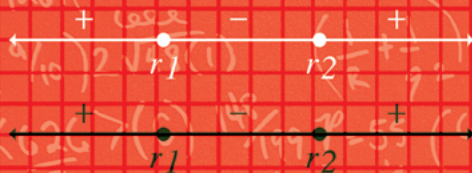


PROBLEMAS DE PRECÁLCULO: CONCEPTOS BÁSICOS

JAVIER ZÚÑIGA

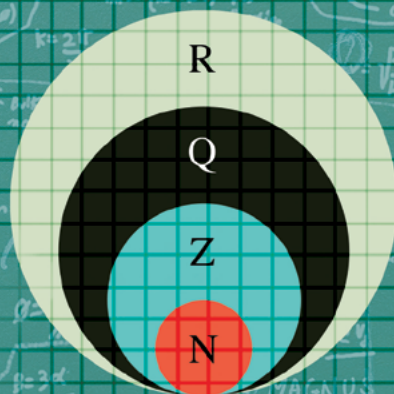
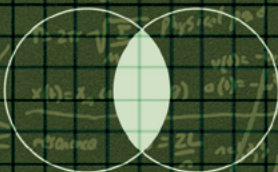
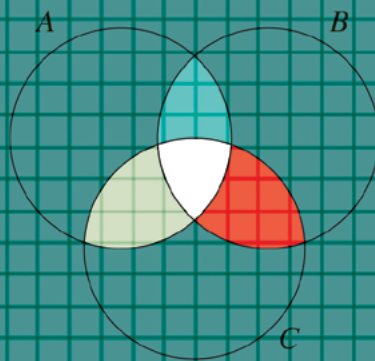
100

Apuntes de Estudio



$$[|-1|, \lceil \sqrt{2} \rceil] = \{1\}$$

U



Fondo
Editorial



UNIVERSIDAD
DEL PACÍFICO

PROBLEMAS DE PRECÁLCULO: CONCEPTOS BÁSICOS

JAVIER ZÚÑIGA

100

Apuntes de Estudio

© Javier Zúñiga, 2021

De esta edición:

© Universidad del Pacífico
Jr. Gral. Luis Sánchez Cerro 2141
Lima 15072, Perú

PROBLEMAS DE PRECÁLCULO: CONCEPTOS BÁSICOS

Javier Zúñiga

1.^a edición: diciembre de 2021

Diseño de la carátula: Ícono Comunicadores

ISBN e-book: 978-9972-57-485-6

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: 2021-14337

doi: <http://dx.doi.org/10.21678/978-9972-57-485-6>

Disponible en fondoeditorial.up.edu.pe

BUP

Zúñiga, Javier

Problemas de precálculo: conceptos básicos / Javier Zúñiga. -- 1a edición. -- Lima: Universidad del Pacífico, 2021.

149 p. -- (Apuntes de Estudio ; 100)

1. Cálculo--Problemas, ejercicios, etc.
2. Matemáticas--Problemas, ejercicios, etc.
- I. Universidad del Pacífico (Lima)

515 (SCDD)

La Universidad del Pacífico no se solidariza necesariamente con el contenido de los trabajos que publica. Prohibida la reproducción total o parcial de este documento por cualquier medio sin permiso de la Universidad del Pacífico.

Derechos reservados conforme a Ley.

Contenido

Prólogo	3
Nomenclatura	4
1. Argumentos y Cuantificadores	7
Argumentos	7
Cuantificadores	8
Problemas	10
2. Conjuntos y Relaciones	23
Conjuntos	23
Relaciones	25
Problemas	27
3. Números Reales	39
Axiomas algebraicos	39
Axiomas de orden	41
Axioma de completitud	41
Máximo entero	43
Problemas	43

4.	Intervalos y Valor Absoluto	51
	Intervalos	51
	Valor absoluto	53
	Problemas	54
5.	Soluciones	69
	Argumentos y Cuantificadores	69
	Conjuntos y Relaciones	91
	Números Reales	105
	Intervalos y Valor Absoluto	117
	Referencias	149

Prólogo

El objetivo de esta publicación es contribuir a la preparación de los alumnos del curso de Matemáticas I de la Universidad del Pacífico para sus evaluaciones. Por ello, este texto se concentra en la primera unidad didáctica del curso y recopila los enunciados y soluciones de los problemas de evaluaciones pasadas, los cuales han sido agrupados en función de los temas que se dictan en cada clase y del orden cronológico. Los enunciados y las soluciones han sido separados para que el alumno pueda intentar resolverlos por su cuenta antes de leer la solución. Cada capítulo contiene un pequeño resumen de la teoría necesaria para resolver los problemas propuestos. El último capítulo contiene las soluciones a todos los problemas planteados.

Esta publicación complementa el texto (Zúñiga, 2013) y las clases del curso. Todas las definiciones y notaciones usadas se encuentran en el texto mencionado anteriormente. Otras fuentes que pueden ser consultadas son (Pugh, 2002), (Halmos, 2017), (Cotrina, 2015), (Stewart, Redlin, & Watson, 2011), (Sullivan, 1997) y (Sydsaeter & Hammond, 1996).

Deseo agradecer al equipo de profesores y jefes de práctica que han contribuido durante muchos años en la elaboración de evaluaciones, y en mantener la excelencia educativa de los cursos de primeros años de matemáticas de esta casa de estudios. También deseo agradecer a Elmo Calatayud por el apoyo en la recopilación y edición de este texto.

Lima, diciembre de 2021

Nomenclatura

Argumentos y Cuantificadores

$\neg p$	Negación de la proposición p
$p \wedge q$	Conjunción: p y q
$p \vee q$	Disyunción: p o q
$p \vee\!\!\!\vee q$	Disyunción exclusiva: O p o q
$p \rightarrow q$	Condicional: Si p entonces q
$p \leftrightarrow q$	Bicondicional: p si y solo si q
$p \equiv q$	Equivalencia: p es equivalente a q
$P_1, \dots, P_n \vdash Q$	Argumento compuesto por las premisas $P_1, \dots, P_n$ y la conclusión Q
$\forall x$	Para todo x
$\exists x$	Existe al menos un x
$\exists! x$	Existe solo un x

Conjuntos y Relaciones

$A \cup B$	Unión de A y B
$A \cap B$	Intersección de A y B
A^c	Complemento de A
$A \Delta B$	Diferencia simétrica de A y B
$A - B$	Diferencia de A y B
$\emptyset$	Conjunto vacío
$x \in A$	x pertenece al conjunto A
$A \subset B$	A se encuentra incluido en B
$A \subsetneq B$	A se encuentra estrictamente incluido en B
$n(A)$	Número de elementos de A
$\text{dom } R$	Dominio de la relación R
$\text{ran } R$	Rango de la relación R

Números Reales

$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales
$\max\{a, b\}$	Máximo entre los números reales a y b
$\min\{a, b\}$	Mínimo entre los números reales a y b
$\sup A$	Supremo del conjunto A
$\inf A$	Ínfimo del conjunto A
$\llbracket x \rrbracket$	Máximo entero de x

Intervalos y Valor Absoluto

$[a, b]$	Intervalo cerrado desde a hasta b
$]a, b[$	Intervalo abierto desde a hasta b
$ x $	Valor absoluto de x

1

Argumentos y Cuantificadores

Argumentos

Un **argumento** es una lista de proposiciones $P_1, P_2, \dots, P_n$ llamadas **premisas** y una proposición Q llamada **conclusión**. Un argumento se denota simbólicamente por

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q.$$

La nomenclatura utilizada anteriormente es un ejemplo del **lenguaje lógico formal**. En los ejercicios usualmente se necesita traducir un enunciado escrito en la forma de un párrafo o **lenguaje coloquial** al lenguaje lógico formal o viceversa. Para ello es necesario establecer un **diccionario** al inicio del ejercicio que permita esta traducción. Por ejemplo, el siguiente es un argumento en lenguaje coloquial:

*Si hoy llueve, el piso se moja. Hoy tuvimos
lluvia. Por lo tanto, el piso está mojado.*

Si se establece el siguiente diccionario:

p = “Hoy llueve”

q = “el piso está mojado”

Entonces, la traducción del argumento al lenguaje lógico formal será

$$p \rightarrow q, p \vdash q.$$

Un argumento es **válido** cuando la veracidad de las premisas implica la veracidad de la conclusión. Es posible entonces usar herramientas de lógica proposicional para demostrar la validez o invalidez de un argumento. Una de dichas herramientas es el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *El argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ es válido si y solo si la proposición*

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

es una tautología.

Es importante resaltar que los argumentos pueden ser válidos o inválidos, mas no verdaderos o falsos, dado que un argumento es una lista de proposiciones y no una proposición en sí. Parte de esta confusión se puede dar debido a la proposición en el teorema anterior que conecta estos conceptos.

Cuantificadores

Una **variable** es un símbolo que representa un miembro no especificado de una colección. La variable también es llamada “incógnita” y usualmente se denota por letras como “ x ”. La colección a la cual pertenece dicha variable es llamada **conjunto universal** y sirve como contexto del ejercicio que se está estudiando. Usaremos **predicados** sobre la variable x , como por ejemplo propiedades de x . Con frecuencia se usa la notación $P(x)$ para señalar que x tiene la propiedad especificada por P . El predicado $P(x)$ *no es una proposición*, ya que x no está especificada, y por ello $P(x)$ no puede ser verdadero o falso hasta que se especifique el valor de x .

Los cuantificadores nos permiten construir una proposición usando variables y predicados. El **cuantificador universal** se define como la expresión “Para todo ...” y se denota por $\forall$. El **cuantificador existencial** se define como la expresión “Existe ...” y se denota por $\exists$. En términos de proposiciones tenemos

$$\begin{aligned} \forall x \in C, [P(x)] &\equiv P(a) \text{ para todo } a \text{ en } C. \\ \exists x \in C, [P(x)] &\equiv P(a) \text{ para algún } a \text{ específico de } C. \end{aligned}$$

Si no es cierto que todos los miembros de una colección cumplen cierta propiedad, entonces debe ser cierto que al menos uno de ellos no cumple dicha propiedad y viceversa. Esto quiere decir que los cuantificadores universal y existencial son opuestos el uno del otro. Esta idea se formaliza en la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Para toda colección C y predicado P tenemos*

$$\neg(\forall x \in C, [P(x)]) \equiv \exists x \in C, [\neg P(x)],$$

$$\neg(\exists x \in C, [P(x)]) \equiv \forall x \in C, [\neg P(x)].$$

En ocasiones es necesario determinar si todo miembro de una colección tiene cierta propiedad. En términos de lógica formal, se pide demostrar que

$$\forall x \in C, [P(x)].$$

Cuando esto no es cierto, la proposición anterior dice que se debe encontrar por lo menos un elemento $a \in C$ tal que $\neg P(a)$. Dicho elemento que prueba la falsedad del enunciado original es llamado **contraejemplo**.

Cuando se quiere decir que **existe un único** $x \in C$ que satisface la propiedad P , se escribe entonces

$$\exists! x \in C, [P(x)].$$

El cuantificador $\exists!$ es llamado **cuantificador existencial único**. El opuesto $\neg\exists!$ significa que no existe un único elemento con cierta propiedad; eso quiere decir que existen al menos dos elementos o ningún elemento con dicha propiedad.

Es posible considerar proposiciones que requieren de más de un cuantificador, y por lo tanto más de una variable. En el caso de dos cuantificadores, las opciones posibles y sus significados son los siguientes:

- $\forall x \in U, \forall y \in V, [P(x, y)]$: Para todo elemento de U y todo elemento de V , se cumple la propiedad P .
- $\forall x \in U, \exists y \in V, [P(x, y)]$: Para todo elemento de U existe al menos un elemento de V que cumple la propiedad P .
- $\exists x \in U, \forall y \in V, [P(x, y)]$: Existe al menos un elemento de U tal que para todo elemento de V se cumple la propiedad P .
- $\exists x \in U, \exists y \in V, [P(x, y)]$: Existe al menos un elemento de U para el cual existe al menos un elemento de V que cumple la propiedad P .

La negación de estas proposiciones sigue un patrón similar al visto anteriormente. Por ejemplo

$$\neg(\forall x \in U, \exists y \in V, [P(x, y)]) \equiv \exists x \in U, \forall y \in V, [\neg P(x, y)]$$

De forma similar se puede deducir la negación del resto de casos.

El tratamiento para proposiciones con más de dos cuantificadores es una extensión natural de los ejemplos vistos anteriormente, incluidas las negaciones.

Problemas

1. (2012-I PC1-1) Dado el siguiente cuadro:

Nombres	Carrera Univ.	Pasatiempos
Miguel	Arquitectura	Cine, Danza
Josue	Derecho	Cine, Natación
Nicole	Medicina	Cine, Danza, Natación
Erick	Literatura	Cine, Danza, Natación
Karín	Física	Cine

denotamos por A el conjunto de personas en la primera columna, B denota el conjunto de carreras universitarias en la segunda columna, y C denota el conjunto de pasatiempos en la tercera columna, donde la lectura será, como ejemplo, “Miguel estudia arquitectura y tiene como pasatiempos cine y danza”. Sea $P(x, y) = “x$ está en la carrera universitaria $y”$ y $Q(x, z) = “x$ tiene z como pasatiempo”.

- a) Traduzca el siguiente enunciado al lenguaje coloquial (es decir, en palabras y sin mencionar variables) y determine si es verdadero o falso:

$$\forall x \in A, \exists! y \in B, [P(x, y)]$$

- b) Enuncie el opuesto de la siguiente proposición en el lenguaje de lógica formal. ¿Dicho opuesto es verdadero o falso?

$$\forall x \in A, \exists z \in C, [Q(x, z)]$$

- c) Traduzca al lenguaje de lógica formal el siguiente enunciado: “Existe una única persona en la lista que tiene exactamente un pasatiempo”.

2. (2012-I PC1-3) En el siguiente párrafo se tiene un argumento:

“Las empresas que exportan y abastecen al mercado interno se beneficiarán si el dólar incrementa su valor. Si dichas empresas no se benefician, entonces el Estado no recaudará suficientes impuestos. Sin embargo, el MEF ha proyectado que este año o el dólar subirá de valor o el Estado recaudará suficientes impuestos. Por lo tanto, las empresas que exportan y abastecen al mercado interno se beneficiarán.”

- a) Use la notación introducida en clase para expresar el argumento en su forma lógica formal estableciendo primero un diccionario.

b) Determine si el argumento es válido o no. Justifique su respuesta.

3. (2013-0 PC1-1)

- a) Indique la definición de disyunción exclusiva.
- b) ¿Cuál es la relación entre disyunción exclusiva y bicondicional?
- c) Escriba la negación de la siguiente proposición sin negar proposiciones compuestas: *“Estas vacaciones viajo a New York si y solo si saco excelentes notas en este ciclo y no me matriculo en el ciclo de verano”*.

4. (2013-0 PC1-4) A continuación se tienen dos proposiciones.

- *“Si las elecciones son mañana y hay empate técnico, entonces se convoca a nuevas elecciones”*.
- *“Si no se convoca a nuevas elecciones, entonces no hay empate técnico o las elecciones no son mañana”*.

- a) Use la notación introducida en clase para expresar ambas proposiciones en su forma lógico formal estableciendo primero un diccionario.
- b) Justifique si las proposiciones dadas son o no equivalentes.

5. (2013-0 PC1-5) En el siguiente párrafo se tiene un argumento:

“Senamhi aconseja que si las personas de la región Junín usan bloqueador no sufrirán las consecuencias de la alta radiación que se registra en la zona. Una encuesta muestra que algunas personas de avanzada edad de la región usan bloqueador. Por lo tanto, no todas las personas de la región sufrirán las consecuencias de la radiación.”

- a) Use la notación introducida en clase para expresar el argumento en su forma lógico formal estableciendo primero un diccionario.
- b) Determine si el argumento es válido. Justifique su respuesta.

6. (2013-I PC1-3)

- a) Brinde la definición de inferencia.

- b) Indique la definición de los cuantificadores universal y existencial.
- c) ¿Cuándo dos proposiciones P, Q son equivalentes?
- d) Niegue los siguientes enunciados sin hacer uso de la negación de proposiciones compuestas ni condicionales.
- i) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{R}, [(M > 0 \wedge N > 0 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x > N) \longrightarrow f(x) > M]$.
- ii) $\exists x \in \mathbb{R}, [x \leq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x \neq 0]$.

7. (2013-I PC1-5) En el siguiente párrafo se tiene un argumento: “*En la premiación del Oscar, si un participante es despistado, entonces no es entretenido. Si un participante gana el Oscar, entonces no habla ininterrumpidamente. Todos los que no resultan entretenidos hablan ininterrumpidamente. En conclusión, existe una persona en la premiación que es despistada y recibe el Oscar*”.

- a) Use la notación introducida en clase para expresar el siguiente argumento en su forma lógica formal estableciendo primero un diccionario
- b) Determine si el argumento es válido o no. Justifique su respuesta.

8. (2013-I EP-2)

- a) Sea U el conjunto de funciones que se estudian en Mate 2, $P(f)$ = “ f es diferenciable” y $Q(f)$ = “ f es continua”. En Mate 2 se demuestra que

$$\forall f \in U, [P(f) \longrightarrow Q(f)]$$

Encuentre una expresión equivalente a la negación del recíproco sin usar condicionales y sin negar proposiciones compuestas. Expresé dicha proposición en lenguaje coloquial.

- b) Demuestre que el argumento

$$r \vee s, p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg r, p \rightarrow \neg q \vdash s \vee t$$

es válido usando inferencias y justificando cada paso (otros métodos no tendrán puntaje). Sugerencia: las siguientes inferencias pueden ser útiles.

<i>Modus ponens</i>	<i>Reducción al absurdo</i>	<i>Silogismo disyuntivo</i>	<i>Adición</i>
$\frac{p}{p \rightarrow q} \quad \therefore q$	$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \quad \therefore \neg p$	$\frac{p \vee q}{\neg p} \quad \therefore q$	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$

9. (2013-II PC1-4) Juan entra a una sala de chat por Internet, donde establece contacto con un grupo de tres amigas y desea conocer quién o quiénes tienen ojos azules.

Gaby dice: Si Sandra no tiene ojos azules, entonces Pathy tampoco.

Pathy dice: Yo tengo ojos azules y solo una de las otras dos tiene ojos azules.

Pero Sandra no dice nada. Responda en cada caso:

- Si se sabe que las dos dicen la verdad, ¿quién o quiénes de ellas tienen ojos azules y quién o quiénes no?
- Si se sabe que las dos mienten, ¿quién o quiénes de ellas tienen ojos azules y quién o quiénes no?
- Si solo Sandra tiene ojos azules, ¿con seguridad, alguien miente?

10. (2013-II PC1-5) Considere el siguiente argumento:

“Si ocurre una baja en los precios del petróleo, todos los economistas del país reducirán su estimación de la tasa de interés o aumentarán su estimación de la tasa de crecimiento. Los precios del petróleo no bajan si y solo si algunos economistas del país reducen su estimación de la tasa de interés. Se sabe que este año ocurrirá una baja en los precios del petróleo. Por lo tanto, algunos economistas aumentarán su estimación de la tasa de crecimiento”.

- Traduzca el argumento al lenguaje de lógica formal estableciendo primero un diccionario.
- Determine si el argumento es válido o no. Justifique su respuesta.

11. (2014-0 PC1-1)

- Indique la definición de proposición bicondicional.
- Brinde la definición de argumento válido.
- Complete las siguientes inferencias con $p \wedge s$, $\neg s \wedge p$, s o $\neg q$.

$\neg q \leftrightarrow p$ $\neg q \leftrightarrow r$ $\neg r \leftrightarrow s \vee p$ $\therefore \underline{\hspace{2cm}}$	$p \vee s$ $s \rightarrow p$ $\therefore \underline{\hspace{2cm}}$
--	---

- d) Escriba la negación de la siguiente proposición sin negar proposiciones compuestas:

“Mañana hago deporte, si me levanto temprano y no voy a la playa”.

12. (2014-0 PC1-3) Considere el siguiente argumento:

“En la premiación del Balón de Oro realizada en el Kongresshaus de Zürich, todo futbolista en la premiación que cumple con las reglas dadas por la FIFA gana el Balón de Oro. Todo futbolista que no cumple con las reglas dadas por la FIFA no es preferido por Joseph Blatter. Se sabe que algunos futbolistas en la premiación son preferidos por Joseph Blatter. Por lo tanto, algunos futbolistas ganan el Balón de Oro”.

- a) Traduzca el argumento al lenguaje de lógica formal estableciendo primero un diccionario.
- b) Determine si el argumento es válido o no. Justifique su respuesta.

13. (2014-0 PC1-4)

- b) ¿Es el siguiente argumento válido? Justifique su respuesta usando lógica formal.
- “Si apruebo la PC1 de Mate I, entonces estudié con esmero o mi madre ha dejado una ofrenda a San Judas Tadeo. En esta ocasión mi madre no ha dejado una ofrenda a San Judas Tadeo; por lo tanto, estudié con esmero”.*

14. (2014-0 EP-1) Responda justificando su respuesta.

- a) Analizar la validez del siguiente argumento:

Todo aquel que estime a Santo Tomás no estima a Kant. Todos estiman a Kant o a Russell. Algunos no estiman a Russell. En consecuencia, algunos no estiman a Santo Tomás. Nota: establezca primero un diccionario.

15. (2014-I PC1-3) Considere el siguiente argumento:

“Si existe un trabajador del Poder Judicial que acata la huelga, entonces existe un reportero que entrevista al presidente y le hace preguntas difíciles. Ningún reportero entrevista al presidente. Por lo tanto, existe un trabajador del Poder Judicial que no acata la huelga”.

- a) Traduzca el argumento al lenguaje de lógica formal elaborando primero un diccionario y usando cuantificadores.
- b) Determine si el argumento es válido o no. Justifique su respuesta.
16. (2014-I PC1-4) Sean p, q y r proposiciones simples. Definimos la proposición $T(p, q, r)$ = “Exactamente una de las proposiciones p, q o r es verdadera”.
- a) Calcule la tabla de verdad de $T(p, q, r)$.
- b) Encuentre una proposición compuesta equivalente a $T(p, q, r)$, pero expresada en términos de p, q, r y conectores lógicos conocidos.
- c) Pruebe que “ $T(a \vee b, a \wedge b, a \rightarrow b) \vdash \neg b$ ” es un argumento válido, donde a y b son proposiciones simples.
17. (2014-II PC1-1)
- a) ¿Es el siguiente argumento válido? Justifique usando lógica formal.
*“Las inversiones se perjudican si Argentina entra en estado de **cese de pagos**, si las inversiones no se perjudican entonces baja el desempleo; sin embargo, el gobierno argentino asegura que o Argentina entra en estado de **cese de pagos** o no baja el desempleo. Por lo tanto, las inversiones se perjudican”.*
18. (2014-II PC1-2)
- c) Niegue el siguiente enunciado sin hacer uso de la negación de proposiciones compuestas ni condicionales: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $$(\varepsilon > 0 \wedge m > n_0 \wedge n > n_0) \rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$
19. (2014-II EP-1) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos.
- a) El argumento $p \vee q, q \vee r \vdash p \vee r$ es válido.

20. (2015-0 PC1-3)

a) Verificar la validez o invalidez del siguiente argumento:

“Si el delfín es un mamífero, entonces toma oxígeno del aire. Si toma oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. El delfín es un mamífero y vive en el océano. Por lo tanto, el delfín no necesita branquias”.

21. (2015-I PC1-1)

b) Sea W el conjunto formado por todas las proposiciones (simples y compuestas). Se define la función $B : W \rightarrow \{0, 1\}$ por la tabla adjunta:

p	$B(p)$
V	1
F	0

Pruebe que $B(p \wedge q) = B(p) \cdot B(q)$.

22. (2015-I EP-5) Sean p , q y r tres proposiciones; se dice que la proposición $S(p, q, r)$ es verdadera si exactamente dos de las proposiciones p , q , r son verdaderas.

b) Determine si el siguiente argumento es válido.

$$S(p \vee r, q, r), r \vee q \vdash r \vee q \rightarrow p$$

23. (2015-II PC1-1) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos.

b) La negación de $\forall x \in C; \forall y \in C; [(0 \leq t \leq 1) \rightarrow (tx + (1 - t)y \in C)]$ es

$$\exists x \in C; \exists y \in C; [(0 \leq t \leq 1) \vee (tx + (1 - t)y \notin C)]$$

c) El argumento $(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r \vee s, \neg s \vdash \neg p \vee \neg q$ no es válido.

24. (2015-II PC1-2)

- b) En el conjunto $P = \{p : p \text{ es una proposición}\}$ se define la función $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } p \text{ es verdadero} \\ 0, & \text{si } p \text{ es falso.} \end{cases}$$

Verifique la verdad de la siguiente proposición: para todo p, q en P se cumple

$$f(p \rightarrow q) = 1 - f(p) \cdot f(\neg q)$$

25. (2016-0 PC1-1) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos:

- a) El argumento $P_1, P_2, P_3 \dots P_n \vdash Q$ es válido si y solo si las premisas y la conclusión son verdaderas.
- e) El argumento $p \wedge q, \neg q \rightarrow r, \neg r \vdash p \leftrightarrow r$ es válido.

26. (2016-0 PC1-2) Considere el siguiente argumento:

“Si el color no es azul, entonces o está nublado o hay un eclipse. El color es azul o de lo contrario hay un eclipse. Por lo tanto está nublado.”

- a) Traduzca el argumento al lenguaje de lógica formal estableciendo primero un diccionario.
- b) Determine si el argumento es válido (Justifique su respuesta).

27. (2016-I PC1-2) Dado el siguiente argumento:

“La crisis financiera griega será superada si Grecia se retira de la eurozona; por otro lado, si Grecia no supera su crisis financiera, entonces se convertirá en un “Estado fallido”; sin embargo, el gobierno griego ha proyectado que o Grecia se retira de la eurozona o Grecia se convertirá en un “Estado fallido”. Por lo tanto, la crisis griega será superada”.

- a) Traduzca el argumento al lenguaje de lógica formal elaborando primero un diccionario.
- b) Determine si el argumento es válido.

28. (2016-II PC1-1) Dado el siguiente argumento:

“El jefe de la banda saldrá del país si se siente amenazado. Si el jefe se siente amenazado, delegará su poder en Pablo o en Luis. Si delega el poder en Pablo, aumentarán los robos en el barrio. Si se delega el poder en Luis, se incrementará la venta de droga y la prostitución en el barrio. El jefe de la banda salió del país. Por lo tanto, aumentarán los robos en el barrio, o aumentará la venta de droga y la prostitución en el barrio.”

- a) Represente el argumento en su forma lógica formal.
- b) Determine la validez del argumento.

29. (2017-0 PC1-2) Dado el siguiente argumento:

“O se cumple con la deuda del banco o se capitaliza la empresa. Será fácil negociar con los demás acreedores, si se cumple con la deuda del banco. Si se capitaliza la empresa, entonces se obtienen más recursos para inversión. Por tanto, será fácil negociar con los demás acreedores o se obtienen más recursos para inversión.”

- a) Establezca un diccionario y represente el argumento en su forma lógico formal.
- b) Determine la validez de dicho argumento sin usar tablas de verdad.

30. (2017-I PC1-1)

- a) Se define el operador $\oplus$ por la tabla adjunta:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Determine si $(p \oplus q) \oplus p \vdash (p \oplus q)$ es un argumento válido.

- b) Si p = “la inversión retrocede” y q = “el desempleo aumenta”, traduzca en palabras (lenguaje coloquial) el argumento:

$$\neg q, \neg p \vee q \vdash \neg p.$$

31. (2017-II PC1-1) Dado el siguiente argumento:

“Si los precios bajan o suben los salarios, entonces las ventas al menudeo y las ventas publicitarias aumentan. Si las ventas al menudeo se incrementan, entonces los intermediarios ganarán más dinero. Pero los intermediarios no han ganado más dinero. Por lo tanto, los precios no han bajado.”

- a) Represente el argumento en su forma lógica formal.
- b) Determine si el argumento es válido (justifique).

32. (2018-0 PC1-1) Complete los espacios en blanco:

- a) Un argumento es una lista de proposiciones $P_1, P_2, \dots, P_n$ llamadas _____ y una proposición Q llamada _____. Un argumento se denota por _____.

- b) Una _____ es un símbolo que representa un miembro no especificado de una colección.

- c) Para toda colección C y predicado P tenemos

$$\neg (\forall x \in C, [\neg P(x)]) \equiv \underline{\hspace{2cm}}.$$

- d) Cuando la proposición “ $\forall x \in C, [P(x)]$ ” es falsa, el elemento que prueba la falsedad de dicho enunciado es llamado el _____.

33. (2018-0 PC1-2) Determine la validez de los siguientes afirmaciones:

- a) $p, (p \vee q) \rightarrow r, r \rightarrow s \vdash s$
- b) Las mercancías fueron suministradas en la fecha convenida cuando Hari cumplió el contrato. O Hari cumplió el contrato o su registro de envío está equivocado. Si su registro de envío está equivocado, entonces él no ordenó el envío el día tres. Hari ordenó el envío el día tres y cumplió con el contrato. Por lo tanto, si las mercancías fueron suministradas en la fecha convenida, entonces su registro de envío no está equivocado.

34. (2018-0 PC1-3)

a) Justifique por qué son falsas las siguientes equivalencias:

$$i) (\exists x \in U, [p(x)]) \wedge (\exists x \in U, [q(x)]) \equiv (\exists x \in U, [p(x) \wedge q(x)]) .$$

$$ii) \forall x \in U, \exists y \in U, [p(x, y)] \equiv \exists x \in U, \forall y \in U, [p(x, y)] .$$

b) Considere $\mathbb{Z}$ como el conjunto de los números enteros y $\mathbb{R}$ como el conjunto de números reales. Además considere los siguientes predicados:

• $p(x) : x$ es par.

• $q(y) : y$ es racional.

Traduzca al lenguaje coloquial las siguientes proposiciones:

$$i) (\exists x \in \mathbb{Z}, [p(x)]) \rightarrow ((\forall x \in \mathbb{Z}, [\neg p(x)]) \wedge (\exists y \in \mathbb{R}, [\neg q(y)])) .$$

$$ii) (\exists x \in \mathbb{R}, [q(x)]) \rightarrow ((\exists x \in \mathbb{R}, [\neg q(x)]) \vee (\exists y \in \mathbb{Z}, [\neg q(y)])) .$$

35. (2018-0 EP-1)

b) Justifique por qué son falsas las siguientes proposiciones:

$$ii) (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r)$$

36. (2018-I PC1-1) Se tiene el siguiente argumento:

“Si el arma tiene las huellas del acusado, entonces el acusado disparó el arma. El acusado no disparó el arma o es culpable. Si el acusado no disparó el arma, entonces no es culpable. Por lo tanto, si el arma tiene las huellas del acusado, entonces es culpable, o el acusado es culpable si y solo si disparó el arma.”

a) Estableciendo primero un diccionario, traduzca al lenguaje lógico formal el argumento dado usando tres premisas.

b) Demuestre que el argumento es válido.

c) Determine cuál de las premisas se debe eliminar para que el argumento resultante sea inválido (Justifique).

37. (2018-II PC1-1)

a) Dadas las proposiciones p y q , determine si el siguiente argumento es válido o no: (Justifique)

$$p, \neg p \vdash q$$

- b) Dado el siguiente argumento: “Si Gabriela compra un computador, estudiará programación o diseño gráfico. Además, si ella estudia programación, no estudiará diseño gráfico. Finalmente, Gabriela compró un computador. Por tanto, o bien Gabriela estudia programación o bien diseño gráfico.
- i) Estableciendo primero un diccionario, traduzca al lenguaje lógico formal el argumento dado usando tres premisas.
 - ii) Determine si el argumento es válido.

38. (2018-II EP-1) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos:

- a) Teniendo en cuenta los valores de verdad de p y q para los cuales se verifica que el argumento $p \rightarrow q$, $q \vdash p$ es inválido, se tiene que $p \vee q$ es falso.

39. (2019-0 PC1-1) Complete adecuadamente:

- c) La negación de $\forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{N}, [xy = 1 \rightarrow x = 2]$ es

Nota: niegue cada una de las partes usando propiedades.

40. (2019-0 PC1-2)

- a) Determine si el siguiente argumento es válido.
- “La crisis financiera griega será superada, si Grecia se retira de la eurozona. Por otro lado, si Grecia no supera su crisis financiera, entonces se convertirá en un **Estado fallido**; sin embargo, el gobierno griego ha proyectado que o Grecia se retira de la eurozona o Grecia no se convertirá en un **Estado fallido**. Por lo tanto, la crisis griega es superada”.*

41. (2019-I PC1-1)

- a) Complete:
- i) El argumento $p \rightarrow \neg q$, $q \vdash \neg p$ es _____.

42. (2019-I PC1-3)

b) Determine si el siguiente argumento es válido.

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg u, (q \vee u) \rightarrow p, (s \wedge t) \leftrightarrow q \vdash \neg[(s \vee t) \wedge u]$$

43. (2019-II PC1-2) Si el gobierno griego aprueba las medidas económicas impuestas por la Unión Europea (UE), entonces el impuesto sobre el valor agregado (IVA) aumenta y las jubilaciones anticipadas terminarán en el 2022. Por otro lado, el gobierno griego no aprueba las medidas económicas impuestas por la UE si y solo si ocurre que: se retira de la eurozona o el gobierno paga la deuda completa a sus acreedores. El jueves 7 de agosto, el gobierno griego decide no retirarse de la eurozona y no paga la deuda completa a sus acreedores. Por lo tanto, el IVA sube.

a) Estableciendo primero un diccionario, traduzca al lenguaje lógico formal el argumento dado usando tres premisas.

b) Determine si el argumento es válido.

2

Conjuntos y Relaciones

Conjuntos

En la teoría informal de conjuntos (como en (Halmos, 2017)), un **conjunto** es una colección bien definida de objetos llamados **elementos**. Cuando a es un elemento del conjunto A se escribe $a \in A$. Cuando a no es un elemento de A se escribe $\neg(a \in A)$ o $a \notin A$. Dado que los elementos son los que definen a un conjunto, dos conjuntos son **iguales** si tienen exactamente los mismos elementos. Un primer ejemplo de conjunto es el **conjunto vacío**, el cual se define de manera axiomática como un conjunto que no posee elementos. El conjunto vacío es denotado por $\{\}$ o por $\emptyset$. Por la definición de igualdad, existe un único conjunto vacío, es decir, un único conjunto sin elementos. Estas ideas serán formalizadas más adelante.

Para describir conjuntos existen dos formas elementales. La primera es listar sus elementos dentro de llaves como en $A = \{a, b, c, \dots, z\}$. A esta se le llama una definición **por extensión** del conjunto A . Esta es la razón por la cual el conjunto vacío se denota a veces por $\{\}$. La segunda forma de describir un conjunto es por medio de una propiedad que tipifica sus elementos, por ejemplo $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$. A esta se le llama una definición **por comprensión** y usualmente se expresa como $B = \{x \in U : P(x)\}$ donde $P(x) = "x \text{ tiene propiedad } P"$. Por otro lado, por U se denota al **conjunto universal** que define el contexto de donde se escogen los elementos del conjunto.

El conjunto A está **incluido** en el conjunto B si todo elemento de A es un elemento de

B . Esto quiere decir que

$$\forall x \in U, \quad [x \in A \rightarrow x \in B].$$

En este caso se escribe $A \subset B$. De esta definición de inclusión y de la definición que se dio de igualdad, se deduce que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$ o

$$\forall x \in U, \quad [x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

De lo último se deduce que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto.

A continuación se definen operaciones entre conjuntos. El **complemento** de A en U es el conjunto de todos los elementos del universo que no son elementos de A , es decir

$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$

En particular, el complemento del conjunto vacío es el universo y viceversa.

La **unión** de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los elementos de ambos conjuntos, formalmente se puede expresar como

$$A \cup B = \{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que contiene a todos los elementos en común de dichos conjuntos, es decir

$$A \cap B = \{x \in U : (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

En particular, dos conjuntos se dicen **disjuntos** cuando su intersección es el conjunto vacío, lo cual es equivalente a afirmar que no tienen elementos en común.

La **diferencia** de A y B es el conjunto de los elementos de A que no están en B , formalmente

$$A - B = \{x \in U : (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}.$$

De esta definición se sigue que $A - B = A \cap B^c$.

Finalmente, la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos de ambos que no son comunes a dichos conjuntos, formalmente

$$A \Delta B = \{x \in U : (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

De hecho, se puede demostrar que

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

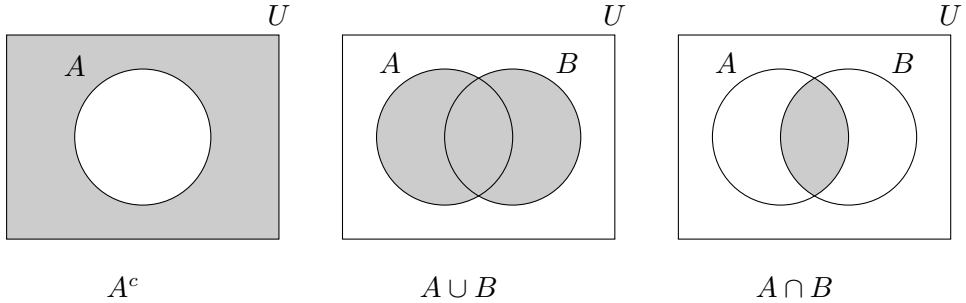
Es posible también definir **operaciones infinitas o enumerables** como extensión de las definiciones dadas anteriormente. Para todo $i \in \mathbb{N}$, si se tienen los conjuntos A_i los cuales pertenecen a algún conjunto universal U , la **unión infinita** de ellos se define por

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in U : \exists i \in \mathbb{N}, [x \in A_i]\}.$$

La **intersección infinita** se define formalmente de la siguiente manera:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in U : \forall i \in \mathbb{N}, [x \in A_i]\}.$$

Una forma sencilla de representar conjuntos y sus operaciones en mediante **diagramas de Venn** como los que se muestran a continuación.



Estos diagramas pueden ayudar a construir contraejemplos o a visualizar de manera intuitiva propiedades de conjuntos. Por ejemplo, las **leyes de De Morgan** para conjuntos son las siguientes identidades:

$$1. (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad 2. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Intuitivamente, estas identidades se pueden visualizar construyendo diagramas de Venn para ambos lados de la igualdad y comprobando que el resultado es en efecto el mismo. Sin embargo, la demostración formal se sigue de las propiedades de lógica formal o del uso de tablas de verdad.

Relaciones

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el de relacionar elementos de un conjunto con otro. Esto permite, entre otras cosas, definir relaciones como las de preferencia, correspondencias y funciones. Para ello entonces primero se debe definir el concepto

de relación. La forma más intuitiva de expresar que el elemento $a \in A$ se relaciona con el elemento $b \in B$ es mediante una flecha que empieza en a y termina en b . Para formalizar esta idea intuitiva es necesario considerar pares ordenados y el producto cartesiano.

Dados dos conjuntos A y B , si $a \in A$ y $b \in B$, se define la expresión (a, b) como un **par ordenado** donde a es la primera coordenada o componente y b es la segunda. Dos pares ordenados son **iguales** si sus componentes lo son en el mismo orden, es decir

$$(a, b) = (c, d) \quad \leftrightarrow \quad a = c \quad \wedge \quad b = d$$

El conjunto de todos los posibles pares ordenados es el **producto cartesiano** de los conjuntos A y B se define como

$$A \times B = \{(x, y) : (x \in A) \wedge (y \in B)\}.$$

Una **relación** (binaria) entre los conjuntos A y B (en ese orden) es un subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$. En este caso A se llama el **conjunto de partida** y B el **conjunto de llegada**. Cuando $A = B$ diremos que $R \subset A \times A$ es una relación en A . Intuitivamente, la relación se puede entender como el conjunto de flechas que relacionan elementos de A con elementos de B .

En ocasiones es necesario identificar los elementos del conjunto de partida o de llegada que forman parte de la relación (los extremos de las flechas). Para ello, se definen los conceptos de dominio y rango. Si $R \subset A \times B$ es una relación, entonces el **dominio** de R se define como

$$\text{dom } R = \{x \in A : \exists y \in B, [(x, y) \in R]\}$$

y el **rango** de R como

$$\text{ran } R = \{y \in B : \exists x \in A, [(x, y) \in R]\}.$$

Dependiendo de las posibles aplicaciones, las relaciones pueden satisfacer condiciones adicionales. Sea R una relación en el conjunto A . La relación se dice **reflexiva** cuando

$$\forall x \in A, [(x, x) \in R].$$

La relación es **simétrica** si

$$\forall x, y \in A, [(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R].$$

La relación es **transitiva** cuando

$$\forall x, y, z \in A, [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R].$$

Una relación que cumple estas tres condiciones es llamada **relación de equivalencia**. Una relación es **antisimétrica** si

$$\forall x, y \in A, [(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y].$$

La relación es **total** cuando

$$\forall x, y \in A, [(x, y) \in R \vee (y, x) \in R].$$

Una relación es llamada de **pre-orden** si es reflexiva y transitiva; **orden parcial** si es reflexiva, transitiva y antisimétrica; y **orden total** si es reflexiva, transitiva, antisimétrica y total.

Las funciones son una clase de relación muy importante debido a la universalidad de sus aplicaciones. Una relación es una **función** cuando cada elemento del dominio se relaciona con un único elemento del rango. Formalmente, esta idea se traduce en

$$\forall x \in \text{dom } R, \exists! y \in \text{ran } R, [(x, y) \in R].$$

Esto es equivalente a verificar que

$$(a, b) \in R \wedge (a, c) \in R \rightarrow b = c.$$

Cuando la relación es una función, se denota por letras como f en vez de R . Por convención, se suele denotar a una función por $f : A \rightarrow B$, donde A es el dominio (no necesariamente el conjunto de partida). Para denotar que el elemento $a \in A$ está relacionado con el elemento $b \in B$, se escribe $f(a) = b$ en el caso de funciones. Por ello se denota por $f(x)$ la **regla de correspondencia** de la función f donde x es un elemento del dominio. Para definir una función es necesario entonces definir el dominio, conjunto de llegada y regla de correspondencia. Así, dos funciones son **iguales** cuando estos tres ingredientes son iguales.

Problemas

1. (2012-I PC1-2)

- Si $(\forall x \in U, [P(x)])$ es falso quiere decir que existe un elemento $a \in U$ tal que $\neg P(a)$ es verdadero. En lógica formal, ¿cómo se le llama a dicho elemento?
- ¿Bajo qué condición la relación $R \subset A \times B$ es una función?
- Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, y $R = \{(x, y) \in A \times B : y = x + 1\}$, calcule R por extensión.
- Si $A \cup B = A \cup C$, ¿se puede afirmar que $B = C$? (Justifique).

e) Recordemos que una relación R es simétrica cuando

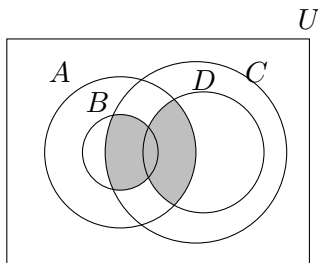
$$(a, b) \in R \text{ implica } (b, a) \in R.$$

Si la siguiente relación es simétrica, calcule h y k justificando sus pasos.

$$R = \{(h + 1, 3), (h, h + k), (3, 8), (14, h)\}.$$

2. (2013-0 PC1-2)

- Sean A y B dos subconjuntos del conjunto universal U . Brinde la definición de la diferencia $A - B$.
- Si $A - B = A - C$. ¿Se puede afirmar que $B = C$? Justifique.
- Expresé el complemento del área sombreada en el diagrama de Venn en el lenguaje de teoría de conjuntos.



3. (2013-0 PC1-3)

- ¿Cuándo una relación es función?
- Si $A = \{-1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y

$$R = \{(-1, h + 3); (2, 4); (h, 4)\} \subset A \times B$$

es una función, determine el valor o los valores que puede tomar h .

- Una relación $R \subset A \times A$ es transitiva si cumple:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R.$$

Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3); (2, k); (3, 2)\}$ es una relación transitiva en $A \times A$, determine el valor o valores que puede tomar k .

4. (2013-0 EP-2)

- a) Si U es un conjunto universal y A, B son subconjuntos de U , demuestre que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

5. (2013-I PC1-1)

- a) Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, e, f, g\}$. Consideremos las relaciones

$$R_1 = \{(a, e), (b, g), (d, f), (a, f)\}$$

y

$$R_2 = \{(b, c), (c, c), (d, f)\}$$

en $A \times B$.

- i) Halle el dominio y el rango de cada relación.
 - ii) ¿Cuál de las relaciones es una función? (Justifique su respuesta).
- b) Sean A, B y $C \subset U$ conjuntos cualesquiera. Si es que el siguiente enunciado es verdadero, demuéstrela, caso contrario indique un contraejemplo.

$$\text{Si } A \subset C \text{ y } B \subset C \text{ entonces } A \cup B \subset C.$$

6. (2013-II PC1-1) Sean A y B subconjuntos de U .

- a) Señale la definición de $A = B$ usando lenguaje lógico formal.
- b) ¿Si $A \subset B$ entonces se puede concluir que $A \triangle B \neq \emptyset$? Justifique su respuesta.
- c) Demuestre que

$$A \subset B \leftrightarrow B^c \subset A^c.$$

7. (2013-II EP-1) Si $R \subset A \times B$ es una relación, definimos la relación inversa como

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in R\}.$$

Sea A el conjunto de profesores de la UP y B el conjunto de alumnos de la UP. Asumimos que estos conjuntos pertenecen al conjunto universal U de alumnos y profesores de la UP. Definimos una relación $R \subset A \times B$ de la siguiente manera:

$$(x, y) \in R \iff "x \text{ es profesor de } y \text{ en el curso de Mate 1"}.$$

- a) Exprese de manera coloquial el dominio y rango de esta relación.
- b) ¿Es R^{-1} una función? (Justifique su respuesta).
- c) De manera coloquial, diga qué significa si $(\text{dom } R \cap (B - \text{dom } R^{-1})) \neq \emptyset$.

8. (2014-0 PC1-2)

- a) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 6, 8\}$ y la relación

$$R = \{(2, 3), (3, 3), (4, 6)\}$$

en $A \times B$. Justifique por qué la relación R es una función.

- b) La siguiente afirmación es falsa, señale la justificación.

Sea U un conjunto universal y A, B, C subconjuntos de U . Si

$$A - B^c = A - C^c,$$

entonces $B = C$.

- c) Si U es un conjunto universal y A, B son subconjuntos de U , demuestre que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

- d) Si U es un conjunto universal y A, B son subconjuntos de U , demuestre que

$$(A - B)^c = A^c \cup B.$$

9. (2014-0 PC1-4)

- a) Sean r y $s \in \mathbb{N}$. Si

$$f = \{(s^2 + r, r + 2s), (r - 1, 2), (r + s, r^2), (r - 1, s + 1), (5, r^2 - r - 2)\}$$

es una función, determine de manera explícita f e indique el dominio y rango de f .

10. (2014-I PC1-1) Sea U un conjunto universal.

- a) Pruebe formalmente que $\emptyset \subset A$ para todo conjunto A .

b) Justifique la validez de la siguiente equivalencia:

$$(A = \emptyset) \equiv \forall x \in U, [\neg(x \in A)]$$

c) Demuestre que $(A \subset B) \equiv (A - B = \emptyset)$ (Sugerencia: puede asumir la parte b) si lo cree necesario).

11. (2014-II PC1-1)

b) Sean R y S relaciones definidas en $A \times B$, demuestre que

$$\text{dom } R \cup \text{dom } S \subset \text{dom } (R \cup S).$$

12. (2015-0 PC1-1) Justificar la falsedad de la siguiente proposición:

c) Si $A \subset B \cup C$, entonces $A \subset B$ o $A \subset C$.

13. (2015-0 PC1-2)

b) Sea U el conjunto universo, dar la definición de $A \subset B$.

c) Demostrar que

$$\text{Si } A \subset B, \text{ entonces } A \cap B = A.$$

14. (2015-I PC1-2)

a) Sea R una relación definida en $\mathbb{Z}$ tal que: $(x, y) \in R \iff x^2 + y^2 = 1$.
Determine por extensión la relación R y su rango.

b) Sea $S \subset A \times B$ una relación. Se define la relación $S^{-1} \subset B \times A$ como:

$$S^{-1} = \{(x, y) \in B \times A : (y, x) \in S\}$$

Pruebe que:

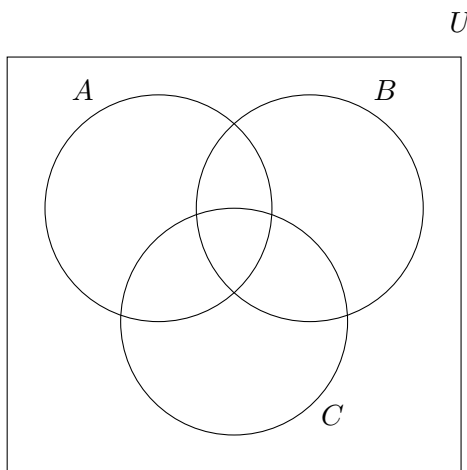
- $(S^{-1})^{-1} = S$
- $(S \cap T)^{-1} = S^{-1} \cap T^{-1}$

15. (2015-I EP-5) Sean p , q y r tres proposiciones, se dice que la proposición $S(p, q, r)$ es verdadera si exactamente dos de las proposiciones p , q , r son verdaderas.

a) Dados los enunciados $p(x) = "x \in A"$, $q(x) = "x \in B"$ y $r(x) = "x \in C"$, se define el conjunto

$$D = \{x \in U : S(p(x), q(x), r(x)) \text{ es verdad}\},$$

en el siguiente diagrama sombrear la región determinada por D^c .



16. (2015-II PC1-2)

a) Sea U el conjunto universal y A , B subconjuntos de U . Demuestre que

$$(A - B) \cap B = \emptyset.$$

17. (2016-I PC1-1)

a) Sean $A, B \subset U$, pruebe que $B \subset A \leftrightarrow A = A \cup B$.

18. (2016-II PC1-3)

a) Sean A, B, C subconjuntos de un universo U . Pruebe que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

19. (2016-II PC1-4) Una relación R en A , se dice que es

- Reflexiva si $\forall x \in A, [(x, x) \in R]$.
- Simétrica si $\forall x, y \in A, [(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R]$.
- Transitiva si $\forall x, y, z \in A, [\{(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R\} \rightarrow (x, z) \in R]$.

Dado el conjunto $A = \{b, c, d\}$ y la siguiente relación en A :

$$R = \{(b, b), (c, c), (d, d), (b, d), (d, b), (c, b)\}.$$

- a) Determine si R es una función.
- b) Determine si R es reflexiva.
- c) Determine si R es simétrica.
- d) Determine si R es transitiva.

20. (2017-0 PC1-5) Sea A el conjunto formado por los meses del año 2017 y B el conjunto formado por los números naturales menores a 40.

- a) Se define la siguiente relación entre A y B : “ $x \in A$ se relaciona con $y \in B$ si y es el número de días que tiene el mes x ”. Determine el dominio, el rango e indique todos los elementos de dicha relación. ¿Dicha relación es una función?
- b) Se define la siguiente relación entre B y A : “ $x \in B$ se relaciona con $y \in A$ cuando x es el número de domingos que tiene el mes y ”. Determine el dominio, el rango y señale todos los elementos de dicha relación. ¿Dicha relación es una función?

21. (2017-I PC1-4) Dado un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, definimos la relación en A :

$$R(A) = \{(a, b) \in A \times A : (a \neq b) \wedge (b/a \in \mathbb{N})\}.$$

- a) Sean $a, b \in \mathbb{N}$ primos diferentes. Calcule, por extensión, $R(\{a, b, a^2, ab, a^2b\})$.
- b) ¿Es la relación calculada en a) una función?

22. (2017-II PC1-2)

- a) Justifique por qué es falsa la siguiente proposición:

$$ii) \forall A, B, C \subset U, [A \cup (B - C) = (A - B) \cup (A - C)].$$

23. (2017-II PC1-3)

- a) Dadas las relaciones R, S, T en A , definimos la relación composición $R \circ S$ en A como

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z \in A, (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}.$$

Pruebe que

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T).$$

- b) Sean A, B, C subconjuntos de un universo U . Pruebe lo siguiente:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

24. (2018-0 PC1-1) Complete los espacios en blanco:

- e) Sea U un conjunto universal y A, B dos subconjuntos de U .

i) El complemento de A es el conjunto $A^c = \{\underline{\hspace{2cm}}\}$.

ii) La intersección de A y B es el conjunto $A \cap B = \{\underline{\hspace{2cm}}\}$.

- f) Sea R una relación entre los conjuntos A y B . En este caso

i) A se llama el $\underline{\hspace{2cm}}$.

ii) B se llama el $\underline{\hspace{2cm}}$.

25. (2018-0 PC1-4)

- a) Una relación $R \subset A \times A$ se denomina *relación reflexiva y simétrica* si simultáneamente satisface lo siguiente:

$$\forall x, y \in A, [(x, x) \in R \wedge ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)].$$

Sea $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Demuestre que la relación $R \subset A \times A$ definida por

$$(P, Q) \in R \text{ si y solo si } a + y = b + x,$$

donde $P = (a, b)$ y $Q = (x, y)$, es una relación reflexiva y simétrica.

- b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(x+5) = f(x) + f(5)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(0)$. Además si $f(5) = 2$, determine el valor de $f(-5)$ y $f(15)$.

26. (2018-I PC1-3)

- a) Se afirma que un conjunto R es una relación de equivalencia en A cuando $R \subset A \times A$ y se cumplen las siguientes proposiciones:

- $\forall x \in A, (x, x) \in R$.
- Si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$.
- Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.

Se define el conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (x+y) = 2k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$. Probar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

27. (2018-II PC1-2)

- b) Sean A, B, C subconjuntos del conjunto universal U . Pruebe que

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

28. (2018-II PC1-3)

- a) Complete

- i) El conjunto A está incluido en B si todo elemento de A es un elemento de B . Esto es equivalente a mostrar que $\forall x \in U, [x \in A \rightarrow \text{_____}]$.

29. (2019-0 PC1-1) Complete adecuadamente:

- a) Use propiedades, entre ellas las leyes de De Morgan:

$$(A^c \cup B)^c = \text{_____}$$

$$(A \cap B^c)^c = \text{_____}$$

- b) Si $R \subset A \times B$ es una relación, de la definición tenemos

$$\text{dom } R = \text{_____}$$

$$\text{ran } R = \text{_____}$$

d) Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $R = \{(1, 2), (4, a^2 + b^2), (c, 2), (4, 18)\}$ es una función, entonces:

$$a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

30. (2019-0 PC1-2)

b) Si A, B y C son conjuntos tales que $B \cup (C - A) = C$, demuestre que

$$A \cap (C - B) = \emptyset.$$

31. (2019-0 PC1-3) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 4), (4, 2)\}$$

una relación en $A \times A$.

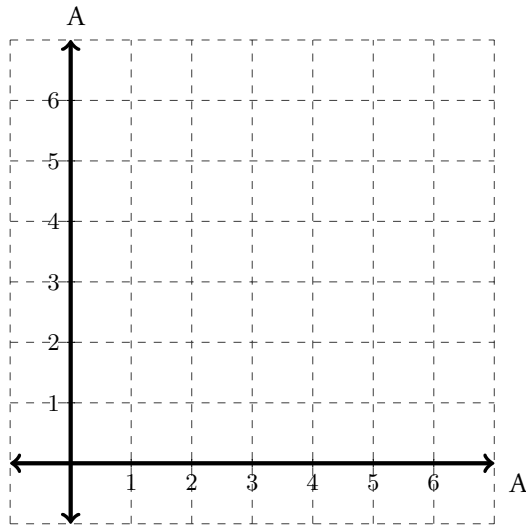
a) Se dice que una relación $\mathcal{R} \subset A \times B$ es sobreyectiva, si $\text{ran } \mathcal{R} = B$. ¿Es R sobreyectiva? Justifique.

b) Se dice que una relación $\mathcal{R} \subset A \times A$ es transitiva si

$$\forall a, b, c \in A, [(a, b) \in \mathcal{R} \text{ y } (b, c) \in \mathcal{R}, \text{ entonces } (a, c) \in \mathcal{R}].$$

¿Es R una relación transitiva? Justifique.

c) Represente R en el plano cartesiano

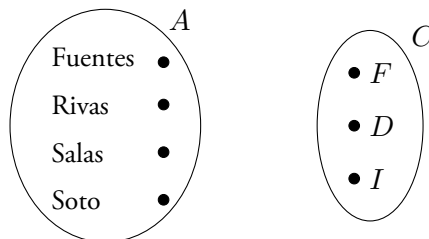


32. (2019-I PC1-3)

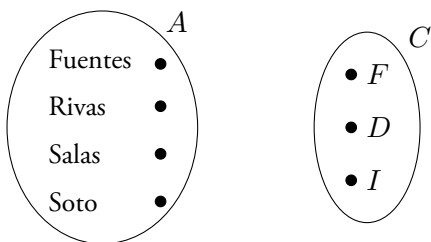
- a) Se seleccionó al azar un conjunto de estudiantes de la UP matriculados en el curso de Matemáticas I y se les preguntó por su *conducta alimentaria*, es decir, las diferentes formas de alimentación de una persona. Así, tenemos la *forma familiar* (F) que es la comida que trae de casa, la *forma desordenada* (D) que se le atribuye a la comida al paso, la cual, por falta de tiempo, es ingerida por el estudiante, y la *forma institucional* (I) que es la brindada por la institución basada en un menú balanceado. Considere que los alumnos seleccionados están en el conjunto U y las *conductas alimentarias* en el conjunto C , es decir, $C = \{F, D, I\}$.

Relacione los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto C por medio de líneas de tal manera que exprese el texto dado.

- i) *Todos los estudiantes tienen una forma desordenada de alimentarse.*



ii) *Todos siguen una única forma de conducta dada excepto por un único estudiante que posee todas las formas de conducta alimentaria.*



3

Números Reales

Desde un punto de vista práctico, cualquier sistema numérico se construye a partir de la necesidad de resolver ecuaciones. En ese sentido, para resolver la ecuación $x - 1 = 0$ solo es necesario conocer el conjunto de los números naturales, denotado por $\mathbb{N}$. Para resolver la ecuación $x + 1 = 0$ es preciso extender los números naturales a los números enteros denotados por $\mathbb{Z}$. El conjunto de los números racionales es denotado por $\mathbb{Q}$ y son necesarios para resolver ecuaciones como $2x - 1 = 0$ extendiendo los enteros mediante el uso de fracciones. El conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es necesario para resolver ecuaciones de la forma $x^2 - 2 = 0$. Así, estos conjuntos satisfacen $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Si bien la construcción del conjunto de los números reales requiere de un profundo conocimiento de análisis y sucesiones, este conjunto es completamente caracterizado por propiedades fundamentales agrupadas en axiomas algebraicos, de orden y de completitud.

Axiomas algebraicos

Los números reales poseen operaciones de suma y producto, los cuales satisfacen los siguientes axiomas algebraicos (o, formalmente, los axiomas de un cuerpo o campo conmutativo):

- Asociatividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \wedge a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c]$$

- Conmutatividad: $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$a + b = b + a \wedge a \cdot b = b \cdot a]$$

- Distributividad: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$[a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c]$$

- Existencia de elemento neutro: $\exists 0, 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$,

$$[a + 0 = a \wedge a \cdot 1 = a]$$

- Opuesto aditivo: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}$,

$$[a + b = 0]$$

- Inverso multiplicativo: $\forall a \neq 0 \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}$,

$$[a \cdot b = 1]$$

Más adelante se enuncian los axiomas de orden que permiten definir el conjunto de números reales positivos y negativos. Asumiendo conocida la definición de estos conjuntos, la **raíz cuadrada** de un número real no negativo a se define como aquel número no negativo x que es solución de la ecuación $x^2 - a = 0$. La existencia de dicho número es en parte justificada por el axioma de completitud enunciado más adelante. Los axiomas algebraicos permiten, entre otras cosas, demostrar que el número real $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Una generalización importante de lo expuesto en el párrafo anterior es el cálculo de las raíces de un polinomio cuadrático. Para ello es necesario **completar cuadrados**. Dado un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$, se tiene que

$$p(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Así, para resolver la ecuación $p(x) = 0$ se despeja x en la ecuación anterior, obteniendo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De la expresión obtenida se sigue que el número de raíces depende de la posibilidad de tomar la raíz cuadrada de la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$, la cual es llamada el **discriminante** del polinomio cuadrático. Si Δ es negativo, no existen soluciones reales dado que no es posible calcular la raíz cuadrada de un número negativo en el universo de los números reales. Si Δ es nulo, la única raíz de la ecuación es $-b/(2a)$. En este caso se dice que $p(x)$ es un **cuadrado perfecto** si a es positivo ya que

$$p(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \right)^2.$$

Finalmente, cuando Δ es positivo se obtienen dos soluciones distintas.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto $P \subset \mathbb{R}$ con las siguientes características:

- $\forall a, b \in P, [(a + b \in P) \wedge (a \cdot b \in P)]$
- $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}, [(a \in P) \vee (-a \in P)]$
- $0 \notin P$

Estos son los llamados *axiomas de orden* y definen al conjunto de **números positivos**, el cual es denotado por P en este caso, pero en general se denotan por $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{R}_+$. De esta manera, si $a \in P$, se dice que a es **positivo**. Si $-a \in P$, se dice que a es **negativo**. El signo de número real no nulo puede ser entonces positivo o negativo dependiendo de la definición anterior. El cero no tiene signo.

Gracias a los axiomas de orden, es posible definir la relación de orden de los números reales. Se dice que $a < b$ o $b > a$ cuando $(b - a) \in P$. A esta se le llama la relación de **desigualdad estricta**. Se dice que $a \leq b$ o $b \geq a$ cuando $a < b$ o $a = b$. La relación en $\mathbb{R}$ definida por

$$(x, y) \in R \quad \longleftrightarrow \quad x \leq y$$

es de hecho una relación de orden total en el sentido del capítulo anterior en donde se definieron distintos tipos de relaciones.

Axioma de completitud

Para poder entender el axioma de completitud, es necesario introducir algunas definiciones. El **máximo** de un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es un número real $m = \max A$ que

pertenece al conjunto y de manera que ningún otro elemento del conjunto es mayor que él. Formalmente:

$$m \in A \quad \wedge \quad \forall x \in A, [x \leq m].$$

El **mínimo** de un conjunto no vacío se define análogamente. En ese caso $m = \min A$ cuando

$$m \in A \quad \wedge \quad \forall x \in A, [x \geq m].$$

Un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es **acotado superiormente** si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, [x \leq M].$$

A dicha constante M se le denomina una **cota superior**. Análogamente, un conjunto no vacío es **acotado inferiormente** cuando

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, [x \geq M]$$

y a dicha constante se le denomina **cota inferior**.

El **supremo** de un conjunto A acotado superiormente es la menor de las cotas superiores, y se denota por $\sup A$. El **ínfimo** de un conjunto A acotado inferiormente es la mayor de las cotas inferiores, y se denota por $\inf A$.

Estas definiciones satisfacen algunas propiedades. El máximo, mínimo, supremo e ínfimo son únicos en el sentido, por ejemplo, que dos números distintos no pueden cumplir la definición de máximo al mismo tiempo para un conjunto no vacío A . El máximo y el supremo son cotas superiores por definición, y si M es una cota superior, cualquier número mayor a él también es una cota superior. De la misma forma, el mínimo y el ínfimo son cotas inferiores, y si M es una cota inferior, cualquier número menor a él también es una cota inferior.

El **axioma de completitud** se puede enunciar de la siguiente manera:

- Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y acotado superiormente tiene supremo.

Este axioma puede ser enunciado en términos de cotas inferiores e ínfimo. Ambas versiones son equivalentes debido a la siguiente observación. Para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se denota por $-A$ al conjunto de todos los opuestos aditivos de A . De esta manera es posible demostrar que A es no vacío y acotado superiormente si y solo si $-A$ es no vacío y acotado inferiormente. Es más, se cumple que $\sup A = -\inf -A$.

Los axiomas algebraicos, de orden y de completitud definen completamente a los números reales. De hecho, es posible demostrar que cualquier conjunto con estas mismas propiedades debe ser necesariamente el conjunto de los números reales. En el lenguaje matemático formal, esto último se traduce en el teorema de unicidad de campos ordenados y completos (una demostración puede ser encontrada en el primer capítulo de (Pugh, 2002)).

Máximo entero

El **máximo entero** de un número real x es el máximo entero menor o igual a x . Formalmente, se puede definir como $\llbracket x \rrbracket = n \in \mathbb{Z}$, donde n satisface

$$n \leq x < n + 1.$$

La función máximo entero $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ en ocasiones es llamada también *función suelo* en la literatura.

Para números reales positivos, el máximo entero tiene el efecto de *eliminar* la parte decimal de dicho número, por ejemplo $\llbracket \sqrt{2} \rrbracket = 1$. Para números reales negativos, el efecto es de eliminar la parte decimal y restar una unidad, por ejemplo $\llbracket -\sqrt{2} \rrbracket = -2$.

Problemas

1. (2012-I PC1-5) Sabiendo que

$$(I) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, [(a < b) \wedge (b < c) \rightarrow (a < c)].$$

$$(II) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, [(0 < c) \wedge (a < b) \rightarrow (ac < bc)].$$

demuestre

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, [(0 < x < y) \rightarrow (x^2 < y^2)]$$

justificando cada paso cuidadosamente.

2. (2012-I EP-1) Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

- a) Enuncie la definición de cuándo A es acotado superiormente.
- b) Sea A acotado superiormente, enuncie la definición de $\sup A$.
- c) Muestre que si A y B son acotados superiormente, entonces $A \cup B$ es acotado superiormente.

3. (2013-0 PC2-2)

- a) Complete cuadrados al siguiente polinomio: $p(x) = ax^2 + ax$, donde a es un número real diferente de cero.

4. (2013-0 PC2-4)

- b) Si E , F y G son conjuntos de números reales acotados superiormente tales que para cada $x \in E$ y cada $y \in F$ hay un $z \in G$ tal que $x + y \leq z$; demuestre que $\sup E + \sup F \leq \sup G$.

5. (2013-0 EP-3)

- a) Complete las siguientes propiedades de números reales.
- i) $\forall a, b \in \mathbb{R}, [(a \leq b) \wedge \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow (a = b)]$.
 - ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, [(a < b) \wedge \underline{\hspace{2cm}} \rightarrow a \cdot c < b \cdot c]$.
- b) Demuestre que si $\varepsilon \geq 0$ y para todo $c > 0, \varepsilon < c$ entonces $\varepsilon = 0$.
(Sugerencia: pruebe por contradicción)

6. (2013-I PC1-4)

- c) Analizar la existencia del supremo de los siguientes conjuntos, y en caso exista hallarlo.
- i) $A =] - \infty, 3]$.
 - ii) $B = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1\}$.

7. (2013-I PC2-1) Responda la siguiente pregunta, justificando su respuesta.

- c) Si $a \neq 0$ y el discriminante del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ es positivo, ¿cuáles son las raíces de $p(x)$?

8. (2013-II PC1-2)

- b) ¿Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado superior e inferiormente, entonces todas sus cotas inferiores son estrictamente menores que todas sus cotas superiores? Justifique su respuesta.
- c) ¿Si $x < 0$ entonces $\llbracket x \rrbracket = 0$? Justifique su respuesta.

9. (2013-II PC1-3)

- a) Pruebe la siguiente afirmación justificando cada paso.

Si $(0 < a < b)$ y $(0 < c < d)$, entonces $(a \cdot c < b \cdot d)$.

Sugerencia: puede usar alguna(s) de las siguientes propiedades:

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$(I) (x \neq 0) \rightarrow (x^2 > 0).$$

$$(II) (x < y) \wedge (z > 0) \rightarrow (x \cdot z < y \cdot z).$$

$$(III) (x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z).$$

- b) Determine la veracidad de la siguiente afirmación. Justifique su respuesta.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, [a \cdot b = a \cdot c \rightarrow b = c].$$

- c) Brinde un ejemplo de dos números irracionales a y b tales que $a + 2b$ sea un número entero.

10. (2013-II PC2-2)

- a) Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Complete cuadrados al siguiente polinomio:

$$p(x) = 2a^2x - ax^2.$$

11. (2014-0 PC2-2)

- a) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos.

i) Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\llbracket 2x + 1 \rrbracket = 2\llbracket x \rrbracket + 1$.

ii) Si $A \subset B$ y A es acotado superiormente, entonces B es acotado superiormente.

12. (2014-I PC2-4)

- b) Dado $p(x) = kx^4 - (\sqrt{k})x^2 + k$, donde k es positivo, determine el valor o los valores de k para que el conjunto solución de $p(x) = 0$ tenga exactamente dos elementos y calcule dichas soluciones. (Sugerencia: considere el cambio de variable $y = x^2$)

13. (2014-I EP-1)

- b)* Demuestre que si A es acotado superiormente, el supremo es único (es decir, si a y b satisfacen la definición de supremo, entonces $a = b$).
- c)* Sean los conjuntos $A \subset B \subset \mathbb{R}$. Pruebe que toda cota superior de B es una cota superior de A usando las definiciones.

14. (2014-II PC1-2)

- b)* Determine el menor valor de M con la propiedad de que para todo x real se cumpla:

$$-19 + 12x - 2x^2 \leq M.$$

15. (2014-II PC1-3)

- b)* Brinde la definición de máximo entero.
- c)* Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

16. (2014-II EP-1) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos:

- b)* $\forall x, y \in \mathbb{R}: \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

17. (2015-0 PC1-1) Justifique la falsedad de las siguientes proposiciones:

- b)* Si $A \subset B$, entonces $\sup A < \sup B$.
- d)* El máximo entero de -1.5 es -1 .

18. (2015-0 PC1-2)

- a)* Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = 2^n, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left\lfloor \lfloor x \rfloor + \pi \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + x \right\}$$

19. (2015-0 PC1-3)

b) Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5\}$, si la siguiente relación en $A \times B$

$$R = \{(x, 4), (2, 4), (x, x^2 - 5x + 10), (3, 5)\}$$

es una función. Hallar el valor o los valores de x .

20. (2015-0 EP-1)

a)

ii) Pruebe que $\llbracket x + n \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$.

21. (2015-I PC1-1)

a) Justifique por qué la siguiente proposición es falsa:

ii) $\forall x \in \mathbb{R} : \llbracket x^2 \rrbracket = \llbracket x \rrbracket \cdot \llbracket x \rrbracket$.

22. (2016-0 PC1-1) Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos:

b) Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$, entonces $\sup(A) = 1$.

d) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2-9}{x-3} = x + 3$.

23. (2016-0 PC1-4)

b) Demuestre que: $\llbracket x + y \rrbracket \geq \llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

24. (2016-0 PC2-3) Se sabe que dentro de n años el costo por unidad de un producto está dado por

$$C(n) = \frac{2n^2 - 16n + 37}{n^2 - 8n + 17}$$

miles de dólares.

a) Determine en qué momento el costo por unidad será \$5000.

b) Pruebe que el costo por unidad es acotado superiormente.

25. (2016-I PC1-4) Para cada número real positivo k se define el conjunto

$$C_k = \{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k^2\}.$$

Sea la relación $S \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ definida por:

$$S = \{(P, Q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \exists k > 0 \text{ tal que } (P \in C_k) \wedge (Q \in C_k)\}$$

- a) Sean $P = (1, 1 - a)$ y $Q = (2 - 3a, -1)$. Si $(P, Q) \in S$, determine el o los valores que puede tomar a .
- b) Pruebe que si $(P, Q) \in S$ y $(Q, R) \in S$, entonces $(P, R) \in S$.

26. (2017-0 PC1-1) Justifique la falsedad de los siguientes enunciados:

- a) Si $A = [0, 20.9]$; se cumple que $\sup(A) = 21$.
- c) El máximo entero de $-\sqrt{2}$ es -1 .

27. (2017-0 EP-1)

- b) Justifique por qué es falsa la siguiente proposición:

ii) La ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 6$ no tiene solución.

28. (2017-I PC1-3)

- b) Determine el valor de verdad del siguiente enunciado (justifique):

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{R}, [a \cdot b \geq 1].$$

29. (2017-II PC1-2)

- a) Justifique por qué es falsa la siguiente proposición:

i) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, [x \geq m]$.

30. (2017-II PC1-4) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Dada la ecuación cuadrática

$$2ax^2 + (3a - 1)x + a + b = 0.$$

Determine los valores de b de modo que exista un único valor de a que permita que las raíces de la ecuación cuadrática sean iguales.

31. (2018-0 PC2-1) Complete los espacios en blanco según corresponda.

a) Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se denomina _____ cuando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in A$. En este caso, M es llamado _____ de A .

b) $\lceil \sqrt{2} + \sqrt{3} \rceil = \underline{\hspace{1cm}}$.

d) La ecuación cuadrática $x^2 + 4x - 21 = 0$ tiene raíces x_1 y x_2 , entonces

$$x_1 + x_2 = \underline{\hspace{1cm}}.$$

32. (2018-0 EP-1)

b) Justifique por qué es falsa la siguiente proposición:

i) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $A \neq B$. Si A y B son acotados superiormente entonces

$$\sup(A - B) < \sup(A).$$

33. (2018-I PC1-3)

a) Sea $p(x) = x^2 - x - 4$ un polinomio cuadrático.

i) Completando cuadrados, denote $p(x)$ como el producto de dos factores lineales.

34. (2018-II PC1-3)

a) Complete

ii) Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, [\underline{\hspace{1cm}}].$$

A dicha constante M se le denomina _____

iii) El supremo es _____ de las cotas superiores.

- b) Dados dos conjuntos A y B no vacíos y acotados superiormente tales que $A \subset B \subset \mathbb{R}$, pruebe que una cota superior de B es también una cota superior de A .
- c) Dados dos conjuntos A y B no vacíos y acotados superiormente tales que $A \subset B \subset \mathbb{R}$, pruebe que

$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

35. (2019-0 PC2-2)

- b) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x^2 + x + 1 \rfloor = x + 5\}$. Determine el número de elementos de A .

36. (2019-0 EP-1)

- b) Justifique por qué el siguiente enunciado es falso:
- ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, se cumple $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$, donde

$$\alpha A = \{ \alpha x : x \in A \}.$$

37. (2019-II EP-2)

- a) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, complete: $\sup[a, b] = \underline{\hspace{2cm}}$, $\inf[a, b] = \underline{\hspace{2cm}}$.
- b) Sean A y B dos subconjuntos acotados superiormente en $\mathbb{R}$. Complete:

$$\text{Si } A \subset B \text{ entonces } \sup \underline{\hspace{2cm}} \leq \sup \underline{\hspace{2cm}}.$$

4

Intervalos y Valor Absoluto

Intervalos

De manera intuitiva, un intervalo es un subconjunto de $\mathbb{R}$ *de una sola pieza* o que no tiene *huecos*. Por ejemplo, los conjuntos $\{0, 1\}$ y $[0, 1] \cup [2, +\infty[$ poseen dos piezas y el conjunto $[0, 1[\cup]1, 2]$ tiene un hueco en 1; en tales casos no se trata de intervalos en $\mathbb{R}$.

Formalmente, un **intervalo** es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que cualquier número entre dos elementos del subconjunto también pertenece a dicho subconjunto. Es decir, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si cumple

$$\forall x, z \in I, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad [x < y < z \longrightarrow y \in I].$$

Cuando un subconjunto de $\mathbb{R}$ posee un solo elemento o es vacío, la definición de intervalo se cumple dado que el antecedente es trivialmente falso, lo que implica la veracidad de la condicional. Estos casos particulares son llamados **intervalos degenerados**.

Para intervalos no degenerados se encuentran distintos tipos, los cuales dependen de sus extremos. Existen tres tipos de extremos por la izquierda.

- Cerrado: si el intervalo incluye el extremo izquierdo, en términos de desigualdades se tiene $a \leq x$ para todo elemento x del intervalo. La notación que se usa es “[$a, \dots$ ”.

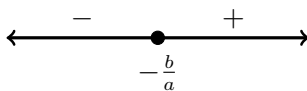
- Abierto: si el intervalo no incluye el extremo izquierdo, en términos de desigualdades se tiene $a < x$ para todo elemento x del intervalo. La notación a usar es “ $]a, \dots$ ” o “ $(a, \dots$ ”.
- No acotado: si el intervalo no tiene restricción por la izquierda o no es acotado inferiormente. La notación es “ $]-\infty, \dots$ ” o “ $(-\infty, \dots$ ”.

De manera similar es posible describir los tres tipos de extremos por la derecha de un intervalo. En total son entonces $3 \times 3 = 9$ tipos de intervalos no degenerados. Por ejemplo, si $a < b$, el intervalo

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

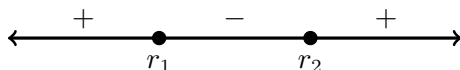
es no degenerado y contiene un número infinito de elementos. El intervalo se dice **abierto** si ambos extremos son abiertos o no acotados. El intervalo se dice **cerrado** si ambos extremos son cerrados o no acotados. Así, el intervalo $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ es abierto y cerrado a la vez. El conjunto vacío es considerado también un intervalo abierto y cerrado. El intervalo degenerado $\{a\}$ es solo cerrado porque se puede expresar como $\{a\} = [a, a]$. Cuando ambos extremos son cerrados, el intervalo se dice **compacto**.

El **método de zonas** permite determinar el conjunto solución de una inecuación polinomial en términos de intervalos, siempre y cuando sea posible factorizar el polinomio. Para el polinomio $p(x) = ax + b$, asumiendo que a es positivo, el conjunto solución de $p(x) \geq 0$ es $[-b/a, +\infty)$. El conjunto solución de $p(x) \leq 0$ es $(-\infty, -b/a]$. Esto se puede visualizar en la recta real de la siguiente manera:



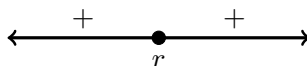
En la figura previa es posible apreciar dos zonas en la recta real: la izquierda y la derecha. En cada una se aprecia el signo del polinomio $p(x)$. Si la inecuación fuese estricta, los extremos de los conjuntos solución serían abiertos.

Para un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a > 0$, si el discriminante (definido en la página 41) es positivo, esto es $\Delta > 0$, entonces se encuentran dos raíces distintas r_1 y r_2 , las cuales pueden ser ordenadas, por decir $r_1 < r_2$. Haciendo un análisis de signos similar al anterior para $p(x)$, se obtienen tres zonas



De esta manera, el conjunto solución de la inecuación $p(x) \geq 0$ es $(-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty)$, y de la inecuación $p(x) \leq 0$ es $[r_1, r_2]$. Si la inecuación fuese estricta, los extremos cerrados del conjunto solución deben ser cambiados por extremos abiertos.

Cuando $\Delta = 0$, las raíces son repetidas. En este caso $r = -b/(2a)$, y existen dos zonas con los mismos signos



El conjunto solución de la inecuación $p(x) \geq 0$ es $\mathbb{R}$ y de la inecuación $p(x) \leq 0$ es $\{r\}$. Si la inecuación es estricta, el primer conjunto solución cambia a $\mathbb{R} - \{r\}$ y el segundo sería el conjunto vacío.

Para $\Delta < 0$, el conjunto solución de la inecuación $p(x) \geq 0$ es $\mathbb{R}$ y de la inecuación $p(x) \leq 0$ es el conjunto vacío. En este caso se tiene una única zona de signo positivo formada por toda la recta real dado que no existen raíces. Si la desigualdad fuese estricta, el conjunto solución no cambia.

Por otro lado, si la constante a fuese negativa, hay dos opciones. Se puede hacer el mismo análisis anterior para $p(x)$ pero con los signos opuestos, o la inecuación se puede multiplicar por -1 para que el coeficiente del término cuadrático de $p(x)$ sea positivo y aplicar el criterio anterior. Para polinomios $p(x)$ de grado mayor que dos se puede efectuar un análisis de signos por zonas similares con las raíces de dicho polinomio. Los cambios de signo de $p(x)$ se dan alrededor de las raíces cuyo factor lineal correspondiente en el polinomio esté elevado a una potencia impar. En el caso de potencia par, el signo de $p(x)$ no cambia como en el caso en que $\Delta = 0$ como se describió anteriormente.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real $a \in \mathbb{R}$ se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto cumple la igualdad $|a| = \sqrt{a^2}$. Por ello, es posible calcular el conjunto solución de una ecuación que involucra el valor absoluto usando cuadráticas. Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación $|ax + b| = c$, donde $c > 0$, es el mismo que el conjunto solución de la ecuación $(ax + b)^2 = c^2$.

En el caso de inecuaciones se puede mostrar que para $a > 0$

$$\bullet \quad |x| < a \quad \leftrightarrow \quad -a < x < a$$

$$\bullet \quad |x| > a \quad \leftrightarrow \quad x > a \vee x < -a.$$

El valor absoluto cumple una propiedad importante llamada **desigualdad triangular**.
Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

El valor absoluto permite definir la **distancia** entre dos puntos $a, b \in \mathbb{R}$ en la recta real como

$$d(a, b) = |b - a|.$$

La distancia satisface las siguientes propiedades. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces

- $d(a, b) \geq 0$
- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) = 0 \leftrightarrow a = b$
- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

Problemas

1. (2012-I PC2-3)

a) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\left| \frac{3x + 5}{x} \right| \geq 2.$$

2. (2013-0 PC2-1)

a) Brinde la definición de intervalo.

b) Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justifique.

i) Si $A = [-\pi, \pi]$ y $B = [\pi, \infty[$ entonces $A \Delta B^c =]-\infty, -\pi[$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{x^2}$

iii) $\forall a \in \mathbb{R}, |a + 1| = |a| + 1.$

3. (2013-0 PC2-2)

b) Determine el conjunto solución de la inecuación $x^2 + \left(\frac{a-b}{ab}\right)x - \frac{1}{ab} \geq 0$,
sabiendo que $0 < a < b$.

- c) Determine los valores de k para los cuales el polinomio $p(x) = kx^2 + x + k$ posee dos raíces reales distintas.

4. (2013-0 PC2-4)

- a) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $-|x| \leq x \leq |x|$.

5. (2013-0 EP-2)

- b) Resolver:

$$|x - 3| > |x - 1|.$$

6. (2013-I PC2-1) Responda las siguientes preguntas, justificando su respuesta.

- a) Si $I \subset \mathbb{R}$ y $J \subset \mathbb{R}$ son intervalos, ¿se puede afirmar que $I \triangle J$ es un intervalo?
 b) Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $J \subset \mathbb{R}$ intervalos. Si $I \cup J$ es un intervalo, ¿necesariamente $I \cap J \neq \emptyset$?

7. (2013-I PC2-2)

- a) Defina el valor absoluto de un número real.
 b) Enuncie el Teorema de la desigualdad triangular.
 c) Pruebe que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene la inecuación

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

8. (2013-I PC2-3)

- a) Resolver:

$$\left| \frac{x^2 + 5x}{x + 2} \right| = \frac{6}{-x - 2}.$$

- b) Sean $a \neq 0$ y b constantes. Determine el conjunto de posibles valores de b si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^2 x^2 + 2ax + b^2 > 0.$$

9. (2013-II PC2-2)

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b < a < 0$. Resuelva la siguiente inecuación:

$$3b(a - 2x)(x + b) \leq 0$$

y exprese el conjunto solución como un intervalo o unión de intervalos.

10. (2013-II PC2-3)

a) Resuelva la siguiente inecuación:

$$-1 < |x| - 8x < 1$$

y exprese el conjunto solución como un intervalo o unión de intervalos.

b) Pruebe que: $\forall a, b \in \mathbb{R} : ||a| - |b|| \leq |a + b|$.

11. (2014-0 PC2-2)

a) Justifique por qué el siguiente enunciado es falso.

iii) El conjunto $B = [0, 3] \cup [\pi, 5]$ es un intervalo.b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$. Si $C =]-\infty, a]$ y $D = [-a, b]$, calcule $C \triangle D$ y exprese el resultado como una unión de intervalos.

12. (2014-0 PC2-3)

a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ puntos en la recta real. Demuestre que

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c).$$

b) Halle los valores de a tal que el conjunto solución de la siguiente inecuación es $\mathbb{R}$.

$$x^2 - 2x + 1 + a^2 + a > 2.$$

13. (2014-0 PC2-4)

a) Indique el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\left| \frac{2x+1}{x} \right| \leq 1.$$

14. (2014-0 EP-1) Responda justificando su respuesta.

b) Halle los números reales x que satisfacen: $|x-1||x+2| > 4$.

15. (2014-0 EP-2) Conteste.

b) Sea $a > 0$. Halle los números reales x que satisfacen: $(a-x)x(x+a) < 0$.
Expresé el conjunto solución como intervalo o unión de intervalos.

16. (2014-I PC2-1) Justifique por qué el siguiente enunciado es falso.

a) El conjunto solución de $|x-2| + |x-3| = 0$ es $\{2, 3\}$.

17. (2014-I PC2-4)

c) Calcule el conjunto solución de la ecuación $\frac{|x^2 + \pi| - (3 + x^2)}{x(|x| - \sqrt{5})} < 0$ expresándolo como unión de intervalos.

18. (2014-I EP-2) En cada caso calcule el conjunto solución.

a) $||2x-4|+1| = x-4$

b) $|3|x-1|-1| \leq 2x-4$

19. (2014-II PC1-3)

a) Resuelva la inecuación: $\left| \frac{x-3}{x-1} \right| \leq \frac{6}{x-1}.$

20. (2014-II PC1-4)

- a) Un artesano fabrica y vende collares. El material para cada collar le cuesta \$6 y ha estado vendiendo 20 por día a \$ 10 cada uno. Si descubre que por cada incremento de un dólar perdería dos ventas por día, determine el precio máximo que debe establecer para los collares con el fin de obtener una ganancia diaria de por lo menos \$ 96.

21. (2014-II EP-1) Justifique por qué el siguiente enunciado es falso.

- c) Sean r y s números reales: si $r > s$, entonces $|r| + 1000 > |s|$.

22. (2015-0 PC1-1) Justificar la falsedad de la siguiente proposición.

- a) Sea $I \subset \mathbb{R}$, I es un intervalo si $\forall a, b \in I, \forall c \in \mathbb{R}, [a < b < c \rightarrow c \in I]$.

23. (2015-0 PC1-4)

- a) Dar el conjunto solución de

$$|3x - 1| < 2x + 5.$$

24. (2015-0 EP-3) En cada caso calcule el conjunto solución respecto a la variable x .

- a) $\llbracket \llbracket 2x + 1 \rrbracket + 1 \rrbracket = \frac{x}{7} + 5$
 b) $|4(|x - 2|) - 10| \leq 2x - 4$
 c) $(x + 3a)(2b - x) \geq 0. (a < b < 0)$

25. (2015-I PC1-1)

- a) Justifique por qué las siguientes proposiciones son falsas:
 i) Si I_1 es un intervalo e I_2 es un intervalo, entonces $(I_1 \cup I_2)$ es un intervalo.
 iii) $\forall x \in \mathbb{R} : |x^3 + 1| = x^3 + 1$.

26. (2015-I PC1-3)

- a) Determine el conjunto solución: $||x| + 3| > e$.
 b) Exprese el conjunto solución de $(\pi - x) \cdot x \cdot (x + \pi) < 0$ como intervalo o unión de intervalos.

27. (2015-I PC2-2) Supongamos que el costo de producir q unidades de un producto es

$$C(q) = 20q + \frac{8q^3 - 59q^2}{q^2 + 4}$$

medido en dólares, donde $q \in \mathbb{N}$. Definimos el *costo promedio por unidad* para una producción de q unidades por

$$\overline{C}(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

- a) Calcule el costo promedio por unidad cuando se produce la primera unidad.
- c) Determine a partir de qué nivel de producción el costo promedio por unidad es por lo menos 25 dólares por unidad.

28. (2015-II PC1-3)

- a) Si $r \in \mathbb{R}$, determine el conjunto solución de $x^2 - (r + 6)x + 6r \geq 0$.

29. (2015-II PC1-4)

- a) Demuestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene la inecuación

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

- b) Javier va en busca de trabajo al emporio comercial Amarra y se le presentan dos opciones de trabajo con los siguientes salarios.

Primera opción: un salario fijo mensual de 400 dólares más el 2 % del total de ventas que realice durante el mes.

Segunda opción: un salario fijo mensual de 500 dólares más el 1,5 % del total de ventas que realice durante el mes.

Si Javier sabe que puede hacer un total de v dólares en ventas donde $v \in [0, 40\,000]$.

¿Qué opción de trabajo le conviene más a Javier? (considere diferentes casos)

30. (2015-II EP-1) Determine el conjunto solución:

a) $3\llbracket x \rrbracket^2 - 6\llbracket x \rrbracket = 5\llbracket x \rrbracket - 10$

b) $|x - 2||x| > 3$

31. (2016-0 PC1-1) Justifique por qué el siguiente enunciado es falso:

c) Si $A \subset \mathbb{R}$ y $B \subset \mathbb{R}$ son intervalos, entonces $(A \cap B)^C$ es un intervalo.

32. (2016-0 PC1-3)

a) Según reglamentación del control de calidad, se permite que el peso registrado en la etiqueta de una bolsa de arroz sea distinta del peso real, pero tal diferencia en valor absoluto no debe superar al 4 % del peso indicado en la bolsa. ¿Cuál es el valor aceptable para el peso real “a” de una bolsa cuya etiqueta dice que contiene 800 gramos de arroz?

b) Escriba por extensión el siguiente conjunto:

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x = (-3)^n, n \in \mathbb{N}, |n^2 + 3| \leq n + 9\}.$$

33. (2016-0 PC1-4)

a) Exprese el conjunto solución de:

$$abx^2 + a^2x \leq 2ab + 2b^2x, \quad a < b < 0,$$

como un intervalo o unión de intervalos.

34. (2016-0 EP-1) Conteste:

a) Si $\frac{|x^2 + \pi| - (3 + x^2)}{|x| - e} < 0$, exprese el conjunto solución como un intervalo o unión de intervalos.

b) Sea $p(x) = x \cdot (\alpha - x) \cdot (x - \beta)$ un polinomio de tercer grado, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha < 0 < \beta$.

i) Halle los números reales x que satisfacen: $p(x) > 0$.

iii) Halle los números reales x que satisfacen: $p(x) < 0$.

35. (2016-I PC1-1)

b) Justifique por qué son falsos los siguientes enunciados:

- i) Si $I \cap J$ y J son intervalos, entonces I es un intervalo.
 ii) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $\min\{a, b\} < |a|$.

36. (2016-I PC1-3)

- a) Determine el conjunto de los posibles valores de a tales que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left[\left(\frac{7 + |a|}{4} \right) x^2 + 2\sqrt{5|a|}x + 3 + |a| > 0 \right].$$

- b) Indique el conjunto solución de: $\left\lfloor \frac{1}{2} - x \right\rfloor + \sqrt{1 - 3 \left\lfloor \frac{1}{2} - x \right\rfloor} = -3$.

37. (2016-II PC1-2)

- a) Determine el conjunto solución de la inecuación: $4|x + 2| < 2x + 10$.
 b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a > b > 0$. Dado el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ab(x^2 + 1) + (a^2 + b^2)x \leq 0\},$$

determine A^c .

- c) Sea $a \in \mathbb{R}$, señale el conjunto solución de: $\llbracket x^2 + 2ax + a^2 \rrbracket = 0$.

38. (2017-0 PC1-1) Justifique la falsedad de los siguientes enunciados:

- b) $\left\{ x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x} \right\} \subset]0, 1[$.
 d) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 + x + 1| > x\} \neq \mathbb{R}$.

39. (2017-0 PC1-3) Sean $A =]-\pi, e[$, $B = [\sqrt{2}, \pi[$, $C =]-\infty, \pi[$ y $D = [2, +\infty[$.

- a) Determine los siguientes conjuntos:

i) $A \cap B =$ _____.

ii) $B - D =$ _____.

iii) $C - A =$ _____.

$$iv) C \Delta D = \underline{\hspace{2cm}}.$$

b) Complete la siguiente tabla con SÍ o NO:

El conjunto	¿es un intervalo?	¿es acotado superiormente?
$A \cap B$	_____	_____
$B - D$	_____	_____
$C - A$	_____	_____
$C \Delta D$	_____	_____

40. (2017-0 PC1-4)

Un estilista atiende en promedio a 240 clientes por semana cobrándoles 8 soles por corte. Por cada incremento de un sol en el precio, el estilista pierde 16 clientes. ¿Qué precio máximo, por corte, deberá fijar el estilista para obtener ingresos semanales de al menos 2080 soles? Recuerde que el ingreso es igual al precio unitario multiplicado por la cantidad.

41. (2017-I PC1-2) Calcule el conjunto solución y expréselo como un intervalo o unión de intervalos, de ser posible:

$$a) x - \llbracket x \rrbracket = 1.$$

$$b) 8x^2 - 4x^3 - 3x > 0.$$

$$c) \left| \frac{x+1}{x-2} \right| > 2.$$

42. (2017-I PC1-3)

- a) La práctica de algún deporte está asociada a una buena salud. Por esta misma razón, las personas deberían limitar sus esfuerzos al realizar alguna actividad física, para no superar una determinada frecuencia cardíaca. Durante años, la relación entre la máxima frecuencia cardíaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula:

$$\text{Max}(f) = 220 - E; E \in \mathbb{R},$$

donde $\text{Max}(f)$ = máxima frecuencia cardíaca recomendada ; E = edad.

Investigaciones recientes han demostrado que esta fórmula debería modificarse ligeramente. La nueva fórmula es la siguiente:

$$\text{Max}(f) = 208 - (0,7 \cdot E); E \in \mathbb{R}.$$

i) Resolver: $208 - (0,7 \cdot E) > 220 - E$.

ii) Interprete el resultado obtenido al resolver la inecuación.

43. (2018-0 PC2-1) Complete los espacios en blanco según corresponda.

c) El conjunto solución de la ecuación $|x + 1| + |x - 1| = 0$ es ____.

e) Sean $A =]0, 5[$, $B = [-1, 1[$ y $C =]-3, 1[$. Entonces

$$\sup(A \cap C) = \text{___} \text{ y } \sup(C - B) = \text{___}$$

44. (2018-0 PC2-4)

- a) Sea $c \in \mathbb{R}$. Dada la siguiente inecuación:

$$2x + 1 \leq (c + x)(c - x),$$

determine el supremo del conjunto solución de la inecuación en términos de c . Además, calcule el o los valores de c de forma que 1 sea dicho supremo.

- b) Resolver:

i) $\llbracket |x| - x \rrbracket = -1$.

ii) $||x - 2| - |x| + x| = x$.

45. (2018-0 EP-2)

a) Resuelva: $1 + \sqrt{\lfloor x \rfloor - x} \geq |x| - 1$.

46. (2018-I PC1-2)

a) Sea $p(x) = x^2 - x - 4$ un polinomio cuadrático.

i) Completando cuadrados, exprese $p(x)$ como el producto de dos factores lineales.

ii) Hallar los números reales x , tales que $p(x) > 0$.

b) Hallar el conjunto solución de: $2 - 4^{|x-1|} = 0$.

47. (2018-I PC1-3)

b) Sea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x^2 + 2| - (e + x^2)}{|x| - \pi} < 0 \right\}$. Exprese el conjunto A como un intervalo o unión de intervalos.

48. (2018-II PC1-2)

a) Determine el conjunto $A \times B$ por extensión, si $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| = 3x\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} : |x^2 - x| \leq x\}$.

49. (2018-II PC1-4) PESCAUP es una empresa que produce y vende harina de pescado. Se sabe que la utilidad, en miles de dólares, por la producción y venta de q toneladas de harina de pescado está expresada por la función $U :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$U(q) = -\frac{10}{q+1} + q - 2$$

y que la utilidad promedio está definida por $\frac{U(q)}{q}$, $q > 0$. Cuando la utilidad es positiva, se dice que hay ganancia; y cuando es negativa, que hay pérdida.

a) Determine las cantidades de toneladas de harina de pescado que debe producir y vender la empresa para obtener ganancia. Exprese el resultado como un intervalo o unión de intervalos.

- b) Determine la mayor cantidad de toneladas de harina de pescado que se deben producir y vender para que la utilidad promedio no sea mayor a 500 dólares.

50. (2019-0 PC2-1) Complete lo siguiente:

- a) Si $x < \frac{1}{2}$, el valor simplificado de la expresión

$$A = ||2x - 1| + 1 + x^2| + 2x + 1 + 5 - x^2$$

es igual a ____.

- c) Sean $A =] - e, \pi]$, $B =]\sqrt{2}, \pi^2]$ y $C = [-2e, 2\pi]$. Determine los siguientes conjuntos:

$$A - B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B - C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$$

51. (2019-0 PC2-2)

- a) Si $a < 0 < b$, dar el conjunto solución de

$$a^2x^2 \leq abx + 2b^2.$$

- c) Dar el conjunto solución de

$$\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \geq \frac{1}{2}.$$

52. (2019-0 PC2-3)

- b) Partiendo de la propiedad

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, xy \leq |xy|,$$

demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

- c) Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-2)^2(x-3)(x-4)^2 \leq 0\}$, calcule $\inf(A) + \sup(A)$.

53. (2019-0 PC2-4)

- a) La empresa Gaslima suministra gas familiar a residencias, cobrando una tarifa fija de 18 soles y un adicional de 0.25 soles por cada litro de gas consumido. La familia Flores consumió 80 litros de gas el mes pasado, y decide que la diferencia entre la facturación del mes pasado y la de este mes no supere, en valor absoluto, los 4 soles ¿Cuál es el consumo de gas que debe realizar la familia Flores el presente mes?

54. (2019-I PC1-1)

- a) Complete:

iii) Sea $a \neq 0$. El conjunto solución de la inecuación cuadrática $(ax+b)^2 \leq 0$ es _____.

iv) Si $\overline{\llbracket 1-x \rrbracket} \neq 0$, entonces $x \in$ _____.

v) La ecuación cuadrática $x^2 - |b|x + 6 = 0$ posee dos raíces: 2 y 3. Los valores de b son _____ y _____.

55. (2019-I PC1-2) Sean los conjuntos $A, B \subset \mathbb{Z}$ definidos por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{|x|} - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad x \leq 10 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \left\lceil \frac{x}{4} + \left\lfloor \frac{x}{4} + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil \right\rfloor \right\rceil = 3 \right\}$$

- a) Determine por extensión el conjunto A .
- b) Desarrolle por extensión el conjuntos B . (Sugerencia: $\llbracket x+n \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$)
- c) Sea R una relación de $A \times B$ definida por:

$$R = \{(x, y) \in A \times B : x \geq 2y\},$$

determine por extensión la relación R .

56. (2019-II PC1-1)

a) Considerando $\mathbb{R}$ como conjunto universo, complete:i) El conjunto solución de $x^4 + x^3 \geq 2x^2$ es: _____.ii) Si $x = 1$ es una solución de la inecuación $a^2x^5 - ax^3 - 3 < 0$, entonces $a \in$ _____.iii) El conjunto solución de $||x| - 1| = \frac{1}{3}$ es _____.iv) Si la inecuación $|x| < |b| - 1$ tiene conjunto solución vacío, entonces $b \in$ _____.b) Sean $A =]0, 3[\cap \mathbb{Q}$ y $B =]0, 3] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Justifique por qué son falsos los siguientes enunciados:i) $M = 2.9$ es una cota superior del conjunto A .ii) $m = 3$ es el máximo del conjunto B .57. (2019-II PC1-3) Para cada número real $r > 0$, se define el conjunto:

$$E_r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| + |y| < r\}$$

a) Escriba por extensión el conjunto E_2 .

b) Justifique por qué el siguiente enunciado es falso:

Para todo $r > 0$ y $s > 0$ se cumple que si $r \neq s$, entonces $E_r \neq E_s$.c) Pruebe que para todo $r > s > 0$ se cumple que $E_s \subset E_r$.

58. (2019-II PC1-4)

a) Si $x \geq 0$, determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\llbracket 2x \rrbracket^2 + 6 \llbracket x - |x| \rrbracket = 16$$

b) Si $x < 0$, determine el conjunto solución de la ecuación:

$$\llbracket 2x \rrbracket^2 + 6 \llbracket x - |x| \rrbracket = 16$$

c) Exprese como un intervalo o unión de intervalos el conjunto:

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \llbracket 2x \rrbracket^2 + 6 \llbracket x - |x| \rrbracket = 16 \right\}.$$

5

Soluciones

Argumentos y Cuantificadores

1. (2012-I PC1-1) *Solución.*

a) “Toda persona tiene una única carrera universitaria”. La tabla nos dice que esto es verdadero.

b)

$$\exists x \in A, \forall z \in C, [\neg Q(x, z)].$$

Falso porque todas las personas tienen al menos un pasatiempo.

c)

$$\exists! x \in A, \exists! z \in C, [Q(x, z)].$$

2. (2012-I PC1-3) *Solución.*

a) Si el diccionario es

- | | | |
|-----|---|--|
| p | = | “El dólar aumenta su valor”. |
| q | = | “Las empresas que exportan y abastecen
al mercado interno se beneficiarán”. |
| r | = | “El Estado recaudará suficientes impuestos”. |

Entonces, la forma lógica formal es

$$p \rightarrow q, \neg q \rightarrow \neg r, p \vee r, \vdash q.$$

- b) Usando la definición de argumento válido asumimos que las premisas son verdaderas. Sabemos que $p \vee r$ es verdadero, entonces tenemos dos casos. Si p es verdadero y r es falso, como $p \rightarrow q$ es verdadero, entonces q es verdadero. Los valores de q y r son consistentes con el supuesto que $\neg q \rightarrow \neg r$ es verdadero. Si p es falso y r es verdadero, como $\neg q \rightarrow \neg r$ es verdadero, esto significa que q debe ser verdadero. Los valores de p y q son consistentes con el supuesto que $p \rightarrow q$ es verdadero. En ambos casos expuestos, q es verdadero y el argumento es válido.

3. (2013-0 PC1-1) *Solución.*

- a) La disyunción exclusiva de las proposiciones simples p, q es la proposición $p \vee q$ que es verdadera solo cuando una de las proposiciones simples es verdadera y la otra es falsa.

b)

$$p \vee q \equiv \neg(p \leftrightarrow q).$$

- c) De la parte (b) se tiene que

$$\neg[p \leftrightarrow (q \wedge r)] \equiv p \vee (q \wedge r).$$

Entonces la negación es:

“O estas vacaciones viajo a New York, o saco excelentes notas en este ciclo y no me matriculo en el ciclo de verano”.

4. (2013-0 PC1-4) *Solución.*

a)

p = Las elecciones son mañana.

q = Hay empate técnico.

r = Se convoca a nuevas elecciones.

Las proposiciones en su forma lógico formal son:

- $(p \wedge q) \rightarrow r.$

$$\bullet \neg r \rightarrow (\neg q \vee \neg p).$$

b)

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \rightarrow r &\equiv \neg r \rightarrow \neg(p \wedge q) \\ &\equiv \neg r \rightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ &\equiv \neg r \rightarrow (\neg q \vee \neg p) \end{aligned}$$

Por lo tanto son equivalentes. Otra forma de verificar la equivalencia es comparando sus tablas de verdad.

5. (2013-0 PC1-5) *Solución.*

a) Del diccionario

$U = \{\text{personas de la región de Junín}\}.$

$p(x) = x$ usa bloqueador.

$q(x) = x$ no sufre consecuencias de la alta radiación.

$r(x) = x$ es de avanzada edad.

Se obtiene el argumento

$$(\forall x \in U, [p(x) \rightarrow q(x)]) , (\exists x \in U, [r(x) \wedge p(x)]) \vdash \neg(\forall x \in U, [\neg q(x)]).$$

b) Asumiendo que las premisas son verdaderas, se tiene que

$$\forall x \in U, [p(x) \rightarrow q(x)] \wedge (r(a) \wedge p(a)) \text{ para algún } a \in U$$

es verdadero, en particular

$$(p(a) \rightarrow q(a)) \wedge (r(a) \wedge p(a))$$

es verdadero para algún $a \in U$. Entonces $p(a)$ es verdadero, lo que implica que $q(a)$ es verdadero para algún $a \in U$. Por lo tanto

$$\exists x \in U, [q(x)] \equiv \neg(\forall x \in U, [\neg q(x)])$$

es verdadero y el argumento es válido.

6. (2013-I PC1-3) *Solución.*

- a) Es el acto de mostrar la veracidad de una proposición asumiendo la veracidad de otras.
- b) El cuantificador universal se define como la expresión “para todo”. El cuantificador existencial se define como la expresión “existe”.
- c) Dos proposiciones P y Q son equivalentes cuando tienen la misma tabla de verdad.
- d)

$$i) \exists M \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{R}, [(M > 0 \wedge N > 0 \wedge x \in \mathbb{R} \wedge x > N) \wedge f(x) \leq M].$$

$$ii) \forall x \in \mathbb{R}, [x > 0 \vee x < 0 \vee x = 0].$$

7. (2013-I PC1-5) *Solución.*

- a) Se define U como los participantes en la premiación del Oscar y sean

$$p(x) = x \text{ es despistado,}$$

$$q(x) = x \text{ es entretenido,}$$

$$r(x) = x \text{ gana el Oscar,}$$

$$s(x) = x \text{ habla ininterrumpidamente.}$$

De aquí el argumento en su forma lógica formal es el siguiente:

$$\forall x \in U, [p(x) \rightarrow \neg q(x)];$$

$$\forall x \in U, [r(x) \rightarrow \neg s(x)];$$

$$\forall x \in U, [\neg q(x) \rightarrow s(x)]$$

$$\vdash \exists x \in U, [p(x) \wedge r(x)].$$

- b) Supongamos que las premisas son verdaderas, es decir

$$\forall x \in U, [p(x) \rightarrow \neg q(x)] \equiv V \quad (1)$$

$$\forall x \in U, [r(x) \rightarrow \neg s(x)] \equiv V \quad (2)$$

$$\forall x \in U, [\neg q(x) \rightarrow s(x)] \equiv V \quad (3)$$

De (1) y (3), podemos inferir que

$$\forall x \in U, [p(x) \rightarrow s(x)] \equiv V \quad (4)$$

Por otro lado, usando que $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ tenemos que (2) es equivalente a

$$\forall x \in U, [s(x) \rightarrow \neg r(x)] \equiv V \quad (5)$$

De (4) y (5), podemos inferir que

$$\forall x \in U, [p(x) \rightarrow \neg r(x)] \equiv V$$

luego

$$\neg (\forall x \in U, [p(x) \rightarrow \neg r(x)]) \equiv F$$

$$\exists x \in U, [p(x) \wedge r(x)] \equiv F.$$

Por lo tanto, el argumento no es válido.

8. (2013-I EP-2) *Solución.*

a) El recíproco es la proposición

$$\forall f \in U, [Q(f) \longrightarrow P(f)]$$

y su negación es equivalente a

$$\exists f \in U, [Q(f) \wedge \neg P(f)]$$

que en lenguaje coloquial significa: “Existen funciones que se estudian en Mate 2 que son continuas y no diferenciables”.

b)

$p \rightarrow q$	(hipótesis)
$\neg q$	(hipótesis)
$\neg p$	(reducción al absurdo)
$\neg p \rightarrow \neg r$	(hipótesis)
$\neg r$	(Modus ponens)
$r \vee s$	hipótesis
s	Silogismo disyuntivo
$\therefore s \vee t$	Adición

9. (2013-II PC1-4) *Solución.*

Si consideramos

p = Sandra tiene ojos azules.

q = Pathy tiene ojos azules.

r = Gaby tiene ojos azules.

entonces,

Gaby dice: $\neg p \rightarrow \neg q$.

Pathy dice: $q \wedge (p \vee r)$.

	p	q	r	$\neg p$	$\rightarrow$	$\neg q$	q	$\wedge$	$(p \vee r)$
1	V	V	V		V		F		F
2	V	V	F		V		V		V
3	V	F	V		V		F		F
4	V	F	F		V		F		V
5	F	V	V		F		V		V
6	F	V	F		F		F		F
7	F	F	V		V		F		V
8	F	F	F		V		F		F

- a) Si Gaby y Pathy dicen la verdad, observamos en la tabla que esto ocurre en la fila 2; por lo tanto, Sandra y Pathy tienen ojos azules, pero Gaby no.
- b) Si Gaby y Pathy mienten, observamos en la tabla que esto ocurre en la fila 6; por ende, Pathy tiene ojos azules, pero Sandra y Gaby no.
- c) Si solo Sandra tiene ojos azules, observamos en la tabla que esto ocurre en la fila 4; por lo tanto, Pathy miente.

10. (2013-II PC1-5) *Solución.*

a) Del diccionario

U = Conjunto de economistas del país.

p = ocurre una baja en los precios del petróleo.

$q(x)$ = x reduce su estimación de la tasa de interés.

$r(x)$ = x aumenta su estimación de la tasa de crecimiento.

se obtiene el argumento

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow \forall x \in U, [q(x) \vee r(x)]; \\
 \neg p \leftrightarrow \exists x \in U, [q(x)]; \\
 p \\
 \hline
 \vdash \exists x \in U, [r(x)].
 \end{array}$$

- b) De la segunda y la tercera premisa se tiene $\forall x \in U, [\neg q(x)]$. De la primera y la tercera premisa se tiene $\forall x \in U, [q(x) \vee r(x)]$. Por lo tanto, $\forall x \in U, [r(x)]$. En particular $\exists x \in U, [r(x)]$. Es decir, el argumento es válido.

11. (2014-0 PC1-1) *Solución.*

- a) Si p y q son proposiciones, la proposición bicondicional se define como “ p si y solo si q ” y se denota por $p \leftrightarrow q$.
- b) Un argumento es válido cuando, asumiendo que todas las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es necesariamente.
- c) Para la primera inferencia se tiene:

$$\begin{array}{l}
 \neg q \leftrightarrow p \\
 \neg q \leftrightarrow r \\
 \neg r \leftrightarrow s \vee p \\
 \hline
 \therefore \underline{s}
 \end{array}$$

De las 2 primeras premisas se tiene

$$p \leftrightarrow r \equiv \neg p \leftrightarrow \neg r.$$

Juntando ello con la tercera premisa se tiene $\neg p \leftrightarrow s \vee p$. Existen dos casos. Si p es verdadero, se obtiene una contradicción. Si p es falso, la última proposición implica que s es verdadero.

Para la segunda inferencia se tiene:

$$\begin{array}{l}
 p \vee s \\
 s \rightarrow p \\
 \hline
 \therefore \underline{\neg s \wedge p}
 \end{array}$$

Sabemos que

$$s \leftrightarrow p \equiv s \longrightarrow p \wedge p \longrightarrow s.$$

Entonces, la equivalencia de la disyunción exclusiva es $\neg(s \longrightarrow p) \vee \neg(p \longrightarrow s)$. Como la segunda premisa es $s \longrightarrow p$, concluimos $\neg(p \longrightarrow s) \equiv \neg s \wedge p$.

d) El enunciado está en la forma

$$(q \wedge r) \rightarrow p \equiv \neg(q \wedge r) \vee p.$$

La negación es:

$$\neg(\neg(q \wedge r) \vee p) = q \wedge r \wedge \neg p.$$

Por lo tanto, la negación pedida es: “*Me levanto temprano y no voy a la playa y mañana no hago deporte.*”

12. (2014-0 PC1-3) Solución.

a) Sean

C : Los futbolistas en la premiación del Balón de Oro realizado en el Kongresshaus de Zürich

$p(x)$ = x cumple con las reglas dadas por la FIFA

$q(x)$ = x gana el Balón de Oro

$r(x)$ = x no es preferido por Joseph Blatter.

De aquí, el argumento en su forma lógica formal es el siguiente:

$$(\forall x \in C, [p(x) \rightarrow q(x)]), (\forall x \in C, [\neg p(x) \rightarrow r(x)]), (\exists x \in C, [\neg r(x)]) \\ \vdash \exists x \in C, [q(x)].$$

b) Supongamos que las premisas son verdaderas, es decir:

$$\forall x \in C, [p(x) \rightarrow q(x)] \equiv V \quad (6)$$

$$\forall x \in C, [\neg p(x) \rightarrow r(x)] \equiv V \quad (7)$$

$$\exists x \in C, [\neg r(x)] \equiv V \quad (8)$$

Por otro lado, de $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ tenemos que (6) es equivalente a

$$\forall x \in C, [\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)] \equiv V \quad (9)$$

De (7) y (9), podemos inferir que

$$\forall x \in C, [\neg q(x) \rightarrow r(x)] \equiv V \quad (10)$$

de $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ tenemos que

$$\forall x \in C, [\neg r(x) \rightarrow q(x)] \equiv V \quad (11)$$

Luego, de (8) y (11) se tiene que $\exists x \in C, [q(x)] \equiv V$. Por lo tanto, el argumento es válido.

13. (2014-0 PC1-4) *Solución.*

b) Sean

- $p =$ apruebo la PC1 de Mate I
- $q =$ estudié con esmero
- $r =$ Mi madre ha dejado una ofrenda a San Judas Tadeo.

De aquí, el argumento en su forma lógica formal es el siguiente:

$$p \rightarrow (q \vee r), \neg r \vdash q.$$

Veamos que el argumento no es válido calculando los valores de p, q, r que lo demuestran. Asumiendo que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, obtenemos que $r \equiv F$ y $q \equiv F$. Para que $p \rightarrow (q \vee r)$ sea verdadero, es necesario que p sea falso. Por ende, para los valores encontrados, el argumento es inválido.

14. (2014-0 EP-1) *Solución.*

- a) Del enunciado se puede tomar como conjunto universal el conjunto C de personas. Definimos $T(x) = "x$ estima a Santo Tomás", $R(x) = "x$ estima a Russell" y $K(x) = "x$ estima a Kant". Deseamos mostrar que el argumento

$$\begin{aligned} &\forall x \in C, [T(x) \rightarrow \neg K(x)] \\ &\forall x \in C, [K(x) \vee R(x)] \\ &\exists x \in C, [\neg R(x)] \\ \vdash &\exists x \in C, [\neg T(x)] \end{aligned}$$

es válido. De la tercera premisa, existe $a \in C$ tal que $\neg R(a)$. De la segunda premisa, se obtiene $K(a) \vee R(a)$, pero como $\neg R(a)$, entonces se sigue $K(a)$. De la primera premisa, $T(a) \rightarrow \neg K(a)$, lo cual implica $K(a) \rightarrow \neg T(a)$. Por lo tanto, se deduce $\neg T(a)$, es decir, existe $x \in C$ tal que $\neg T(x)$ y el argumento es válido.

15. (2014-I PC1-3) *Solución.*

a) Definimos

$$\begin{aligned} C &= \text{Conjunto de trabajadores del Poder Judicial} \\ D &= \text{Conjunto de reporteros} \\ p(x) &= \text{"}x \text{ acata la huelga"} \\ q(x) &= \text{"}x \text{ entrevista al presidente"} \\ r(x) &= \text{"}x \text{ le hace preguntas difíciles"}. \end{aligned}$$

Luego, las premisas del argumento son

$$(\exists x \in C, [p(x)]) \rightarrow (\exists x \in D, [q(x) \wedge r(x)]); (\forall x \in D, [\neg q(x)])$$

y la conclusión es $\exists x \in C, [\neg p(x)]$.

b) Para demostrar que el argumento es válido, se asumen verdaderas las premisas. Primero se observa que

$$\exists x \in C, [p(x)] \rightarrow \exists x \in D, [q(x) \wedge r(x)]$$

es equivalente a

$$\forall x \in D, [\neg q(x) \vee \neg r(x)] \rightarrow \forall x \in C, [\neg p(x)].$$

A continuación, como la segunda premisa es verdadera, se tiene

$$\forall x \in D, [\neg q(x)] \rightarrow \forall x \in D, [\neg q(x) \vee \neg r(x)].$$

De la primera equivalencia

$$\forall x \in C, [\neg p(x)]$$

y en particular

$$\exists x \in C, [\neg p(x)].$$

Como esta última proposición es la conclusión, el argumento es válido.

16. (2014-I PC1-4) *Solución.*

a)

p	q	r	$T(p, q, r)$
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

b) Si una es verdadera, entonces $p \vee q \vee r$ debe ser verdadera. Sin embargo, dos de ellas no pueden ser verdaderas al mismo tiempo y esto puede pasar de tres formas distintas: $p \wedge q$, $q \wedge r$, $p \wedge r$. Por lo tanto, se obtiene

$$(p \vee q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge r) \wedge \neg(p \wedge r).$$

c) De la tabla de verdad

a	b	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \rightarrow b$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

vemos que los únicos casos en que solo una de las proposiciones compuestas es V están en la segunda y cuarta filas, y en ambos casos concluimos que b es F, es decir, $\neg b$ es V.

17. (2014-II PC1-1) *Solución.*

a) Sean:

- p = “Las inversiones se perjudican”.
- q = “Argentina entra en estado de cese de pagos”.
- r = “Baja el desempleo”.

El argumento expresado en lógica formal es:

$$q \rightarrow p, \neg p \rightarrow r, q \vee \neg r \vdash p.$$

Supongamos que las premisas son verdaderas y que la conclusión es falsa. Es decir:

$$q \rightarrow p \equiv V, \neg p \rightarrow r \equiv V, q \vee \neg r \equiv V, p \equiv F.$$

De $\neg p \rightarrow r \equiv V$ y $p \equiv F$ obtenemos que $r \equiv V$. Además, de $q \vee \neg r \equiv V$ tenemos $q \equiv V$. Finalmente, como $q \rightarrow p \equiv V$ obtenemos $p \equiv V$, que contradice el supuesto. De esta manera, el argumento es válido.

18. (2014-II PC1-2) *Solución.*

$$c) \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},$$

$$(\varepsilon > 0 \wedge m > n_0 \wedge n > n_0) \wedge |a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$

19. (2014-II EP-1) *Solución.*

a) Cuando $p = F, q = V$ y $r = F$, las premisas son verdaderas, pero la conclusión es falsa.

20. (2015-0 PC1-3) *Solución.*

a) Sean las siguientes proposiciones:

p = El delfín es un mamífero.

q = El delfín toma oxígeno del aire.

r = El delfín no necesita branquias.

s = El delfín vive en el océano.

Luego, en lógica formal tenemos

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \wedge s \vdash r.$$

Supongamos que las premisas sean verdaderas, demostraremos que $r \equiv V$. Como $p \wedge s \equiv V$, entonces $p \equiv V$. De $p \rightarrow q \equiv V$, tenemos que $q \equiv V$. De $q \rightarrow r \equiv V$ obtenemos que $r \equiv V$; por lo tanto, el argumento es válido.

21. (2015-I PC1-1) *Solución.*

b) Evaluando $B(p \wedge q)$, $B(p)$ y $B(q)$ en la tabla de verdad se obtiene:

p	q	$(p \wedge q)$	$B(p \wedge q)$	$B(p) \cdot B(q)$
V	V	V	1	$1 \cdot 1$
V	F	F	0	$1 \cdot 0$
F	V	F	0	$0 \cdot 1$
F	F	F	0	$0 \cdot 0$

$$\therefore B(p \wedge q) = B(p) \cdot B(q).$$

22. (2015-I EP-5) *Solución.*

b) Asumiendo que $P_2 = r \vee q$ es verdadera, existen dos casos, uno de estos casos es $r = V$ y $q = F$. De $P_1 = S(p \vee r, q, r) = V$ se tiene que $p \vee r = V$, entonces $p = V$ o $p = F$. En el caso que $p = F$, $Q = r \vee q \rightarrow p$ es F . Por lo tanto, el argumento no es válido.

23. (2015-II PC1-1) *Solución.*

b) La equivalencia es con

$$\exists x \in C; \exists y \in C; [(0 \leq t \leq 1) \wedge (tx + (1-t)y \notin C)].$$

c) De la tercera premisa se tiene que s es falso; usando este en la segunda premisa obtenemos que r es falso, luego $(p \wedge q)$ es falso. Por ende, $\neg p \vee \neg q = \neg(p \wedge q)$ es verdadero. Así, el argumento es válido.

24. (2015-II PC1-2) *Solución.*

b) Existen dos casos. Primero, si $(p \rightarrow q) = F$, entonces $f(p \rightarrow q) = 0$, $p = V$ y $q = F$, luego

$$f(p \rightarrow q) = 0 = 1 - f(p) \cdot f(\neg q).$$

Segundo, si $(p \rightarrow q) = V$, entonces $f(p \rightarrow q) = 1$ y $p = V$, $\neg q = F$; o $p = F$. Así

$$f(p \rightarrow q) = 1 - f(p) \cdot f(\neg q).$$

En ambos casos se tiene $f(p \rightarrow q) = 1 - f(p) \cdot f(\neg q)$.

25. (2016-0 PC1-1) *Solución.*

- a) El enunciado es falso porque $p = "3 < 2"$ es falso, pero el argumento $p \vdash p$ es válido.
- e) Es falso porque si $r \equiv F, q \equiv V$ y $p \equiv V$, la proposición $p \leftrightarrow r$ es falsa.

26. (2016-0 PC1-2) *Solución.*

a) Sean

- p = El color es azul.
- q = Está nublado.
- r = Hay eclipse.

El argumento es

$$\neg p \rightarrow (q \vee r), p \vee (\neg p \wedge r) \vdash q.$$

- b) Si $p \equiv V, q \equiv F$ y $r \equiv V$, las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa. El argumento no es válido.

27. (2016-I PC1-2) *Solución.*

a) Sean

- p = La crisis financiera griega es superada.
- q = Grecia se retira de la eurozona.
- r = Grecia se convierte en un "Estado fallido".

Luego, el argumento es

$$q \rightarrow p, \neg p \rightarrow r, q \vee r \vdash p.$$

- b) Asumiendo que todas las premisas son verdadera, de la tercera tenemos dos casos:
 $q \equiv V$ y $r \equiv F$ o $q \equiv F$ y $r \equiv V$

- Caso 1: Si $q \equiv V$ y $r \equiv F$, la veracidad de la primera premisa implica $Q : p \equiv V$.
- Caso 2: Si $q \equiv F$ y $r \equiv V$, tenemos en la primera premisa y segunda premisa que son verdaderas aún con $Q : p \equiv F$.

Por lo tanto, el argumento no es válido.

28. (2016-II PC1-1) *Solución.*

a) Dadas las proposiciones:

- p = El jefe de la banda salió del país.
- q = El jefe de la banda se siente amenazado.
- r = El jefe de la banda delega el poder en Pablo.
- s = El jefe de la banda delega el poder en Luis.
- t = Aumentarán los robos en el barrio.
- u = Aumentará la venta de droga y la prostitución en el barrio.

El argumento en su notación formal es:

$$q \rightarrow p, q \rightarrow (r \vee s), r \rightarrow t, s \rightarrow u, p \vdash t \vee u.$$

b) Asumiendo que las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, obtenemos:

$$q \rightarrow p \equiv V \quad (12)$$

$$q \rightarrow (r \vee s) \equiv V \quad (13)$$

$$r \rightarrow t \equiv V \quad (14)$$

$$s \rightarrow u \equiv V \quad (15)$$

$$p \equiv V \quad (16)$$

$$t \vee u \equiv F \quad (17)$$

Podemos afirmar lo siguiente: De (17) se deduce que $t \equiv F$ y $u \equiv F$. De (14) y dado que $t \equiv F$ se deduce que $r \equiv F$. De (15) y dado que $u \equiv F$ se deduce que $s \equiv F$. De (13) y dado que $r \vee s \equiv F$ se deduce que $q \equiv F$. La combinación $p \equiv V, q \equiv F, r \equiv F, s \equiv F, t \equiv F, u \equiv F$ cumple con todo lo asumido, y es consistente con (12). Por lo tanto, el argumento es inválido.

29. (2017-0 PC1-2) *Solución.*

a) Considerando el diccionario:

- p = Se cumple con la deuda del banco.
- q = Se capitaliza la empresa.
- r = Será fácil negociar con los demás acreedores.
- s = Se obtienen más recursos para inversión.

El argumento en su forma simbólica es

$$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash r \vee s.$$

b) Si las premisas son verdaderas, de la primera premisa tenemos que los valores de verdad de p y q son opuestos; estudiamos las opciones que se presentan según los valores de verdad de p .

- Si p es verdad, entonces q debe ser falso; así, como la segunda premisa $p \rightarrow r$ es verdadera, obtenemos que r es verdadero.
- Si p es falso, entonces q es verdad; como la tercera premisa $q \rightarrow s$ es verdadera, obtenemos que s es verdadero.

Así pues, en cualquier caso, la conclusión $r \vee s$ es verdadera; por ende, el argumento es válido.

30. (2017-I PC1-1) *Solución.*

a) Como la siguiente tabla no es una tautología

p	q	$(p \oplus q) \oplus p$	$\rightarrow$	$p \oplus q$
V	V	F	V V	F
V	F	F	V V	F
F	V	V	F F	V
F	F	F	F F	V

el argumento no es válido.

b) “El desempleo no aumenta. La inversión no retrocede o el desempleo aumenta. Por lo tanto, la inversión no retrocede.”

31. (2017-II PC1-1) *Solución.*

a) Dadas las proposiciones:

- p = los precios bajan.
- q = suben los salarios.
- r = las ventas al menudeo aumentan.
- s = las ventas publicitarias aumentan.
- t = los intermediarios ganarán más dinero.

El argumento en su notación formal es:

$$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s), r \rightarrow t, \neg t \vdash \neg p.$$

b) Consideremos que las premisas son verdaderas:

$$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) \equiv V \quad (18)$$

$$r \rightarrow t \equiv V \quad (19)$$

$$\neg t \equiv V \quad (20)$$

Por otro lado, supongamos que la conclusión es falsa, es decir:

$$\neg p \equiv F \quad (21)$$

Podemos afirmar lo siguiente:

- De (21) se deduce que $p \equiv V$.
- De (20) se deduce que $t \equiv F$.
- De (19) se deduce que $r \equiv F$.
- $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s) \equiv (V \vee q) \rightarrow (F \wedge s) \equiv V \rightarrow F \equiv F$, lo que contradice (18).

Luego, la conclusión es verdadera. Por ende, el argumento es válido.

32. (2018-0 PC1-1) *Solución.*

a) Un argumento es una lista de proposiciones $P_1, P_2, \dots, P_n$ llamadas premisas y una proposición Q llamada conclusión. Un argumento se denota por

$$\underline{P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q}$$

b) Una variable es un símbolo que representa un miembro no especificado de una colección.

c) Para toda colección C y predicado P tenemos

$$\neg (\forall x \in C, [\neg P(x)]) \equiv \underline{\exists x \in C, [P(x)]}.$$

d) Cuando la proposición " $\forall x \in C, [P(x)]$ " es falsa, el elemento que prueba la falsedad de dicho enunciado es llamado el contraejemplo.

33. (2018-0 PC1-2) *Solución.*

a) Asumiendo que todas las premisas son verdaderas.

- De la primera premisa, se deduce que p es verdadera.
- De la segunda premisa y lo anterior, se deduce que r es verdadera.
- La tercera premisa y el paso anterior implican que s es verdadera.

Luego, la conclusión es verdadera. Por ende, el argumento es válido.

b) Primero establecemos el siguiente diccionario:

- p = Hari cumplió el contrato.
- q = Las mercancías fueron suministradas en la fecha convenida.
- r = El registro de Hari está equivocado.
- s = Hari ordenó el envío el día tres.

Así, el argumento en notación simbólica es

$$p \rightarrow q, p \vee r, r \rightarrow \neg s, s \wedge p \vdash q \rightarrow \neg r.$$

Si todas las premisas son verdaderas, se sigue de la cuarta premisa que p y s son verdaderas. De este modo, de la primera y tercera premisa se deduce que q es verdadera y r es falsa, respectivamente. Esto implica que la conclusión es verdadera. Por lo tanto, el argumento es válido.

34. (2018-0 PC1-3) *Solución.*

a)

i) Consideremos el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ y los siguientes predicados:

- $p(x) : x$ es par.
- $q(x) : x$ es impar.

Luego, las proposiciones $(\exists x \in U, [p(x)])$ y $(\exists x \in U, [q(x)])$ son verdaderas. Sin embargo, la proposición $(\exists x \in U, [p(x) \wedge q(x)])$ es falsa, pues no existe un entero que sea par e impar a la vez.

ii) Consideremos $U = \{1, 2, 3\}$. La proposición

$$\forall x \in U, \exists y \in U, [xy = x]$$

es verdadera tomando $y = 1 \in U$. No obstante, la proposición

$$\exists x \in U, \forall y \in U, [xy = x]$$

es falsa, dado que si $y = 2$, entonces $2x = x$ implica que $x = 0 \notin U$.

b)

- i) Si hay un entero impar, entonces ningún entero es par y hay al menos un número real irracional.
- ii) Si algún número real es racional, entonces existen números reales irracionales o existe un entero irracional.

35. (2018-0 EP-1) *Solución.*

b)

- ii) En este caso, tomemos p falsa, q verdadera y r falsa. Se observa que la primera proposición compuesta es falsa, pero la segunda es verdadera, lo que se contradice con la definición de equivalencia de proposiciones.

36. (2018-I PC1-1) *Solución.*

a) Dado el siguiente diccionario:

p = “el arma tiene las huellas del acusado”

q = “el acusado disparó el arma”

r = “el acusado es culpable” ,

el argumento se traduce a

$$p \rightarrow q, \neg q \vee r, \neg q \rightarrow \neg r \vdash (p \rightarrow r) \vee (r \leftrightarrow q).$$

- b) Asumiendo que el argumento no es válido, se tiene que $(p \rightarrow r) = F$ y $(r \leftrightarrow q) = F$. En consecuencia, $p = V, q = V, r = F$. Pero esto implica que la premisa $\neg q \vee r$ es falsa. Esta contradicción demuestra que el argumento es válido.
- c) Eliminando la segunda premisa que generaba la contradicción en la parte anterior, se tiene:

$$p \rightarrow q, \neg q \rightarrow \neg r \vdash (p \rightarrow r) \vee (r \leftrightarrow q)$$

De la parte b) se tiene que $p = V, q = V, r = F$. Con estos valores las premisas del nuevo argumento son verdaderas. Como no existe contradicción, el argumento es inválido.

37. (2018-II PC1-1) *Solución.*

a) Para que el argumento sea inválido, las premisas deben ser verdaderas y la conclusión falsa. Como es imposible que todas las premisas sean verdaderas, el argumento no es inválido.

b)

i) Del argumento podemos establecer el siguiente diccionario:

p = Gabriela compra un computador.

q = Gabriela estudia programación.

r = Gabriela estudia diseño gráfico.

La traducción del argumento es

$$p \rightarrow (q \vee r), q \rightarrow \neg r, p \vdash (q \vee r).$$

ii) Supongamos que las premisas sean verdaderas. Como $p \equiv V$, de $p \rightarrow (q \vee r) \equiv V$, obtenemos que $q \vee r \equiv V$, luego q y r no pueden ser al mismo tiempo falsos. De $q \rightarrow \neg r \equiv V$, tenemos que ambos, q y r , no pueden ser verdaderos. Así q y r tienen valores de verdad distintos, luego $q \vee r \equiv V$. Por lo tanto, el argumento es válido.

38. (2018-II EP-1) *Solución.*

a) Los valores de verdad para los cuales las premisas son verdaderas y la conclusión falsa son: $p \equiv F$, $q \equiv V$. Luego, $p \vee q \equiv F \vee V \equiv V$.

39. (2019-0 PC1-1) *Solución.*

c) La negación de $\forall x \geq 0, \exists y \in \mathbb{N}, [xy = 1 \rightarrow x = 2]$ es

$$\underline{\exists x \geq 0, \forall y \in \mathbb{N}, [xy = 1 \wedge x \neq 2]}$$

40. (2019-0 PC1-2) *Solución.*

a) Sean

p = La crisis financiera griega es superada.

q = Grecia se retira de la eurozona.

$r = \text{Grecia}$ se convierte en un **Estado fallido**.

Luego, el argumento es

$$q \rightarrow p, \neg p \rightarrow r, q \vee \neg r \vdash p.$$

Asumiendo la veracidad de las premisas y la falsedad de la conclusión, tendríamos de $q \rightarrow p \equiv V$ y $p \equiv F$; por lo tanto, $q \equiv F$. De $q \equiv F$ y $q \vee \neg r \equiv V$ obtenemos que $r \equiv F$. De $r \equiv F, p \equiv F$, tenemos que $\neg p \rightarrow r \equiv F$, lo cual se contradice con la veracidad de la segunda premisa. Esta contradicción prueba que el argumento es válido.

41. (2019-I PC1-1) *Solución.*

a)

i) El argumento $p \rightarrow \neg q, q \vdash \neg p$ es válido.

42. (2019-I PC1-3) *Solución.*

b) Asumiendo que el argumento es inválido, las premisas son verdaderas y la conclusión falsa, esto es:

- $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg u \equiv V$
- $(q \vee u) \rightarrow p \equiv V$
- $(s \wedge t) \leftrightarrow q \equiv V$
- $\neg[(s \vee t) \wedge u] \equiv F$.

De la cuarta línea obtenemos que $u \equiv V$ y $(s \vee t) \equiv V$, es decir, s y t tienen distintos valores de verdad. Sustituyendo en la tercera línea obtenemos $q \equiv F$. Luego, al sustituir en la segunda línea, tenemos que $p \equiv V$ porque u es verdadero. Reemplazando estos valores en la primera línea tenemos que la premisa $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg u$ es falsa, lo cual es absurdo. Así, el argumento es válido.

43. (2019-II PC1-2) *Solución.*

a) Del diccionario:

p = El gobierno griego aprueba las medidas económicas impuestas por la UE.

q = El IVA aumenta.

r = Las jubilaciones anticipadas terminarán en el 2022.

s = El gobierno griego se retira de la eurozona.

t = El gobierno griego paga la deuda completa a sus acreedores.

Se obtiene

$$p \rightarrow (q \wedge r), \neg p \leftrightarrow (s \vee t), \neg s \wedge \neg t \vdash q.$$

b) Asumiendo que las premisas son verdaderas, se puede afirmar que la conclusión también lo es. En efecto, de la tercera premisa se sigue que s y t son falsas. De la segunda premisa, como $s \vee t$ es falso, $\neg p$ también lo es y así p es verdadero. Finalmente, de la primera premisa, como p es verdadero, $q \wedge r$ debe ser verdadero, en particular, q es verdadero. Como q es la conclusión, el argumento es válido.

Conjuntos y Relaciones

1. (2012-I PC1-2) *Solución.*

a) Contraejemplo.

b) Cuando $(a, b) \in R$ y $(a, c) \in R$, implica $b = c$.

c) $\{(3, 4), (4, 5)\}$.

d) No. Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$, entonces $A \cup B = A = A \cup C$ pero $B \neq C$.

e) Como $(h + 1, 3) \in R$ implica $(3, h + 1) \in R$, existen tres posibilidades. Si $(3, h + 1) = (3, 8)$, entonces $h = 7$. Además, se debe cumplir que

$$(h + k, h) = (7 + k, 7) = (14, h),$$

de donde $7 + k = 14$ y así $k = 7$. En los casos que $(3, h + 1) = (h + 1, 3)$ y $(3, h + 1) = (h, h + k)$ se obtienen contradicciones.

2. (2013-0 PC1-2) *Solución.*

a)

$$A - B = \{x \in U : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

b) Falso. Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ y $C = \{4\}$, entonces $A - B = A - C = \{1, 2\}$ pero $B \neq C$.

c)

$$[(A \cap D) \cup (B \cap C)]^c.$$

3. (2013-0 PC1-3) *Solución.*

a) Una relación es una función cuando cada elemento del dominio se relaciona con un único elemento del rango. Esto último es equivalente a la veracidad de la siguiente proposición:

$$\forall x \in \text{dom } R, \exists! y \in \text{ran } R, [(x, y) \in R].$$

b) Como $(h, 4) \in \mathbb{R}$, se toman casos sobre la base de $h \in A$.

- Si $h = -1$, entonces $R = \{(-1, 2); (2, 4); (-1, 4)\}$ no es función.

- Si $h = 2$, entonces $R = \{(-1, 5); (2, 4); (2, 4)\}$, pero $5 \notin B$.
- Si $h = 3$, entonces $R = \{(-1, 6); (2, 4); (3, 4)\}$ es función.
- Si $h = 5$, entonces $R = \{(-1, 8); (2, 4); (5, 4)\}$ es función.

Por lo tanto, h solo puede tomar los valores 3 y 5.

- c) De la definición por extensión de A , los únicos valores que k puede asumir son 1, 2 o 3. Como $(3, 2) \in R$ y $(2, k) \in R$, entonces $(3, k) \in R$ por transitividad. De la definición por extensión de R se obtiene $(3, k) = (3, 2)$, de donde $k = 2$. Si $k = 1$, entonces $(2, 1) \in R$ y $(1, 2) \in R$, pero $(2, 2) \notin R$. Esto implica que $k \neq 1$. Si $k = 3$, entonces $(2, 3) \in R$ y $(3, 2) \in R$, pero $(2, 2) \notin R$. Esto implicaría que no se cumple la transitividad. Así $k \neq 3$. Por ende, el único valor que puede tomar k es 2.

4. (2013-0 EP-2) *Solución.*

- a) Para todo $x \in U$ se tiene

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cup B)^c &\leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \\
 &\leftrightarrow \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \\
 &\leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \\
 &\leftrightarrow (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\
 &\leftrightarrow x \in A^c \cap B^c
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad.

5. (2013-I PC1-1) *Solución.*

- a)

- i) Directamente de la definición se tiene

$$\text{dom } R_1 = \{a, b, d\}, \quad \text{ran } R_1 = \{e, f, g\},$$

y

$$\text{dom } R_2 = \{b, c, d\}, \quad \text{ran } R_2 = \{c, f\}.$$

- ii) Solo R_2 es una función, ya que cada elemento de su dominio está relacionado con un único elemento en su rango. La relación R_1 no es una función, puesto que (a, e) y (a, f) pertenecen a R_1 .

b) Para demostrar que $A \cup B \subset C$, partiendo de

$$(x \in A) \vee (x \in B),$$

se consideran dos casos. En el primero, si $x \in A$, entonces, como por hipótesis $A \subset C$, tenemos que $x \in C$. En la segundo, si $x \in B$, entonces, como por hipótesis $B \subset C$, encontramos que $x \in C$. En cualquiera de los dos casos se concluye que $x \in C$, luego $A \cup B \subset C$.

6. (2013-II PC1-1) *Solución.*

a) La definición es

$$\forall x \in U, [x \in A \Leftrightarrow x \in B],$$

lo cual es equivalente a

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

b) Falso. Considere $A = B = \{1\}$, entonces $A \subset B$ y $A \Delta B = \emptyset$.

c) Usando la equivalencia $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$, se obtiene

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow \forall x \in U, [x \in A \rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U, [x \notin B \rightarrow x \notin A] \\ &\Leftrightarrow \forall x \in U, [x \in B^c \rightarrow x \in A^c] \\ &\Leftrightarrow B^c \subset A^c. \end{aligned}$$

7. (2013-II EP-1) *Solución.*

a) El dominio y el rango son respectivamente:

- $\text{dom } R = \text{Conjunto de profesores de Mate 1.}$
- $\text{ran } R = \text{Conjunto de alumnos de Mate 1.}$

b) Como $(y, x) \in R^{-1} \iff$ “ y es alumno del profesor x en Mate 1”, entonces R^{-1} sí es una función porque todo alumno de Mate 1 tiene un único profesor de Mate 1.

c) Existe al menos un profesor de Mate 1 que es alumno de la UP, pero no del curso de Mate 1.

8. (2014-0 PC1-2) *Solución.*

a) La relación sí es una función, puesto que:

$$2 \in \text{dom } R, \exists! \quad 3 \in \text{ran } R \quad \text{tal que} \quad (2, 3) \in R$$

$$3 \in \text{dom } R, \exists! \quad 3 \in \text{ran } R \quad \text{tal que} \quad (3, 3) \in R$$

$$4 \in \text{dom } R, \exists! \quad 6 \in \text{ran } R \quad \text{tal que} \quad (4, 6) \in R.$$

b) Tomando $U = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1\}$, $B^c = \{2\}$ y $C^c = \{3\}$, se observa que $A - B^c = A - C^c = \{1\}$; sin embargo, $B = \{1, 3\}$ y $C = \{1, 2\}$ son diferentes.

c) Ver la solución de la pregunta 4a de esta sección.

$$\begin{aligned} d) \quad \forall x \in U, x \in (A - B)^c &\leftrightarrow \neg(x \in A - B) \\ &\leftrightarrow \neg(x \in A \cap B^c) \\ &\leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B^c)) \\ &\leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B^c) \\ &\leftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B) \\ &\leftrightarrow x \in A^c \cup B. \end{aligned}$$

9. (2014-0 PC1-4) *Solución.*

a) Como f es una función, se tiene que $s + 1 = 2$, de donde $s = 1$. Reemplazando este valor en f resulta en

$$f = \{(r + 1, r + 2), (r - 1, 2), (r + 1, r^2), (r - 1, 2), (5, r^2 - r - 2)\}.$$

Del mismo modo, $r + 2 = r^2$ implica $r = -1$ o $r = 2$. Como $r \in \mathbb{N}$, tomamos $r = 2$. Por lo tanto

$$f = \{(3, 4), (1, 2), (5, 0)\},$$

de donde $\text{dom } f = \{1, 3, 5\}$ y $\text{ran } f = \{0, 2, 4\}$.

10. (2014-I PC1-1) *Solución.*

a) Hay dos posibles justificaciones:

- $\forall x \in U, [x \in \emptyset \rightarrow x \in A]$ es siempre verdadero porque el antecedente siempre es falso.
- Por el absurdo, si $\emptyset \not\subset A$, entonces existiría un $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$, lo cual es absurdo porque $\emptyset$ no tiene elementos.

b) Hay dos posibles justificaciones:

- $(\rightarrow)$ Si $\forall x \in U, [x \in A \leftrightarrow x \in \emptyset]$ es verdadero, entonces el antecedente debe ser falso porque el consecuente siempre es falso. Es decir, $\forall x \in U, [\neg(x \in A)]$.
 $(\leftarrow)$ Como $x \in A$ es falso para todo x y $(x \in \emptyset)$ también es falso, la bicondicional $\forall x \in U, [x \in A \leftrightarrow x \in \emptyset]$ es verdadera.
- $(\rightarrow)$ Si A no tiene elementos, cualquier $x \in U$ no pertenece a A .
 $(\leftarrow)$ Si ningún elemento de U pertenece a A y $A \subset U$, entonces A no tiene elementos.

c) $\forall x \in U$:

$$\begin{aligned} x \in A \longrightarrow x \in B &\equiv \neg(x \in A) \vee (x \in B) \\ &\equiv \neg((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \\ &\equiv \neg(x \in A - B) \end{aligned}$$

y de la parte b) $(A \subset B) \equiv (A - B = \emptyset)$.

11. (2014-II PC1-1) *Solución.*

b) $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} x \in \text{dom } R \cup \text{dom } S &\rightarrow x \in \text{dom } R \vee x \in \text{dom } S \\ &\rightarrow [\exists y \in B, (x, y) \in R] \vee [\exists y \in B, (x, y) \in S] \\ &\rightarrow [\exists y \in B, (x, y) \in R \cup S] \\ &\quad \vee [\exists y \in B, (x, y) \in R \cup S] \\ &\rightarrow \exists y \in B, (x, y) \in R \cup S \\ &\rightarrow x \in \text{dom } (R \cup S). \end{aligned}$$

12. (2015-0 PC1-1) *Solución.*

c) Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$ y $C = \{2\}$, luego $A \subset B \cup C$; sin embargo, $\{1, 2\} \not\subset \{1\}$ ni $\{1, 2\} \subset \{2\}$.

13. (2015-0 PC1-2) *Solución.*

b) $\forall x \in U, x \in A \rightarrow x \in B.$

c) La inclusión $A \cap B \subset A$ es cierta, puesto que todo elemento que está en A y en B está justamente en A . La otra inclusión $A \subset A \cap B$ se da, ya que, si $x \in A$ por hipótesis también está en B ; luego, todo elemento de A está en A y en B .

14. (2015-I PC1-2) *Solución.*

a) De la definición:

$$R = \{(-1; 0), (1; 0), (0; -1), (0, 1)\}$$

$$\text{ran } R = \{0, -1, 1\}.$$

b)

• $\forall (x, y) \in A \times B,$

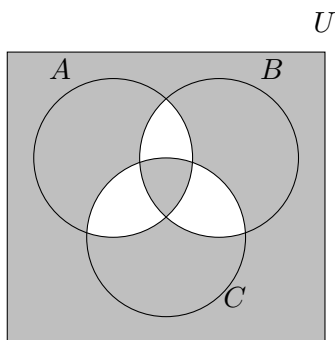
$$(x, y) \in S \leftrightarrow (y, x) \in S^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in (S^{-1})^{-1}.$$

• $\forall (x, y) \in A \times B,$

$$\begin{aligned} (y, x) \in (S \cap T)^{-1} &\leftrightarrow (x, y) \in S \cap T \\ &\leftrightarrow (x, y) \in S \wedge (x, y) \in T \\ &\leftrightarrow (y, x) \in S^{-1} \wedge (y, x) \in T^{-1} \\ &\leftrightarrow (y, x) \in (S^{-1} \cap T^{-1}). \end{aligned}$$

15. (2015-I EP-5) *Solución.*

a)



16. (2015-II PC1-2) *Solución.*

a) Supongamos que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$, entonces $\exists x \in U$

$$\begin{aligned} x \in (A - B) \cap B &\rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in B \\ &\rightarrow x \notin B \wedge x \in B \end{aligned}$$

y esto último es una contradicción. Por lo tanto, $(A - B) \cap B = \emptyset$.

17. (2016-I PC1-1) *Solución.*

a) • Primero note que la proposición $p \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología

p	q	$p \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Luego,

$$\forall x \in U, [x \in A \rightarrow (x \in A \vee x \in B)] \quad (22)$$

es verdad para cualquier par de conjuntos A y B ; por ello, $A \subset A \cup B$.

Así, para demostrar $B \subset A \leftrightarrow A \cup B \subset A$ basta con probar que

$$B \subset A \leftrightarrow A \cup B \subset A.$$

• Sabiendo que $B \subset A$, se tiene $\forall x \in U$,

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\rightarrow x \in A \vee x \in A \text{ esto, pues } B \subset A \\ &\rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A \cup B \subset A$.

• Sabiendo que $A \cup B \subset A$, se tiene $\forall x \in U$,

$$\begin{aligned} x \in B &\rightarrow x \in A \cup B \text{ esto, similar a (22)} \\ &\rightarrow x \in A \text{ esto, pues } A \cup B \subset A \end{aligned}$$

Por ende, $B \subset A$.

18. (2016-II PC1-3) *Solución.*

a) $\forall x \in U,$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\longleftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\longleftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\longleftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\longleftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

19. (2016-II PC1-4) *Solución.*

a) No es una función, pues existe un elemento del dominio relacionado con dos elementos diferentes del rango:

$$(b, b) \in R, (b, d) \in R \wedge b \neq d.$$

b) Sí es reflexiva ya que:

$$(b, b) \in R, (c, c) \in R, (d, d) \in R.$$

c) No es simétrica pues:

$$(c, b) \in R \wedge (b, c) \notin R.$$

d) No es transitiva ya que:

$$(c, b) \in R, (b, d) \in R \wedge (c, d) \notin R.$$

20. (2017-0 PC1-5) *Solución.*

a) Los elementos de la relación son

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{enero}, 31), (\text{febrero}, 28), (\text{marzo}, 31), (\text{abril}, 30), \\ (\text{mayo}, 31), (\text{junio}, 30), (\text{julio}, 31), (\text{agosto}, 31), \\ (\text{septiembre}, 30), (\text{octubre}, 31), (\text{noviembre}, 30), \\ (\text{diciembre}, 31) \end{array} \right\},$$

de donde el dominio es A y el rango es $\{28, 30, 31\}$. Dicha relación es una función, pues cada mes tiene exactamente una cantidad fija de días.

b) La relación es

$$\left\{ \begin{array}{l} (5, \text{enero}), (4, \text{febrero}), (4, \text{marzo}), (5, \text{abril}), \\ (4, \text{mayo}), (4, \text{junio}), (5, \text{julio}), (4, \text{agosto}), \\ (4, \text{septiembre}), (5, \text{octubre}), (4, \text{noviembre}), \\ (5, \text{diciembre}) \end{array} \right\},$$

de donde el dominio es $\{4, 5\}$ y el rango es A . Dicha relación no es una función, ya que 5 se relaciona con más de un elemento de B .

21. (2017-I PC1-4) *Solución.*

a)

$$R(\{a, b, a^2, ab, a^2b\}) = \{(a, a^2), (a, ab), (a, a^2b), (b, ab), \dots \\ (b, a^2b), (a^2, a^2b), (ab, a^2b)\}.$$

b) No es una función porque $(a, a^2) \in R$ y $(a, a^2b) \in R$, pero $a^2 \neq a^2b$.

22. (2017-II PC1-2) *Solución.*

a)

ii) Consideremos el siguiente contraejemplo:

$$A = B = C = U = \{1\},$$

para el cual los conjuntos $A \cup (B - C) = \{1\}$ y $(A - B) \cup (A - C) = \emptyset$ no son iguales.

23. (2017-II PC1-3) *Solución.*

a) $\forall x, y \in A,$

$$\begin{aligned} (x, y) \in R \circ (S \cup T) &\leftrightarrow \exists z \in A, (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \cup T \\ &\leftrightarrow \exists z \in A, (x, z) \in R \wedge \dots \\ &\quad ((z, y) \in S \vee (z, y) \in T) \\ &\leftrightarrow \exists z \in A, [(x, z) \in R \wedge (z, y) \in S] \vee \dots \\ &\quad [(x, z) \in R \wedge (z, y) \in T] \\ &\leftrightarrow (x, y) \in R \circ S \vee (x, y) \in R \circ T \\ &\leftrightarrow (x, y) \in (R \circ S) \cup (R \circ T). \end{aligned}$$

b) $\forall x \in U,$

$$\begin{aligned}
 x \in (A - B) \cap (A - C) &\leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in A \wedge x \notin C \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \wedge \neg x \in C \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\
 &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \cup C \\
 &\leftrightarrow x \in A - (B \cup C).
 \end{aligned}$$

24. (2018-0 PC1-1) *Solución.*

e)

i) El complemento de A es el conjunto $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$.

ii) La intersección de A y B es el conjunto

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$

f)

i) A se llama el conjunto de partida.

ii) B se llama el conjunto de llegada.

25. (2018-0 PC1-4) *Solución.*

a) Sean $P, Q \in A$, consideremos $P = (a, b)$ y $Q = (c, d)$. Luego, se observa que

$$(P, P) \in A \leftrightarrow a + b = b + a,$$

lo cual es cierto, pues la suma de naturales es conmutativa. Finalmente, si $(P, Q) \in A$, es decir $a + d = b + c$, entonces queda claro que

$$c + b = d + a,$$

lo que implica $(Q, P) \in A$.

b) Reemplazando $x = 0$ en la igualdad, se tiene

$$f(5) = f(0) + f(5),$$

de donde se deduce que $f(0) = 0$. Si $f(5) = 2$; entonces, reemplazando $x = -5$ en la igualdad, se obtiene

$$f(0) = f(-5) + f(5);$$

y, desde que $f(0) = 0$, uno tiene que $f(-5) = -2$. Finalmente, reemplazando $x = 10$ en la igualdad se obtiene

$$f(15) = f(10) + f(5).$$

Nuevamente, en la igualdad ahora reemplazamos $x = 5$ e inferimos que

$$f(10) = f(5) + f(5) = 2f(5) = 4.$$

Por lo tanto, $f(15) = 6$.

26. (2018-I PC1-3) *Solución.*

a) Se comprueban las tres propiedades

- $\forall x \in A, (x, x) \in R$, dado que $x + x = 2x$.
- Si $(x, y) \in R$, entonces

$$x + y = y + x = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por ende, $(y, x) \in R$.

- Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces

$$x + y = 2k_1 \quad \text{y} \quad y + z = 2k_2$$

respectivamente. En consecuencia,

$$x + y + y + z = 2(k_1 + k_2),$$

lo cual implica que

$$x + z = 2(k_1 + k_2 - y) = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $(x, z) \in R$.

Así, R es una relación de equivalencia.

27. (2018-II PC1-2) *Solución.*

b) Para todo $(x, y) \in U \times U$.

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in (A \cap B) \times C &\leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \\
 &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\
 &\leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\
 &\leftrightarrow (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \in B \times C \\
 &\leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C).
 \end{aligned}$$

28. (2018-II PC1-3) *Solución.*

a)

i) El conjunto A está incluido en B si todo elemento de A es un elemento de B . Esto es equivalente a mostrar que $\forall x \in U, [x \in A \rightarrow \underline{x \in B}]$.

29. (2019-0 PC1-1) *Solución.*

a) Use propiedades, entre ellas las leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned}
 (A^c \cup B)^c &= \underline{A \cap B^c} \\
 (A \cap B^c)^c &= \underline{A^c \cup B}
 \end{aligned}$$

b) Si $R \subset A \times B$ es una relación, de la definición tenemos

$$\begin{aligned}
 \text{dom } R &= \underline{\{x \in A : \exists y \in B, (x, y) \in R\}} \\
 \text{ran } R &= \underline{\{y \in B : \exists x \in A, (x, y) \in R\}}
 \end{aligned}$$

d) Si $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $R = \{(1, 2), (4, a^2 + b^2), (c, 2), (4, 18)\}$ es una función, entonces:

$$\begin{aligned}
 a &= \underline{3} \\
 b &= \underline{3}
 \end{aligned}$$

30. (2019-0 PC1-2) *Solución.*

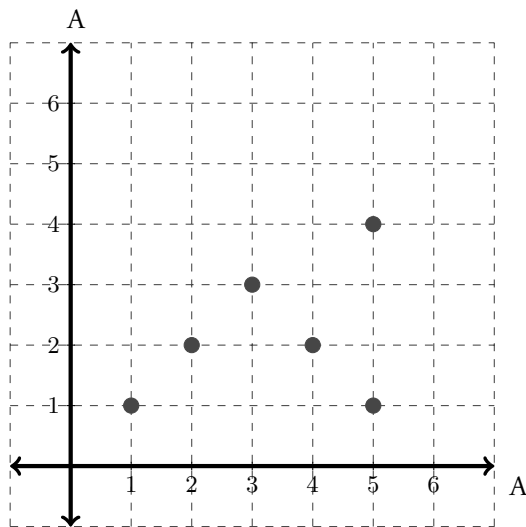
b) Supongamos que $A \cap (C - B) \neq \emptyset$, entonces se tendría la existencia de un elemento tal que $x \in A$ y $x \in C$ y $x \notin B$. Como $x \in C$, del dato del problema, x debería estar en B o en $C - A$. Sin embargo, x no está en $C - A$, ya que $x \in A$. Por lo tanto, la única opción es que esté en B , lo cual es una contradicción, puesto que x no está en B por hipótesis. De esta manera, no pueden existir elementos en la intersección $A \cap (C - B)$.

31. (2019-0 PC1-3) *Solución.*

a) Falso, ya que $\text{ran } R = \{1, 2, 3, 4\}$, el cual es distinto de A .

b) Falso, $(5, 4)$ y $(4, 2)$ están en la relación, pero $(5, 2) \notin R$.

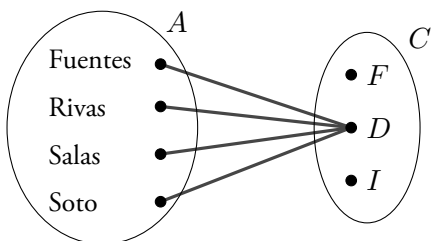
c)



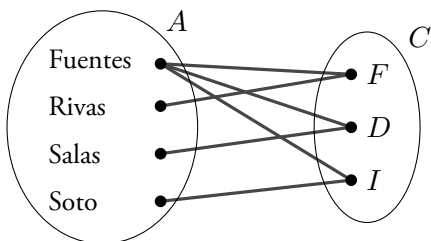
32. (2019-I PC1-3) *Solución.*

a)

i)



ii)



Números Reales

1. (2012-I PC1-5) *Solución.*

a) Aplicando (II) a $x > 0$ y $x < y$ obtenemos

$$x^2 < xy.$$

Aplicando (II) a $y > 0$ y $x < y$ tenemos

$$xy < y^2.$$

Por (I) obtenemos

$$x^2 < xy < y^2 \longrightarrow x^2 < y^2.$$

2. (2012-I EP-1) *Solución.*

a) La respuesta es

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, [x \leq M].$$

Alternativamente podemos decir: “cuando existe una constante M tal que todo elemento de A es menor o igual a M ”.

b) El supremo de A es la menor de sus cotas superiores. Alternativamente, decimos que $s = \sup A$ cuando s es cota superior y si c es cualquier cota superior, entonces $s \leq c$.

c) Sean M_1 una cota superior de A y M_2 una cota superior de B . Tomando

$$M = \max\{M_1, M_2\}$$

vemos que

$$\forall x \in A, [x \leq M_1 \leq M], \quad \forall x \in B, [x \leq M_2 \leq M].$$

Entonces

$$\forall x \in A \cup B, [x \leq M].$$

3. (2013-0 PC2-2) *Solución.*

a)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= ax^2 + ax = a(x^2 + x) \\
 &= a\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}.
 \end{aligned}$$

4. (2013-0 PC2-4) *Solución.*

b) De la definición dada,

$$x + y \leq z$$

donde $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$. De la definición de supremo de G , $z \leq \sup G$ y así

$$x + y \leq \sup G.$$

Como $x \leq \sup G - y$, considerando y fijo, la constante $\sup G - y$ es una cota superior de E . De la definición de supremo de E se obtiene

$$\sup E \leq \sup G - y.$$

Como $y \leq \sup G - \sup E$ para cualquier $y \in F$, entonces $\sup G - \sup E$ es una cota superior de F . De la definición de supremo de F se obtiene

$$\sup F \leq \sup G - \sup E.$$

Despejando se llega a $\sup E + \sup F \leq \sup G$.

5. (2013-0 EP-3) *Solución.*

a)

$$i) \forall a, b \in \mathbb{R}, [(a \leq b) \wedge (b \leq a) \rightarrow (a = b)].$$

$$ii) \forall a, b \in \mathbb{R}, [(a < b) \wedge (0 < c) \rightarrow a \cdot c < b \cdot c].$$

b) Supongamos que $\varepsilon \neq 0$. Como $\varepsilon \geq 0$, de la no nulidad de ε se obtiene $\varepsilon > 0$. Tomando $c = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ en la hipótesis del enunciado, se obtiene

$$\varepsilon < c = \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow \varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} \rightarrow 1 < \frac{1}{2},$$

lo cual representa una contradicción. Por lo tanto, $\varepsilon = 0$.

6. (2013-I PC1-4) *Solución.*

c)

- i) El conjunto es acotado superiormente y como 3 es la menor cota superior, $\sup A = 3$.
- ii) No existe el supremo debido a que el conjunto no es acotado superiormente. Dado cualquier número $M \in \mathbb{R}$, basta tomar $n = 2\llbracket M \rrbracket + 1$, el cual es un elemento en B y es mayor que este M .

7. (2013-I PC2-1) *Solución.*

c)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

8. (2013-II PC1-2) *Solución.*

- b) Falso. Considere $A = \{1\}$, entonces 1 es cota inferior y cota superior de A .
- c) Falso. Considere $x = -0.5$, entonces $x < 0$, pero $\llbracket x \rrbracket = -1 < 0$.

9. (2013-II PC1-3) *Solución.*

a) Usando (II) tenemos

$$\begin{aligned} (a < b) \wedge (c > 0) &\rightarrow a \cdot c < b \cdot c. \\ (c < d) \wedge (b > 0) &\rightarrow b \cdot c < b \cdot d. \end{aligned}$$

Luego, usando (III) se sigue

$$(a \cdot c < b \cdot c) \wedge (b \cdot c < b \cdot d) \rightarrow (a \cdot c < b \cdot d).$$

b) Falso. Considere $a = 0$, $b = 1$ y $c = 2$, entonces

$$(a \cdot b = a \cdot c = 0) \wedge (1 = b \neq c = 2).$$

c) Por ejemplo si $a = -2\sqrt{2}$ y $b = \sqrt{2}$, entonces $a + 2b = 0$.

10. (2013-II PC2-2) *Solución.*

a)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= 2a^2x - ax^2 \\
 &= -a(x^2 - 2ax) \\
 &= -a(x^2 - 2ax + a^2 - a^2) \\
 &= -a(x - a)^2 + a^3.
 \end{aligned}$$

11. (2014-0 PC2-2) *Solución.*

a)

i) Para $x = 1.5$ tenemos $\lceil 2(1.5) + 1 \rceil = 4$ y $2\lceil 1.5 \rceil + 1 = 3$.ii) Para $A = [0, 1]$ y $B = \mathbb{R}$, tenemos $A \subset B$ y A es acotado, pero B no lo es.12. (2014-I PC2-4) *Solución.*

b) El polinomio $ky^2 - (\sqrt{k})y + k = 0$ tiene exactamente una solución si y solo si $\Delta = 0$. La condición anterior es equivalente a $k - 4k^2 = k(1 - 4k) = 0$, es decir, $k = 1/4$ pues debe ser positivo. Entonces $p(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 1) = 0$ de donde las soluciones son 1 y -1 .

13. (2014-I EP-1) *Solución.*

b) Como b es una cota superior y a es la menor de ellas, $a \leq b$. Análogamente, $b \leq a$. Por ende, $a = b$.

c) De las definiciones de contención y cota superior

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x \in A \longrightarrow x \in B] \quad \wedge \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in B, [x \leq M]$$

se obtiene

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x \in A \longrightarrow x \in B \longrightarrow x \leq M].$$

Por lo tanto,

$$\forall x \in A, [x \leq M]$$

14. (2014-II PC1-2) *Solución.*b) Para todo $x \in \mathbb{R}$

$$-19 + 12x - 2x^2 \leq M \quad \longleftrightarrow \quad 2x^2 - 12x + M + 19 \geq 0.$$

Para que esto último ocurra, el discriminante de la cuadrática debe ser menor o igual a cero, es decir

$$(-12)^2 - 4(2)(M + 19) \leq 0 \quad \longleftrightarrow \quad M \geq -1.$$

Por ende, el menor valor de M es -1 .

15. (2014-II PC1-3) *Solución.*

b) Cualquiera de las siguientes definiciones son equivalentes:

- El máximo entero de un número real x se define como $\llbracket x \rrbracket = n \in \mathbb{Z}$, donde n satisface $n \leq x < n + 1$.
- $\llbracket x \rrbracket$ se define como el máximo entero menor o igual a x .

c) Sea $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 1$, $\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \llbracket 1 \rrbracket = 1$.
- Si $n > 1$, se tiene que $0 < \frac{1}{n} < 1$, luego $\left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = 0$.

16. (2014-II EP-1) *Solución.*b) Si $x = 1.5$ e $y = 1.5$, entonces

$$\llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket = 1 + 1 = 2,$$

pero

$$\llbracket x + y \rrbracket = \llbracket 3 \rrbracket = 3.$$

17. (2015-0 PC1-1) *Solución.*b) Sea $A = B = \{1\}$, luego $A \subset B$; sin embargo, $\sup A = \sup B = 1$.

d) Como $-2 \leq -1.5 < -1$, entonces $\llbracket -1.5 \rrbracket = -2$.

18. (2015-0 PC1-2) *Solución.*

a) El conjunto A por extensión es $A = \{2, 4, 8, \dots\}$. Para B resolvemos la ecuación. De la propiedad $\llbracket y + n \rrbracket = \llbracket y \rrbracket + n$, cuando n es un entero e y cualquier real, como $\llbracket x \rrbracket$ es un entero, entonces

$$\begin{aligned}\llbracket \pi + \llbracket x \rrbracket \rrbracket &= \llbracket x \rrbracket + x \\ \llbracket \pi \rrbracket + \llbracket x \rrbracket &= \llbracket x \rrbracket + x \\ 3 &= x;\end{aligned}$$

por lo tanto, $B = \{3\}$.

19. (2015-0 PC1-3) *Solución.*

b) Como $(x, 4)$ y $(x, x^2 - 5x + 10)$ están en R , que es una función, entonces $x^2 - 5x + 10 = 4$, de donde

$$\begin{aligned}x^2 - 5x + 10 &= 4 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ (x - 2)(x - 3) &= 0.\end{aligned}$$

Por ende, $x = 2$ o $x = 3$. Si $x = 2$, $R = \{(2, 4), (3, 5)\}$, lo cual es una función. Si $x = 3$, entonces $R = \{(3, 4), (2, 4), (3, 5)\}$, lo que no es una función. El único valor posible es $x = 2$.

20. (2015-0 EP-1) *Solución.*

a)

ii) De la definición de máximo entero tenemos $\llbracket x \rrbracket \leq x < \llbracket x \rrbracket + 1$, luego

$$\llbracket x \rrbracket + n \leq x + n < \llbracket x \rrbracket + n + 1, \quad \llbracket x \rrbracket + n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto

$$\llbracket x + n \rrbracket = \llbracket x \rrbracket + n.$$

21. (2015-I PC1-1) *Solución.*

a)

ii) A modo de contraejemplo, se puede considerar $x = 5/2$. Así

$$\llbracket (5/2)^2 \rrbracket = \llbracket 6,25 \rrbracket = 6,$$

pero

$$\llbracket 5/2 \rrbracket \cdot \llbracket 5/2 \rrbracket = (2)(2) = 4.$$

22. (2016-0 PC1-1) *Solución.*

b) De

$$x^2 < 4 \leftrightarrow -2 < x < 2$$

se obtiene $\sup(A) = 2$.

d) Para $x = 3$ no se cumple, dado que no se puede dividir entre cero.

23. (2016-0 PC1-4) *Solución.*

b) Sea $\llbracket x \rrbracket = m$ y $\llbracket x \rrbracket = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, entonces

$$m \leq x < m + 1 \quad \text{y} \quad n \leq y < n + 1.$$

Sumando ambas se obtiene

$$m + n \leq x + y < m + n + 2,$$

de donde:

$$m + n \leq x + y < m + n + 1$$

o

$$m + n + 1 \leq x + y < m + n + 2.$$

Luego se tiene $\llbracket x + y \rrbracket = m + n$ o $\llbracket x + y \rrbracket = m + n + 1$. En cualquier caso

$$\llbracket x + y \rrbracket \geq m + n.$$

Por lo tanto $\llbracket x + y \rrbracket \geq \llbracket x \rrbracket + \llbracket y \rrbracket$.

24. (2016-0 PC2-3) *Solución.*

a) Por las unidades dadas se tiene

$$C(n) = 5 \Leftrightarrow \frac{2n^2 - 16n + 37}{n^2 - 8n + 17} = 5$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 8n + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 4.$$

Así, en cuatro años el costo por unidad será el requerido.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$2(n-4)^2 \leq 5(n-4)^2 \rightarrow 2(n-4)^2 + 5 \leq 5(n-4)^2 + 5$$

$$\rightarrow \frac{2(n-4)^2 + 5}{(n-4)^2 + 1} \leq 5$$

$$\rightarrow C(n) \leq 5.$$

25. (2016-I PC1-4) *Solución.*

a) Si $(P, Q) \in S$, entonces existe un $k > 0$, tal que $1^2 + (1-a)^2 = k^2$ y $(2-3a)^2 + (-1)^2 = k^2$, es decir

$$1^2 + (1-a)^2 = (2-3a)^2 + (-1)^2,$$

lo cual se simplifica a

$$8a^2 - 10a + 3 = 0$$

y se factoriza a

$$(4a-3)(2a-1) = 0.$$

$$\text{Así, } a = \frac{3}{4} \text{ o } a = \frac{1}{2}.$$

b) Sean $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ y $R = (x_3, y_3)$.

(I) Si $(P, Q) \in S$, entonces $\exists k_1 > 0$ tal que $x_1^2 + y_1^2 = k_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

(II) Si $(Q, R) \in S$, entonces $\exists k_2 > 0$ tal que $x_2^2 + y_2^2 = k_2^2 = x_3^2 + y_3^2$.

De (I) y (II), se sigue que

$$k_1 = k_2 \text{ y } x_1^2 + y_1^2 = k_1^2 = x_3^2 + y_3^2,$$

es decir $(P, R) \in S$.

26. (2017-0 PC1-1) *Solución.*

a) De hecho $\sup(A) = 20.9$.

c) El máximo entero de $-\sqrt{2}$ es -2 .

27. (2017-0 EP-1) *Solución.*

b)

ii) $x = 0$ es una solución, pues

$$\sqrt{0} + \sqrt{0+1} + \sqrt{0+4} + \sqrt{0+9} = 0 + 1 + 2 + 3 = 6.$$

28. (2017-I PC1-3) *Solución.*

b) El enunciado es falso. Por ejemplo, para $a = 3 \in \mathbb{N}$ y $b = 0 \in \mathbb{R}$, se tiene $3 \cdot (0) < 1$.

29. (2017-II PC1-2) *Solución.*

a)

i) Probaremos que la negación de la afirmación es verdadera:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{Z}, [x < m].$$

Por la definición de máximo entero, para todo x real, se tiene que:

$$\llbracket x \rrbracket \leq x < \llbracket x \rrbracket + 1.$$

Así, un valor entero que cumple el papel de m es $\llbracket x \rrbracket + 1$.

30. (2017-II PC1-4) *Solución.*

Para que las raíces de la ecuación cuadrática sean iguales, debe cumplirse lo siguiente:

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3a - 1)^2 - 4(2a)(a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - (8b + 6)a + 1 = 0.$$

Considerando que debe existir un único valor de a que cumpla con la última ecuación cuadrática mostrada, tenemos que:

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [-(8b + 6)]^2 - 4(1)(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (8b + 6)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -\frac{1}{2} \vee b = -1.$$

Luego, los valores de b son $-\frac{1}{2}$ y $b = -1$.

31. (2018-0 PC2-1) *Solución.*

a) Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se denomina acotado superiormente cuando existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq M$ para todo $x \in A$. En este caso, M es llamado cota superior de A .

b) $\lceil \sqrt{2} + \sqrt{3} \rceil = \underline{3}$.

d) La ecuación cuadrática $x^2 + 4x - 21 = 0$ tiene raíces x_1 y x_2 , entonces

$$x_1 + x_2 = \underline{-4}.$$

32. (2018-0 EP-1) *Solución.*

b)

i) Consideremos $A = [0, 2]$ y $B = [0, 1[$. Así, $A - B = [1, 2]$ y por tanto $\sup(A - B) = \sup(A) = 2$.

33. (2018-I PC1-3) *Solución.*

a)

i)

$$p(x) = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4$$

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right).$$

34. (2018-II PC1-3) *Solución.*

a)

ii) Un subconjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, [x \leq M].$$

A dicha constante M se le denomina cota superior.

iii) El supremo es la menor de las cotas superiores.

b) Sea $x \in A$ y M una cota superior del conjunto B . Como $A \subset B$ se tiene que $x \in B$, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x \in A \rightarrow x \in B];$$

por otro lado, si $x \in B$ se cumple que

$$x \leq M;$$

por lo tanto, M es una cota superior del conjunto A .

c) Sea $x \in A$, ya que $A \subset B$ se tiene que $x \in B$, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}, [x \in A \rightarrow x \in B]$$

como $x \in B$ se tiene que

$$x \leq \sup(B);$$

luego, $\sup(B)$ es una cota superior del conjunto A y como $\sup(A)$ es la menor de sus cotas superiores, concluimos que

$$\sup(A) \leq \sup(B).$$

35. (2019-0 PC2-2) *Solución.*

- b) De la ecuación $\llbracket x^2 + x + 1 \rrbracket = x + 5$ se sigue que $x + 5 \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}$ y la ecuación se simplifica a

$$\begin{aligned}x^2 + x + 1 &= x + 5 \\x^2 &= 4 \\x &= \pm 2.\end{aligned}$$

Así, A posee dos elementos.

36. (2019-0 EP-1) *Solución.*

b)

- ii) Sean $\alpha = -1$ y $A = [0, 1]$, así $\alpha A = [-1, 0]$. Luego $\sup(\alpha A) = 0$, mientras que

$$\alpha \sup(A) = (-1)(1) = -1.$$

Por ende, $\sup(\alpha A) \neq \alpha \sup(A)$.

37. (2019-II EP-2) *Solución.*

- a) Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, complete: $\sup[a, b] = \underline{\hspace{1cm} b \hspace{1cm}}$, $\inf[a, b] = \underline{\hspace{1cm} a \hspace{1cm}}$.
- b) Sean A y B dos subconjuntos acotados superiormente en $\mathbb{R}$. Complete:

$$\text{Si } A \subset B \text{ entonces } \sup \underline{\hspace{1cm} A \hspace{1cm}} \leq \sup \underline{\hspace{1cm} B \hspace{1cm}}.$$

Intervalos y Valor Absoluto

1. (2012-I PC2-3) *Solución.*

a) Primero notamos que $x \neq 0$. Calculando obtenemos

$$\begin{aligned} |3x + 5| \geq 2|x| &\longleftrightarrow 9x^2 + 30x + 25 \geq 4x^2 \\ &\longleftrightarrow 5x^2 + 30x + 25 \geq 0 \\ &\longleftrightarrow x^2 + 6x + 5 \geq 0 \\ &\longleftrightarrow (x + 1)(x + 5) \geq 0 \\ &\longleftrightarrow x \leq -5 \vee -1 \leq x \end{aligned}$$

y, por lo tanto, el conjunto solución es

$$]-\infty, -5] \cup [-1, 0[\cup]0, +\infty[$$

2. (2013-0 PC2-1) *Solución.*

a) Un intervalo es un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que cualquier número entre dos elementos del subconjunto también pertenece a dicho subconjunto. Es decir, $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si $a, b \in I$ y $a < c < b$ implican $c \in I$.

b)

i) La afirmación es falsa, pues:

- $B^c =]-\infty, \pi[$
- $A \cup B^c =]-\infty, \pi]$
- $A \cap B^c = [-\pi, \pi[$
- $A \Delta B^c = (A \cup B^c) - (A \cap B^c) =]-\infty, -\pi[\cup \{\pi\}$.

ii) La afirmación es falsa. El contraejemplo se obtiene considerando $a = -1$, así se tiene que $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$.

iii) La afirmación es falsa. El contraejemplo se obtiene considerando $a = -1$, así se tiene que $|-1 + 1| = 0 \neq |-1| + 1$.

3. (2013-0 PC2-2) *Solución.*

b) El polinomio $p(x)$ se puede factorizar como

$$p(x) = x^2 + \left(\frac{a-b}{ab}\right)x - \frac{1}{ab} = \left(x - \frac{1}{a}\right)\left(x + \frac{1}{b}\right) \geq 0.$$

De aquí se tiene que las raíces son

$$r_1 = -\frac{1}{b} < 0 \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1}{a} > 0.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$\left]-\infty, -\frac{1}{b}\right] \cup \left[\frac{1}{a}, \infty\right[.$$

c) Para que $p(x)$ posea dos raíces distintas, el discriminante debe ser positivo, así

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\longrightarrow 1 - 4k^2 > 0 \\ &\longrightarrow 4k^2 - 1 < 0 \\ &\longrightarrow (2k + 1)(2k - 1) < 0. \end{aligned}$$

Las raíces obtenidas de la condición de positividad del discriminante son

$$r_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1}{2}.$$

Así, $k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Pero $k \neq 0$ porque $p(x)$ debe ser cuadrático. Luego

$$k \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[- \{0\}.$$

4. (2013-0 PC2-4) *Solución.*

a) Se tienen dos casos. Para $x \geq 0$

$$x \geq 0 \longrightarrow |x| = x \longrightarrow -|x| \leq 0 \leq x \longrightarrow -|x| \leq x \leq |x|.$$

Para $x < 0$

$$\begin{aligned}x < 0 &\longrightarrow |x| = -x \\&\longrightarrow -|x| = x \\&\longrightarrow -|x| \leq x < 0 < |x| \\&\longrightarrow -|x| \leq x \leq |x|.\end{aligned}$$

En ambos casos se cumple la propiedad.

5. (2013-0 EP-2) *Solución.*

b) Elevando al cuadrado se obtiene

$$\begin{aligned}|x - 3| > |x - 1| &\Leftrightarrow (x - 3)^2 > (x - 1)^2 \\&\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 > x^2 - 2x + 1 \\&\Leftrightarrow 2 > x.\end{aligned}$$

Por ende, $C.S. =] - \infty, 2[$.

6. (2013-I PC2-1) *Solución.*

- a) No. Tomando $I = [0, 2]$ y $J = [1, 3]$ se obtiene $I \triangle J = [0, 1[\cup]2, 3]$, el cual no es un intervalo.
- b) No. Por ejemplo, $I =]0, 1[$ y $J = [1, 2[$, entonces $I \cup J =]0, 2[$ es un intervalo pero $I \cap J = \emptyset$.

7. (2013-I PC2-2) *Solución.*

a) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se define

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

b) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

c) En el teorema de la desigualdad triangular considere $a = x - y$, $b = y$, entonces

$$\begin{aligned}|a + b| &\leq |a| + |b| \leftrightarrow |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y| \\ &\leftrightarrow |x| \leq |x - y| + |y| \\ &\leftrightarrow |x| - |y| \leq |x - y|.\end{aligned}$$

Análogamente, se prueba que $|y| - |x| \leq |x - y|$. Por lo tanto,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

8. (2013-I PC2-3) *Solución.*

a) De la ecuación se obtienen dos restricciones

$$x \neq -2 \quad \text{y} \quad 6/(-x - 2) > 0,$$

las cuales implican que $x < -2$. Para estos valores, de la definición de valor absoluto se cumple que

$$\begin{aligned}&\left| \frac{x^2 + 5x}{x + 2} \right| = \frac{6}{-x - 2} \\ \longleftrightarrow &\left(\frac{x^2 + 5x}{x + 2} = \frac{6}{-x - 2} \right) \vee \left(\frac{x^2 + 5x}{x + 2} = \frac{-6}{-x - 2} \right) \\ \longleftrightarrow &(x^2 + 5x = -6) \vee (x^2 + 5x = 6) \\ \longleftrightarrow &(x = -3 \vee x = -2) \vee (x = -6 \vee x = 1).\end{aligned}$$

Como se debe cumplir la condición $x < -2$, se concluye que

$$C.S. = \{-3, -6\}.$$

b)

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad a^2x^2 + 2ax + b^2 > 0 &\leftrightarrow \Delta < 0 \\ &\leftrightarrow (2a)^2 - 4(a^2)b^2 < 0 \\ &\leftrightarrow 4a^2(1 - b^2) < 0 \\ &\leftrightarrow 1 - b^2 < 0 \\ &\leftrightarrow (b - 1)(b + 1) > 0 \\ &\leftrightarrow b \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.\end{aligned}$$

9. (2013-II PC2-2) *Solución.*b) Como $b < 0$

$$3b(a - 2x)(x + b) \leq 0 \leftrightarrow (2x - a)(x + b) \leq 0,$$

de donde se obtiene el conjunto solución: $\left[\frac{a}{2}, -b\right]$, dado que el polinomio cuadrático $p(x) = (2x - a)(x + b)$ tiene raíces: $r_1 = a/2$ y $r_2 = -b$, donde $r_1 < r_2$.

10. (2013-II PC2-3) *Solución.*

a) Es posible considerar dos casos.

• **Caso 1:** $x \geq 0$

$$\begin{aligned} -1 < |x| - 8x < 1 &\leftrightarrow -1 < x - 8x < 1 \\ &\leftrightarrow -1 < -7x < 1 \\ &\leftrightarrow -\frac{1}{7} < x < \frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Luego $0 \leq x < \frac{1}{7}$.• **Caso 2:** $x < 0$

$$\begin{aligned} -1 < |x| - 8x < 1 &\leftrightarrow -1 < -x - 8x < 1 \\ &\leftrightarrow -1 < -9x < 1 \\ &\leftrightarrow -\frac{1}{9} < x < \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Luego $-\frac{1}{9} < x < 0$.Por lo tanto: $CS =]-\frac{1}{9}, \frac{1}{7}[$.b) La desigualdad equivale a probar: $-|a + b| \leq |a| - |b| \leq |a + b|$. Usando la desigualdad triangular se obtiene que:

$$|b| = |(b + a) + (-a)| \leq |b + a| + |-a| \rightarrow -|a + b| \leq |a| - |b|$$

$$|a| = |(a + b) + (-b)| \leq |b + a| + |-b| \rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|.$$

11. (2014-0 PC2-2) *Solución.*

a)

iii) Contraejemplo: si tomamos $x = 3$, $z = \pi$, entonces el número $y = 3.1$ cumple $x < y < z$, pero $y \notin B$.

b) Por definición

$$C \triangle D = (C \cap D^c) \cup (C^c \cap D).$$

Por un lado, tenemos

$$C \cap D^c =] - \infty, -a[$$

y además

$$C^c \cap D =]a, b].$$

Por ende, $C \triangle D =] - \infty, -a[\cup]a, b]$.12. (2014-0 PC2-3) *Solución.*

a) Por definición $d(a, c) = |c - a|$, $d(a, b) = |b - a|$ y $d(b, c) = |c - b|$. Por lo tanto, la desigualdad que se desea probar se puede expresar como

$$|c - a| \leq |b - a| + |c - b|.$$

Para ello se usa la desigualdad triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$. Tomando $x = b - a$ e $y = c - b$, se obtiene $x + y = c - a$ y reemplazando en la desigualdad triangular se llega a

$$|c - a| \leq |b - a| + |c - b|.$$

b) La inecuación es equivalente a $p(x) = x^2 - 2x + a^2 + a - 1 > 0$. Para que el conjunto solución sea $\mathbb{R}$, debemos tener que el discriminante de $p(x)$ es estrictamente menor que 0. Calculando el discriminante en términos de a obtenemos

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(a^2 + a - 1) = -4a^2 - 4a + 8.$$

Para hallar los valores de a que cumplen la condición, tenemos que resolver la inecuación $-4a^2 - 4a + 8 < 0$. Primero obtenemos una inecuación equivalente con coeficiente principal positivo $4a^2 + 4a - 8 > 0$. El polinomio $q(a) = 4a^2 + 4a - 8$ tiene raíces $r_1 = -2$ y $r_2 = 1$; y, por lo tanto, el conjunto de los valores posibles de a es $] - \infty, -2[\cup]1, \infty[$.

13. (2014-0 PC2-4) *Solución.*

- a) En primer lugar, notamos la restricción $x \neq 0$. Por propiedad del valor absoluto tenemos $-1 \leq \frac{2x+1}{x} \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad \wedge \quad & \left(0 \leq 1 + \frac{2x+1}{x} \wedge \frac{2x+1}{x} - 1 \leq 0 \right) \\ x \neq 0 \quad \wedge \quad & \left(0 \leq \frac{3x+1}{x} \wedge \frac{x+1}{x} \leq 0 \right). \end{aligned}$$

Dado que $\frac{3x+1}{x}$ tiene el mismo signo que $(3x+1)(x)$ y $\frac{x+1}{x}$ tiene el mismo signo que $(x+1)(x)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad \wedge \quad & (0 \leq (3x+1)(x) \wedge (x+1)(x) \leq 0) \\ x \neq 0 \quad \wedge \quad & \left(x \in]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [0, \infty[\wedge x \in [-1, 0] \right) \\ x \neq 0 \quad \wedge \quad & \left(x \in \left(]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [0, \infty[\right) \cap [-1, 0] \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $[-1, -\frac{1}{3}]$.

14. (2014-0 EP-1) *Solución.*

- b) Por las propiedades del valor absoluto se obtiene

$$\begin{aligned} |x-1| \cdot |x+2| > 4 & \Leftrightarrow |(x-1) \cdot (x+2)| > 4 \\ & \Leftrightarrow |x^2 + x - 2| > 4 \\ & \Leftrightarrow (x^2 + x - 2 > 4) \vee (x^2 + x - 2 < -4) \\ & \Leftrightarrow (x^2 + x - 6 > 0) \vee (x^2 + x + 2 < 0) \\ & \Leftrightarrow ((x+3) \cdot (x-2) > 0) \vee \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} < 0 \right) \\ & \Leftrightarrow (x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty) \vee (x \in \emptyset) \\ & \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[. \end{aligned}$$

Esto nos dice que el conjunto pedido es $] -\infty, -3[\cup]2, +\infty[$.

15. (2014-0 EP-2) *Solución.*

b) La inecuación $(a - x)x(x + a) < 0$ es equivalente a $(x - a)x(x + a) > 0$.

A continuación presentamos la tabla de signos, explicitando que la última fila contiene el producto de los tres factores:

	$] - \infty, -a[$	$] - a, 0[$	$]0, a[$	$]a, +\infty[$
$(x - a)$	(-)	(-)	(-)	(+)
x	(-)	(-)	(+)	(+)
$(x + a)$	(-)	(+)	(+)	(+)
$(x - a)x(x + a)$	(-)	(+)	(-)	(+)

En consecuencia: $x \in] - a, 0[\cup]a, +\infty[$.

16. (2014-I PC2-1) *Solución.*

a) El número 2 no es parte del conjunto solución porque

$$|2 - 2| + |2 - 3| = |0| + |-1| = 1 \neq 0.$$

17. (2014-I PC2-4) *Solución.*

c) Como $x^2 + \pi > 0$, la expresión se simplifica a

$$\frac{|x^2 + \pi| - (3 + x^2)}{x(|x| - \sqrt{5})} = \frac{\pi - 3}{x(|x| - \sqrt{5})} < 0.$$

La constante $\pi - 3$ es positiva; por lo tanto, la expresión anterior es equivalente a $x(|x| - \sqrt{5}) < 0$. Esto último es cierto si y solo si

$$[(x > 0) \wedge (|x| - \sqrt{5} < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (|x| - \sqrt{5} > 0)].$$

Desarrollando la última expresión obtenemos

$$C.S. =] - \infty, -\sqrt{5}[\cup]0, \sqrt{5}[.$$

18. (2014-I EP-2) *Solución.*

a) Como el valor absoluto es no negativo, se obtiene

$$x - 4 \geq 0 \longrightarrow x \geq 4.$$

Asimismo

$$x \geq 4 \longrightarrow 2x - 4 \geq 4 \longrightarrow \llbracket 2x - 4 \rrbracket + 1 \geq 0.$$

Por lo tanto, la igualdad se simplifica a

$$\llbracket 2x - 4 \rrbracket + 1 = x - 4.$$

De la definición de máximo entero

$$x - 5 \leq 2x - 4 < x - 4$$

y simplificando se llega a

$$-1 \leq x < 0,$$

lo cual es una contradicción. El conjunto solución es entonces el conjunto vacío.

b) De la no negatividad del valor absoluto

$$2x - 4 \geq 0 \longrightarrow x \geq 2.$$

Esto implica que

$$x - 1 \geq 1 > 0 \longrightarrow |x - 1| = x - 1.$$

La desigualdad se simplifica entonces a

$$|3x - 4| \leq 2x - 4.$$

Como $x \geq 2$, entonces $3x - 4 \geq 2$ y así $|3x - 4| = 3x - 4$. La desigualdad se simplifica aún más llegando a

$$3x - 4 \leq 2x - 4,$$

de donde $x \leq 0$. Esto último es una contradicción con $x \geq 2$. Por lo tanto, el conjunto solución es el conjunto vacío.

19. (2014-II PC1-3) *Solución.*

a)

$$\begin{aligned} \left| \frac{x-3}{x-1} \right| \leq \frac{6}{x-1} &\Leftrightarrow \frac{6}{x-1} \geq 0 \wedge \left[-\frac{6}{x-1} \leq \frac{x-3}{x-1} \leq \frac{6}{x-1} \right] \\ &\Leftrightarrow x-1 > 0 \wedge [-6 \leq x-3 \leq 6] \\ &\Leftrightarrow x > 1 \wedge [-3 \leq x \leq 9] \\ &\Leftrightarrow 1 < x \leq 9. \end{aligned}$$

Luego, $C.S. =]1, 9]$.

20. (2014-II PC1-4) *Solución.*

a) Sea x el número de incrementos de un dólar.

$$\begin{aligned} \text{Precio unitario} &= 10 + x. \\ \text{Cantidad} &= 20 - 2x. \\ \text{Ingreso} &= (20 - 2x)(10 + x). \\ \text{Costo} &= (20 - 2x)(6). \\ \text{Ganancia} &= (20 - 2x)(10 + x - 6) = (20 - 2x)(4 + x). \end{aligned}$$

Dado que la ganancia diaria debe ser por lo menos \$ 96, se obtiene:

$$\begin{aligned} (20 - 2x)(4 + x) \geq 96 &\longleftrightarrow x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ &\longleftrightarrow (x - 2)(x - 4) \leq 0 \\ &\longleftrightarrow x \in [2, 4]. \end{aligned}$$

El precio máximo es \$ 14.

21. (2014-II EP-1) *Solución.*

c) Cuando $r = 0$ y $s = -1000$, obtenemos $|r| + 1000 = 1000 = |s|$.

22. (2015-0 PC1-1) *Solución.*

a) Sea $I = \{1\} \cup [2, +\infty[$, entonces se cumple que

$$\forall a, b \in I, \forall c \in \mathbb{R}, [a < b < c \rightarrow c \in I].$$

Sin embargo, I no es un intervalo.

23. (2015-0 PC1-4) *Solución.*

- a) Para que la inecuación posea solución, de la no negatividad del valor absoluto, se debe cumplir que $2x + 5 > 0$, es decir $x > -\frac{5}{2}$. Además, de la definición del valor absoluto

$$-2x - 5 < 3x - 1 \quad \text{y} \quad 3x - 1 < 2x + 5.$$

Simplificando esto último se obtiene $-\frac{4}{5} < x$ y $x < 6$. Por lo tanto

$$C.S. = \left] -\frac{4}{5}, 6 \right[.$$

24. (2015-0 EP-3) *Solución.*

- a) Como $\frac{x}{7} + 5 \in \mathbb{Z}$, se tiene $\frac{x}{7} \in \mathbb{Z}$; de esto $x \in \mathbb{Z}$. Luego, la ecuación queda

$$2x + 2 = \frac{x}{7} + 5$$

$$2x - \frac{x}{7} = 5 - 2$$

$$\frac{13x}{7} = 3$$

$$x = \frac{21}{13}.$$

Como x debía ser entero, $C.S. = \emptyset$.

- b) De la desigualdad vemos que $2x - 4 \geq 0$, de donde $x \geq 2$. Así, la inecuación se simplifica a

$$\begin{aligned} |4x - 18| \leq 2x - 4 &\rightarrow |2x - 9| \leq x - 2 \\ &\rightarrow 2 - x \leq 2x - 9 \leq x - 2. \end{aligned}$$

- Resolviendo $2 - x \leq 2x - 9$:

$$2 - x \leq 2x - 9$$

$$-3x \leq -11$$

$$x \geq \frac{11}{3}.$$

Luego $x \in \left[\frac{11}{3}, +\infty \right)$.

- Resolviendo $2x - 9 \leq x - 2$:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 9 & \leq & x - 2 \\ x & \leq & 7. \end{array}$$

Luego $x \in [-\infty, 7]$.

El conjunto solución es la intersección $[\frac{11}{3}, 7]$.

- c) De $a < b < 0$, sabemos que a y b son números reales negativos. De aquí, podemos ver que $2a < 2b < 0$ y que $0 < -a$; por ende, $2b < 0 < -3a$. Como la inecuación $(x + 3a)(2b - x) \geq 0$ incluye al 0, sabemos que dicha inecuación será cumplida por $x \in \{2b, -3a\}$. Para hallar el resto de valores del conjunto solución, presentamos la tabla de signos, explicitando que la última fila contiene el producto de los dos factores:

	$x < 2b$	$2b < x < -3a$	$x > -3a$
$(x + 3a)$	(-)	(-)	(+)
$(2b - x)$	(+)	(-)	(-)
$(x + 3a) \cdot (2b - x)$	(-)	(+)	(-)

En consecuencia $x \in]2b, -3a[$. Con ello podemos concluir que

$$C.S. = [2b, -3a].$$

25. (2015-I PC1-1) *Solución.*

a)

- i) Contraejemplo: Sea $I_1 = [0, 2]$ e $I_2 = [3, 5]$, entonces $2 \in (I_1 \cup I_2)$ y $3 \in (I_1 \cup I_2)$, pero $5/2 \notin (I_1 \cup I_2)$.

- iii) Contraejemplo: $|(-2)^3 + 1| = 7 \neq -7 = (-2)^3 + 1$.

26. (2015-I PC1-3) *Solución.*

- a) Dado que $|x| \geq 0$, entonces $|x| + 3 > 0$. Si $||x| + 3| > e$, entonces $|x| + 3 > e$, de donde $|x| > (e - 3)$. Por lo tanto, $C.S. = \mathbb{R}$.

b) La inecuación $(\pi - x) x (x + \pi) < 0$ es equivalente a

$$p(x) = (x - \pi) x (x + \pi) > 0.$$

A continuación, presentamos la tabla de signos (zonas):

	$x < -\pi$	$-\pi < x < 0$	$0 < x < \pi$	$x > \pi$
$p(x)$	(-)	(+)	(-)	(+)

En consecuencia

$$C.S. =] - \pi, 0[\cup] \pi, +\infty[.$$

27. (2015-I PC2-2) *Solución.*

a)

$$\overline{C}(1) = \frac{C(1)}{1} = 20 - \frac{51}{5} = 9.8.$$

c)

$$\begin{aligned}
 \overline{C}(q) \geq 25 &\Leftrightarrow 20 + \frac{8q^2 - 59q}{q^2 + 4} \geq 25 \\
 &\Leftrightarrow \frac{8q^2 - 59q}{q^2 + 4} \geq 5 \\
 &\Leftrightarrow 8q^2 - 59q \geq 5q^2 + 20 \\
 &\Leftrightarrow 3q^2 - 59q - 20 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (3q + 1)(q - 20) \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow q \in \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [20, \infty[.
 \end{aligned}$$

Dado que q es natural, se tiene que $q \in [20, \infty[$, por lo que la respuesta es 20 unidades.

28. (2015-II PC1-3) *Solución.*

a) Factorizando el polinomio se tiene $(x - 6)(x - r) \geq 0$. El $C.S.$ cambia en función del valor de r de acuerdo con los siguientes tres casos.

- Si $r = 6$, $(x - 6)^2 \geq 0$ implica $C.S. = \mathbb{R}$.
- Si $r < 6$, $(x - 6)(x - r) \geq 0$ implica

$$x \in]-\infty, r] \cup [6, +\infty[.$$

Por lo tanto, $C.S. =]-\infty, r] \cup [6, +\infty[.$

- Si $r > 6$ $(x - 6)(x - r) \geq 0$ implica

$$x \in]-\infty, 6] \cup [r, +\infty[.$$

Por ende, $C.S. =]-\infty, 6] \cup [r, +\infty[.$

29. (2015-II PC1-4) *Solución.*

a) Primero se muestra que $||x| - |y|| \leq |x - y|$. Usando la desigualdad triangular se tiene que

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|,$$

de donde $|x| - |y| \leq |x - y|$. Del mismo modo se tiene que

$$|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x|,$$

de donde $|y| - |x| \leq |x - y|$ (es decir $-|x - y| \leq |x| - |y|$). Entonces, de

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad \text{y} \quad -|x - y| \leq |x| - |y|$$

se tiene que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. En segundo lugar, se prueba que $|x - y| \leq |x| + |y|$. Usando la desigualdad triangular se tiene que

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Finalmente, se concluye que

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

- b) Sea v el total de ventas realizadas por Javier. El salario de las dos opciones de trabajo son $400 + 2\%v$ y $500 + 1.5\%v$ respectivamente. De las equivalencias:

$$400 + 0.02v = 500 + 0.015v \leftrightarrow v = 20\,000$$

$$400 + 0.02v < 500 + 0.015v \leftrightarrow v < 20\,000$$

$$400 + 0.02v > 500 + 0.015v \leftrightarrow v > 20\,000$$

Se puede concluir lo siguiente. Si las ventas mensuales de Javier en dólares se encuentran en $[0, 20\,000[$, le conviene la opción 2. Si las ventas mensuales de Javier en dólares se encuentran en $]20\,000, 40\,000]$, le conviene la opción 1. Si las ventas mensuales de Javier son de 20 000 dólares, le conviene cualquier de las dos opciones.

30. (2015-II EP-1) *Solución.*

- a) De las equivalencias

$$3\llbracket x \rrbracket^2 - 11\llbracket x \rrbracket + 10 = 0 \leftrightarrow (3\llbracket x \rrbracket - 5) \cdot (\llbracket x \rrbracket - 2) = 0$$

$$\leftrightarrow (\llbracket x \rrbracket = \frac{5}{3}) \vee (\llbracket x \rrbracket = 2)$$

$$\leftrightarrow (\emptyset) \vee (x \in [2; 3[)$$

se sigue que $C.S. = [2; 3[$.

- b) De las equivalencias

$$|(x - 2) \cdot (x)| > 3 \leftrightarrow |x^2 - 2x| > 3$$

$$\leftrightarrow (x^2 - 2x > 3) \vee (x^2 - 2x < -3)$$

$$\leftrightarrow (x^2 - 2x - 3 > 0) \vee (x^2 - 2x + 3 < 0)$$

$$\leftrightarrow ((x - 3) \cdot (x + 1) > 0) \vee ((x - 1)^2 + 2 < 0)$$

$$\leftrightarrow (x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty) \vee (\emptyset)$$

$$\leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$$

se sigue que $C.S. =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

31. (2016-0 PC1-1) *Solución.*

c) Si $A = [1, 3]$, $B = [2, 5]$ y $A \cap B = [2, 3]$, luego

$$(A \cap B)^C =] - \infty, 2[\cup] 3, +\infty[,$$

el cual no es un intervalo.

32. (2016-0 PC1-3) *Solución.*

a) La condición es

$$|a - 800| \leq \frac{4}{100} 800,$$

de donde $|a - 800| \leq 32$. Luego

$$768 \leq a \leq 832.$$

El valor aceptable está entre 768 y 832.

b) Resolviendo

$$|n^2 + 3| \leq n + 9 \quad \longrightarrow \quad n^2 + 3 \leq n + 9,$$

de donde

$$n^2 - n - 6 \leq 0 \quad \longrightarrow \quad n \leq 3.$$

Por lo tanto, $n \in \{1, 2, 3\}$ y $B = \{-3, 9, -27\}$.

33. (2016-0 PC1-4) *Solución.*

a) La inecuación $abx^2 + a^2x \leq 2ab + 2b^2x$ es equivalente a

$$\begin{aligned} abx^2 + (a^2 - 2b^2)x - 2ab &\leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2b}{a}\right) \left(x - \left(-\frac{a}{b}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow (ax - 2b)(bx + a) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{2b}{a}\right) \left(x - \left(-\frac{a}{b}\right)\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Luego: $C.S. = \left[-\frac{a}{b}, \frac{2b}{a}\right]$.

34. (2016-0 EP-1) *Solución.*

a) Simplificando se obtiene

$$-e < x < e$$

y así

$$C.S. =] - e, e[.$$

b)

i) Si $p(x) > 0 \rightarrow x \cdot (\alpha - x) \cdot (x - \beta) > 0$, entonces

$$q(x) = x \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) < 0.$$

A continuación se presenta la tabla de signos (zonas):

	$x < \alpha$	$\alpha < x < 0$	$0 < x < \beta$	$x > \beta$
$q(x)$	(-)	(+)	(-)	(+)

De aquí se obtiene que

$$C.S. =] - \infty, \alpha[\cup] 0, \beta[.$$

iii) Si $p(x) < 0$, entonces $x \cdot (\alpha - x) \cdot (x - \beta) < 0$, es decir

$$q(x) = x \cdot (x - \alpha) \cdot (x - \beta) > 0$$

y así usando la misma tabla de signos se obtiene

$$C.S. =] \alpha, 0[\cup] \beta, \infty[.$$

35. (2016-I PC1-1) *Solución.*

b)

i) Considere $I = \{0\} \cup [1, 2]$ y $J = [1, 2]$. Así $I \cap J = [1, 2]$ y $J = [1, 2]$ son intervalos, pero I no es intervalo.

ii) Considere $a = b = 1$, así $\min\{a, b\} = 1$ y $|a| = 1$, entonces no se cumple que $\min\{a, b\} < |a|$.

36. (2016-I PC1-3) *Solución.*

a) La ecuación cuadrática es positiva siempre que $\Delta < 0$, es decir:

$$\left(2\sqrt{5|a|}\right)^2 - 4\left(\frac{7+|a|}{4}\right)(3+|a|) < 0$$

$$20|a| - (21 + 10|a| + |a|^2) < 0$$

$$-|a|^2 + 10|a| - 21 < 0$$

$$|a|^2 - 10|a| + 21 > 0$$

$$(|a| - 3)(|a| - 7) > 0.$$

De donde $0 \leq |a| < 3$ o $|a| > 7$, por ende

$$a \in]-\infty, -7[\cup]-3, 3[\cup]7, +\infty[.$$

b) Si $a = \left\lfloor \frac{1}{2} - x \right\rfloor$, se debe cumplir que $a \leq -3$ por la restricción de la raíz cuadrada. Luego

$$a + \sqrt{1 - 3a} = -3$$

$$a + 3 = -\sqrt{1 - 3a}$$

$$(a + 3)^2 = 1 - 3a$$

$$a^2 + 9a + 8 = 0$$

$$(a + 1)(a + 8) = 0.$$

Entonces $a = -1$ o $a = -8$, de donde $a = -8$, pues $a = -1$ no cumple la restricción inicial. Por lo tanto, de $\left\lfloor \frac{1}{2} - x \right\rfloor = -8$ y la definición de máximo entero se obtiene:

$$\begin{aligned} -8 &\leq \frac{1}{2} - x < -7 \\ -\frac{17}{2} &\leq -x < -\frac{15}{2} \\ \frac{15}{2} &< x &\leq \frac{17}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } C.S. = \left] \frac{15}{2}, \frac{17}{2} \right].$$

37. (2016-II PC1-2) *Solución.*

- a) De la restricción $2x + 10 > 4|x + 2| \geq 0$ y las propiedades del valor absoluto se obtiene

$$\begin{aligned} 4|x + 2| &< 2x + 10 \\ \iff 2|x + 2| &< x + 5 \\ \iff x + 5 > 0 \wedge -(x + 5) &< 2(x + 2) < x + 5 \\ \iff x > -5 \wedge -x - 5 &< 2x + 4 \wedge 2x + 4 < x + 5 \\ \iff x > -5 \wedge x > -3 \wedge x &< 1 \\ \iff -3 < x &< 1. \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } C.S. =]-3, 1[.$$

- b) Expandiendo y factorizando se obtiene:

$$\begin{aligned} ab(x^2 + 1) + (a^2 + b^2)x &\leq 0 \iff abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab \leq 0 \\ &\iff (ax + b)(bx + a) \leq 0. \end{aligned}$$

Dado que las raíces del polinomio cuadrático son $-\frac{b}{a}$, $-\frac{a}{b}$ con $-\frac{b}{a} > -\frac{a}{b}$, se tiene que $A = \left[-\frac{a}{b}, -\frac{b}{a} \right]$. Luego

$$A^c = \left] -\infty, -\frac{a}{b} \right[\cup \left] -\frac{b}{a}, +\infty \right[.$$

- c) De la definición del máximo entero:

$$\begin{aligned} \llbracket x^2 + 2ax + a^2 \rrbracket = 0 &\iff 0 \leq x^2 + 2ax + a^2 < 1 \\ &\iff 0 \leq x^2 + 2ax + a^2 \wedge x^2 + 2ax + a^2 < 1 \\ &\iff 0 \leq (x + a)^2 \wedge (x + a)^2 < 1 \\ &\iff x \in \mathbb{R} \wedge (x + a + 1)(x + a - 1) < 0 \\ &\iff x \in]-a - 1, -a + 1[. \end{aligned}$$

Luego, $C.S. =]-a - 1, -a + 1[$.

38. (2017-0 PC1-1) *Solución.*

- b) Como $-2 < -1/2$, se obtiene $-2 \in \left\{ x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x} \right\}$, pero $-2 \notin]0, 1[$.
- d) Cualquier $x < 0$ es menor que un valor absoluto, así $x < |x^2 + x + 1|$. Ahora, si $x \geq 0$, entonces $x^2 + x + 1$ es positivo y además mayor que x , deduciéndose $|x^2 + x + 1| > x$.

39. (2017-0 PC1-3) *Solución.*

- a) i) $A \cap B = [\sqrt{2}, e[$.
 ii) $B - D = [\sqrt{2}, 2[$.
 iii) $C - A =]-\infty, -\pi] \cup [e, \pi[$.
 iv) $C \Delta D =]-\infty, 2[\cup [\pi, +\infty[$.

b)

El conjunto	¿es un intervalo?	¿es acotado superiormente?
$A \cap B$	SI	SI
$B - D$	SI	SI
$C - A$	NO	SI
$C \Delta D$	NO	NO

40. (2017-0 PC1-4) *Solución.*

El ingreso semanal que percibe el peluquero, si mantiene a su clientela de 240 personas a 8 soles por corte, es de $(8)(240) = 1920$ soles, lo que es insuficiente teniendo en cuenta que se quiere percibir al menos 2080 soles; así, el precio por corte debe ser superior.

Sea x el número de soles de incremento en el precio por corte; esto significa que el nuevo precio por corte es de $8 + x$. Luego, el nuevo número de clientes es de $240 - 16x$. Así, el nuevo ingreso semanal del estilista es de

$$(8 + x)(240 - 16x),$$

la condición para hallar el valor x es que dicho ingreso debe ser al menos de 2080 soles, obteniéndose la siguiente inecuación:

$$(8 + x)(240 - 16x) \geq 2080 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0,$$

lo que implica que $x \in [2, 5]$. Se pide que el precio por fijar sea el máximo, luego el incremento x debe tomar su valor máximo, de este modo, $x = 5$. Finalmente, el precio pedido es de $8 + 5 = 13$ soles.

41. (2017-I PC1-2) *Solución.*

a) De la definición de máximo entero se tiene

$$\llbracket x \rrbracket = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$$

$$0 \leq x - n < 1$$

, no es posible que $x - \llbracket x \rrbracket = 1$, y $C.S. = \emptyset$.

b) Factorizando se obtiene

$$p(x) = x(-4x^2 + 8x - 3) = x(2x - 3)(1 - 2x) > 0$$

Del análisis de signos

	$x < 0$	$0 < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$	$x > \frac{3}{2}$
$p(x)$	(+)	(-)	(+)	(-)

se concluye que $C.S. =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

c)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{x+1}{x-2} \right| &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} > 2 \vee \frac{x+1}{x-2} < -2 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+1-2x+4}{x-2} > 0 \vee \frac{x+1+2x-4}{x-2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{5-x}{x-2} > 0 \vee \frac{3x-3}{x-2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x-5}{x-2} < 0 \vee \frac{x-1}{x-2} < 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $C.S. =]1, 2[\cup]2, 5[$.

42. (2017-I PC1-3) *Solución.*

a)

i) Resolviendo

$$208 - (0,7 \cdot E) > 220 - E$$

$$0,3E > 12$$

$$E > 40$$

se obtiene $C.S. =]40, +\infty[$.

ii) Redacción: la máxima frecuencia cardiaca recomendada aumenta al aplicar la nueva fórmula para mayores de 40.

43. (2018-0 PC2-1) *Solución.*

c) El conjunto solución de la ecuación $|x+1| + |x-1| = 0$ es $\underline{\varnothing}$.

e) Sean $A =]0, 5[$, $B = [-1, 1[$ y $C =]-3, 1[$. Entonces

$$\sup(A \cap C) = \underline{1} \text{ y } \sup(C - B) = \underline{-1}$$

44. (2018-0 PC2-4) *Solución.*

a) La inecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 - c^2 \leq 0 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 - c^2 \leq 0 \\&\Leftrightarrow (x + 1 + c)(x + 1 - c) \leq 0\end{aligned}$$

deduciéndose que el conjunto solución es $[-1 - |c|, -1 + |c|]$.

Además el supremo es

$$\begin{cases} -1 + c, & \text{cuando } c \geq 0 \\ -1 - c, & \text{cuando } c < 0 \end{cases}$$

Esto implica que c debe tomar los valores de -2 o 2 para que el supremo sea 1 .

b)

i) Notemos que si $x \geq 0$ la ecuación se reduce a $0 = -1$, lo cual no tiene solución. Así, $x < 0$ y la ecuación se reduce a

$$\llbracket -2x \rrbracket = -1 \Leftrightarrow -1 \leq -2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1/2.$$

Por tanto, el conjunto solución es vacío.

ii) De la expresión se deduce que $x \geq 0$. Luego, la ecuación se reduce a

$$|x - 2| = x,$$

lo cual implica $x - 2 = x$ o $x - 2 = -x$, donde la primera no tiene solución y la segunda tiene solución $x = 1$. Por ende, el conjunto solución es $\{1\}$.

45. (2018-0 EP-2)

a) Resuelva: $1 + \sqrt{\llbracket x \rrbracket - x} \geq |x| - 1$.

Solución.

a) Primero, se debe cumplir la restricción $\llbracket x \rrbracket - x \geq 0$ debido a la raíz cuadrada. Como $\llbracket x \rrbracket \leq x$, se deduce que $x = \llbracket x \rrbracket$, lo que a su vez implica $x \in \mathbb{Z}$. Luego, la inecuación se reduce a

$$2 \geq |x| \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

46. (2018-I PC1-2) *Solución.*

a)

i) Completando cuadrados se obtiene

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \\
 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \\
 &= \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\right).
 \end{aligned}$$

ii) Las raíces de $p(x)$ son

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}.$$

Del análisis de signos

	$x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x > x_2$
$p(x)$	(+)	(-)	(+)

se obtiene

$$C.S. = \left] -\infty, \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right[\cup \left] \frac{1 + \sqrt{17}}{2}, +\infty \right[.$$

b) Manipulando la ecuación $2 = 4^{|x-1|}$ se obtiene

$$2 = 2^{2|x-1|}$$

$$|x - 1| = \frac{1}{2}$$

$$x - 1 = \frac{1}{2} \vee x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, $C.S. = \{1/2, 3/2\}$.

47. (2018-I PC1-3) *Solución.*

b) Como $|x^2 + 2| = x^2 + 2$, se obtiene

$$\frac{(x^2 + 2) - e - x^2}{|x| - \pi} < 0$$

$$\frac{2 - e}{|x| - \pi} < 0$$

$$|x| - \pi > 0$$

$$|x| > \pi \leftrightarrow x > \pi \vee x < -\pi$$

Por lo tanto, $A =] - \infty, -\pi[\cup] \pi, \infty[$.

48. (2018-II PC1-2) *Solución.*

a) Determinemos los conjuntos A y B por extensión.

- De la ecuación $|x - 2| = 3x$ se tiene que

$$3x \geq 0 \wedge (x - 2 = 3x \vee x - 2 = -3x)$$

$$x \geq 0 \wedge (x = -1 \vee x = \frac{1}{2}),$$

con lo cual $x = \frac{1}{2}$, de aquí $A = \{\frac{1}{2}\}$.

- De la inecuación $|x^2 - x| \leq x$ se tiene que

$$x \geq 0 \wedge (-x \leq x^2 - x \leq x)$$

$$x \geq 0 \wedge (0 \leq x^2 \wedge 0 \leq x \leq 2),$$

con lo cual $x \in [0, 2]$, de aquí $B = \{1, 2\}$.

Por ende,

$$A \times B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1 \right), \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \right\}.$$

49. (2018-II PC1-4) *Solución.*

a) Factorizado se obtiene

$$-\frac{10}{q+1} + q - 2 > 0$$

$$\frac{(q-4)(q+3)}{q+1} > 0.$$

Como $q > 0$ se tiene que $q > 4$. Luego, la cantidad de toneladas de harina de pescado que debe producir y vender la empresa para obtener ganancia está en el intervalo $]4, +\infty[$.

b) Como 500 dólares equivale a medio millar de dólares, se tiene la desigualdad

$$\frac{-\frac{10}{q+1} + q - 2}{q} \leq \frac{1}{2}$$

$$q^2 - 3q - 24 \leq 0$$

De aquí, $0 < q \leq \frac{3+\sqrt{105}}{2}$. Por lo tanto, la mayor cantidad de toneladas de harina de pescado es $\frac{3+\sqrt{105}}{2}$.

50. (2019-0 PC2-1) *Solución.*

a) Si $x < \frac{1}{2}$, el valor simplificado de la expresión

$$A = ||2x - 1| + 1 + x^2| + 2x + 1 + 5 - x^2$$

es igual a 8.

c) Sean $A =] - e, \pi]$, $B =]\sqrt{2}, \pi^2]$ y $C = [-2e, 2\pi]$, determine los siguientes conjuntos:

$$A - B = \underline{] - e, \sqrt{2}]}$$

$$B - C = \underline{]2\pi, \pi^2]}$$

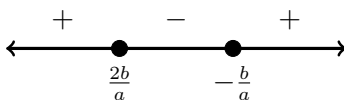
$$A \cap B = \underline{] \sqrt{2}, \pi]}$$

51. (2019-0 PC2-2) *Solución.*

a) Factorizando se obtiene

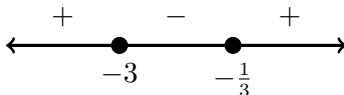
$$\begin{aligned}a^2x^2 - abx - 2b^2 &\leq 0 \\(ax + b)(ax - 2b) &\leq 0\end{aligned}$$

Del análisis de signos

se deduce que $C.S. = \left[\frac{2b}{a}, -\frac{b}{a} \right]$.c) Se debe cumplir $x \neq 1$. Además factorizando se obtiene

$$\begin{aligned}|2x + 2| &\geq |x - 1| \\(2x + 2)^2 - (x - 1)^2 &\geq 0 \\(3x + 1)(x + 3) &\geq 0.\end{aligned}$$

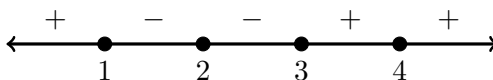
Del análisis de signos

se deduce que $C.S. =]-\infty, -3] \cup \left[-\frac{1}{3}, 1 \right[\cup]1, +\infty[$.52. (2019-0 PC2-3) *Solución.*

b) De las propiedades del valor absoluto se obtiene

$$\begin{aligned}xy &\leq |xy| \\-2|xy| &\leq -2xy \\x^2 - 2|xy| + y^2 &\leq x^2 - 2xy + y^2 \\(|x| - |y|)^2 &\leq (x - y)^2 \\\sqrt{(|x| - |y|)^2} &\leq \sqrt{(x - y)^2} \\||x| - |y|| &\leq |x - y|.\end{aligned}$$

c) Del análisis de signos



Se obtiene que $A = [1, 3] \cup \{4\}$. Luego, $\inf(A) = 1$ y $\sup(A) = 4$. Por lo tanto, $\inf(A) + \sup(A) = 5$.

53. (2019-0 PC2-4) *Solución.*

a) La facturación por el consumo del mes pasado fue de

$$18 + 80(0.25) = 38 \text{ soles.}$$

Si x es el pago de este mes, entonces

$$|x - 38| \leq 4.$$

Así $34 \leq x \leq 42$. Si y es el consumo de este mes, entonces

$$x = 18 + \frac{y}{4}.$$

Luego,

$$34 \leq 18 + \frac{y}{4} \leq 42 \quad \longrightarrow \quad 64 \leq y \leq 96.$$

El consumo debe ser de 64 a 96 litros de gas.

54. (2019-I PC1-1) *Solución.*

a)

iii) Sea $a \neq 0$. El conjunto solución de la inecuación cuadrática $(ax + b)^2 \leq 0$

$$\text{es } \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

iv) Si $\llbracket 1 - x \rrbracket \neq 0$ entonces $x \in] -\infty, 0] \cup] 1, +\infty [$.

v) La ecuación cuadrática $x^2 - |b|x + 6 = 0$ posee dos raíces: 2 y 3. Los valores de b son -5 y 5.

55. (2019-I PC1-2) *Solución.*

a)

$$\text{Para } x \neq 0 \text{ tenemos } \frac{x}{|x|} - 1 \geq 0 \longrightarrow \frac{x}{|x|} \geq 1$$

$$\longrightarrow x \geq |x|$$

$$\longrightarrow x \geq |x| \geq x$$

$$\longrightarrow x = |x|$$

$$\longrightarrow x \in \mathbb{R}^+$$

Así, $A = \{1, 2, \dots, 10\}$.

b)

$$\left\lfloor \frac{x}{4} + \left\lfloor \frac{x}{4} + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor \right\rfloor = 3 \longleftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{4} + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \right\rfloor = 3$$

$$\longleftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 3$$

$$\longleftrightarrow \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = 1$$

$$\longleftrightarrow 1 \leq \frac{x}{4} < 2$$

$$\longleftrightarrow 4 \leq x < 8$$

Por lo tanto, $B = \{4, 5, 6, 7\}$.c) $R = \{(8, 4), (9, 4), (10, 4), (10, 5)\}$.56. (2019-II PC1-1) *Solución.*

a)

i) El conjunto solución de $x^4 + x^3 \geq 2x^2$ es: $\underline{]-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[}$.ii) Si $x = 1$ es una solución de la inecuación $a^2x^5 - ax^3 - 3 < 0$, entonces

$$a \in \underline{\left] \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right[}.$$

iii) El conjunto solución de $||x| - 1| = \frac{1}{3}$ es $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

iv) Si la inecuación $|x| < |b| - 1$ tiene conjunto solución vacío, entonces $b \in \underline{[-1, 1]}$.

b)

i) Existe $2.99 \in A$ tal que $2.99 > 2.9$; por lo tanto, $M = 2.9$ no es cota superior de A .

ii) Como $m = 3 \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $m = 3 \notin B$; por ende, $m = 3$ no es el máximo del conjunto B .

57. (2019-II PC1-3) *Solución.*

a)

$$E_2 = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 0) (1, 0), (0, 1)\}.$$

b) Considere $r = 2$ y $s = 1.5$, se tiene que $2 \neq 1.5$, pero

$$E_2 = E_{1.5} = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 0) (1, 0), (0, 1)\}.$$

c) $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in E_s &\rightarrow |x| + |y| < s < r \\ &\rightarrow |x| + |y| < r \\ &\rightarrow (x, y) \in E_r \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E_s \subset E_r$.

58. (2019-II PC1-4) *Solución.*

a) Como $|x| = x$ para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\rightarrow \lfloor 2x \rfloor^2 + 6 \lfloor x - x \rfloor = 16 \\ &\rightarrow \lfloor 2x \rfloor^2 = 16 \\ &\rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 4 \vee \lfloor 2x \rfloor = -4 \\ &\rightarrow 4 \leq 2x < 5 \\ &\rightarrow 2 \leq x < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Por ende, } C.S. = \left[2, \frac{5}{2}\right).$$

b) Como $|x| = -x$ para $x < 0$,

$$\begin{aligned}
 x < 0 &\rightarrow \lfloor 2x \rfloor^2 + 6 \lfloor x + x \rfloor = 16 \\
 &\rightarrow \lfloor 2x \rfloor^2 + 6 \lfloor 2x \rfloor - 16 = 0 \\
 &\rightarrow (\lfloor 2x \rfloor + 8)(\lfloor 2x \rfloor - 2) = 0 \\
 &\rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -8 \vee \lfloor 2x \rfloor = 2 \\
 &\rightarrow -8 \leq 2x < -7 \\
 &\rightarrow -4 \leq x < -\frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C.S. = \left[-4, -\frac{7}{2} \right[.$

c)

$$C = \left[-4, -\frac{7}{2} \right[\cup \left[2, \frac{5}{2} \right[.$$

Referencias

- Cotrina, J. (2015). *Fundamentos de matemáticas*. Fondo Editorial de la Universidad del Pacífico.
- Halmos, P. (2017). *Naïve set theory*. Dover Publications.
- Pugh, C. C. (2002). *Real mathematical analysis*. Springer.
- Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2011). *Precalculus: Mathematics for calculus* (5.^a ed.). Brooks Cole.
- Sullivan, M. (1997). *Precálculo*. Prentice Hall.
- Sydsaeter, K., & Hammond, P. J. (1996). *Matemáticas para el análisis económico*. Prentice Hall.
- Zúñiga, J. (2013). *Precálculo*. Fondo Editorial de la Universidad del Pacífico.

