi}}=\frac{36\sqrt{\pi}}{\pi}\,\mathrm{m}^3$$

3. La superficie total de un cubo y de una esfera coinciden. ¿En qué razón están sus volúmenes?

   Solución:

   Se tiene que:

$$6L^2=4\pi r^2$$

   De donde:

$$L^2=\frac{4\pi r^2}{6}=\frac{2\pi r^2}{3}$$

$$L=\frac{\sqrt{2\pi}r}{\sqrt{3}}$$

   Se pide:

$$\frac{V_{Cubo}}{V_{Esfera}}=\frac{L^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{3}{4}\,\frac{\frac{2\pi}{3}r^2\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}r}{\pi r^3}$$

Finalmente:

$$\frac{V_{Cubo}}{V_{Esfera}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6\pi}}{6}$$

4. El volumen V de una esfera y el área S de la superficie esférica están relacionados con la expresión $V = \frac{S\sqrt{S}}{K\sqrt{\pi}}$. Determine el valor de K.

   Solución:

   Se sabe que:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

   Entonces:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi R^2(2\sqrt{\pi}\,R)}{K\sqrt{\pi}}$$

   De donde:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8}{K}\pi R^3$$

   Finalmente:

$$K = \frac{3(8)}{4} = 6$$

5. Una esfera hueca de bronce, de 22 cm de diámetro exterior, pesa 21,308 kg. Calcule el diámetro interior de la esfera si se sabe que 1 dm^3 de bronce pesa 8,45 kg.

   Solución:

   Sea r el radio interior de la esfera.

   El volumen del hueco es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

   El volumen de la esfera hueca es $\frac{4}{3}\pi(11)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

Entonces:

$$V = \frac{4}{3}\pi[11^3 - r^3]\ \text{cm}^3$$

$$\gamma = 8{,}45\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\ \text{x}\ \frac{1\ \text{dm}^3}{1.000\ \text{cm}^3} = 0{,}00845\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$$

$$W = 0{,}00845\left[\frac{4}{3}\pi(11^3 - r^3)\right] = 21{,}308$$

$$\frac{4}{3}\pi(1.331 - r^3) = 2.521{,}66$$

$$1.331 - r^3 = 602$$

$$r^3 = 729 \longrightarrow r = 9\ \text{cm}$$

De donde, el diámetro interior mide 18 cm.

6. Determine en qué razón se encuentran los volúmenes de un cono, de una esfera y de un cilindro si el cono y el cilindro tienen como altura y diámetro de la base al diámetro de la esfera.

   Solución:

   Se tiene que:

   diámetro de esfera = $2r$
   altura del cono y del cilindro = $2r$
   radio de la base del cono y del cilindro = r

   Entonces:

$$V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V_{Cono} = \frac{1}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$V_{Cilindro} = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3$$

De donde, si $k=\frac{2}{3}\pi r^3$:

$$V_{Esfera} = 2k$$

$$V_{Cono} = k$$

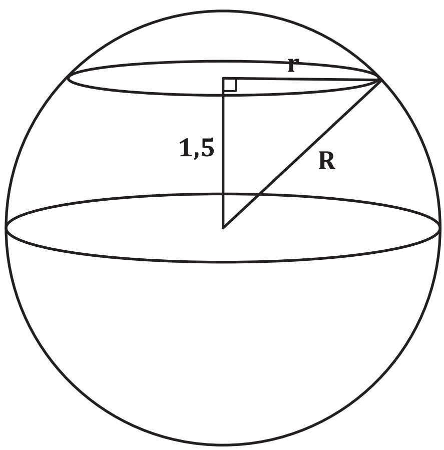
$$V_{Cilindro} = 3k$$

Finalmente:

$$\frac{V_{Cono}}{k} = \frac{V_{Esfera}}{2k} = \frac{V_{Cilindro}}{3k} \Longrightarrow \frac{V_{Cono}}{1} = \frac{V_{Esfera}}{2} = \frac{V_{Cilindro}}{3}$$

7. Calcule la superficie de una esfera si se conoce que un circulo menor de 4π m de circunferencia dista 1,5 m de su centro.

   Solución:



Se tiene que:

$$4\pi = 2\pi r \Longrightarrow r = 2 \text{ m}$$

Además:

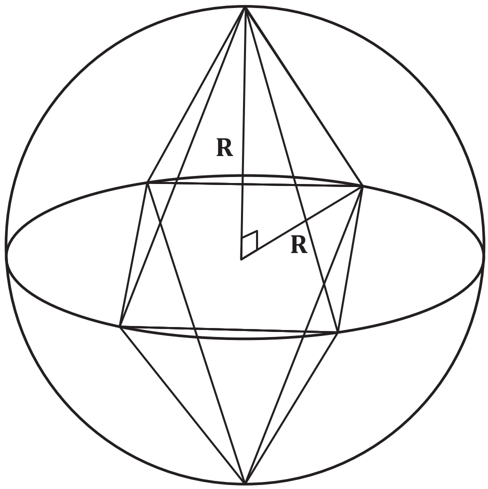
$$R^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 6{,}25$$

De donde:

$$A_{Sup} = 4\pi R^2 = 4\pi(6{,}25)$$
$$A_{Sup} = 25\pi \text{ m}^2$$

8. ¿Cuál es el volumen de un octaedro regular en función del radio R de la esfera circunscrita?

   Solución:



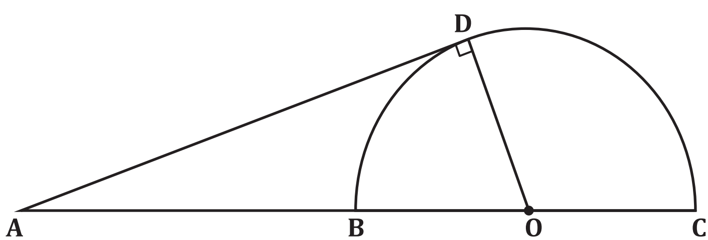
El volumen pedido corresponde al de 2 tetraedros de base cuadrada de $2R$ de diagonal y de altura R.

Es decir:

$$V = 2\left[\frac{1}{3}.\frac{(2R)^2}{2}.R\right]$$

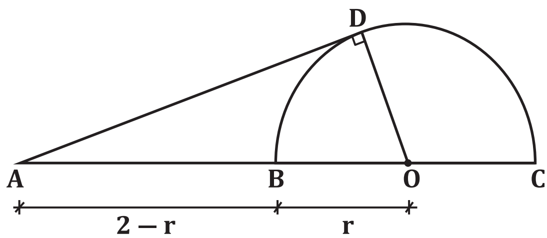
$$V = \frac{4}{3}R^3$$

9. Calcule el radio que debe tener el semicírculo BDC para que el volumen que engendra al girar 360° alrededor de AC sea igual que el volumen que genera el triángulo ADO al girar alrededor del radio OD (AO = 2 m).



Solución:

Se tiene que:



El volumen de la esfera del radio r engendrado por el semicírculo es:

$$\frac{4}{3}\pi(BO)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

El volumen del cono generado por el triángulo ADO es:

$$\frac{1}{3}\pi(AD)^2(OD) = \frac{1}{3}\pi(2^2 - r^2)r$$

Entonces:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi(4r - r^3)$$

$$4r^3 = 4r - r^3 \Longrightarrow 5r^3 = 4r$$

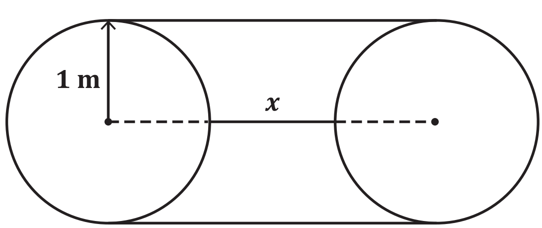
De donde:

$$r^2 = \frac{4}{5} \Longrightarrow r = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,\text{m}$$

10. Determine a qué distancia deben estar separadas 2 esferas iguales de 1 m de radio para que el volumen comprendido entre sus superficies y la superficie lateral cilíndrica que se forma sea $\frac{11\pi}{3}$ m^3.

Solución:

Se tiene que:



x: distancia entre las 2 esferas

Volumen pedido: diferencia entre el volumen del cilindro de radio 1 m y de altura (x + 2) m, y el volumen de 2 hemisferios de 1 m de radio.

Es decir:

$$V = V_C - V_E = \pi(1)^2(x+2) - \frac{4}{3}\pi(1)^3$$

$$\pi(x+2) - \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{3}$$

$$\pi(x+2) = 5\pi$$

$$x = 3 \text{ m}$$

11. Calcule el volumen de una cuña esférica de 18° de abertura si su área total es 26,4 m². Considere $\pi = \frac{22}{7}$.

Solución:

El volumen de la cuña es $\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{360°} x\ 18° = \frac{\pi R^3}{15} = \frac{22R^3}{(7)15}$

Asimismo, el área total de la cuña es:

$$\frac{4\pi R^2}{360°} \times 18° + 2\ \textit{Área semicírculos}$$

$$\frac{\pi R^2}{5} + 2\left[\frac{1}{2}(\pi)R^2\right]$$

$$\pi R^2\left[\frac{1}{5} + 1\right] = \frac{6}{5}\left(\frac{22}{7}\right)R^2$$

Entonces:

$$\frac{6}{5}\left(\frac{22}{7}\right)R^2 = 26{,}4 \Rightarrow R^2 = 7 \Rightarrow R = \sqrt{7}\text{ m}$$

Finalmente:

$$V = \frac{22(\sqrt{7})^3}{7(15)} = \frac{22\sqrt{7}}{15}\text{m}^3$$

12. El peso de una esfera de marfil, de densidad 1,8 g/cm³, aumentaría 52,8 g si el radio aumentara en 1 cm. Considere $\pi = \frac{22}{7}$ y determine su radio.

Solución:

Si R es el radio inicial de la esfera, se cumple que:

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)(1{,}8) + 52{,}8 = \frac{4}{3}\pi(R+1)^3(1{,}8)$$

$$\frac{4}{3}x\frac{22}{7}\left[(R+1)^3 - R^3\right] = \frac{52{,}8}{1{,}8}$$

De donde:

$$\left[(R+1)^3 - R^3\right] = 7$$

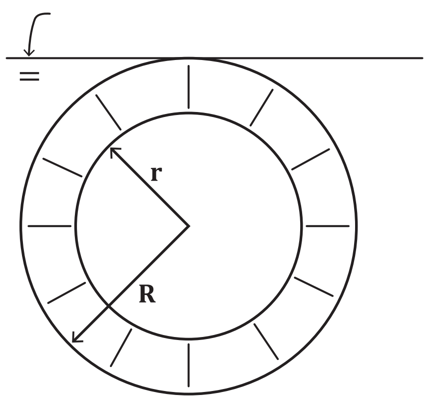
$$3R^2 + 3R + 1 = 7$$

$$3R(R+1) = 6$$

Con lo cual, el radio inicial mide 1 cm.

13. Una esfera metálica hueca, de densidad $\frac{a^3}{a^3-1}$, se va a utilizar como flotador. Determine la relación entre su diámetro interior y su diámetro exterior. Asuma que la parte superior de la esfera está al ras con la superficie del agua.

Solución:



Se sabe que la esfera metálica hueca experimentará un empuje vertical hacia arriba igual al peso del volumen desalojado. Esto es:

$$W = E$$

Se sabe que:

$$W = \rho g V_{metal} = \frac{a^3}{a^3 - 1} g\left[\frac{4}{3}(\pi)(R^3 - r^3)\right]$$

$$E = \rho g V_{esfera} = 1g\left[\frac{4}{3}\pi R^3\right]$$

De donde:

$$\frac{a^3}{a^3 - 1}(R^3 - r^3) = R^3$$

$$\frac{a^3 - 1}{a^3} = \frac{R^3 - r^3}{R^3}$$

$$1 - \frac{1}{a^3} = 1 - \frac{r^3}{R^3}$$

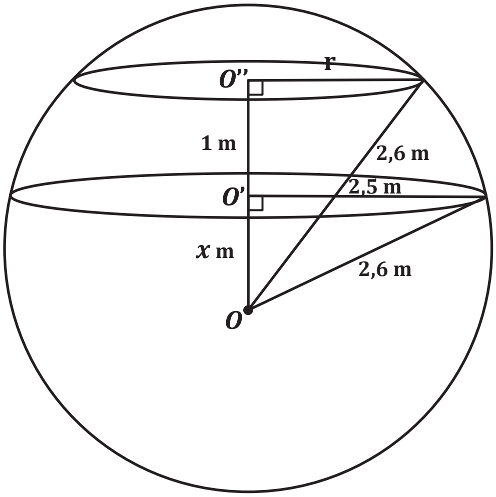
O mejor:

$$a^3 = \frac{R^3}{r^3} \Rightarrow a = \frac{R}{r}$$

14. Calcule la medida del radio de la base menor de un segmento esférico de 2 bases o rebanada esférica conocidos el radio de la base mayor (2,50 m), la altura del segmento (1 m) y el radio de la esfera (2,60 m).

Solución:

Se tiene que:



De la figura:

$$(x+1)^2 + r^2 = 2{,}6^2 \ldots\ldots(1)$$

$$x^2 + 2{,}5^2 = 2{,}6^2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De (2):

$$x^2 = (2{,}6 + 2{,}5)(2{,}6 - 2{,}5) = 0{,}51 \text{ m}$$

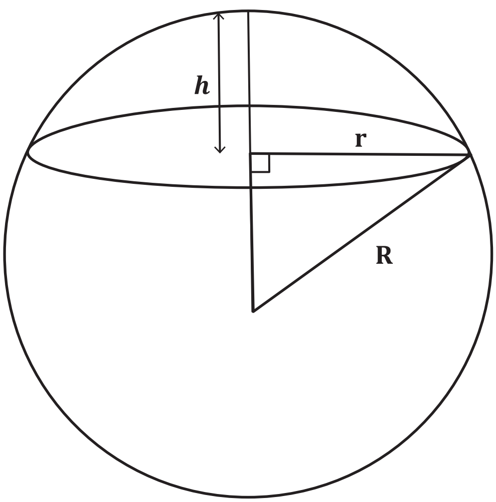
$$x = 0{,}714$$

En (1):

$$1{,}714^2 + r^2 = 2{,}6^2$$

$$r = \sqrt{6{,}76 - 2{,}9378} = 1{,}955 \text{ m}$$

15. Un casquete esférico es la parte de la esfera que se obtiene al cortar esta con un plano.



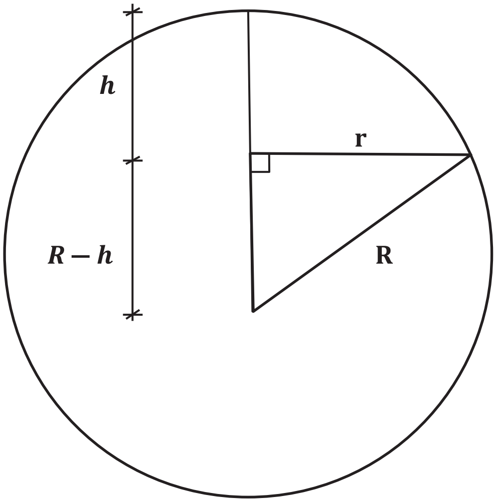
r: radio de la base del casquete

h: altura del casquete

Área: $2\pi Rh$

Determine el área del casquete en función de r y h.

Solución:



A partir de la figura:

$$(R-h)^2 + r^2 = R^2$$

$$R^2 - 2Rh + h^2 + r^2 = R^2$$

De donde:

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}$$

Finalmente:

$$Área = 2\pi\left(\frac{h^2 + r^2}{2h}\right)h$$

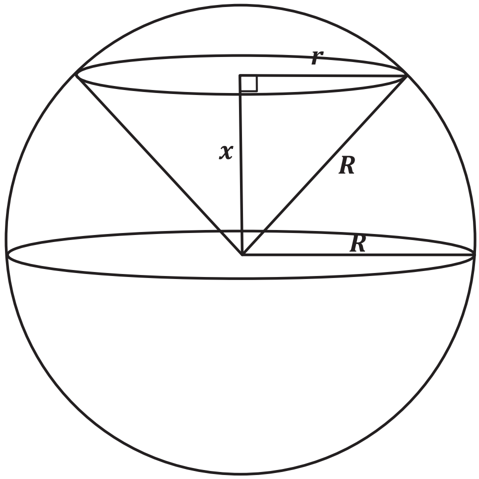
$$Área = \pi(h^2 + r^2)$$

Obsérvese que en el caso de un hemisferio ($h = R y r = R$),

$$Área = \pi(R^2 + R^2) = 2\pi R^2$$

16. Dado un círculo máximo de una esfera de radio R, determine a qué distancia x deberá estar un segundo círculo paralelo a aquel para que el volumen del segmento comprendido entre los 2 esté en la relación $\frac{m}{n}$ con el del cono que tenga por vértice el centro del primer círculo y por base, el segundo círculo.

Solución:



El volumen del cono es:

$$V_C = \frac{1}{3}\pi r^2 x$$

El volumen del segmento es:

$$V_S = \frac{\pi x}{2}\left(\frac{x^2}{3} + r^2 + R^2\right)$$

Además:

$$r^2 = R^2 - x^2$$

Entonces:

$$\frac{V_S}{V_C} = \frac{\frac{\pi x}{2}\left(\frac{x^2}{3} + R^2 - x^2 + R^2\right)}{\frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)x} = \frac{m}{n}$$

De donde:

$$\frac{x^2 + 3R^2 - 3x^2 + 3R^2}{2(R^2 - x^2)x} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{6R^2 - 2x^2}{2R^2 - 2x^2} = \frac{m}{n}$$

$$3nR^2 - nx^2 = mR^2 - mx^2$$
$$(m - n)x^2 = (m - 3n)R^2$$

Finalmente:

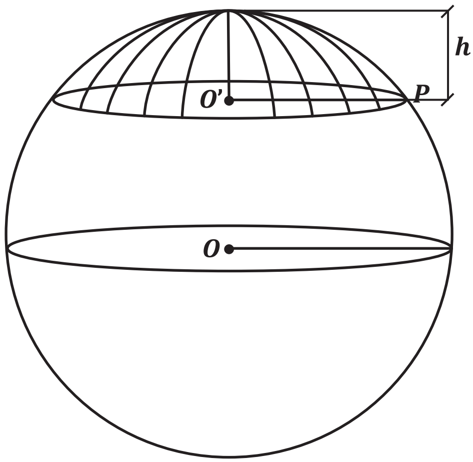
$$x = \sqrt{\frac{m - 3n}{m - n}}R$$

17. El volumen de un segmento esférico de una base, de radio r de la base, de altura h y de radio R de la esfera, viene dado por:

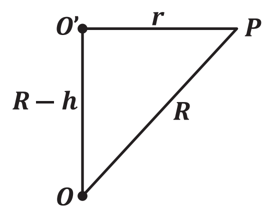
$$V = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + r^2\right)$$

Determine el volumen en función de h y R.

Solución:



Se tiene que:



Del gráfico:

$$r^2 + (R-h)^2 = R^2$$
$$r^2 = R^2 - (R-h)^2$$
$$r^2 = [R + R - h][R - R + h]$$
$$r^2 = (2R - h)(h)$$

Reemplazando en la fórmula dada:

$$V = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + 2Rh - h^2\right)$$

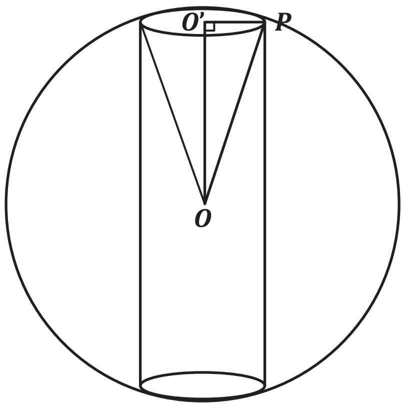
$$V = \frac{\pi h}{2}\left(2Rh - \frac{2h^2}{3}\right)$$

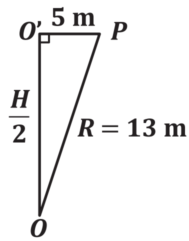
$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

18. Una esfera de madera de 13 m de radio es atravesada por un orificio cilíndrico de revolución de 10 m de diámetro. Calcule el volumen de madera que se ha quitado a la esfera.

Solución:

Se tiene que





El volumen de madera que ha sido retirado corresponde a un cilindro de 5 m de radio y $H = 2(OO')$ de altura, y a 2 segmentos esféricos de bases iguales a las del cilindro y altura equivalente a $h = Radio\ esfera - OO'$.

Entonces:

$$OO' = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ m}$$

$$H = 2(12) = 24 \text{ m}$$

$$h = 13 - 12 = 1 \text{ m}$$

Es decir:

$$V = \pi r^2 H + 2\left[\pi h^2 (R - \frac{h}{3})\right]$$

$$V = \pi(5)^2(24) + 2\left[\pi(1)^2\left(13 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$V = 600\pi + 2(12{,}66\pi) = 625{,}33\pi \text{ m}^3$$

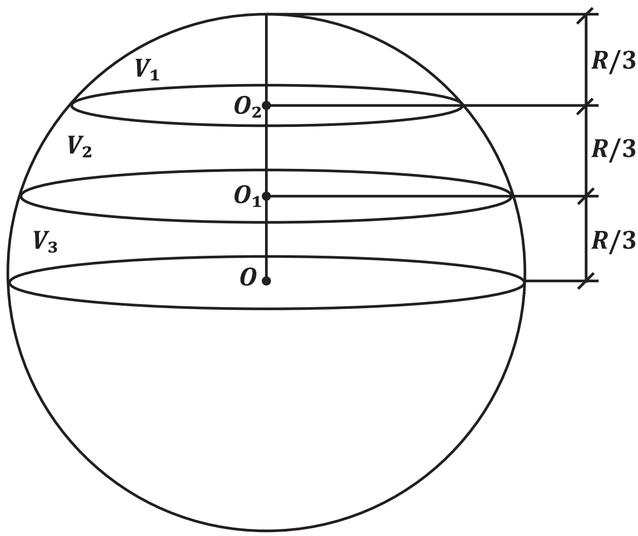
19. El volumen de un segmento esférico de 2 bases o rebanada esférica (de altura *h*, de radio r_1 de la base mayor y de radio r_2 de la base menor) está dado por la fórmula:

$$V = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + r_1{}^2 + r_2{}^2\right)$$

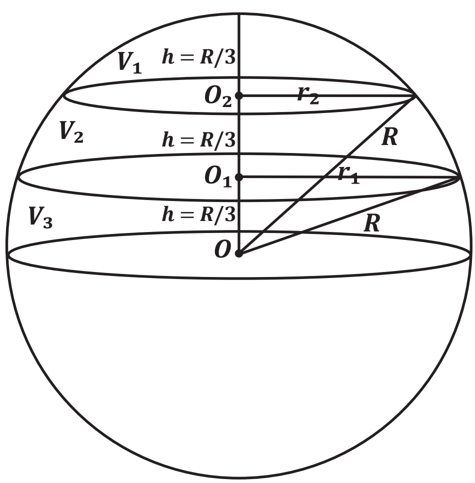
El volumen de un segmento esférico de 1 base (de altura *h* y de radio *R* de la esfera) está dado por la fórmula:

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right)$$

Compruebe que la suma de los volúmenes V_1, V_2 y V_3 mostrados en la siguiente figura corresponde al volumen de la semiesfera.



Solución:



De la figura:

$$r_1{}^2 = R^2 - h^2$$

$$r_2{}^2 = R^2 - (2h)^2$$

Se tiene:

$$V_1 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$V_2 = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + r_1{}^2 + r_2{}^2\right)$$

$$V_2 = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + R^2 - h^2 + R^2 - 4h^2\right)$$

$$V_2 = \frac{\pi h}{2}\left(2R^2 - \frac{14h^2}{3}\right) \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$V_3 = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + R^2 + r_1{}^2\right)$$

$$V_3 = \frac{\pi h}{2}\left(\frac{h^2}{3} + R^2 + R^2 - h^2\right)$$

$$V_3 = \frac{\pi h}{2}\left(2R^2 - \frac{2h^2}{3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

De (1) + (2) + (3):

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_T = \pi h\left(Rh - \frac{h^2}{3}\right) + \pi h\left(R^2 - \frac{7h^2}{3}\right) + \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{3}\right)$$

$$V_T = \pi h\left[Rh - \frac{h^2}{3} + R^2 - \frac{7h^2}{3} + R^2 - \frac{h^2}{3}\right]$$

$$V_T = \pi h[Rh + 2R^2 - 3h^2]$$

Como $h = {}^{R}/_{3}$:

$$V_T = \pi\left(\frac{R}{3}\right)[\frac{R^2}{3} + 2R^2 - \frac{R^2}{3}] = \pi\left(\frac{R}{3}\right)(2R^2) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

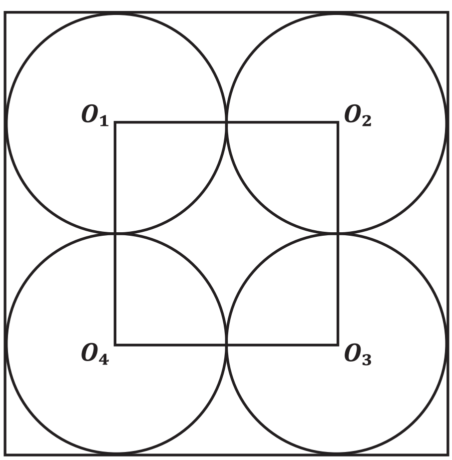
Se comprueba que:

$$V_T = \frac{1}{2}V_{Esfera} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

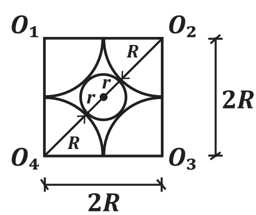
20. Una caja cúbica contiene 8 esferas de radio *R* cada una. En el centro de estas esferas cabe una esfera de menor volumen que el de las anteriores. Calcule el volumen de esta última.

Solución:

La vista frontal de la caja cúbica es:



Calculamos el radio *r* de la esfera contenida en medio de las otras.



$$O_2O_4 = 2R\sqrt{2} = R + 2r + R$$

$$r = \sqrt{2}R - R = (\sqrt{2} - 1)R$$

De donde, el volumen pedido es:

$$\frac{4}{3}\pi[(\sqrt{2}-1)R)]^3 = \frac{4}{3}\pi R^3(2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1)$$

Finalmente:

$$\frac{4}{3}(5\sqrt{2}-7)\pi R^3$$

10.6 Ejercicios propuestos

1. El área total de una esfera es E y el área total del cubo circunscrito es C. Determine la razón $\frac{E}{C}$.

   Rpta.: $^{\pi}/_{6}$.

2. ¿Cuánto mide el radio de una esfera circunscrita a un cubo de 4 m de arista?

   Rpta.: $2\sqrt{3}$ m.

3. Determine el volumen del sector esférico correspondiente a una esfera de radio R si se conoce que la altura de la zona esférica correspondiente es h:

   Rpta.: $\frac{2}{3}\pi R^2 h$.

4. ¿Cuál es el área total de una cuña de 90° que pertenece a una esfera de 2 m de radio?

   Rpta.: 8π m^2.

5. El área de un círculo menor de una esfera es 25π m^2 y el radio de la esfera es 13 m. Calcule la distancia entre los centros del círculo menor y del mayor círculo.

   Rpta.: 12 m.

6. Determine la relación de las áreas de las superficies esféricas de las esferas inscrita y circunscrita en un mismo cilindro circular recto.

   Rpta.: $^{1}/_{2}$.

7. En una esfera de radio R, 2 círculos paralelos en un mismo lado del centro tienen áreas de 9π y 16π m^2. Calcule R si los centros de los círculos distan 1 m entre sí.

   Rpta.: 5 m.

8. Calcule el área total de una cuña esférica si el ángulo diedro mide 72° y el radio de la esfera mide 8 m.

   Rpta.: $115{,}2\pi$ m^2.

9. Determine el área de la zona esférica de 2 m de alto en una esfera inscrita en un cilindro de 4.000 m^2 de área lateral.

   Rpta.: $40\sqrt{10\pi}$ m^2.

10. Calcule el número de tubos circulares con diámetro interior de 1" que transportan el mismo caudal de agua que un tubo de 6" de diámetro interior.

    Rpta.: 36.

11. Con el material fundido de un cilindro de metal de radio r y altura h se fabrican conos de radio $r/2$ y altura $h/4$. Calcule cuántos conos se obtienen.

    Rpta.: 48 conos.

12. Dos esferas, de diámetros de 10 y 14 m, se colocan tangencialmente y sobre un escritorio. Determine la distancia entre los puntos de contacto de las esferas con el escritorio.

    Rpta.: $2\sqrt{35}$ m.

13. ¿En que razón se encuentran las áreas totales de una esfera y del cilindro que circunscribe a aquella?

    Rpta.: $2/3$.

14. En una esfera de radio r se inscribe un cilindro de forma tal que el diámetro del cilindro coincide con el radio de la esfera. Determine el volumen del cilindro.

    Rpta.: $\frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}r^3$.

15. ¿En qué relación están los volúmenes de un cubo y de una esfera que tengan la misma área?

    Rpta.: $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$.

16. En un cono recto, su base tiene un diámetro igual a la longitud de una de sus generatrices. Calcule su volumen si se sabe que la esfera inscrita tiene un radio de 6 m.

    Rpta.: 648π m^3.

17. Un cono circular recto de 10 m de altura esta circunscrito a una esfera de 4 m de radio. Determine el volumen del cono.

    Rpta.: $\frac{800\pi}{3}$ m^3.

18. Se colocan 2 esferas tangentes exteriormente y cuyos radios miden 1 y 3 m. Calcule el volumen del cono recto circunscrito a ambas esferas.

    Rpta.: 81π m^3.

19. Se desea inscribir un prisma triangular regular de máximo volumen dentro de una esfera de radio R. Demuestre que dicho volumen es R^3. Debe aplicar el cálculo diferencial.

20. 4 esferas de radio R son colocadas juntas formando una pila triangular (una de ellas está sobre las otras 3). Determine la altura de la pila.

    Rpta.: $\frac{(2\sqrt{6}+6)}{3}R$.

Referencias

Doroféiev, G., Potapov, M., & Rozov, N. (1973). *Temas selectos de matemáticas elementales*. Moscú: Editorial MIR.

Euclides. (1996). *Elementos*. España: Gredos.

García Ardura, M. (1963). *Problemas gráficos y numéricos de Geometría*. Madrid: del autor.

Lewis, H. (1964). *Geometry: A contemporary course*. EE. UU.: D. Van Nostrand Company, Inc.

Moise, E. E., Downs, J. R., & Floyd, L. (1964). *Geometría moderna*. EE. UU.: Addison-Wesley Iberoamericano.

Pinto Carvalho, P. C. (1993). *Introducción a la geometría espacial*. Perú: IMCA.