los sistemas de ecuaciones lineales y su reducción tabulada

enrique l. doriga s. j.

UNIVERSIDAD DEL PACIFICO DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
Y SU REDUCCION TABULADA

ENRIQUE L. DORIGA S.J.

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y SU REDUCCION TABULADA

LIMA, 19[illegible]

UNIVERSIDAD DEL PACIFICO

Departamento de Matemáticas

Serie Departamento de Matemáticas No. 1

Queda hecho el depósito que marca la ley.

INDICE

PRESENTACION

En muchos casos de investigación suele presentarse la necesidad de resolver un conjunto de ecuaciones lineales; y si bien es cierto que existen diversos procedimientos analíticos más o menos expeditivos, el método expuesto en el presente trabajo, por el Profesor de esta Universidad, P. Enrique López-Dóriga, indudablemente ofrece muchas ventajas sobre los tradicionales, conforme podrá apreciarlo el lector a través de los problemas resueltos.

Confiamos en que a este primer trabajo seguirán *otras publicaciones que contribuyan a la divulgación y desarrollo de la matemática.*

Fernando Bonifaz Stagnaro

Jefe del Departamento

Académico de Matemáticas

I

INTRODUCCION

La resolución de un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas no presenta dificultades teóricas. La teoría matemática, que sirve de fundamento al método de los determinantes, al de sustitución o al de reducción, es clara y simple. Sin embargo, por simple que sea la teoría, la dificultad de resolver realmente un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas crece rápidamente al incrementarse el valor de *n*.

Si el sistema consta de dos ecuaciones tan sólo, el método de sustitución es probablemente el más fácil de emplear. Si n = 3, los determinantes nos ofrecen un camino rápido y seguro. En el caso de que *n* sea igual a 4, o bien mediante determinantes (algo más complicados que en el caso anterior), o bien por reduceión podemos obtener en pocos minutos la solución, supuesto que los coeficientes no sean demasiado complicados.

Pero si *n* sigue creciendo (5, 6, 7, ...), cualquiera de los métodos mencionados resulta fatigoso y sujeto a fáciles equivocaciones, por más que la teoría sigue siendo tan clara y simple como al principio. Por esto la forma más usual hoy en día de resolver un sistema de, v.gr., 7 ecuaciones lineales con 7 incógnitas, es renunciar a resolverlo "manualmente" y enviarlo al centro de computación más cercano para procesar los datos y obtener así los valores de las incógnitas.

Esta salida corta, ciertamente, de raíz la dificultad mencionada, pero plantea frecuentemente otras nuevas. En primer lugar, el costo; después, quien no dispone de computadoras propias debe aguardar un tiempo más o menos largo, pero que rara vez será inferior a las 24 horas, hasta obtener la respuesta. Y si se trata de un lugar (fábrica, mina, campamento) alejado de las ciudades y, por ende, de los centros de computación, el retraso será, no de horas, sino de días (1).

Por todo ello juzgo útil exponer un método práctico, rápido y seguro, que con ayuda de cualquier calculadora manual, por simple que sea, posibilita la resolución de un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, aunque *n* sea igual a 6, 7 u 8, en un tiempo mucho más breve que el necesario para su resolución por los métodos habituales.

El método que voy a exponer en este trabajo es el de Richardson o de reducción en forma tabular, aunque con modificaciones introducidas por mí para hacerlo más intuitivo y menos sujeto a equivocaciones de cálculo.

II

EL METODO DE REDUCCION

Sea el sistema

$$m_1 = a_{1,1}x + a_{1,2}y + \dots + a_{1,n-1}z + a_{1,n}w$$

$$m_2 = a_{2,1}x + a_{2,2}y + \dots + a_{2,n-1}z + a_{2,n}w$$

- -

$$m_{n-1} = a_{n-1,1}x + a_{n-1,2}y + \dots + a_{n-1,n-1}z +$$
$$+ a_{n-1,n}w$$

$$m_n = a_{n,1}x + a_{n,2}y + \dots + a_{n,n-1}z +$$
$$+ a_{n,n}w$$

El método de reducción consiste, como bien sabemos, en igualar los coeficientes de una incógnita y restar después sucesivamente las ecuaciones de dos en dos, de forma que esa incógnita quede eliminada y resulte un sistema de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas. Así, si en el sistema anterior, multiplicamos la primera ecuación por $a_{n,n}$ y la n-sima ecuación por $a_{1,n}$ obtenemos:

$$m_1 a_{n,n} = (a_{1,1}x + a_{1,2}y + \dots + a_{1,n-1}z + $$
$$+ a_{1,n}w) a_{n,n}$$

$$m_n a_{1,n} = (a_{n,1}x + a_{n,2}y + \dots + a_{n,n-1}z + $$
$$+ a_{n,n}w) a_{1,n}$$

Y por simple resta:

$$m_1 a_{n,n} - m_n a_{1,n} = (a_{1,1}x + a_{1,2}y + \dots$$
$$\dots + a_{1,n-1}z) a_{n,n} - (a_{n,1}x + a_{n,2}y + \dots$$
$$\dots + a_{n,n-1}z) a_{1,n}$$

En esta ecuación ha quedado ya eliminada la incógnita w. Procediendo en forma análoga con las ecuaciones restantes obtendríamos al final un sistema de $n - 1$ ecuaciones, que carecerían de la incógnita w.

III

REDUCCION POR TABULACION

Las calculadoras electrónicas, incluso las manuales, nos permiten en la actualidad disponer los cálculos en forma tabular, extraordinariamente simplificadora de todo el proceso. Y con una exactitud inasequible a las antiguas reglas de cálculo.

Veámos el método primeramente en un ejemplo muy sencillo, en el que la tabulación no sería necesaria.

Sea el sistema

(1) $8 = x + 3y + z$

(2) $-3 = 5x - y + 8z$

(3) $10 = -2x - 2y + 7z$

Escribamos los términos independientes y los coeficientes de las incógnitas en la disposición siguiente:

8	1	3	1
-3	5	-1	8
10	-2	-2	7

El primer multiplicador constante (equivalente a $\frac{a_{1,n}}{a_{n,n}}$ del caso general) es ahora $\frac{1}{7}$. Pero como actuará de sustraendo debemos cambiar el signo de este factor: $-\frac{1}{7}$. Este factor hay que multiplicarlo por el término independiente y por cada uno de los coeficientes de la tercera ecuación (excepto por el último, pues ese término quedará eliminado), y sumar ordenada y algébricamente (¡ya hemos cambiado el signo!) los resultados al término independiente y a los coeficientes de la primera ecuación. Obtenemos así:

8	1	3	1
- 1.4285	+ 0.2857	+ 0.2857	
- 3	5	- 1	8
10	- 2	- 2	7

Procedemos igual con la segunda ecuación. El factor constante, cambiado ya de signo, es ahora $-\frac{8}{7}$:

8	1	3	1
- 1.4285	+ 0.2857	+ 0.2857	
- 3	5	- 1	8
-11.4285	+ 2.2857	+ 2.2857	
10	- 2	- 2	7

El nuevo sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas es:

(4) $(8 - 1.4285) = (1 + 0.2857)x + (3 + 0.2857)\,y$

(5) $(-3 - 11.4285) = (5 + 2.2857)x + (-1 +$
$+ 2.2857)y$

Lo disponemos igual que antes, pero efectuando las sumas correspondientes tanto a la segunda ecuación como a la segunda incógnita:

		3.2857	
8	1	3	1
- 1.4285	+0.2857	+0.2857	
-14.4285	7.2857	1.2857	
[illegible]	5	-1	8
-11.4285	+2.2857	+2.2857	
10	-2	-2	7

El nuevo factor es: $-\frac{3.2857}{1.2857}$. Obtenemos, después de sumar:

43.4445	-17.3334	3.2857	
8	1	3	1
-1.4285	+0.2857	+0.2857	
+36.8730	-18.6191		
-14.4285	7.2857	1.2857	
- 3	5	-1	8
-11.4285	+2.2857	+2.2857	
10	-2	-2	7

La ecuación reducida resultante es, por lo tanto:

(6) $43.4445 = -17.3334x$

De la ecuación (6) obtenemos el valor de $x = -2.5064$.

Este valor, llevado a la ecuación (5), nos permite hallar $y = 2.9807$. Llevando, en fin, los valores de x e y a la ecuación (3) obtenemos: $z = 1.5640$.

Comprobemos la exactitud de los resultados sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación (1) y viendo cuál es la diferencia en cuanto al término independiente:

$$x + 3y + z = 8$$

$$-2.5064 + 3 \cdot 2.9807 + 1.5640 = 7.9997.$$

El grado, pues, de exactitud, obtenido operando tan sólo con cuatro decimales, es suficiente para los problemas prácticos ordinarios.

Tomando como ejemplo el mismo sistema, podemos ver la forma práctica de efectuar la tabulación de todos los pasos que hemos visto en detalle. En el cuadro resultante, las líneas horizontales separan las diversas ecuaciones; las verticales separan la última incógnita de cada sistema sucesivo de ecuaciones y centran nuestra atención en sus coeficientes, que son los que debemos tomar para hallar en cada paso el factor constante. Los resultados parciales los escribimos debajo del coeficiente correspondiente a la misma fila y columna y sólo los sumamos a medida que vamos obteniendo las sucesivas ecuaciones reducidas. Como los sumandos necesarios para obtener la ecuación en x serán $n - 1$; los necesarios para obtener los de la ecuación en x e y serán $n - 2$; y así sucesivamente: el espacio inicial entre la primera y la segunda ecuación ha de ser mayor que el que separe a la segunda de la tercera. Y así sucesivamente. Por último, a la derecha de la doble raya vertical y en la fila correspondiente se van escribiendo los diversos factores constantes.

El cuadro final presenta el siguiente aspecto:

t	x	y	z		
$\frac{43.4445}{8}$ -1.4285 $+36.8730$	$\frac{-17.3334}{1}$ $+0.2857$ -18.6191	$\frac{3.2857}{3}$ $+0.2857$	1	$-\frac{1}{7}$	$\cdot\cdot -\frac{3.2857}{1.2857}$
$\frac{-14.4285}{-3}$ -11.4285	$\frac{7.2857}{5}$ $+2.2857$	$\frac{1.2857}{-1}$ $+2.2857$	8	$-\frac{8}{7}$	
10	-2	-2	7		

Las sucesivas ecuaciones reducidas, que nos permiten encontrar el valor de las incógnitas, son:

$$43.4445 = -17.3334x$$

$$-14.4285 = 7.2857x + 1.2857y$$

$$10 = -2x - 2y + 7z$$

Como no raras veces algunos de los coeficientes serán *cero*, puede ocurrir que en algunos de los factores constantes el denominador sea nulo. Esta dificultad se obvia o bien invirtiendo el orden de las ecuaciones del sistema, de forma que no quede como denominador ningún coeficiente nulo; o, más simplemente, reemplazando la ecuación anómala por otra, que sea combinación lineal de ella y de otra cualquiera de las restantes del sistema.

Ejemplo:

Sea el sistema $8 = x + 3y + z$

$$-3 = 5x + 8z$$

$$10 = -2x - 2y$$

t	x	y	z		
8	1	3	1	$-\frac{1}{0}$:	imposible
−3	5	0	8		
10	−2	−2	0		

En lugar del sistema dado, con el que no podemos operar, resolvamos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones y por la suma de la segunda y de la tercera ecuación:

$$8 = x + 3y + z$$

$$-3 = 5x + 8z$$

$$7 = 3x - 2y + 8z$$

En la práctica haremos la sustitución en el mismo cuadro, con el que estámos operando:

VI $5 = x - y - z + w - 2v + n - p$

VII $0 = x + y - 3z - 3w + 5n + 8p$

VIII $4 = 3x + 3w + 2m - 10n + p$

La resolución de este sistema está contenida en el cuadro siguiente, en el que están tabulados todos los pasos intermedios:

Las ecuaciones reducidas, según podemos ver en el cuadro de tabulación, son las siguientes:

I′ $-6525.1562 = -757.9430x$

II′ $20.6707 = 2.4416x + 0.1132y$

III′ $-48.1241 = 2.0392x + 5.4388y + 11.2649z$

IV′ $192.4272 = -6.2444x - 35.2158y - 26.2298z + 12.7403w$

V′ $-10.7745 = 0.0767x + 2.3847y + 1.4616z - 0.8463w + 0.3079v$

VI′ $5.6158 = 1.5648x - 0.8942y - 1.3176z + 1.1412w - 2v + 0.3059m$

VII′ $-32 = -23x + y - 3z - 27w - 16m + 85n$

VIII′ $4 = 3x + 3w + 2m - 10n + p$

De estas ocho ecuaciones deducimos fácilmente los valores de las ocho incógnitas:

$x = 8.6090$	$y = -3.0833$	$z = -4.3418$	$w = 1.8618$
$v = 12.4696$	$m = 21.1879$	$n = 6.4157$	$p = -5.6312$

Grado de exactitud:

En el cuadro siguiente aparecen para cada ecuación los valores del término independiente del sistema dado (t) y los valores que resultan para el término independiente (t') al sustituir en cada ecuación las incógnitas por sus valores

Ecuación	t	t'
I	0	0.0329
II	2	1.9984
III	- 1	- 1.0006
IV	7	6.999
V	- 5	- 4.999
VI	5	5.0036
VII	0	- 0.0054
VIII	4	4

Tiempo empleado en resolver el sistema y comprobar si los valores obtenidos satisfacían una cualquiera de las ecuaciones: *hora y media.*

V

LA REDUCCION POR TABULACION EN ECONOMETRIA

La reducción por tabulación encuentra un campo amplio de aplicación en diversos problemas científicos y técnicos. Así, por no citar sino un ejemplo, facilita el cálculo de los circuitos eléctricos de corriente continua, al permitir resolver rápidamente los sistemas de seis, ocho o diez ecuaciones lineales (con muchos coeficientes nulos, por lo demás), resultantes de la aplicación repetida de las leyes de Kirchhoff (2).

También en la econometría puede aplicarse fructuosamente este método, como vamos a mostrar ahora. Y para poder valorar su confiabilidad vamos a escoger un ejemplo (aunque no el que queríamos, por las razones aducidas en la nota primera), cuyos resultados han sido procesados en el centro IBM de Lima (3). Así podremos apreciar mejor el grado de exactitud (o inexactitud), que ofrece el método expuesto en estas páginas.

A partir de los datos de la economía peruana en el período 1950/1972 se desea calcular el impuesto a las utilidades del i-ésimo año (Tu_i) en función de las utilidades en ese mismo año (U_i); de un término de perturbación (e_i); y de dos variables ficticias (A y Au_i), que modifican el intercepto y la pendiente de la función a partir de 1970, debido a la promulgación de diversas leyes (v. gr., las de fomento sectorial), que han podido influir en el nivel de impuestos recaudados.

La función impositiva será de la forma:

$$Tu_i = a + bU_i + cA + dAu_i + e_i$$

Por las condiciones del planteamiento

$A = 0$ para $0 < i < 19$; $A = 1$ para $i > 20$;

a, *b*, *c* y *d* son los coeficientes de regresión por calcular.

Utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios obtenemos las siguientes ecuaciones normales:

$$\sum_{i=0}^{22} Tu_i = an + b \sum_{i=0}^{22} u_i + c \sum_{i=20}^{22} (1) + d \sum_{i=20}^{22} u_i$$

$$\sum_{i=0}^{22} u_i Tu_i = a \sum_{i=0}^{22} u_i + b \sum_{i=0}^{22} u_i^2 + c \sum_{i=20}^{22} u_i + d \sum_{i=20}^{22} u_i^2$$

$$\sum_{i=20}^{22} Tu_i = a \sum_{i=20}^{22} (1) + b \sum_{i=20}^{22} u_i + c \sum_{i=20}^{22} (1) + d \sum_{i=20}^{22} u_i$$

$$\sum_{i=20}^{22} u_i Tu_i = a \sum_{i=20}^{22} u_i + b \sum_{i=20}^{22} u_i^2 + c \sum_{i=20}^{22} u_i + d \sum_{i=20}^{22} u_i^2$$

Dando valores numéricos a las sumatorias, de acuerdo con la serie de datos, que figuran en el trabajo citado en la nota tres, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$80\,193 = 23a + 312\,675b + 3c + 122\,729d$$

$$1\,945\,617\,854 = 312\,675a + 8'027\,511\,249b + $$
$$+ 122\,729c + 5\,027\,126\,409d$$

$$28\,915 = 3a + 122\,729b + 3c + 122\,729d$$

$$1\,182\,679\,633 = 122\,729a + 5\,027\,126\,409b +$$
$$+ 122\,729c + 5\,027\,126\,409d$$

Resolvemos este sistema mediante el método de reducción por tabulación, conforme aparece en el siguiente cuadro:

Las ecuaciones reducidas son:

$$2978.50808 = 7.97505a$$

$$762\,938\,221 = 189\,946a + 3\,000\,384\,840b$$

$$41.82736 = 0.00377a + 0.00377c$$

$$1\,182\,679\,633 = 122\,729a + 5\,027\,126\,409b + $$
$$+ 122\,729c + 5\,027\,126\,409d$$

De ellas obtenemos los siguientes valores:

$a = 373.47830$

$b = 0.23064$

$c = 10\,721.31215$

$d = -\ 0.26624$

Por lo tanto la función buscada es:

$$Tu_i = 373.4783 + 0.23064U_i + 10721.31215A -$$
$$- 0.26624Au_i + e_i$$

Para concluir comparemos estos resultados con los proporcionados por IBM:

$a_{IBM} = 373.625$

$b_{IBM} = 0.23063$

$c_{IBM} = 10\ 724.227$

$d_{IBM} = -\ 0.26633$

Dado que en ambos casos se trata de resultados no exactos sino solamente aproximados, puede resultar interesante comparar el nivel de exactitud conseguido con cada uno de los dos procedimientos.

Sean t_o el valor original del término independiente de cada ecuación, t_{IBM} el valor del término independiente resultante al sustituir las incógnitas por los valores proporcionados por IBM; t_{rt} el valor del término independiente resultante al sustituir las incógnitas por los valores obtenidos por nosotros mediante la reducción tabulada. Obtenemos el siguiente cuadro:

Ecuación	t_o	t_{IBM}	t_{rt}	$t_o - t_{IBM}$	$t_o - t_{rt}$
I	80193	80191.87536	80193.93039	+1.12464	- 0.93039
II	1945617854	1945507141.205	1945636306	+110713	- 18452
III	28915	28912.13	28915.21895	+2.87	- 0.21895
IV	1182679633	1182559811.306	1182686837	+119822	- 7204

Queda, pues, comprobada la utilidad práctica de un método que en menos tiempo (4) y con menos costo nos ha permitido llegar a unos resultados bastante más aproximados que si hubiéramos enviado los datos a procesarlos en cualquier centro de computación.

Notas

(1) La dificultad es real, incluso cuando existe un centro de computación en la misma localidad. Para la última parte de este artículo se había preparado como aplicación práctica del método la determinación de los coeficientes del sistema de ecuaciones, que sirve para calcular la ley de variación de las importaciones peruanas en los últimos 20 años. Se quería comparar los resultados obtenidos por el método expuesto en este artículo con los obtenidos en un centro de computación. Después de tres semanas de inútil espera hubo que sustituirlo por otro ejemplo, más sencillo y menos interesante, pero del que ya se tenían los resultados.

(2) Cf. J.I. Martín Artajo y J. García del Valle, *Un método práctico para el cálculo y reducción de circuitos eléctricos* (Madrid, I.C.A.I., 1953), 16 pág.

(3) Tomo el ejemplo de Carlos A. Boloña, *Extensiones al modelo lineal general o de regresión múltiple: El caso de las variables ficticias y los polinomios segmentados* (Lima, Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico, 1975), pág. 12-14. Agradezco al profesor C. A. Boloña la ayuda que me ha prestado para redactar esta parte del trabajo.

(4) En resolver el sistema dado, comprobar las soluciones y compararlas con las proporcionadas por IBM he empleado algo menos de 45 minutos. Puede parecer mucho para un sistema de sólo cuatro ecuaciones; pero operar con números enteros de diez dígitos y mantener cin-

co cifras decimales (las mismas que IBM) es siempre lento si se quieren evitar los errores.

Los sistemas de ecuaciones lineales y su reducción tabulada se acabó de imprimir en el Departamento de Publicaciones de la Universidad del Pacífico, Av. Salaverry 2020, Jesús María, Lima, el mes de mayo de 1977. Se encargó de la composición la señorita Alejandra Canella Ortíz de Zevallos.