

José Luis Bonifaz F.
Ruy Lama C.

33

APUNTES DE ESTUDIO

Optimización dinámica y teoría económica

Primera edición corregida



UNIVERSIDAD
DEL PACÍFICO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN

$E(P, Y^*, P, X, U^0)$

economi

Optimización dinámica y teoría económica

Serie: Apuntes de Estudio No. 33

José Luis Bonifaz F.
Ruy Lama C.

Optimización dinámica y teoría económica



**UNIVERSIDAD
DEL PACÍFICO**
CENTRO DE INVESTIGACIÓN

© Universidad del Pacífico
Centro de Investigación
Avenida Salaverry 2020
Lima 11, Perú



66759



BIBLIOTECA UP

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA Y TEORÍA ECONÓMICA

José Luis Bonifaz F.

Ruy Lama C.

1a. edición: junio 1999, noviembre 1999

1a. edición corregida: junio 2002, junio 2004, diciembre 2009, abril 2010, octubre 2013

Diseño de la carátula: Ícono Comunicadores

ISBN: 978-9972-603-79-2

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: 2013-15488

BUP - CENDI

Bonifaz, José Luis

Optimización dinámica y teoría económica / José Luis Bonifaz F. y Ruy Lama C. – Lima : Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico, 2013. – (Apuntes de Estudio ; 33)

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA/CÁLCULO DE VARIACIONES/ANÁLISIS ECONÓMICO/TEORÍA ECONÓMICA

512.2:33 (CDU)

Miembro de la Asociación Peruana de Editoriales Universitarias y de Escuelas Superiores (Ape-su) y miembro de la Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y el Caribe (Eulac).

El Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico no se solidariza necesariamente con el contenido de los trabajos que publica. Prohibida la reproducción total o parcial de este documento por cualquier medio sin permiso de la Universidad del Pacífico.

Derechos reservados conforme a Ley.

A Giovanna, Camila y Ximena
J.L.B.

A Luis y Alicia
R.L.

Índice

Prólogo	11
I. Introducción a la optimización dinámica	14
Anexo	28
II. Cálculo de variaciones	30
1. Condición de primer orden: la ecuación de Euler	31
1.1 La ecuación de Euler	31
1.2 La ecuación de Euler en casos especiales	37
1.3 Aplicación: extracción óptima de recursos naturales	45
1.4 Aplicación: política anti-inflacionaria óptima	48
2. Condición de transversalidad	52
2.1 Condición de transversalidad	53
2.2 Casos especiales de la condición de transversalidad	56
2.3 Aplicación: minimización de costos	64
3. Condición de segundo orden	66
3.1 Condición de segundo orden	66
3.2 Condiciones de concavidad	68
4. Horizonte de tiempo infinito	70
4.1 Condiciones para la convergencia del funcional objetivo	71
4.2 Condiciones de primer y segundo orden	73
4.3 Diagramas de fase	76
4.3.1 Diagramas de fase de una variable	76
4.3.2 Diagramas de fase de dos variables	80

4.3.3	Aplicación: explotación óptima de peces	86
Anexos		96
III.	Control óptimo	98
1.	Condición de primer orden: principio del máximo	101
1.1	El principio del máximo	102
1.2	Aplicación: nivel óptimo de contaminación	114
2.	Condición de transversalidad	117
2.1	Casos especiales de la condición de transversalidad..	118
2.2	Aplicación: asignación de consumo y ahorro	127
3.	Condición de segundo orden	130
3.1	Condición de segundo orden (teorema de suficiencia de Mangasarian)	130
3.2	Condiciones de concavidad y convexidad	131
4.	Comparación entre el cálculo de variaciones y el control óptimo	135
5.	Control óptimo con factor de descuento	139
6.	Control óptimo con horizonte temporal infinito	141
6.1	Condiciones de primer y segundo orden	142
6.2	Aplicación: modelo neoclásico de crecimiento.....	146
IV.	Programación dinámica	162
1.	Optimización dinámica empleando las condiciones de Kuhn-Tucker	163
1.1	Las condiciones de Kuhn-Tucker	163
1.2	La ecuación de Euler: condición de optimización intertemporal	166
1.3	Condición de segundo orden	168
2.	Programación dinámica con horizonte temporal finito	179
2.1	El principio de optimalidad	180
2.2	La ecuación de Bellman	182
2.3	La ecuación de Benveniste y Scheinkman	182
2.4	La ecuación de Euler	183
3.	Programación dinámica con horizonte temporal infinito	189
3.1	Método de las aproximaciones sucesivas	190
3.2	Método de "adivinar y verificar"	192
3.3	Condición de transversalidad	195
4.	Programación dinámica con incertidumbre	197
4.1	La ecuación de Bellman	198
4.2	La ecuación de Euler estocástica	208
Anexo.....		208
Bibliografía		210

Prólogo

Optimización dinámica y Teoría económica es un Apuntes de Estudio que ha sido desarrollado sobre la base de nuestra experiencia en el dictado del curso Métodos de Optimización Económica de la Facultad de Economía de la Universidad del Pacífico. Dicho curso tiene como finalidad introducir a los alumnos de pregrado en las técnicas matemáticas de optimización aplicadas al análisis económico y cubre los tópicos de programación matemática, optimización dinámica y teoría de juegos. De estos tres temas, el segundo ha presentado una mayor dificultad en el curso. El problema radica en que no existe en el mercado bibliográfico peruano un texto universitario escrito en español que abarque dicho tema. En algunas bibliotecas universitarias es posible encontrar muy buenos libros de optimización dinámica, tanto en el nivel de pregrado como de posgrado, pero en la mayoría de los casos las ediciones se encuentran publicadas en inglés. Este hecho condujo a que buena parte de nuestros alumnos tuvieran limitaciones cuando deseaban profundizar un tema específico del curso. Este problema fue el principal factor que motivó la publicación de esta suerte de manual de optimización. Hemos incluido en el texto las tres técnicas más relevantes de optimización intertemporal: **cálculo de variaciones, control óptimo y programación dinámica**. En el desarrollo de estos temas hemos enfatizado los resultados de las aplicaciones económicas, sin descuidar el desarrollo formal de los problemas.

El presente texto no solo pretende ser un documento de referencia para el curso de la Universidad del Pacífico, sino que constituye también un aporte tanto para los estudiantes de economía de todas las universidades del país, a quienes no les es posible acceder a bibliografía en idiomas extranjeros, como para los profesionales vinculados al mundo académico que deseen actualizar sus conocimientos en el instrumental matemático de la optimización dinámica. Asimismo, pensamos que será una herramienta importante de preparación para aquellos estudiantes que desean seguir estudios de posgrado en economía. Sin embargo, para que sea posible la comprensión del presente texto, es necesario contar con nociones previas

en programación matemática, ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias. Sobre la base de estos temas, se facilita en gran medida la comprensión de la teoría y las aplicaciones económicas de las técnicas de optimización intertemporal.

Es importante considerar que el Apuntes de Estudio ha sido elaborado pensando fundamentalmente en un lector promedio, que se encuentra cursando el pregrado de la carrera de economía. En este sentido, en la medida de lo posible, se ha evitado tratar los temas más complejos de las técnicas de optimización dinámica. Es el caso de la mayoría de los ejemplos, en donde solamente hemos considerado dos variables dinámicas, cuando en general se podrían incluir “n” variables. Asimismo, no se han incluido aspectos teóricos que permiten resolver los problemas de optimización para casos más complicados. Por otra parte, una limitación del documento es que no se ha incluido, como parte de la teoría, la resolución de problemas mediante métodos computacionales, que constituye la forma más eficiente de enfrentar un problema de optimización intertemporal. No obstante, en futuras ediciones podrían cubrirse todos estos aspectos.

En esta primera edición corregida presentamos algunas modificaciones, las que fueron gentilmente sugeridas por los alumnos de la Facultad de Economía de la Universidad del Pacífico y del curso de Extensión Universitaria del Banco Central de Reserva. Agradecemos, en esta presentación, la eficiente labor de Claudia Delgado y Eduardo Mantilla en la incorporación de dichos cambios.

Finalmente, quisiéramos agradecer por la publicación del presente documento a la Universidad del Pacífico, por su apoyo a la difusión de los métodos cuantitativos aplicados a la economía; en particular, a Jorge Fernández-Baca, por el especial interés mostrado en el desarrollo de este proyecto, y a Eduardo Morón, por sus valiosos comentarios sobre el tratamiento general del tema. Cualquier error u omisión queda enteramente bajo nuestra responsabilidad.

Los Autores

I

Introducción a la optimización dinámica

Conforme ha ido evolucionando la teoría económica, las técnicas de optimización matemática cada vez han cobrado una mayor relevancia. Éstas han permitido que la ciencia económica formule y explique diversos problemas de una manera más rigurosa y precisa. En general, diversas variables económicas como el precio de un producto, los beneficios de una empresa o la producción de un país pueden ser explicadas de una forma simple a través de un problema de optimización, en el cual se encuentra presente una **función objetivo**, que representa de una u otra forma el bienestar del agente optimizador y un **conjunto de restricciones**, que constituyen las limitaciones a las cuales se encuentra sujeto el individuo.

Gran parte de los problemas económicos pueden modelarse mediante técnicas de optimización estática. El clásico problema de maximización de la utilidad del consumidor es un ejemplo de ello. En este caso, se plantea una situación en la cual un individuo desea maximizar su utilidad sujeto a una restricción de ingresos. A partir de este problema es posible obtener la función de demanda por algún bien que sea de interés para el consumidor, pero sólo para un **período de tiempo**. En dicho caso, la variable temporal no es relevante.

Sin embargo, este enfoque del problema de elección del consumidor presenta limitaciones. En general, cuando un agente toma una decisión, considera las consecuencias sobre su bienestar futuro. Podemos pensar en las decisiones de ahorro de las personas, en las decisiones de inversión de las empresas o en las

decisiones de endeudamiento de un gobierno. En todos estos casos, el agente optimizador toma en cuenta el efecto futuro de sus decisiones presentes.

Para introducirnos en la formulación del problema de optimización dinámica, desarrollaremos un problema simple de elección del consumo a lo largo del tiempo. Supondremos que existen sólo dos períodos: el presente, o período 1, y el futuro, o período 2, y hay un solo bien de consumo (C) en la economía que tiene un precio igual a 1¹. También asumiremos que existe un consumidor con una cantidad de dinero equivalente a "1" unidades monetarias (u.m.) en el presente, pero decide no trabajar en el futuro, por lo cual no recibirá ingresos en dicho período.

Además, este individuo vive dos períodos y valora tanto el consumo presente (C_1) como el consumo futuro (C_2). Sin embargo, el consumidor presenta cierto grado de impaciencia, y tiene una mayor utilidad si consume en el presente que si consume en el futuro. Una función de utilidad que refleje estas preferencias es la siguiente:

$$U(C_1, C_2) = f(C_1) + \beta f(C_2) \quad (0 < \beta < 1) \quad f'(C_i) > 0 \quad f''(C_i) < 0 \quad \forall i = 1, 2 \quad (1)$$

Esta función puede interpretarse como una **suma ponderada** de las utilidades asociadas a cada período. Mientras que la utilidad proveniente del primer período tiene una ponderación igual a 1, la utilidad del segundo período tiene una ponderación igual a β . Al ser este coeficiente una fracción entre cero y uno, el consumidor le asigna un menor valor a la utilidad proveniente del futuro. Dicho factor de ponderación se denomina **factor de descuento**, y refleja el grado de impaciencia intertemporal del individuo. Si el factor tomara el valor de cero, nos encontraríamos en un caso extremo en el cual el consumidor es totalmente impaciente, y sólo valora el consumo presente². En cambio, si el factor tomara un valor igual a uno, tendríamos otro caso extremo, en el cual el consumidor le daría el mismo grado de importancia al consumo presente y al consumo futuro.

Una propiedad, en particular, de esta función de utilidad es que es **aditiva** con respecto al tiempo. Ello implica que la función puede expresarse como la

1. El consumo puede interpretarse como la cantidad de dinero destinada a bienes de consumo.

2. A las decisiones que se toman considerando exclusivamente el bienestar presente se les denominan decisiones miopes. En general, los problemas de optimización dinámica no consideran agentes o consumidores "miopes".

suma de las utilidades asociadas a cada período del tiempo ($f(C_i) \forall i = 1, 2$). Esta especificación de la función de utilidad simplifica en gran medida la resolución de los problemas de optimización intertemporal.

La restricción presupuestaria que enfrenta este consumidor abarca los dos períodos. Al igual que la restricción presupuestaria formulada en la teoría del consumidor, la restricción intertemporal limita la decisión del agente a que no consuma más de lo que puede adquirir con sus recursos. Sin embargo, debido a la existencia de la variable temporal, el ingreso y el consumo en cada período no son comparables directamente en la restricción presupuestaria. Esto se debe al valor que posee el dinero en el tiempo.

Ello puede apreciarse al comparar 1 u.m. recibida en el presente con respecto 1 u.m. recibida en el futuro. Si a una persona le otorgan 1 u.m. en el presente podría acudir a una entidad financiera, depositar dicha cantidad en una cuenta de ahorros a una tasa positiva de “ r ” por ciento por período, y en el futuro obtendría $(1 + r)$ u.m. Al ser $(1 + r)$ mayor que 1 en el período futuro, resulta más conveniente recibir el dinero en el presente. De esta manera, para comparar flujos de dinero es necesario primero descontarlos por la tasa de interés. En este sentido, $(1 + r)$ u.m. en el futuro resultaría equivalente a 1 u.m. en el presente; de igual forma, 1 u.m. en el futuro tendría el mismo valor que $1/(1 + r)$ en el presente³.

En finanzas, a esta comparación entre flujos de dinero provenientes del futuro con respecto al tiempo presente se le denomina **valor presente**. Para este caso en particular, 1 u.m. constituiría el valor presente de “ $1 + r$ ” u.m. del futuro. En general, dada una cantidad de dinero “ A ” en el futuro, su valor presente estaría dado por “ $A/(1 + r)$ ” u.m., que representa el valor del dinero futuro en el período actual.

La restricción presupuestaria a la que está sujeta este consumidor establece que el consumo en el primer período más el valor presente del consumo en el segundo período, debe ser equivalente a los ingresos en el primer período⁴:

3. Un individuo podría depositar $1/(1 + r)$ u.m. en una entidad financiera, y obtener 1 u.m. en el futuro.

4. La restricción presupuestaria está planteada de esa forma porque se asume el siguiente proceso de elección. El consumidor en el período 1 cuenta con 1 u.m., y decide el consumo en dicho período (C_1). El ingreso remanente $(1 - C_1)$ es depositado en una entidad financiera a una tasa de “ r ” por ciento. En el siguiente período destina todos sus ingresos $([1 + r][1 - C_1])$ al consumo futuro (C_2). De esta forma se cumple la igualdad $[1 + r][1 - C_1] = C_2$, que no es otra cosa que la restricción presupuestaria (2).

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = I \quad (2)$$

Con dicha restricción se evita que el consumo a lo largo de los dos períodos exceda a sus ingresos. Una vez definida la función objetivo y la restricción intertemporal, el problema de optimización que enfrenta el individuo es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } U(C_1, C_2) \\ & \text{sujeto a } C_1 + \frac{C_2}{1+r} = I \end{aligned} \quad (3)$$

La solución al problema se presenta en el Gráfico No. 1.1. La decisión óptima del individuo consistiría en destinar sus recursos tanto al consumo presente (C_1^*) como al consumo futuro (C_2^*). Este ejemplo constituye una formulación sumamente sencilla de un problema de optimización dinámica. El objetivo del problema consiste en determinar la decisión óptima del agente en cada período del tiempo, tomando en cuenta que el individuo le asigna importancia, a través de la función de utilidad, a sus decisiones futuras.

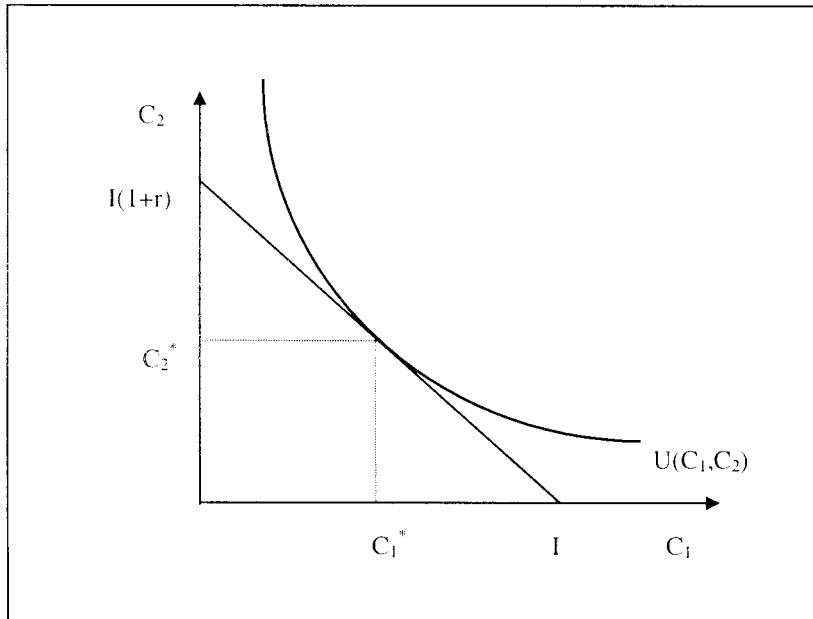
El problema de elección intertemporal del consumo puede extenderse a un horizonte de tiempo mayor. El consumidor podría tener utilidad por el consumo en los siguientes 'T' períodos. De esta forma, la función de utilidad del consumidor sería la siguiente:

$$U = f(C_1) + \beta f(C_2) + \beta^2 f(C_3) + \dots + \beta^{T-1} f(C_T) \quad (4)$$

o expresada en una sumatoria:

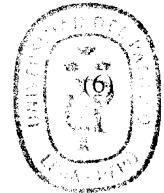
$$U = \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} f(C_t) \quad (5)$$

Gráfico No. 1.1



En esta función de utilidad, el factor de descuento posibilita que conforme el consumo sea de un período más lejano con respecto al presente, el individuo le asignará una menor importancia⁵. Por otra parte, la restricción intertemporal para “T” períodos sería similar a la restricción (2). Ésta establece que la suma del consumo en cada período, expresado en valor presente, debe ser equivalente al ingreso:

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} + \frac{C_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}} = I$$



BIBLIOTECA

5. En el límite, cuando el período tienda a infinito, el factor de descuento tenderá a cero ($\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T = 0$). Ello implica que el consumidor le asignará muy poca importancia al consumo proveniente de períodos muy alejados con respecto al presente.

o en términos de una sumatoria:

$$\sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^{t-1}} = I \quad (7)$$

Finalmente, el problema de optimización dinámica para un horizonte de tiempo "T" sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } U &= \sum_{t=1}^T \beta^{t-1} f(C_t) \\ \text{sujeto a } &\sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r)^{t-1}} = I \end{aligned} \quad (8)$$

Hasta el momento, la única variable dinámica del problema (8) es el consumo. Sin embargo, el ingreso también puede convertirse en una variable que depende del tiempo. Para ello, en vez de emplear como restricción el ingreso total, puede utilizarse el ingreso disponible del individuo. Esta variable consiste en la cantidad de dinero remanente con la que cuenta el agente, en un período cualquiera, para gastos de consumo⁶. La evolución del ingreso disponible estaría dada por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+1} = g(y_t, C_t) = (1+r)(y_t - C_t) \quad (9)$$

Donde "y_t" representa el ingreso disponible y "r" la tasa de interés. A la ecuación (9) se le denomina ecuación de **movimiento**, ya que determina el comportamiento del ingreso disponible en el tiempo. La lógica de la ecuación de movimiento es la siguiente. En un período determinado, el individuo posee una cantidad de ingresos y_t, y decide consumir por un monto equivalente a C_t. El dinero remanente (y_t - C_t) lo destina a una entidad financiera que otorga un rendimiento igual a "r". En el siguiente período, el ingreso con el que contaría sería igual a (1 + r)(y_t - C_t). En dicho período, nuevamente este agente decidirá su nivel de consumo y así se determinará el ingreso disponible para el siguiente período. Este proceso se desarrolla sucesivamente hasta el período "T".

6. Si nos imaginamos que el ingreso total de un individuo está en una cuenta de ahorros, el ingreso disponible estaría dado por el saldo de dicha cuenta.

En realidad, la ecuación de movimiento no es otra cosa que la especificación dinámica de la restricción (6). Para comprender mejor la relación existente entre la restricción intertemporal y la ecuación de movimiento, desarrollaremos paso por paso la ecuación (9). Asumiendo un ingreso disponible inicial equivalente a "I" u.m., el ingreso disponible tomaría los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= I \\
 y_2 &= (1+r)(I - C_1) = I(1+r) - C_1(1+r) \\
 y_3 &= (1+r)[(1+r)(I - C_1) - C_2] = I(1+r)^2 - C_1(1+r)^2 - C_2(1+r) \\
 y_4 &= (1+r)[(1+r)[(1+r)(I - C_1) - C_2] - C_3 = I(1+r)^3 - C_1(1+r)^3 - C_2(1+r)^2 - C_3(1+r) \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 &\bullet \\
 y_{T+1} &= I(1+r)^T - \sum_{t=1}^T C_t(1+r)^{T-t+1}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Si suponemos que el individuo destina todos sus recursos para gastos de consumo hasta el período "T", en el período "T+1", el ingreso disponible sería igual a cero ($y_{T+1} = 0$)⁷. Simplificando esta condición obtendríamos la restricción presupuestaria (6):

$$\begin{aligned}
 y_{T+1} &= I(1+r)^T - \sum_{t=1}^T C_t(1+r)^{T-t+1} = 0 \\
 I(1+r)^T &= \sum_{t=1}^T C_t(1+r)^{T-t+1} \\
 I &= \sum_{t=1}^T C_t(1+r)^{1-t}
 \end{aligned} \tag{11}$$

La restricción (6) llega a ser equivalente a la (9) debido a que el ingreso disponible en un período refleja el conjunto de decisiones tomadas previamente. De esta forma, en el período "T+1", la variable incorpora todas las decisiones de consumo previas.

7. En el problema de optimización dinámica se asume que el individuo sólo tiene la posibilidad de elegir su consumo hasta el período "T". Ello es equivalente a suponer que el consumidor sólo vive "T" períodos, y en el período "T + 1" fallece. La condición $y_{T+1} = 0$ podría interpretarse como una situación en la cual el individuo no deja herencias.

Cabe destacar que en la ecuación de movimiento (9) se relacionan dos tipos de variables: la variable de **control** y la variable de **estado**. La variable de control es aquella que debe elegir un agente con el fin de optimizar la función objetivo, mientras que la variable de estado no es directamente controlable por el agente, y refleja el resultado del problema. Para el ejemplo detallado anteriormente, el consumo sería la variable de control y el ingreso disponible la variable de estado.

El problema básico de optimización dinámica (8) podría tener algunas modificaciones adicionales. Por ejemplo, si tenemos una situación en la cual el horizonte de tiempo es muy largo, podemos especificar la función de utilidad con un **horizonte infinito**:

$$U = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} f(C_t) \quad (12)$$

También podría modificarse la naturaleza del tiempo. En vez de definirse una función de utilidad en tiempo **discreto** tal como (5), se podría establecer en tiempo **continuo**. Es decir, el horizonte de tiempo en el cual se desarrolla el proceso de optimización ya no estaría compuesto por un conjunto de períodos ($t = 1, 2, \dots, T$), tal como se establece en el problema (8), sino que estaría determinado por un intervalo de tiempo ($t \in [0, T]$). Cuando el tiempo es continuo, una sumatoria de variables puede expresarse mediante una integral⁸. De esta forma, la función objetivo en tiempo continuo sería:

$$U = \int_0^T e^{-\delta t} f(C(t)) dt \quad (13)$$

En este caso, el factor de descuento estaría dado por el término $e^{-\delta t}$ y, al igual que en el caso de tiempo discreto, este factor tiene la finalidad de asignarle una menor ponderación o una menor valoración a las utilidades provenientes de períodos más alejados con respecto al presente⁹. Es importante tener en cuenta que el consumo ya no constituiría una variable discreta, sino continua. Adicionalmente, así como la ecuación de movimiento se expresa a través de

8. Mediante la integral de Riemann, una sumatoria en tiempo discreto aproxima el resultado de una integral en tiempo continuo.

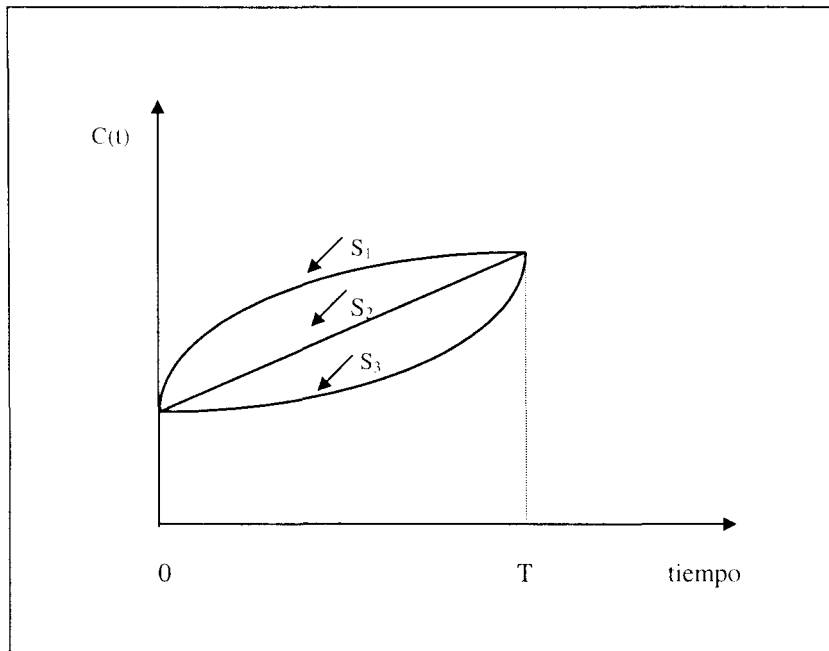
9. Ver el Anexo al final del capítulo.

una ecuación en diferencias en tiempo discreto, en tiempo continuo dicha ecuación estaría dada por una ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y' = g(y, C) \quad (14)$$

Dado que en la función de utilidad (5) existen tantas decisiones de consumo como períodos en el tiempo, es que no puede obtenerse una solución gráfica al igual que en el problema (3). Para ello tendríamos que graficar un espacio de "T" dimensiones, lo cual sería imposible. En vez de ello, la solución gráfica a la optimización de la función de utilidad (5) -o alternativamente (13)- toma la forma de **sendas o trayectorias**. La idea básica se refleja en el Gráfico No. 1.2. De un conjunto amplio de trayectorias de consumo existentes (S_1 , S_2 , S_3), el objetivo es seleccionar la "mejor" de todas. La "mejor" senda está definida como aquella que optimiza la función objetivo.

Gráfico No. 1.2



Cuando se considera a la solución como una senda, a la función de utilidad se le denomina **funcional objetivo**. Este concepto hace referencia a aquella función (en este caso, la función de utilidad) que depende de otra función (como, por ejemplo, el consumo)¹⁰. Dicho concepto es similar al de función objetivo empleado en los problemas de optimización estática. Por otro lado, a la función instantánea de utilidad se le denomina **función intermedia**.

Existen diversas metodologías para determinar la senda óptima. En los siguientes capítulos se desarrollarán tres técnicas para resolver problemas de optimización dinámica: cálculo de variaciones, control óptimo y programación dinámica. Para los dos primeros casos se formulará el problema en tiempo continuo, y para el tercero en tiempo discreto. A continuación se explicará brevemente las principales características de cada una de las técnicas.

Cálculo de variaciones

El cálculo de variaciones data del siglo XVII. Uno de los trabajos pioneros en este campo fue el de John Bernoulli, realizado en 1696¹¹, quien resolvió el problema de la *braquistócrona*. Dicho problema consiste en determinar la trayectoria más rápida de un pequeño objeto entre dos puntos, bajo la influencia de la gravedad. El cálculo de variaciones aplicado al análisis económico recién se inicia a partir de la década de los veinte con los trabajos de Evans¹², Ramsey¹³ y Hotelling¹⁴ ¹⁵. El problema de cálculo de variaciones, en términos generales, puede ser planteado de la siguiente forma:

10. Una definición más precisa de funcional es la siguiente: el funcional $V[y(t)] = \int_a^b f(t, y(t)) dt$ es una regla de correspondencia que asigna a cada función $y(t)$ un único valor real $V[y(t)]$.

11. Para mayor detalle, ver Kline, M., *Mathematics: A Cultural Approach*, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

12. Evans, G.C., "The Dynamics of Monopoly", en *American Mathematical Monthly*, febrero 1924, pp. 77-83.

13. Ramsey, Frank P., "A Mathematical Theory of Savings", en *Economic Journal*, Oxford: Blackwell Publishers, diciembre 1928, pp. 543-559.

14. Hotelling, Harold, "The Economics of Exhaustible Resources", en *Journal of Political Economy*, Chicago: The University of Chicago Press, abril 1931, pp. 137-175.

15. Una explicación detallada de estos trabajos puede encontrarse en Chiang, Alpha, *Elements of Dynamic Optimization*, 3a. edición, Nueva York: MacGraw Hill, 1992.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & V[y] = \int_0^T f(t, y(t), y'(t)) dt \\
 \text{sujeto a} & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\
 & y(T) = y_T \quad (y_T, T \text{ dado})
 \end{array} \quad (15)$$

En este caso sólo se ha tomado en cuenta una variable (y), y para que el problema tenga solución se asume que la función intermedia $f(\bullet)$ es integrable con respecto al tiempo, y que “ y ” es continua y diferenciable. Una aplicación clásica del cálculo de variaciones a la teoría económica la constituye el modelo de Evans¹⁶, que describe el comportamiento de una firma monopolística. En dicho modelo se asume que un monopolio posee una función de costos cuadrática, y la demanda depende linealmente del precio ($P(t)$) y la tasa de variación del precio ($P'(t)$) de esta forma:

$$C(Q) = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma > 0) \quad (16)$$

$$Q = \lambda P(t) + \varphi P'(t) + \eta \quad (\lambda, \varphi, \eta > 0)$$

A partir de las funciones de demanda y costo se determina la función de beneficios, mediante la diferencia entre los ingresos y los costos:

$$\pi = P(t)Q(P(t), P'(t)) - C(Q(P(t), P'(t))) = \pi(P(t), P'(t)) \quad (17)$$

El objetivo del monopolista es determinar la evolución del precio que maximice los beneficios totales a lo largo del período de producción ($t \in [0, T]$). Los beneficios totales están determinados por la suma de los beneficios en cada instante del tiempo. Como el tiempo es continuo, dicha suma se expresa a través de una integral. De esta forma, el problema de optimización sería:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & \Pi[P] = \int_0^T \pi(P, P') dt \\
 \text{sujeto a} & P(0) = P_0 \quad (P_0 \text{ dado}) \\
 & P(T) = P_T \quad (P_T, T \text{ dado})
 \end{array} \quad (18)$$

16. Evans, G.C., *op. cit.*

En el capítulo II se estudiará el cálculo de variaciones y se desarrollarán diversas aplicaciones a la teoría económica. En todos los ejercicios y aplicaciones se considerará el caso de una sola variable dinámica (y).

Control óptimo

La teoría de control óptimo constituye una generalización del cálculo de variaciones. Este método fue desarrollado por el matemático ruso L.S. Pontryagin, a fines de la década de los cincuenta¹⁷. Este matemático desarrolló la condición de primer orden al problema de control óptimo, la cual se denomina **principio del máximo**. A diferencia del cálculo de variaciones, en el problema de control óptimo se incorpora tanto la variable de control (u) como la variable de estado (y). Además, las dos variables se encuentran relacionadas mediante la ecuación de movimiento $g(\bullet)$. El objetivo del control óptimo es determinar las trayectorias de las variables de control y estado que optimicen un funcional objetivo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[u] = \int_0^T f(t, y(t), u(t)) dt \\ \text{sujeto a} & y'(t) = g(t, y(t), u(t)) \\ & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\ & y(T) = y_T \quad (y_T, T \text{ dado}) \end{array} \quad (19)$$

Este problema es muy similar al del cálculo de variaciones. Si asumimos que la ecuación de movimiento es igual a $y'(t) = u(t)$, y la reemplazamos en la función objetivo, obtendríamos el problema (15).

El control óptimo se ha venido aplicando en la formulación de problemas económicos desde mediados de los años sesenta. Los trabajos pioneros fueron los de Koopmans y Cass¹⁸, en los cuales se modela el crecimiento óptimo de una economía a lo largo del tiempo. El planteamiento de este modelo ma-

17. La obra de L.S. Pontryagin fue publicada en inglés recién en 1962, bajo el título *The Mathematical Theory of Optimal Processes*.

18. El trabajo de Koopmans, T.C., *On the Concept of Optimal Economic Growth*, Discussion paper, New Haven: Coules Foundation, Yale University, 1963; y el de Cass, David, "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", en *Review of Economic Studies*, vol. 32, No. 3, 1965, pp. 233-240, se enmarcan dentro de la teoría neoclásica de crecimiento económico. Se denomina neoclásica porque asume, entre otras cosas, una función de producción neoclásica con retornos constantes a escala, productos marginales positivos y decrecientes.

croeconómico es simple. Por una parte, el funcional objetivo es la suma de las utilidades futuras descontadas de la sociedad:

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(C) dt \quad (\delta > 0) \quad (20)$$

Por otro lado, en cada período, la economía está sujeta a una restricción: la producción debe destinarse a consumo o a inversión bruta en capital. De esta manera:

$$\phi(k) = C + k' + \theta k \quad (\theta > 0) \quad (21)$$

Donde la función de producción ($\phi(k)$) depende del capital (k), k' representa la variación del *stock* de capital con respecto al tiempo o la inversión neta en capital, θ la tasa de depreciación y θk la depreciación del capital. Ésta constituye la ecuación de movimiento, y relaciona el consumo (variable de control) con el capital existente en la economía (variable de estado).

En este tipo de problema de optimización dinámica se asume que existe un “dictador benevolente” (denominado **planificador social**), a quien le interesa maximizar el bienestar de la sociedad y decide las asignaciones de consumo y capital en la economía. De este modo, el problema que enfrenta el planificador social es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(C) dt \\ \text{sujeto a} & k' = \phi(k) - C - \theta k \\ & k(0) = k_0 \quad (k_0 \text{ dado}) \end{array} \quad (22)$$

A partir del problema (22) se obtiene la senda óptima de tres variables: el consumo (C), el capital (k) y la producción agregada ($\phi(k)$).

Una revisión detallada de la teoría de control óptimo se encuentra en el capítulo III. En el desarrollo de la teoría y las aplicaciones se considerará el caso de una sola variable de control (u) y estado (y).

Programación dinámica

La técnica de programación dinámica fue desarrollada a fines de la década de los cincuenta, por el matemático norteamericano Richard Bellman¹⁹. La programación dinámica, al igual que cualquier problema de optimización dinámica, puede formularse tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo. Sin embargo, para resolver el problema en tiempo continuo, es necesario tener un conocimiento previo de ecuaciones diferenciales parciales. Por ello, con el fin de brindar una explicación clara y sencilla de esta metodología, se estudiará el problema en su versión discreta. El planteamiento del problema en versión discreta sería:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } V[u_t] &= \sum_{t=0}^T f_t(y_t, u_t) & (23) \\ \text{sujeto a } y_t &= g_t(y_t, u_t) \\ y_0 &= I_0 \quad (I_0 \text{ dado}) \\ y_T &= I_T \quad (I_T, T \text{ dado}) \end{aligned}$$

Nótese que en el problema (23) se está brindando una especificación general. Tanto la función f_t como la función g_t pueden ser cambiantes en el tiempo.

Esta técnica se basa en el **principio de optimalidad**. En términos generales, este principio establece que la trayectoria óptima de la variable de control debe satisfacer la siguiente propiedad: en cualquier período "t" del tiempo, dado un valor de la variable de estado y_t que depende de las decisiones tomadas previamente, el resto de la secuencia de la variable de control ($u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_T$) también debe ser óptimo. A partir de este principio se desarrolla toda la teoría de programación dinámica. Una aplicación a esta técnica la constituye el modelo de crecimiento óptimo de Koopmans y Cass. El problema a resolver por el planificador social sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } U &= \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(C_t) & (0 < \beta < 1) & (24) \\ \text{sujeto a } k_{t+1} &= \phi(k_t) - C_t \\ k_0 &= I_0 \quad (I_0 \text{ dado}) \end{aligned}$$

19. Bellman, Richard, *Dynamic Programming*, Princeton: Princeton University Press, 1957.

Al igual que en el caso de control óptimo, el funcional objetivo a maximizarse constituye la suma de las utilidades futuras de la sociedad descontadas por el factor β . Por otro lado, en este modelo en particular, no se asume depreciación y la producción en un período determinado ($\phi(k_t)$) se destina tanto a consumo (C_t) como al *stock* de capital del siguiente período (k_{t+1}).

Una variación al problema (24) consistiría en introducir *shocks* estocásticos a la función de producción $\phi(k_t)$, tal como se establece en el modelo de crecimiento estocástico desarrollado por Brock y Mirman²⁰. En dicho caso, la variación de la producción no se encuentra asociada exclusivamente a cambios en el *stock* de capital en la economía, sino que además intervienen un conjunto de elementos aleatorios o no anticipados²¹ que pueden resumirse en una variable estocástica ε_t . En este sentido, asumiendo la función de producción $\phi(\varepsilon_t, k_t)$, el objetivo del planificador social vendría a ser la maximización del valor esperado (o promedio) del funcional objetivo condicionado a la información del período inicial $t = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(C_t) && (0 < \beta < 1) && (25) \\ \text{sujeto a} \quad & k_{t+1} = \phi(k_t, \varepsilon_t) - C_t \\ & k_0 = I_0 \quad (I_0 \text{ dado}) \end{aligned}$$

El gran potencial de la programación dinámica consiste en su aplicabilidad a problemas numéricos, mientras que su empleo en problemas analíticos es un poco más limitado. De esta forma, en el capítulo IV se brinda solamente una introducción a la programación dinámica, y se desarrollan problemas tanto con un horizonte de tiempo finito como infinito. En este caso, también se considera básicamente el caso de una variable de control (u_t) y una de estado (y_t).

20. Brock, William y Leonard Mirman, "Optimal Economic Growth and Uncertainty", en McCall, J.J. (ed.), Chicago: The University of Chicago Press, 1972, pp. 1-43.

21. Uno puede imaginarse el efecto de un desastre natural o una crisis financiera internacional, eventos que a priori no podrían anticiparse.

Anexo

FACTOR DE DESCUENTO EN TIEMPO CONTINUO

En los problemas de optimización dinámica se suele descontar las variables provenientes de períodos futuros. En el caso de la función de utilidad (5) se incluye un factor de descuento (β), el cual refleja la valoración que le asigna el agente optimizador a la utilidad proveniente de los períodos futuros. De igual forma, en la restricción presupuestaria (6) se descuenta el valor del consumo en cada instante del tiempo a la tasa de interés (r). Para ambos casos, el descuento puede expresarse a través de una tasa o un factor. El factor de descuento (β) puede determinarse a partir de una tasa de descuento intertemporal (δ)²², de esta forma:

$$\beta = \frac{1}{1 + \delta} \quad (0 < \delta < 1, 0 < \beta < 1)$$

Por otra parte, a partir de la tasa de interés puede construirse otro factor de descuento (α), que pondera el consumo de cada período en la restricción presupuestaria:

$$\alpha = \frac{1}{1 + r} \quad (0 < r < 1, 0 < \alpha < 1)$$

Como puede apreciarse, el descuento de las variables futuras puede realizarse tanto a través de una tasa (r o δ) o un factor (α o β). Cuando el tiempo es continuo, el factor de descuento toma un valor distinto. A continuación hallaremos dicho valor para el caso del factor α .

Supongamos que cada período "t" del problema de optimización (8) dure doce meses, y la tasa de interés en dicho lapso de tiempo es igual a "r" por ciento. Si un individuo deposita "A" u.m. en una entidad financiera, al siguiente período obtendría ($A + Ar$) u.m. o $A(1 + r)$ u.m. Sin embargo, ¿Qué sucedería si los períodos de elección se acortan a seis meses, pero la tasa de interés anual sigue siendo "r" por ciento? En los primeros seis meses, se obtendría ($A + A(r/2)$) u.m. o $A(1 + (r/2))$ u.m., podría depositarse dicha cantidad nuevamente y obtener al final del año $A(1 + (r/2))^2$. De esta manera, la **tasa de interés efectiva** estaría dada por $(1 + (r/2))^2 - 1$. Si el período se acortara a la tercera parte (cuatro meses), la tasa de interés efectiva sería $(1 + (r/3))^3 - 1$. En términos generales, cuando el período se fracciona en "m" subperíodos, la tasa de

22. El concepto de tasa de descuento intertemporal y factor de descuento son equivalentes. Ambos constituyen dos formas alternativas de expresar el descuento de las utilidades futuras.

interés efectiva estaría dada por $(1 + (r/m))^m - 1$. Cuando el tiempo es continuo, "m" tiende al infinito y la tasa de interés efectiva converge a la siguiente expresión:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{r}{m} \right]^m = e^r$$

De esta forma, el factor de descuento α en tiempo continuo estaría dado por:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{r}{m} \right]^m} = e^{-r}$$

De manera similar, el factor de descuento β en tiempo continuo sería equivalente a:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{\delta}{m} \right]^m} = e^{-\delta}$$

Donde r y δ son tasas de descuento intertemporales expresadas en términos anuales.

II

Cálculo de variaciones¹

Como se mencionó en el primer capítulo, el problema básico del cálculo de variaciones a resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[y] = \int_0^T f(t, y(t), y'(t)) dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = y_0 \text{ (} y_0 \text{ dado)} \\ & y(T) = y_T \text{ (} y_T \text{ dado)} \end{array} \quad (1)$$

Para que dicho problema tenga solución es necesario que se cumplan dos condiciones: (1) deben existir las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función intermedia $f(\bullet)$; y, (2) deben existir las derivadas de primer y segundo orden de la función $y(t)$, que depende del tiempo². El resultado del problema (1) consiste en una trayectoria $y^*(t)$ que optimiza el funcional objetivo $V[y]$. Sin pérdida de generalidad, inicialmente supondremos que todos los problemas de cálculo de variaciones consisten en **maximizar** el funcional objetivo $V[y]$. Posteriormente, cuando se expliquen las condiciones de segundo orden, se distinguirán entre problemas de maximización y de minimización.

1. Para comprender este capítulo y el siguiente, el lector debe tener un manejo adecuado de las ecuaciones diferenciales. Si no es así, se sugiere consultar: Chiang, Alpha, *Métodos fundamentales de economía Matemática*, 3a. edición, Madrid: McGraw Hill, 1996 y Sydsaeter. Knut y Peter J. Hammond, *Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 1995.

2. Una forma alternativa de definir esta condición es que $y(t)$ debe ser una función C^2 . En general, una función C^k implica que todas sus derivadas hasta el orden "k" son continuas.

Este capítulo está compuesto por cuatro secciones. En la primera se explica la condición de primer orden del problema (1), que se denomina **la ecuación de Euler**, y se detalla cómo aplicarla a la resolución de los problemas de cálculo de variaciones. En la segunda sección se explican las **condiciones de transversalidad**, que son empleadas en la resolución del problema cuando la condición terminal $y(T)$ ya no constituye un sólo punto (T, y_T) , sino un conjunto de puntos. En la tercera sección se explican las condiciones de segundo orden. Por último, se desarrolla el problema con un horizonte de tiempo infinito.

1. Condición de primer orden: la ecuación de Euler

Cuando se optimiza una función de una variable ($h(x)$), sin restricciones, un determinado punto (x^0) constituye un candidato a máximo o mínimo cuando la derivada de la función objetivo se iguala a cero ($h'(x^0) = 0$). Esta condición permite discriminar de un conjunto amplio de puntos, aquel que posiblemente logre optimizar a la función objetivo. En el cálculo de variaciones se aplica el mismo concepto. De un extenso conjunto de curvas ($y(t)$), es necesario escoger aquella que maximice o minimice el funcional objetivo. A la condición que permite seleccionar la curva óptima se le denomina ecuación de Euler.

1.1 La ecuación de Euler

Dada la función $y^*(t) \in C^2$ que resuelve el problema (1), es decir:

$$\int_0^T f(t, y^*(t), y'^*(t)) dt \geq \int_0^T f(t, y(t), y'(t)) dt \quad \forall y(t) \quad (2)$$

Para cualquier senda $y(t) \in C^2$, dicha función debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \right] \quad (3)$$

o de otra forma:

$$f_y = \frac{d}{dt} f_{y'} \quad (4)$$

A la ecuación (4), se le denomina ecuación de Euler. Si desarrollamos el lado derecho de la ecuación mediante la regla de la cadena, tendríamos lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_{y'}}{\partial t} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dt} \quad (5)$$

o expresado de otra manera:

$$f_y = f_{y't} + f_{y'y}y' + f_{y'y'}y'' \quad (6)$$

La ecuación (6) constituye una ecuación diferencial de segundo orden, que nos daría la trayectoria óptima $y^*(t)$. Para resolverla necesitamos dos constantes, las cuales se obtienen con la condición inicial (y_0) y terminal (y_T) del problema.

Demostración

Para comprobar que una trayectoria óptima $y^*(t)$ satisface la ecuación de Euler, es necesario compararla con el resto de sendas $y(t)$ factibles³. Para ello empleamos una senda auxiliar $x(t)$, que satisface la siguiente condición inicial y terminal:

$$x(0) = x(T) = 0 \quad (7)$$

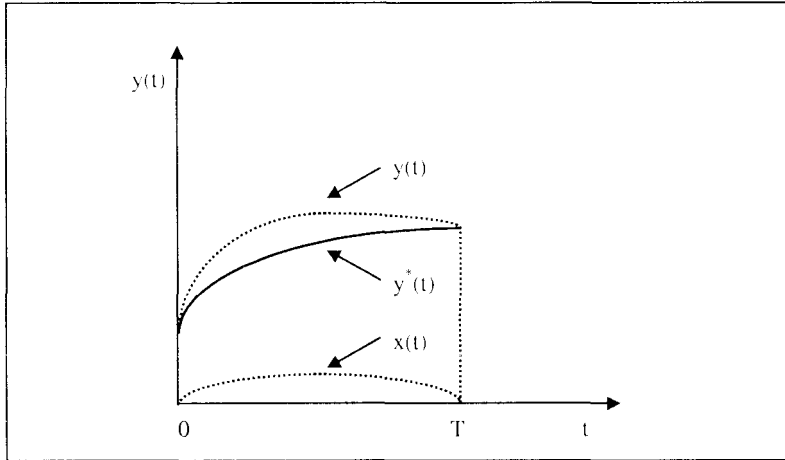
A partir de esta curva auxiliar se puede construir una familia de curvas factibles cercanas a la senda óptima, dadas por la siguiente relación:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon x(t) \quad (8)$$

Donde ε es un número positivo arbitrariamente pequeño. Para distintos valores de ε , las curvas factibles tendrán distintas trayectorias. La relación entre la senda óptima y una senda próxima puede observarse en el Gráfico No. 2.1. Como puede comprobarse, ambas trayectorias poseen una condición inicial y terminal común.

3. Por factibles se entiende a aquellas trayectorias que satisfacen la condición inicial y terminal del problema.

Gráfico No. 2.1



Para comprobar que solamente la curva óptima $y^*(t)$ satisface la ecuación de Euler, primero construimos una función $D(\varepsilon)$ que depende del valor óptimo del funcional $V[y^*]$ y del valor subóptimo $V[y]$:

$$D(\varepsilon) = \int_0^T \underbrace{f(t, y^*(t) + \varepsilon x(t))}_y \underbrace{y'^*(t) + \varepsilon x'(t)}_{y'} dt - \int_0^T f(t, y^*(t), y'^*(t)) dt \quad (9)$$

Por la relación (2), la función $D(\varepsilon)$ es no positiva y alcanza el máximo cuando $\varepsilon = 0$ (para dicho valor, ambas integrales son iguales). De esta forma, la condición de primer orden para maximizar la función $D(\varepsilon)$ es $D'(0) = 0$. La primera derivada de la función con respecto a ε sería igual a:

$$D'(\varepsilon) = \int_0^T [f_y x(t) + f_{y'} x'(t)] dt \quad (10)$$

Evaluando esta derivada en $\varepsilon = 0$ tendríamos:

$$D'(0) = \int_0^T [f_y(t, y^*(t), y'^*(t))x(t) + f_{y'}(t, y^*(t), y'^*(t))x'(t)] dt = 0 \quad (11)$$

$$\int_0^T [f_y x(t)] dt = - \int_0^T [f_{y'} x'(t)] dt$$

La ecuación (11) puede simplificarse aún más. Si integramos por partes el lado derecho de la ecuación, obtendríamos lo siguiente:

$$\int_0^T [f_{y'} x'(t)] dt = [f_{y'} x(t)]_0^T - \int_0^T [x(t) \frac{d}{dt} f_{y'}] dt \quad (12)$$

En vista de que la curva auxiliar tiene un valor inicial y terminal igual a cero ($x(0) = x(T) = 0$), el primer término del lado derecho de la ecuación también es igual a cero. Si reemplazamos la ecuación (12) en la (11), se llegaría a la siguiente condición:

$$\int_0^T \left[\left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) x(t) \right] dt = 0 \quad (13)$$

Para que se cumpla (13) para cualquier curva $x(t)$, la senda óptima $y^*(t)$ debe satisfacer la condición:

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 \quad (14)$$

que constituye la ecuación de Euler planteada en (4). A continuación se aplicará la ecuación de Euler a tres ejemplos de cálculo de variaciones.

Ejemplo 1.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = \int_0^1 (y'^2 - 2yy' + 10ty) dt \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = 1 \\ & y(1) = 2 \end{aligned}$$

Primero identificamos la función intermedia $f(\bullet)$, que está dada por $f(t, y, y') = y'^2 - 2yy' + 10ty$, y luego obtenemos las derivadas que conforman la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} f_y &= -2y' + 10t \\ f_{y'} &= 2y' - 2y \\ \frac{d}{dt} f_{y'} &= 2y'' - 2y' \end{aligned}$$

Nótese que en las dos primeras líneas se obtienen **derivadas parciales** con respecto a y e y' , respectivamente; en cambio, en la tercera línea se obtiene una **derivada total** con respecto al tiempo. Reemplazando las derivadas en la ecuación (4), obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$-2y' + 10t = 2y'' - 2y'$$

$$2y'' = 10t$$

$$y'' = 5t$$

Si integramos una vez la ecuación diferencial anterior, se obtendría la expresión $y' = (5/2)t^2 + H_1$. Integrando una segunda vez, se llegaría a la solución general del problema:

$$y^*(t) = \frac{5}{6}t^3 + H_1t + H_2$$

Para hallar las constantes de la senda óptima $y^*(t)$, debemos evaluarla en el punto inicial y terminal. Para $t = 0$ se cumple la igualdad $y(0) = H_2 = 1$; y para $t = 1$, se cumple que $y(1) = (5/6) + H_1 + H_2 = 2$. A partir de ambas ecuaciones obtenemos el valor de las constantes: $H_1 = 1/6$ y $H_2 = 1$. La trayectoria óptima estaría dada por:

$$y^*(t) = \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{6}t + 1$$

Ejemplo 2.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[y] = \int_0^1 tyy'dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = 0 \\ & y(1) = 1 \end{array}$$

Dada la función $f(t, y, y') = ty y'$, hallamos las derivadas que conforman la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} f_y &= ty' \\ f_{y'} &= ty \\ \frac{d}{dt} f_{y'} &= y + ty' \end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas de la función intermedia $f(\bullet)$ en la ecuación (4), obtendríamos la siguiente ecuación:

$$ty' = y + ty'$$

$$y^*(t) = 0$$

Si bien la función $y^*(t)$ satisface la ecuación de Euler, es necesario verificar si cumple con la condición inicial y terminal del problema. La condición inicial $y(0) = 0$ es consistente con la senda óptima, en cambio no lo es la condición final $y(1) = 1$. De este modo, la respuesta obtenida no es factible y se concluye que no existe una senda óptima que resuelva el problema.

Ejemplo 3.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = \int_0^1 (y^2 + 4yy' + 4y'^2) dt \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = 2\sqrt{e} \\ & y(1) = 1 + e \end{aligned}$$

Las derivadas de la función $f(t, y, y') = (y^2 + 4yy' + 4y'^2)$ están compuestas por:

$$\begin{aligned} f_y &= 2y + 4y' \\ f_{y'} &= 4y + 8y' \\ \frac{d}{dt} f_{y'} &= 4y' + 8y'' \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Euler:

$$2y + 4y' = 4y' + 8y''$$

$$8y'' - 2y = 0$$

$$4y'' - y = 0$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución está definida por las raíces de la siguiente ecuación característica:

$$4r^2 - 1 = 0$$

y la integral particular:

$$k = 0$$

La solución general estaría dada por:

$$y^*(t) = H_1 e^{2t} + H_2 e^{-2t}$$

Para hallar H_1 y H_2 , reemplazamos la senda $y^*(t)$ en la condición inicial y terminal. Para $y(0) = H_1 + H_2 = 2e^{1/2}$, y para $y(1) = H_1 e^{1/2} + H_2 e^{-1/2} = 1+e$. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtendríamos el valor de las constantes: $H_1 = e^{1/2}$ y $H_2 = e^{1/2}$. La senda óptima sería:

$$y^*(t) = e^{2^{1/2}(1+t)} + e^{2^{1/2}(1-t)}$$

1.2 La ecuación de Euler en casos especiales

Hasta el momento se han desarrollado los problemas de cálculo de variaciones empleando la ecuación de Euler propuesta en (4). Sin embargo, cuando la función $f(\bullet)$ toma una forma determinada, la ecuación de Euler se simplifica y el problema de cálculo de variaciones puede resolverse de una forma más sencilla. A continuación se explicarán cuatro casos particulares de la ecuación de Euler, derivados a su vez de casos específicos de la función intermedia.

Caso 1.- $f = f(t, y')$

En este caso, la función $f(\bullet)$ no depende de y , lo cual implica que $f_y = 0$. Reemplazando dicha igualdad en la ecuación de Euler (4), se obtiene que $df_{y'}/dt = 0$ o de manera equivalente:

$$f_{y'} = \text{constante} \quad (15)$$

Ésta constituye una ecuación diferencial de primer orden. A continuación se resolverá un ejemplo empleando esta condición.

Ejemplo.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = \int_0^1 \frac{y'^2}{t^3} dt \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = 2 \\ & y(1) = \frac{17}{8} \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación de Euler simplificada (15), solamente tendríamos que calcular la derivada parcial $f_{y'}$ e igualarla a una constante:

$$f_{y'} = \frac{2y'}{t^3} = H_1$$

La solución a la ecuación diferencial de primer orden estaría dada por:

$$y^*(t) = \frac{t^4}{8} H_1 + H_2$$

A partir de la condición inicial $y(0) = H_2 = 2$ y terminal $y(1) = H_1/8 + H_2 = 17/8$, determinamos las constantes: $H_1 = 1$, $H_2 = 2$, y la senda óptima sería:

$$y^*(t) = \frac{t^4}{8} + 2$$

Caso 2.- $f = f(y')$

Si reemplazamos la función $f(y')$ en la ecuación de Euler (6), las derivadas f_y , $f_{y'}$, y $f_{y''}$ se igualarían a cero y obtendríamos la siguiente expresión:

$$f_{y'y'} y'' = 0 \quad (16)$$

Para que se cumpla la ecuación (16) puede suceder que $y'' = 0$ o que $f_{y'y'} = 0$. En el primer caso, la senda óptima se obtendría integrando dos veces la ecuación diferencial $y'' = 0$, con lo cual se obtendría una recta $y(t) = H_1 t + H_2$. En el segundo caso, f dependería linealmente de y' ($f(y') = a + by'$) y la ecuación de Euler se convierte en una identidad⁴. De esta forma, cualquier senda que cumpla con la condición inicial y terminal resolvería el problema de cálculo de variaciones. En general, la respuesta a este tipo de problema dependerá de la función $f(\bullet)$. Si f depende de y' de manera no lineal, entonces se puede concluir que la senda óptima estará dada por una recta.

Ejemplo.- Encuentre la curva que pase por los puntos (0,3) y (1,4), y que presente una distancia mínima.

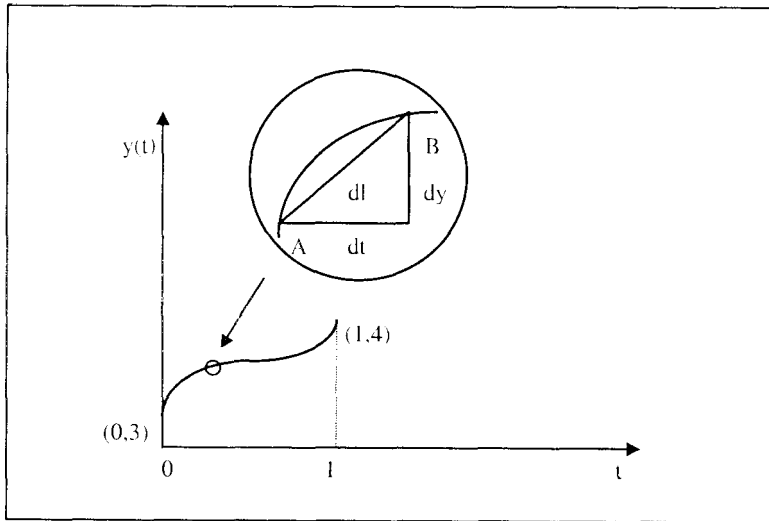
Intuitivamente la respuesta sería una línea recta, ya que cualquier otra curva incurriría en una mayor distancia entre ambos puntos. Para resolver este problema a través del cálculo de variaciones, en primer lugar, debe definirse una función que represente la distancia entre dos puntos. Esta función puede derivarse a partir del Gráfico No. 2.2.

Supongamos que en la curva óptima existan dos puntos muy cercanos uno de otro (A y B), el tiempo existente entre ellos estará dado por dt , la diferencia en y por dy , y la distancia por dl . Por el **teorema de Pitágoras**, se cumple la siguiente relación entre la distancia (dl), la variación en el tiempo (dt) y la variación en la variable y (dy):

$$(dl)^2 = (dy)^2 + (dt)^2$$

4. Al aplicar la ecuación de Euler a la función $f(y') = a + by'$, se obtiene la igualdad $0 = 0$.

Gráfico No. 2.2



Tras algunas manipulaciones algebraicas tendríamos la siguiente relación:

$$\frac{(dl)^2}{(dt)^2} = \frac{(dy)^2}{(dt)^2} + 1$$

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{(dy)^2}{(dt)^2} + 1} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Finalmente, la distancia (dl) quedaría definida del siguiente modo:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dt$$

La ecuación anterior expresa la distancia entre dos puntos próximos en una curva $y(t)$. La distancia total de la curva (D) estaría dada por la integral de dl:

$$D = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dt$$

De esta forma, el problema quedaría definido del siguiente modo⁵:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[y] = -\int_0^1 \sqrt{1+y'^2} dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = 3 \\ & y(1) = 4 \end{array}$$

La ecuación de Euler del problema viene dada por: $y''f_{y'y'} = 0$. Como la función $f(\bullet)$ depende de manera no lineal de y' , no puede darse el caso $f_{y'y'} = 0$. Por lo tanto, la respuesta debe ser $y'' = 0$, cuya solución es una línea recta $y(t) = H_1t + H_2$. Las constantes se obtienen reemplazando la trayectoria óptima en la condición inicial y terminal: $y(0) = H_2 = 3$ e $y(1) = H_1 + H_2 = 4$. Las constantes serían: $H_1 = 1$ y $H_2 = 3$. La respuesta final al problema corresponde a la recta que une los puntos indicados:

$$y^*(t) = t + 3$$

Caso 3.- $f = f(t, y)$

En este caso se cumple que $f_{y'} = 0$. Si reemplazamos esta condición en (4), la ecuación de Euler se simplifica del siguiente modo:

$$f_y = 0 \tag{17}$$

La ecuación (17) no constituye una ecuación diferencial, lo cual implica que el problema es **degenerado**⁶. En los problemas anteriores, la senda óptima poseía constantes arbitrarias que tomaban un valor en función de la condición inicial y terminal. En este caso, al no existir una ecuación diferencial, la senda obtenida no posee constantes, de tal forma que ésta sólo cumpliría con la condición inicial y terminal de manera casual.

5. En realidad, el problema de cálculo de variaciones es de minimización de la distancia D . Sin embargo, al multiplicar por (-1) a la función objetivo, cambiamos el problema por uno de maximización. En vista de que $-D$ siempre es un valor negativo, buscar la distancia más corta equivale a maximizar $-D$. Las diferencias entre un problema de maximización y uno de minimización en el cálculo de variaciones se verán con mayor detalle en las siguientes secciones.

6. Lo cual quiere decir que no existe senda que maximice el funcional objetivo $V[y]$.

Ejemplo.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[y] = \int_0^1 (y^2 - yt) dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = 0 \\ & y(1) = 1 \end{array}$$

Aplicando (17), igualamos la derivada f_y a cero:

$$f_y = 2y - t = 0$$

$$y^*(t) = \frac{t}{2}$$

La trayectoria óptima estaría definida por $y^*(t)$. Si bien la condición inicial se cumple, $y(0) = 0$, no sucede lo mismo con la condición terminal $y(1) \neq 1$, por lo cual no existe solución al problema.

Caso 4.- $g = f(t, y, y') e^{-\rho t}$

En este caso, la función $f(\bullet)$ va acompañada del factor de descuento $e^{-\rho t}$. Las derivadas parciales que conforman la ecuación de Euler están dadas por:

$$\begin{aligned} g_y &= f_y e^{-\rho t} \\ g_{y'} &= f_{y'} e^{-\rho t} \\ \frac{d}{dt} g_{y'} &= \left[\frac{d}{dt} f_{y'} \right] e^{-\rho t} - \rho e^{-\rho t} f_{y'} \end{aligned}$$

Reemplazándolas en (4) obtenemos la siguiente expresión para la ecuación de Euler:

$$f_y e^{-\rho t} = \left[\frac{d}{dt} f_{y'} \right] e^{-\rho t} - \rho e^{-\rho t} f_{y'}$$

o de manera simplificada:

$$f_y = \frac{d}{dt} f_{y'} - \rho f_{y'} \quad (18)$$

A partir de la ecuación (18) es posible resolver los problemas de cálculo de variaciones con factor de descuento de una forma más sencilla.

Ejemplo.- Los ingresos (I) y costos (C) de una firma dependen de la producción (y) y de la tasa de variación de la producción (y'), de la siguiente forma:

$$I(y, y') = y - \frac{y^2}{2}$$

$$C(y, y') = 2y'^2 + \frac{y^2}{2}$$

Determine la trayectoria de la producción a lo largo del presente año, de tal forma que se maximice el valor presente de los beneficios de la firma. Asuma una tasa de descuento (ρ) igual a 0.5, y que la producción al final del año $y(1)$ será igual a $1/2$.

El problema de cálculo de variaciones a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = \int_0^1 (I(y, y') - C(y, y')) e^{-\frac{1}{2}t} dt = \int_0^1 (y - y^2 - 2y'^2) e^{-\frac{1}{2}t} dt \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = 0 \\ & y(1) = 1/2 \end{aligned}$$

En primer lugar se determinan las derivadas necesarias para la ecuación de Euler:

$$f_y = 1 - 2y$$

$$f_{y'} = -4y'$$

$$\frac{d}{dt} f_{y'} = -4y''$$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación (18), se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$1 - 2y = -4y'' - \frac{1}{2}(-4y')$$

$$4y'' - 2y' - 2y = -1$$

La solución a la ecuación diferencial está determinada por las raíces del polinomio característico:

$$4r^2 - 2r - 2 = 0$$

y por la integral particular:

$$k = 1/2$$

La trayectoria óptima de la producción sería:

$$y^*(t) = H_1 e^t + H_2 e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}$$

Evaluando la senda óptima en la condición inicial y terminal, obtenemos las constantes H_1 y H_2 . Para $y(0) = H_1 + H_2 + 1/2 = 0$, y para $y(1) = H_1 e + H_2 e^{-1/2} + 1/2 = 1/2$. La solución al sistema de ecuaciones vendría dado por: $H_2 = (e/2)/(e^{-1/2} - e)$ y $H_1 = (e^{-1/2}/2)/(e - e^{-1/2})$.

A continuación se presentan dos aplicaciones del cálculo de variaciones a la teoría económica. En la primera aplicación desarrollaremos una versión simplificada del modelo de Hotelling⁷, en el cual se determina el patrón óptimo de extracción de un recurso natural no renovable. En la segunda aplicación se resolverá el modelo de Taylor⁸, en el cual se determina la política anti-inflacionaria óptima para una economía.

7. Hotelling, Harold, "The Economics of Exhaustible Resources", en *Journal of Political Economy*, Chicago: The University of Chicago Press, abril 1931, pp. 137-175.

8. Taylor, Dean, "Stopping Inflation in the Dornbusch Model: Optimal Monetary Policies with Alternate Price-Adjustment Equations", en *Journal of Macroeconomics*, Baton Rouge: Louisiana State University Press, 1989, pp. 199-216.

1.3 Aplicación: extracción óptima de recursos naturales⁹

Supongamos que una firma es propietaria de una cantidad "A" de un recurso agotable, tal como petróleo, carbón o cobre. La función de beneficios de la firma es logarítmica, de tal forma que por extraer "q" unidades del recurso obtiene beneficios iguales a "Ln(q)". El objetivo de la firma es determinar el patrón de extracción de los recursos, de tal manera que maximice el valor presente de los beneficios. En este problema se asume que la tasa de descuento es constante e igual a "ρ", y que el recurso se agota en su totalidad en el período "T".

Para resolver este problema, en primer lugar, debemos definir la variable a optimizar. Para ello es necesario distinguir entre dos tipos de variables: la dotación de recursos que constituye un *stock*, y la extracción del recurso agotable que constituye un *flujo*. Una forma simple de relacionar estas dos variables es definiendo a las ventas acumuladas del recurso natural como "y". Las ventas acumuladas constituyen una variable con un valor inicial igual a cero (en el período inicial no se ha realizado ninguna venta previamente) y un valor terminal igual a A (todo el *stock* del recurso ha sido vendido previamente en el último período). Por otra parte, la extracción del recurso equivale a la variación en el tiempo de las ventas acumuladas (y'). De esta manera, el problema que debe resolver la firma es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[y] = \int_0^T (Lny')e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = 0 \\ & y(T) = A \end{array}$$

El problema puede ser resuelto de una forma rápida, empleando la ecuación de Euler (15) o (18). Para este caso en particular, resulta conveniente emplear la ecuación (15):

$$f_{y'} = H_1$$

$$\frac{1}{y'} e^{-\rho t} = H_1$$

9. Esta aplicación está basada en el artículo escrito por Hotelling, Harold, *op. cit.*

Despejando la ecuación diferencial e integrando una vez, obtenemos:

$$y' = -\frac{1}{H_1} e^{-\rho t}$$

$$y^*(t) = -\frac{1}{\rho H_1} e^{-\rho t} + H_2$$

Reemplazando la trayectoria óptima en la condición inicial y terminal del problema, obtenemos las constantes H_1 y H_2 . En la condición inicial se cumple que $y(0) = H_2 - (1/\rho H_1) = 0$; y en la condición terminal, $y(T) = H_2 - (1/\rho H_1)e^{-\rho T} = A$. Las constantes vienen dadas por $H_2 = A/(1-e^{-\rho T})$ y $H_1 = (1-e^{-\rho T})/A\rho$. Finalmente, la evolución óptima de la extracción y las ventas acumuladas vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$y^{**}(t) = \frac{\rho A}{(1-e^{-\rho T})} e^{-\rho t}$$

$$y^*(t) = \frac{A}{(e^{-\rho t} - 1)} e^{-\rho t} + \frac{A}{(1 - e^{-\rho T})}$$

Para $T \geq 1$ y $\rho > 0$, H_1 tomará un valor positivo (dado que $0 < e^{-\rho T} < 1$) y, por lo tanto, la trayectoria del patrón de extracción de recursos disminuirá exponencialmente a lo largo del tiempo a la tasa “ ρ ”.

El resultado anterior puede generalizarse para cualquier función de beneficios que sea cóncava y continua. Supongamos una función de beneficios $B(y')$, que satisface las propiedades $B'(y') > 0$ y $B''(y') < 0$ ($\forall y'$). Dicha función indica que los beneficios marginales de extraer una unidad son positivos, aunque decrecientes conforme se incremente la extracción. El problema a resolver sería:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[y] = \int_0^T B(y') e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = 0 \\ & y(T) = A \end{array}$$

Aplicando la ecuación de Euler (15) obtendríamos la condición de primer orden del problema:

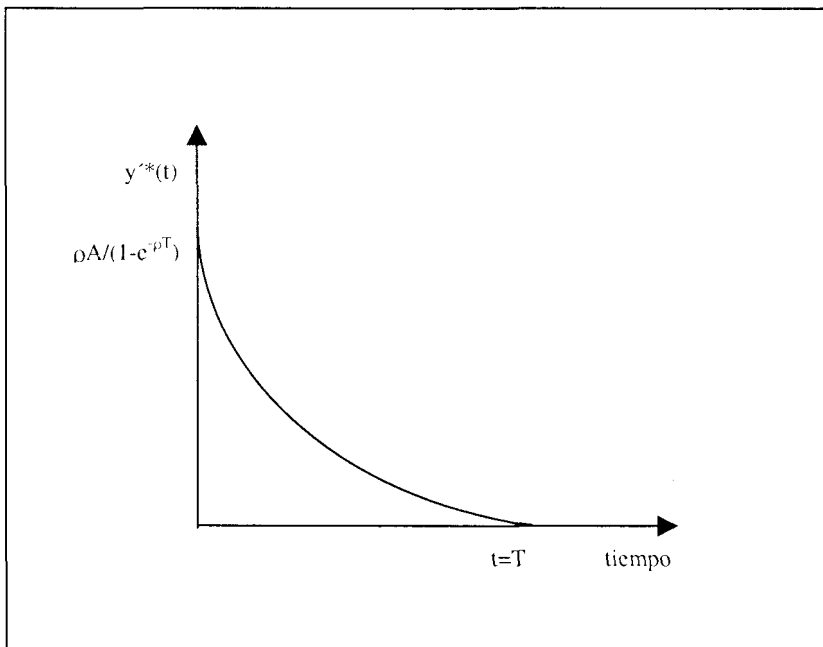
$$f_{y'} = H_1$$

$$B'(y')e^{-\rho t} = H_1$$

$$B'(y') = H_1 e^{\rho t}$$

La solución al problema general consiste en que el beneficio marginal de extraer el recurso crece exponencialmente a la tasa ρ . Como la función de beneficios es cóncava, beneficios marginales mayores se obtienen para valores bajos de la extracción del recurso (y'). De esta forma, como los beneficios marginales crecen a lo largo del tiempo, el patrón de extracción óptimo debe ser decreciente en el tiempo, al igual como se observa en el Gráfico No. 2.3.

Gráfico No. 2.3



Este resultado es consistente con la formulación del problema inicial. Debido al factor de descuento $e^{-\rho t}$, los beneficios obtenidos de los períodos más alejados del presente tienen un menor impacto sobre el funcional objetivo $V|y|$ que los beneficios obtenidos en períodos cercanos al presente¹⁰. De esta manera, una estrategia racional de la firma es obtener mayores beneficios en el presente con respecto al futuro, lo cual es posible extrayendo la mayor cantidad de recursos en períodos cercanos al presente.

1.4 Aplicación: política anti-inflacionaria óptima¹¹

En este modelo se asume que una situación económica óptima para un país es aquella en la cual la producción (Y) se acerque al nivel de pleno empleo¹² (Y_f), y que la inflación (P) sea cercana a cero. Una función que represente el **costo social** por desviarse de dicha situación sería la siguiente:

$$\lambda(P, Y) = (Y_f - Y)^2 + \alpha P^2 \quad (\alpha > 0) \quad (19)$$

La función $\lambda(\bullet)$ alcanza su nivel mínimo cuando $Y = Y_f$ y $P = 0$. Cualquier otro valor del producto y la inflación incrementa $\lambda(\bullet)$ o el costo social. La inflación se relaciona con la producción y la inflación esperada (π) de acuerdo con la siguiente relación:

$$P = -\beta(Y_f - Y) + \pi \quad (\beta > 0) \quad (20)$$

Esta ecuación de comportamiento constituye una representación de la curva de Phillips. La inflación se relaciona negativamente con la producción a través del coeficiente β . Un menor producto implica un mayor desempleo, que se traduce en menor inflación. Por otro lado, dado un nivel de producción, mayores expectativas inflacionarias incrementan la inflación efectiva. La formación de las expectativas inflacionarias se asume adaptativa:

$$\pi' = j(P - \pi) \quad (0 < j \leq 1) \quad (21)$$

10. Esto se debe al hecho de que el efecto del factor de descuento es mayor conforme se incrementa el tiempo.

11. Este modelo fue tomado de Chiang, Alpha, *Elements of Dynamic Optimization*, 3a. edición, Nueva York: McGraw Hill, 1992, pp. 54-58, y constituye una versión simplificada del trabajo de Taylor, *op. cit.*

12. El producto de pleno empleo (Y_f) se asume constante en el problema.

Si la inflación actual resulta superior a la inflación esperada, entonces $\pi' > 0$ y la expectativa de inflación se incrementa. Por otro lado, si la inflación actual es inferior a la inflación esperada, entonces $\pi' < 0$ y la expectativa de inflación disminuye. Para resolver el problema de optimización dinámica es necesario simplificar el modelo, con el fin de determinar la trayectoria óptima de una sola variable. A partir de la ecuación (21) es posible expresar la inflación efectiva en función de la inflación esperada:

$$P = \frac{\pi'}{j} + \pi \quad (22)$$

Si reemplazamos la ecuación (22) en (20), se obtendría una expresión para la desviación del producto del nivel de pleno empleo:

$$Y_f - Y = \frac{-\pi'}{\beta j} \quad (23)$$

Al sustituir las ecuaciones (22) y (23) en (19), obtendríamos la función de costo social en función de la inflación esperada (π) y su primera derivada (π'):

$$\lambda(\pi, \pi') = \left[\left(-\frac{\pi'}{\beta j} \right)^2 + \alpha \left(\pi + \frac{\pi'}{j} \right)^2 \right] \quad (24)$$

Finalmente, el problema que debería resolver la sociedad (o el planificador social) si desea disminuir a cero las expectativas de inflación en un plazo de "T" años, sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[\pi] = -\int_0^T \left[\left(\frac{\pi'}{\beta j} \right)^2 + \alpha \left(\pi + \frac{\pi'}{j} \right)^2 \right] dt \\ \text{sujeto a} \quad & \pi(0) = \pi_0 \\ & \pi(T) = 0 \end{aligned}$$

Para determinar la senda óptima de las expectativas de inflación, en primer lugar, debemos hallar las derivadas que conforman la ecuación de Euler:

$$f_{\pi} = -2\alpha\pi - 2\alpha \frac{\pi'}{j}$$

$$f_{\pi'} = -2 \frac{\pi'}{(\beta j)^2} - 2\alpha \frac{\pi}{j} - 2\alpha \frac{\pi'}{j^2}$$

$$\frac{d}{dt} f_{\pi'} = -2 \frac{\pi''}{(\beta j)^2} - 2\alpha \frac{\pi'}{j} - 2\alpha \frac{\pi''}{j^2}$$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación (4) llegaríamos a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$2\alpha\pi + 2\alpha \frac{\pi'}{j} = 2 \frac{\pi''}{(\beta j)^2} + 2\alpha \frac{\pi'}{j} + 2\alpha \frac{\pi''}{j^2}$$

$$(1 + \alpha\beta^2)\pi'' - \alpha\beta^2 j^2 \pi = 0$$

La solución a la ecuación diferencial viene dada por las raíces características del siguiente polinomio:

$$(1 + \alpha\beta^2)r^2 - \alpha\beta^2 j^2 = 0$$

y la integral particular:

$$k = 0$$

La solución genérica a la ecuación diferencial viene dada por:

$$\pi^*(t) = H_1 e^{-r_1 t} + H_2 e^{r_1 t}$$

Donde r_1 representa la raíz característica de la ecuación diferencial y equivale a:

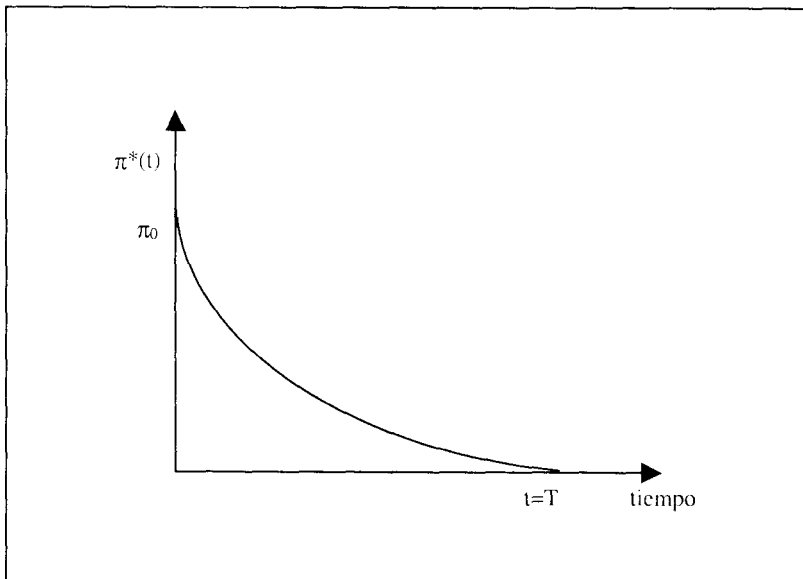
$$r_1 = \frac{\sqrt{\alpha\beta j}}{\sqrt{1 + \alpha\beta^2}}$$

Las constantes se obtienen de la condición inicial y terminal del problema. En el período $t = 0$ se cumple que $\pi(0) = H_1 + H_2 = \pi_0$, y en el período $t = T$ se cumple que $\pi(T) = H_1 e^{-r_1 T} + H_2 e^{r_1 T} = 0$. Las constantes del problema son iguales a $H_1 = (\pi_0) / (1 - e^{-2r_1 T})$ y $H_2 = (\pi_0) / (1 - e^{2r_1 T})$. Por último, la senda óptima de la inflación esperada estaría conformada por:

$$\pi^*(t) = \frac{\pi_0}{(1 - e^{-2r_1 T})} e^{-r_1 t} + \frac{\pi_0}{(1 - e^{2r_1 T})} e^{r_1 t}$$

La trayectoria óptima de la inflación esperada dependerá básicamente del signo de las constantes H_1 y H_2 , así como del signo de las raíces de la ecuación característica. Considerando que la raíz r_1 es positiva (debido a que los parámetros "β" y "j" son positivos), es fácil demostrar que las constantes H_1 y H_2 tendrán un signo positivo y negativo, respectivamente. De esta forma, el primer término de la inflación esperada tenderá a cero, mientras que el segundo a menos infinito. Sumando ambos efectos, la trayectoria de la inflación esperada será monotónicamente decreciente, tal como se muestra en el Gráfico No. 2.4:

Gráfico No. 2.4



La convergencia rápida de la inflación esperada a cero, se debe a la importancia relativa que se le asigna a la inflación (P) a través del parámetro α en la función de costo social. Si asumiéramos una baja ponderación en la función de costo social ($\alpha = 0$), a partir de (24) obtendríamos:

$$\lambda(\pi') = \left(-\frac{\pi'}{\beta_j} \right)^2$$

En este caso, la función de costo social depende solamente de (π') de manera no lineal. Por consiguiente, empleando la ecuación de Euler (16) la trayectoria óptima de la inflación esperada vendría dada por la recta $\pi^*(t) = H_1t + H_2$. Esta solución, a diferencia de la representada en el Gráfico No. 2.4, implica una convergencia lenta de la inflación esperada. Dicho resultado, como se mencionó anteriormente, se debe a la baja ponderación de la inflación esperada en la función de costo social.

2. Condición de transversalidad

Hasta el momento, el problema (1) se ha resuelto empleando la ecuación de Euler, y la condición inicial y terminal de la senda óptima. Sin embargo, en ausencia del valor inicial y/o terminal de la senda óptima, para resolver el problema es necesario contar con otra condición adicional denominada **condición de transversalidad**. En este sentido, un nuevo problema a resolver sería el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = \int_0^T f(t, y(t), y'(t)) dt & (25) \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\ & y(T) = y_T \quad (y_T, T \text{ libres}) \end{aligned}$$

En (25) se ha mantenido fija la condición inicial; sin embargo, la determinación de la condición terminal pasa a formar parte del problema de cálculo de variaciones. A continuación se explicará la derivación de las condiciones de transversalidad para resolver el problema (25) y algunas aplicaciones.

2.1 Condición de transversalidad

La función $y^*(t) \in C^2$ resuelve el problema (25), si satisface la ecuación de Euler (5) y la condición de transversalidad:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{t=T} \Delta y_T + \left[f - \frac{dy}{dt} \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{t=T} \Delta T = 0 \quad (26)$$

o de manera simplificada:

$$\{f_{y'}\}_{t=T} \Delta y_T + \{f - y' f_{y'}\}_{t=T} \Delta T = 0 \quad (27)$$

Donde ΔT y Δy_T representan pequeñas variaciones del horizonte de tiempo "T" y la condición final "y_T", respectivamente.

Demstración

Al igual que en la demostración de la ecuación de Euler, para derivar la condición de transversalidad es necesario comparar a la senda óptima con respecto a un conjunto de sendas factibles. Para ello, creamos una trayectoria auxiliar $x(t)$ que únicamente satisfaga la condición:

$$x(0) = 0 \quad (28)$$

A partir de esta curva auxiliar¹³, las sendas factibles estarían dadas por la relación:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon x(t) \quad (29)$$

Como se mencionó anteriormente, ε constituye un número arbitrariamente pequeño. Como el horizonte de tiempo "T" es una variable a determinarse dentro del problema, es posible construir un conjunto de valores de "T" factibles, los cuales estarían definidos por:

$$T = T^* + \varepsilon \Delta T \quad (30)$$

13. Nótese que a diferencia de la senda auxiliar (7), en este caso no se restringe el valor terminal a $x(T) = 0$. La condición terminal de $x(t)$ es libre.

Donde T^* representa el horizonte temporal óptimo. Tomando en cuenta (29) y (30), la función objetivo a optimizar quedaría definida del siguiente modo:

$$D(\varepsilon) = \int_0^{T^* + \varepsilon \Delta T} f(t, y^*(t) + \varepsilon x(t), y'^*(t) + \varepsilon x'(t)) dt - \int_0^{T^*} f(t, y^*(t), y'^*(t)) dt \quad (31)$$

Al igual que en el caso (9), la función $D(\varepsilon)$ es no positiva y alcanza su valor máximo cuando $\varepsilon = 0$. De esta forma, la senda óptima se determina a partir de la condición $D'(0) = 0$. Para obtener la derivada $D'(\varepsilon)$, debemos aplicar **la regla de Leibnitz**¹⁴:

$$D'(\varepsilon) = \int_0^{T^* + \varepsilon \Delta T} [f_y x(t) + f_{y'} x'(t)] dt + f(T, y(T), y'(T)) \left(\frac{dT}{d\varepsilon} \right) \quad (32)$$

Integrando por partes el primer término de (32) y tomando en cuenta la condición (8), obtenemos la siguiente relación:

$$\int_0^{T^* + \varepsilon \Delta T} [f_y x(t) + f_{y'} x'(t)] dt = \int_0^{T^* + \varepsilon \Delta T} \left[f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right] x(t) dt + [f_{y'}]_{t=T^*} x(T) \quad (33)$$

Finalmente, reemplazando (33) en (32), $D'(0)$ sería igual a:

$$D'(0) = \int_0^{T^*} \left[f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right] x(t) dt + [f_{y'}]_{t=T^*} x(T^*) + [f]_{t=T^*} \Delta T \quad (34)$$

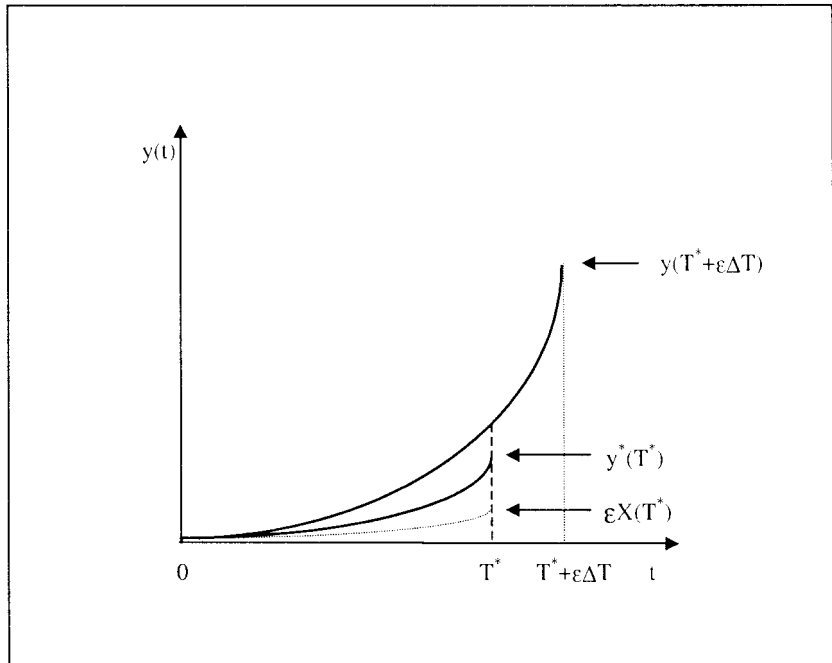
Con el objeto de establecer una condición general para la solución del problema, independientemente de la trayectoria que tome $x(t)$, es necesario despejar el término $x(T^*)$. Para ello, se debe determinar en el instante T^* cómo se relaciona dicho término con el valor final $y^*(T^*)$ y el horizonte de tiempo " T^* ". En el Gráfico No. 2.5 se puede apreciar dicha relación. La senda óptima $y^*(t)$ presenta el valor terminal $y^*(T^*)$, mientras que la senda

14. Ver el Anexo A al final del capítulo.

factible, que cumple con la relación (29), posee el valor terminal $y(T^* + \varepsilon\Delta T)$. La diferencia entre la condición final de $y(t)$ y $y^*(t)$ puede ser definida del siguiente modo:

$$\varepsilon\Delta y_T = y(T^* + \varepsilon\Delta T) - y^*(T^*) \quad (35)$$

Gráfico No. 2.5



Por otro lado, la curva $y(t)$ entre el instante T^* y $(T^* + \varepsilon\Delta T)$ puede ser aproximada mediante una línea recta con intercepto igual a $y(T^*)$ y pendiente $y'(T^*)$:

$$y(T^* + \varepsilon\Delta T) \approx y(T^*) + y'(T^*)\varepsilon\Delta T \quad (36)$$

De este modo, para valores muy pequeños de ε y reemplazando (36) en (35), obtendremos:

$$\varepsilon \Delta y_T = y(T^*) - y^*(T^*) + y'^*(T^*) \varepsilon \Delta T \quad (37)$$

$$\varepsilon \Delta y_T = \varepsilon x(T^*) + \varepsilon y'^*(T^*) \Delta T$$

$$\Delta y_T = x(T^*) + y'^*(T^*) \Delta T$$

$$x(T^*) = \Delta y_T - y'^*(T^*) \Delta T$$

Finalmente, sustituyendo (37) en (34), obtenemos la condición de primer orden del problema (25):

$$\int_0^{T^*} \left[f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right] x(t) + [f_{y'}]_{t=T^*} \Delta y_T + [f - y'^* f_{y'}]_{t=T^*} \Delta T = 0 \quad (38)$$

Una senda $y^*(t) \in C^2$ satisface (38), siempre y cuando se cumpla la ecuación de Euler y la condición de transversalidad:

$$[f_{y'}]_{t=T} \Delta y_T + [f - y' f_{y'}]_{t=T} \Delta T = 0$$

En esta condición se han omitido los asteriscos por simplicidad. Es importante tomar en cuenta que mientras la ecuación de Euler constituye una condición de primer orden que se debe cumplir para todo el período de tiempo ($t \in [0, T]$), la condición de transversalidad se cumple solamente en el último período ($t = T$). Por otra parte, la condición de transversalidad también es válida cuando la determinación de la condición inicial forma parte del problema de optimización.

2.2 Casos especiales de la condición de transversalidad

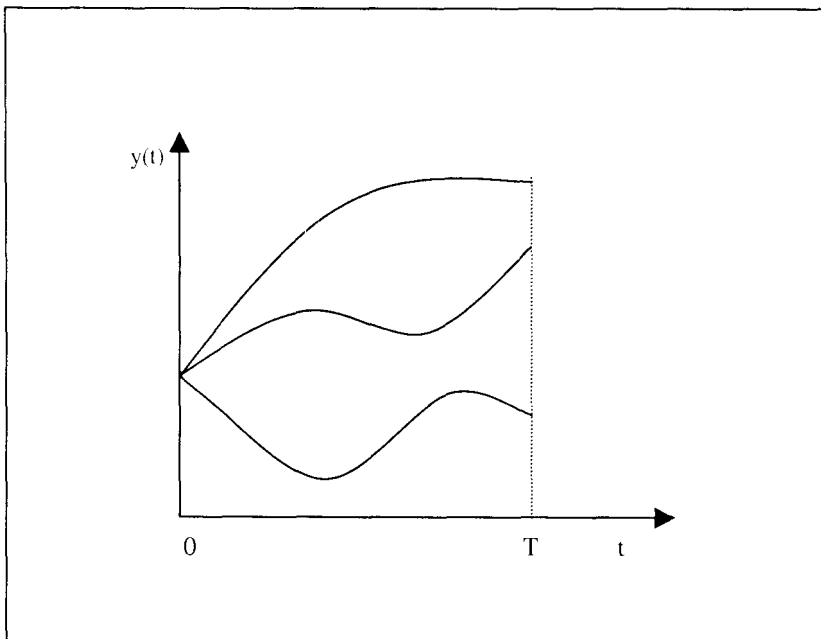
Cuando la condición terminal toma una característica específica, la condición de transversalidad se simplifica y es posible resolver el problema de cálculo de variaciones de una manera más sencilla. A continuación se muestran algunos casos especiales de la condición de transversalidad.

Caso 1.- Horizonte temporal fijo

Cuando el horizonte temporal es fijo, se cumple que $\Delta T = 0$ y desaparece el segundo término de la condición de transversalidad. En vista de que Δy_T puede tomar cualquier valor, la única forma de asegurar que se satisfaga (27) es mediante la condición:

$$\{f_y\}_{t=T} = 0 \quad (39)$$

El problema a resolver se representa en el Gráfico No. 2.6. Debe determinarse simultáneamente la senda óptima y el valor terminal y_T . En este caso, dado que solamente el horizonte de tiempo se encuentra fijo, existe un conjunto amplio de valores terminales factibles. En este sentido, la condición de transversalidad permite discriminar al valor terminal óptimo del conjunto de valores factibles.

Gráfico No. 2.6

Ejemplo.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } V[y] &= \int_0^2 (t^2 + y'^2) dt \\ \text{sujeto a } y(0) &= 4 \\ y(2) &= y_T \quad (y_T \text{ Libre}) \end{aligned}$$

En este caso, la función $f(\bullet)$ depende sólo de t e $y'(t)$, por lo que la ecuación de Euler se reduce a la siguiente condición:

$$f_{y'} = 2y' = H_1$$

Integrando una vez esta ecuación diferencial obtenemos la solución:

$$y^*(t) = \frac{H_1}{2}t + H_2$$

Una constante de la senda óptima se obtiene a través de la condición inicial $y(0) = H_2 = 4$. La otra constante se determina aplicando la condición de transversalidad (39):

$$f_{y'} \Big|_{t=2} = 2y'(2) = H_1 = 0$$

De esta manera, las constantes vienen dadas por $H_1 = 0$ y $H_2 = 4$. Finalmente, la senda óptima sería:

$$y^*(t) = 4$$

Con el valor terminal $y_T = 4$.

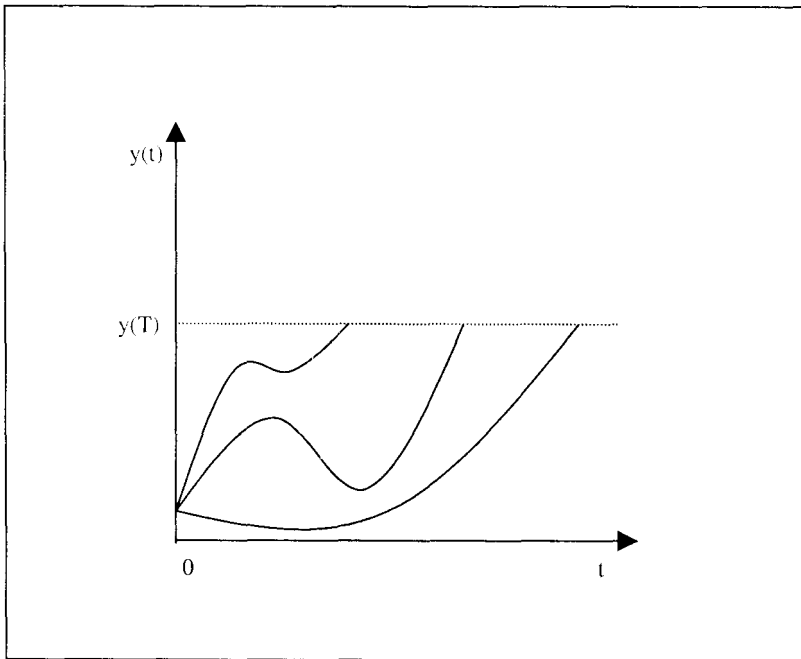
Caso 2.- Valor terminal fijo

Cuando el valor terminal de la trayectoria óptima (y_T) se encuentra fijo, Δy_T es igual a cero y se elimina el primer término de la condición (27). Para que se cumpla la condición de transversalidad, independientemente del valor que tome ΔT :

$$[f - y'f_{y'}]_{t=T} = 0 \quad (40)$$

En el Gráfico No. 2.7 se representa el problema a resolver. A diferencia del caso anterior, deben determinarse la trayectoria óptima y el horizonte temporal óptimo. Como se puede apreciar en el Gráfico, para un valor terminal dado existen diversos horizontes temporales factibles, y la condición de transversalidad permite determinar el valor de "T" óptimo.

Gráfico No. 2.7



Ejemplo.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } V[y] &= \int_0^T (t^2 + y'^2) dt \\ \text{sujeto a } y(0) &= 4 \\ y(T) &= 5 \quad (T \text{ Libre}) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, la ecuación de Euler brinda el siguiente resultado:

$$y^*(t) = \frac{H_1}{2}t + H_2$$

La constante H_2 se obtiene a partir de la condición inicial del problema $y(0) = 4 = H_2$. Para obtener la otra constante es necesario emplear la condición de transversalidad (40):

$$\left[t - y't - y'y' \right]_{t=T} = \left[t^2 + y'^2 - y'(2y'y') \right]_{t=T} = \left[t^2 - y'^2 \right]_{t=T} = 0$$

Evaluando esta expresión en el último período $t = T$, obtenemos la siguiente relación:

$$T^2 - \left(\frac{H_1}{2} \right)^2 = 0$$

$$\frac{H_1}{2} = T$$

En esta ecuación, $(H_1/2)$ puede tomar dos valores $+T$ o $-T$. Sin embargo, como la senda óptima debe ir de un valor inicial igual a cuatro a un valor terminal de 5, necesariamente la pendiente de la función $(H_1/2)$ debe ser positiva, por lo que se debe cumplir que $(H_1/2) = T$. De lo contrario, el problema no tendría solución. Finalmente, para hallar las constantes del problema evaluamos la trayectoria óptima en último período "T", tomando en cuenta que $(H_1/2) = T$:

$$y(T) = \frac{H_1}{2}T + 4 = T(T) + 4 = T^2 + 4 = 5$$

$$T = 1$$

La solución algebraica para la variable T arroja dos soluciones: $T = 1$ y $T = -1$. Dado que el problema con un horizonte temporal negativo no tendría sentido, se toma la solución $T = 1$. La solución al problema quedaría definida por la senda:

$$y^*(t) = t + 4$$

Con el horizonte de tiempo $T = 1$.

Caso 3.- Curva terminal

En este caso, el valor terminal depende del horizonte de tiempo "T" de acuerdo con la siguiente función:

$$y(T) = \Phi(T)$$

Por otra parte, la primera diferencia del valor terminal se relaciona con "T" del siguiente modo:

$$\Delta y(T) = \Phi'(T)\Delta T$$

Si reemplazamos esta relación en la condición de transversalidad (27) y factorizamos la expresión ΔT , obtendríamos:

$$\{f_y\}_{t=T} \Phi'(T)\Delta T + \{f - y f_y\}_{t=T} \Delta T = 0$$

$$[\{f_y\}_{t=T} \Phi'(T) + \{f - y f_y\}_{t=T}] \Delta T = 0$$

Simplificando la ecuación, llegaríamos a la siguiente condición de transversalidad:

$$\{f + (\Phi'(T) - y) f_y\}_{t=T} \Delta T = 0 \quad (41)$$

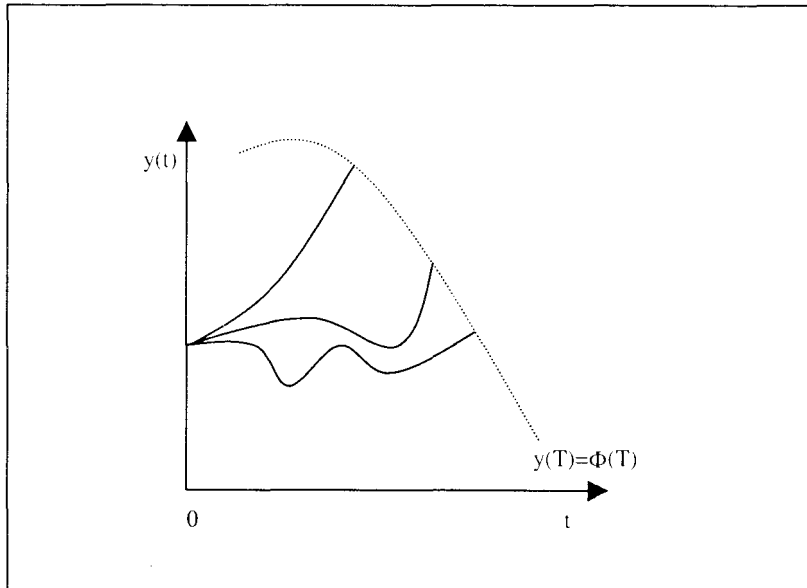
En el Gráfico No. 2.8 se representa el problema a resolver. Como se puede apreciar, la condición terminal está definida por la curva $\Phi(T)$.

Ejemplo.- Halle la senda con menor distancia que pase por el punto (0,1) y la curva $y(t) = 2 - 3t$.

El problema a resolver sería similar al de la sección 1.2 del presente capítulo. Debe determinarse una curva que posea la distancia mínima, pero sujeta a una condición terminal $y(T) = 2 - 3T$. De esta forma, el problema a resolver sería:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad V[y] &= - \int_0^T \sqrt{1 + y'^2} dt \\ \text{sujeto a} \quad y(0) &= 1 \\ y(T) &= 2 - 3T \end{aligned}$$

Gráfico No. 2.8



Como se demostró anteriormente, la senda óptima viene dada por la línea recta:

$$y^*(t) = H_1 t + H_2$$

El intercepto se obtiene evaluando la trayectoria óptima en la condición inicial $y(0) = H_2 = 1$. Para determinar la otra constante de la senda es necesario evaluar la condición de transversalidad (41). Tomando en cuenta la forma funcional de la curva terminal:

$$\Phi(T) = 2 - 3T$$

$$\Phi'(T) = -3$$

Aplicamos la condición de transversalidad:

$$\left[f + (\Phi'(T) - y')f_{y'} \right]_{t=T} = \left[-\sqrt{1 + y'^2} + (-3 - y')(-\sqrt{1 + y'^2})^{-1} \right]_{t=T} = 0$$

Si multiplicamos esta ecuación por $(1 + y'^2)^{-1/2}$ y tras algunas simplificaciones, finalmente, llegaríamos a la siguiente condición:

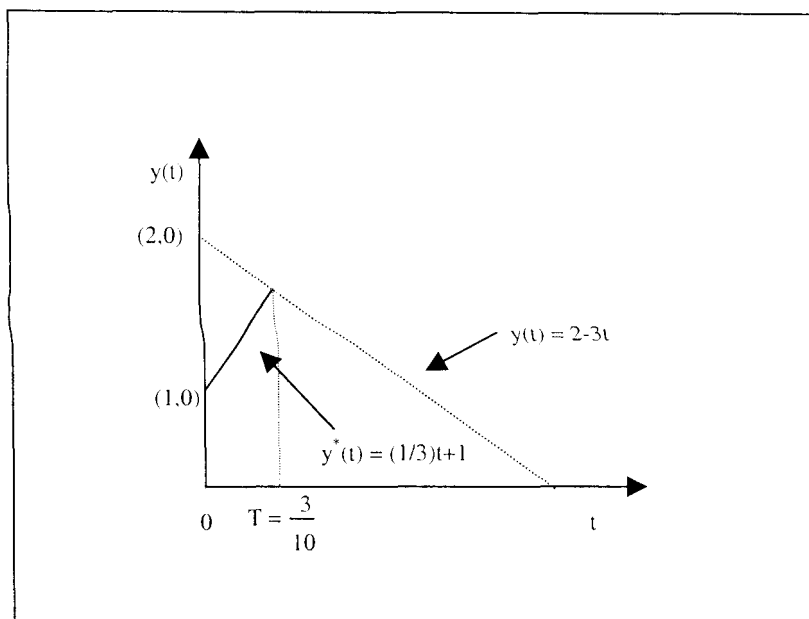
$$[3y']_{t=T} = 1$$

Dado que $y' = H_1$, se cumpliría que $3H_1 = 1$, con lo cual obtendríamos el valor de la pendiente. Finalmente, la senda óptima quedaría definida por:

$$y^*(t) = \frac{t}{3} + 1$$

En el Gráfico No. 2.9 puede observarse que la senda óptima es perpendicular a la condición terminal. Cualquier otra recta que no fuera perpendicular a la curva terminal tiene una mayor distancia.

Gráfico No. 2.9



2.3 Aplicación: minimización de costos¹⁵

Suponga que una firma ha recibido un pedido de “B” unidades de un producto. En la elaboración del producto existen dos tipos de costos. Por un lado se encuentra el costo de producción, que constituye una función cuadrática de la cantidad producida:

$$C_1(q) = aq^2 \quad (a > 0)$$

Adicionalmente existe un costo de almacenaje. El costo unitario de mantener una cantidad inventarios ($y(t)$) en el período “t” es constante e igual a “b”. De esta forma, el costo por concepto de almacenamiento es igual a:

$$C_2(y(t)) = by(t) \quad (b > 0)$$

El objetivo de la firma es determinar la evolución de la producción e inventarios que determine el menor costo total, y el período de producción “T” óptimo.

En primer lugar, es necesario plantear el problema de optimización en función de una sola variable. Si consideramos que los inventarios se incrementan en el tiempo debido al aumento de la producción, se cumple que $q = y'(t)$. Por consiguiente, los costos totales de la firma quedarían definidos del siguiente modo:

$$C = C_1 + C_2 = ay'^2 + by$$

De esta forma, la firma debería resolver el siguiente problema de optimización dinámica:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = - \int_0^T (ay'^2 + by) dt \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = 0 \\ & y(T) = B \quad (T \text{ Libre}) \end{aligned}$$

15. Esta aplicación se basa en Kamien, Morton I. y Nancy L. Schwartz. *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. 2a. edición, Amsterdam: North-Holland, 1991. pp. 5 y 6.

Para determinar la trayectoria óptima de la producción y los inventarios, debemos obtener las derivadas que conforman la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned}f_y &= -b \\f_{y'} &= -2ay' \\ \frac{d}{dt} f_{y'} &= -2ay''\end{aligned}$$

Reemplazando las derivadas en la ecuación de Euler obtendríamos la siguiente ecuación diferencial:

$$2ay'' - b = 0$$

Integrando dos veces dicha ecuación, llegamos a la siguiente solución:

$$y^*(t) = \frac{b}{4a}t^2 + H_1t + H_2$$

Para hallar una de las constantes de la senda óptima, evaluamos la función en la condición inicial $y(0) = H_2 = 0$. La otra constante puede hallarse a través de la condición de transversalidad (40):

$$\left[f - y'f_{y'} \right]_{t=T} = \left[-(ay'^2 + by) - y'(-2ay') \right]_{t=T} = \left[ay'^2 - by \right]_{t=T} = 0$$

Reemplazando la trayectoria óptima en la condición anterior obtendríamos:

$$\left[a \left(\frac{b}{2a}t + H_1 \right)^2 - b \left(\frac{b}{4a}t^2 + H_1t + H_2 \right) \right]_{t=T} = 0$$

Simplificando la ecuación anterior se obtiene que $H_1 = 0$, por lo que la senda óptima sería:

$$y^*(t) = \frac{b}{4a}t^2$$

El horizonte de tiempo "T" se halla evaluando $y^*(t)$ en la condición final $y(T) = B$, de este modo:

$$y'(T) = \frac{b}{4a} T^2 = B$$

$$T = 2 \sqrt{\frac{Ba}{b}}$$

En la realidad, la variable “T” tiene dos soluciones; sin embargo, al ser uno de los valores negativo, se descarta dicha solución. Como se puede apreciar, el horizonte de tiempo depende de todos los parámetros del problema. Cuando se incrementa el pedido de producción “B” o el coeficiente de la función de costos “a”, la estrategia óptima sería incrementar el período de producción para incurrir en menores costos. Por otro lado, cuando se incrementa el costo de almacenaje, resulta conveniente cumplir con el pedido en un menor tiempo.

A continuación se desarrollarán las condiciones de suficiencia del cálculo de variaciones, las cuales permiten determinar si la senda óptima hallada maximiza o minimiza el funcional objetivo $V[y]$.

3. Condición de segundo orden

En los problemas de optimización estática, además de la condición de primer orden, es necesario contar con una condición de suficiencia que determine si el punto estacionario hallado determina un valor mínimo o máximo de la función objetivo¹⁶. Para ello se evalúa la concavidad o convexidad de la función objetivo. En el cálculo de variaciones ocurre lo mismo. Es necesario evaluar la concavidad de la función intermedia $f(t, y, y')$, para definir si la senda hallada resuelve un problema de maximización o minimización.

3.1 Condición de segundo orden

Si la función $f(t, y, y')$ es cóncava (convexa) respecto a (y, y') entonces:

- a) La ecuación de Euler es suficiente para la maximización (minimización) de $V[y]$, cuando la condición terminal (T, y_T) es fija.
- b) La ecuación de Euler junto con la condición de transversalidad son suficientes para la maximización (minimización), cuando la condición terminal (T, y_T) es libre.

¹⁶ Puede haber dos puntos que pueden no cumplir necesariamente la condición de suficiencia, pero aun así son óptimos.

Demostración

Dada la senda óptima $y^*(t)$, una senda factible $y(t)$, el horizonte temporal fijo "T", y el valor terminal fijo "y_T", una función intermedia $f(\bullet)$ cóncava cumple con la siguiente relación¹⁷:

$$f(t, y, y') - f(t, y^*, y'^*) \leq f_y(t, y^*, y'^*)(y - y^*) + f_{y'}(t, y^*, y'^*)(y' - y'^*) \quad (42)$$

Considerando que la senda factible se encuentra definida según (8), entonces (42) se reduciría a la siguiente expresión:

$$f(t, y, y') - f(t, y^*, y'^*) \leq f_y(t, y^*, y'^*)\varepsilon x(t) + f_{y'}(t, y^*, y'^*)\varepsilon x'(t) \quad (43)$$

Al integrar ambos lados de la desigualdad entre el período $t = 0$ y $t = T$ se obtiene:

$$V[y] - V[y^*] \leq \varepsilon \int_0^T [f_y(t, y^*, y'^*)x(t) + f_{y'}(t, y^*, y'^*)x'(t)] dt \quad (44)$$

Al ser $y^*(t)$ la trayectoria óptima, se satisface tanto la ecuación de Euler como la condición (11), de tal forma que el lado derecho de la desigualdad es igual a cero:

$$V[y] \leq V[y^*] \quad (45)$$

De esta manera, al ser $f(\bullet)$ cóncava, se asegura que la senda óptima y^* genera el máximo valor posible del funcional objetivo $V[y^*]$. Si la función $f(\bullet)$ fuera estrictamente cóncava, las desigualdades (42) a (45) se cumplirían estrictamente y la senda óptima hallada daría como resultado un único máximo absoluto del funcional objetivo. El lector puede demostrar que cuando el valor terminal de la senda óptima es libre, se llega a un resultado similar a (45)¹⁸. En este último caso, cuando la función intermedia es cóncava, tanto la ecuación de Euler como la condición de transversalidad son condiciones suficientes para la maximización del funcional objetivo.

17. Ver el Anexo B al final del capítulo.

18. Es necesario emplear la condición (33) para establecer la equivalencia en los resultados.

3.2 Condiciones de concavidad

Básicamente existen dos formas de evaluar la concavidad de la función $f(\bullet)$. Una de ellas es evaluando los menores principales de la matriz Hessiana de la función intermedia, para determinar si es definida negativa o positiva. El otro método consiste en hallar las raíces características de la matriz Hessiana. A continuación se detallan ambos procedimientos.

Método de los menores principales

Dada una función $f(t, y, y')$, la matriz Hessiana Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} f_{y'y'} & f_{yy'} \\ f_{y'y} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

y sus menores principales Δ_1 y Δ_2 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} f_{y'y'} \end{vmatrix} = f_{y'y'}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{y'y'} & f_{yy'} \\ f_{y'y} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{y'y'}f_{yy} - f_{yy'}f_{y'y}$$

La función $f(t, y, y')$ es cóncava si la matriz Δ es semidefinida negativa ($\Delta_1 \leq 0$ y $\Delta_2 = 0$), y estrictamente cóncava si es definida negativa ($\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$). Por otro lado, la función es convexa si Δ es semidefinida positiva ($\Delta_1 \geq 0$ y $\Delta_2 = 0$), y estrictamente convexa si es definida positiva ($\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$).

Ejemplo.- Evalúe la condición de segundo orden del problema desarrollado en la sección 1.3 de este capítulo.

En el problema de extracción óptima de recursos naturales, la función $f(t, y, y')$ está definida por:

$$f(t, y, y') = Ln(y')$$

La matriz Δ de la función de beneficios sería:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y'^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y sus menores principales Δ_1 y Δ_2 :

$$\Delta_1 = \left| -\frac{1}{y'^2} \right| = -\frac{1}{y'^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{y'^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los menores principales cumplen con la condición $\Delta_1 \leq 0$ y $\Delta_2 = 0$, por lo tanto, la función de beneficios es cóncava. De esta forma se cumple la condición de suficiencia, y se comprueba que la Ecuación de Euler resuelve el problema de maximización del funcional objetivo.

Método de las raíces características

Dada una función $f(t, y, y')$, la ecuación característica $p(r)$ cuyas raíces son r_1 y r_2 :

$$p(r) = \begin{vmatrix} f_{yy'} - r & f_{yy'} \\ f_{yy'} & f_{yy} - r \end{vmatrix} = (f_{yy'} - r)(f_{yy} - r) - f_{yy'}f_{yy'} = 0$$

La función $f(t, y, y')$ es cóncava si $r_1 \leq 0$ y $r_2 \leq 0$, y estrictamente cóncava si $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$. Asimismo, la función $f(t, y, y')$ es convexa si $r_1 \geq 0$ y $r_2 \geq 0$, y estrictamente convexa si $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$.

Ejemplo.- Evalúe la condición de segundo orden del problema desarrollado en la sección 2.3.

En este problema, $f(t, y, y')$ está definido del siguiente modo:

$$f(t, y, y') = ay'^2 + by$$

A partir de la función de costos se plantea la ecuación característica $p(r)$:

$$p(r) = \begin{vmatrix} 2a - r & 0 \\ 0 & -r \end{vmatrix} = -r(2a - r) = 0$$

Las raíces características $r_1 = 2a$ y $r_2 = 0$ satisfacen la condición $r_1 \geq 0$ y $r_2 \geq 0$; por lo tanto, la función es convexa. El problema cumple con la condición de segundo orden; y de esta forma, la ecuación de Euler y la condición de transversalidad resuelven el problema de minimización del funcional objetivo. En la sección 2.3 se multiplicó por (-1) la función objetivo y el problema de minimización se convirtió en uno de maximización. Si bien dicho artificio altera la condición de segundo orden, no ocurre lo mismo con el resultado del problema.

4. Horizonte de tiempo infinito

En esta sección se desarrollará un problema más general de cálculo de variaciones, tomando en cuenta un horizonte de tiempo infinito, y un valor terminal libre de la senda $y(t)$. En este sentido, el problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V[y] = \int_0^{\infty} f(t, y(t), y'(t)) dt & (46) \\ \text{suje}to \text{ a} \quad & y(0) = y_0 \text{ (} y_0 \text{ dado)} \end{aligned}$$

El supuesto de un horizonte temporal infinito es razonable cuando se considera el caso de agentes que enfrentan decisiones de muy largo plazo. Por ejemplo, podemos pensar una situación en la cual una compañía planea invertir en un proyecto de gran escala, y para recuperar el capital invertido necesita un amplio período de operaciones. De esta forma, la empresa puede ejecutar el proyecto teniendo en cuenta un horizonte temporal infinito. También podría pensarse en el caso de una familia que desee maximizar sus utilidades futuras descontadas¹⁹. Si consideramos que esta familia valora el bienestar de las generaciones futuras, tomaría sus decisiones de consumo, ahorro o inversión con un horizonte temporal infinito, de tal forma que efectivamente asegure un nivel determinado de bienestar para sus descendientes. En algunos casos es más realista un período de tiempo infinito, no obstante, ello podría implicar que la integral del funcional objetivo no converja, y por ende, que no exista una única solución al problema. A continuación se explicarán algunas condiciones bajo las cuales se asegura la convergencia en el problema (46).

19. Considerando una función de utilidad similar a la presentada en la ecuación (5) del primer capítulo.

4.1 Condiciones para la convergencia del funcional objetivo

La dificultad para resolver (46) radica en que la integral del funcional objetivo es impropia, y podría tomar un valor infinito:

$$\int_0^{\infty} f(t, y, y') dt \rightarrow \infty \quad (47)$$

Aparentemente, una condición que podría superar este problema es que la función $f(\bullet)$ converja a cero cuando el tiempo tiende a infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, y, y') = 0 \quad (48)$$

Sin embargo, la condición (48) no garantiza una solución. Veamos porqué mediante un ejemplo. Considere la siguiente función que depende del tiempo: $f(t) = 1/t$. Claramente se puede apreciar que esta función en el infinito tiende a cero:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0$$

Sin embargo, al evaluar la integral impropia de la función, obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} [Ln(t)]_0^b \rightarrow \infty$$

De esta forma podemos apreciar que la condición (48) no implica la existencia de una solución al problema. A continuación se plantean dos condiciones suficientes que aseguran la convergencia del funcional objetivo.

Condición 1

Dada la integral impropia de la función objetivo $V[y]$, si la función $f(\bullet)$ posee un valor finito hasta el período de tiempo "T", y posteriormente toma un valor igual a cero y se mantiene constante, entonces la integral converge.

Demostración

La integral impropia de la función objetivo puede descomponerse en la suma de dos integrales:

$$\int_0^{\infty} f(t, y, y') dt = \int_0^T f(t, y, y') dt + \int_T^{\infty} f(t, y, y') dt \quad (49)$$

Si consideramos que la función $f(\bullet)$ es igual a cero a partir del período "T", entonces la segunda integral sería igual a cero, con lo cual la integral impropia se reduciría a una propia:

$$\int_0^{\infty} f(t, y, y') dt = \int_0^T f(t, y, y') dt \quad (50)$$

De esta forma, se asegura la convergencia de la integral.

Condición 2

Si la función $f(\bullet)$ es descontada a través del factor $e^{-\rho t}$ (donde $\rho > 0$), y posee en todo el horizonte de tiempo un valor menor o igual a "M" ($M < \infty$), entonces la integral converge.

Demostración

La función $f(\bullet)$ tiene una cota superior igual a "M", por tanto se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(t, y, y') e^{-\rho t} \leq M e^{-\rho t} \quad (51)$$

Si integramos ambos lados de la desigualdad obtenemos la expresión:

$$\int_0^{\infty} f(t, y, y') e^{-\rho t} dt \leq \int_0^{\infty} M e^{-\rho t} dt \quad (52)$$

Al desarrollar la integral del lado derecho de la desigualdad, se llega a la siguiente condición:

$$\int_0^{\infty} f(t, y, y') e^{-\rho t} dt \leq \frac{M}{\rho} \quad (53)$$

De esta forma se asegura que la integral no exceda el límite superior (M/ρ) y, por lo tanto, que exista una convergencia.

4.2 Condiciones de primer y segundo orden

Cuando el horizonte de tiempo es infinito, la ecuación de Euler y la condición de segundo orden siguen siendo válidas para la resolución del problema de cálculo de variaciones. Sin embargo, la condición de transversalidad se modifica ligeramente. En lugar de evaluar la expresión (27), es necesario emplear la siguiente condición:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (f - y'f_{y'}|_{t=T} \Delta T + f_{y'}|_{t=T} \Delta y_T) \quad (54)$$

Como el horizonte "T" es infinito, la expresión ΔT es distinta de cero; por tanto, debe cumplirse la condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f - y'f_{y'}) = 0 \quad (55)$$

Si el valor terminal de la senda óptima no estuviera especificado, al igual que en el problema (46), adicionalmente debe cumplirse:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{y'} = 0 \quad (56)$$

Por el contrario, cuando se especifica un valor terminal de la senda $y(t)$, también denominado **meta asintótica**, en lugar de la condición (56) puede emplearse la siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\infty} \quad (57)$$

Donde y_∞ constituye un número real. A continuación analizaremos un ejemplo para el caso de horizonte temporal infinito.

Ejemplo.- Halle la senda óptima en el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & V[y] = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (y^2 + ay + by' + cy'^2) dt \\ \text{sujeto a} \quad & y(0) = d \quad (a, b, c, d, \rho > 0) \end{aligned}$$

Para resolver este problema debemos aplicar los tres conceptos desarrollados a lo largo del capítulo: la ecuación de Euler, la condición de transversalidad y la condición de suficiencia.

En este caso, al existir un factor de descuento, la ecuación de Euler relevante es la (18). Las derivadas que conforman la ecuación de Euler son:

$$\begin{aligned} f_y &= 2y + a \\ f_{y'} &= 2cy' + b \\ \frac{d}{dt} f_{y'} &= 2cy'' \end{aligned}$$

Reemplazando estas derivadas en la ecuación (18) obtendríamos una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\begin{aligned} 2y + a &= 2cy'' - \rho(2cy' + b) \\ y'' - \rho y' - \frac{1}{c}y &= \left(\frac{a + \rho b}{2c} \right) \end{aligned}$$

La ecuación característica del problema es la siguiente:

$$r^2 - \rho r - \frac{1}{c} = 0$$

cuyas raíces r_1 y r_2 son iguales a:

$$r_1, r_2 = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{2} \right)^2 + \frac{1}{c}}$$

Nótese que el término de la raíz cuadrada, en valor absoluto, posee un valor superior a $(\rho/2)$; por lo tanto, una de las raíces es positiva y mayor que ρ ($r_1 > \rho > 0$) y la otra es negativa ($r_2 < 0$). Por otra parte, la integral particular sería la siguiente:

$$k = -\left(\frac{a + \rho b}{2}\right)$$

Dado que los parámetros a , b y ρ son positivos, la integral particular es negativa ($k < 0$). Finalmente, la solución general al problema vendría dada por:

$$y^*(t) = H_1 e^{r_1 t} + H_2 e^{r_2 t} - \left(\frac{a + \rho b}{2}\right)$$

Las constantes del problema, H_1 y H_2 , pueden obtenerse a partir de las condiciones (55) y (56), y de la condición inicial $y(0) = d$. La condición (56) aplicada a este problema sería igual a²⁰:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-\rho t} (2cy' + b)] = 0$$

Reemplazando la senda óptima $y^*(t)$ en la condición de transversalidad, obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [2cr_1 H_1 e^{(r_1 - \rho)t} + 2cr_2 H_2 e^{(r_2 - \rho)t} + b e^{-\rho t}] = 0$$

En esta condición existen tres términos exponenciales. Los dos últimos términos convergen a cero, puesto que los exponentes $(r_2 - \rho)$ y $(-\rho)$ son negativos; sin embargo, el exponente del primer término $(r_1 - \rho)$ es positivo, con lo cual dicha expresión podría divergir conforme el tiempo tienda a infinito. Para que ello no suceda, la constante H_1 debe ser igual a cero, con lo cual se cumpliría la condición (56). El lector puede comprobar fácilmente que al evaluar la

20. En este caso, al aplicar la condición de transversalidad se considera como una sola función a $f(\bullet)$, multiplicado por el factor de descuento $e^{\rho t}$.

condición (55) se llega al mismo resultado ($H_1 = 0$). Para hallar la otra constante H_2 , evaluamos la senda óptima en la condición inicial $y(0) = H_2 - (a + \rho b/2) = d$, con lo cual la solución final sería:

$$y^*(t) = \left(d + \frac{a + \rho b}{2} \right) e^{r_2 \cdot t} - \frac{a + \rho b}{2}$$

La condición de segundo orden del problema se verifica evaluando la matriz Hessiana de la función intermedia $f(\bullet)$:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2e^{-\rho t} & 0 \\ 0 & 2ce^{-\rho t} \end{bmatrix}$$

Dado que los menores principales de la matriz son ambos positivos, la matriz es definida positiva y, por lo tanto, la función intermedia es convexa. En este sentido se cumple la condición de segundo orden y se asegura que la senda óptima minimiza el funcional $V[y]$.

4.3 Diagrama de fase

En todos los ejemplos desarrollados hasta el momento, se han hallado soluciones cuantitativas al problema de cálculo de variaciones con horizonte infinito. Es decir, a través de la ecuación de Euler se ha obtenido la forma funcional de la trayectoria óptima. Sin embargo, en algunos casos, la ecuación de Euler arroja una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, a partir de la cual no es posible derivar la senda óptima de manera analítica. En estas situaciones resulta conveniente emplear un **diagrama de fase**, a partir del cual es posible determinar la dinámica de las variables analizadas y el punto de equilibrio hacia el cual convergen en el infinito, también conocido como **estado estacionario**. A continuación se explicará la técnica del diagrama de fase.

4.3.1 Diagramas de fase de una variable

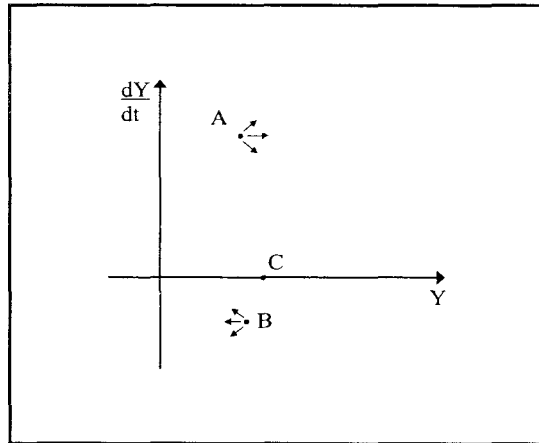
El paso inicial para la elaboración de un diagrama de fase de este tipo es conocer una relación entre la variable y su tasa de cambio con respecto al tiempo, mediante cualquier ecuación diferencial autónoma²¹:

$$dY/dt = Y' = f(Y)$$

21. Llamamos *autónoma* a una ecuación diferencial, cuando el tiempo no aparece en forma explícita como argumento de la función $dY/dt = f(Y)$.

La función $f(Y)$ puede presentar cualquier forma (lineal o no lineal); además, es posible graficarla en un plano cartesiano con ejes dY/dt e Y . La representación gráfica de $f(Y)$ es denominada **curva de fase**. Para entender el mecanismo del diagrama de fase debemos conocer la dinámica de los diversos puntos implicados en el mencionado plano cartesiano. Para tal fin, consideremos el Gráfico No. 2.10.

Gráfico No. 2.10



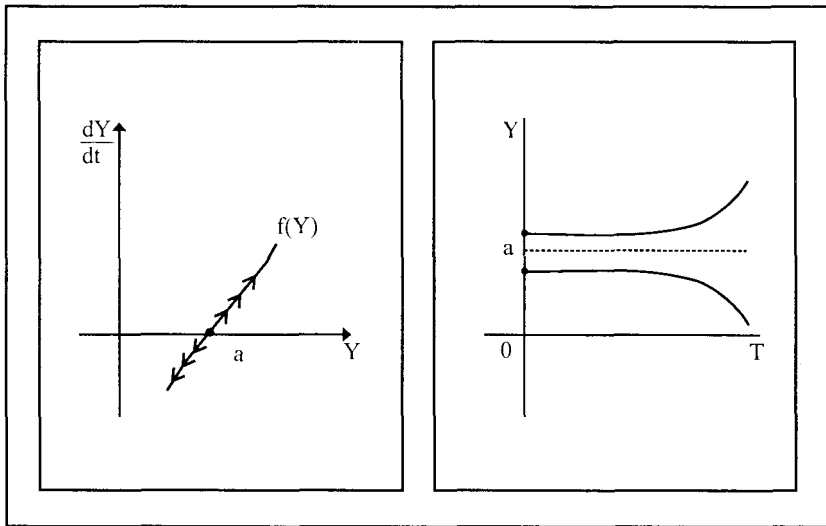
La posición del punto A hará que éste tienda a moverse de izquierda a derecha, es decir, en la dirección en la que Y crece. Esto se debe a que está ubicado en el cuadrante donde $dY/dt > 0$; el signo positivo de esta derivada implica que conforme pasa el tiempo, la variable (representada por el eje de abscisas) aumenta, dando así la explicación al movimiento del punto. El punto B se comporta de manera contraria a A, ya que en ese cuadrante $dY/dt < 0$ e Y decrecerá ante un incremento en la variable temporal, por lo que se describe un movimiento de derecha a izquierda. El último caso involucra al punto C. Nótese que éste se encuentra sobre el eje horizontal, donde $dY/dt = 0$. Este punto representa lo que se conoce como un estado estacionario ($t \rightarrow \infty$) porque no describe movimiento alguno. De esto podemos concluir que estamos frente a un posible punto de equilibrio²², cuando la variable adquiere un estado estático ($Y' = 0$).

22. Posteriormente veremos que la condición $dY/dt = 0$ no involucra necesariamente un punto de equilibrio. Tal es el caso mostrado en el Gráfico No. 2.13.

Luego de comprender la dinámica que toma una variable ante los distintos comportamientos de sus cambios con respecto al tiempo, podemos distinguir, de manera cualitativa, tres tipos de trayectorias mostrados en los Gráficos Nos. 2.11, 2.12 y 2.13.

En el primer caso, el punto "a" es un *equilibrio dinámicamente inestable*, por lo que puede concluirse que la trayectoria Y diverge. Resulta interesante dar cierto énfasis a las condiciones iniciales de esta trayectoria: si empezamos en el equilibrio, es decir $Y_{(0)} = a$, la dinámica hará que nos alejemos, cada vez más, con el paso del tiempo y que no sea factible "retornar" a este equilibrio; si $Y_{(0)} > a$, tendremos una función creciente en todo momento y, por el contrario, si $Y_{(0)} < a$, la función será decreciente.

Gráfico No. 2.11



Por otro lado, el punto "b" en el segundo caso representa a un *equilibrio dinámicamente estable*. En tal caso, si $Y_{(0)} = b$, la dinámica hará que siempre se mantenga este punto; si $Y_{(0)} \neq b$, se dará un desplazamiento a lo largo de la curva de fase que nos llevará, finalmente, al equilibrio.

Gráfico No. 2.12

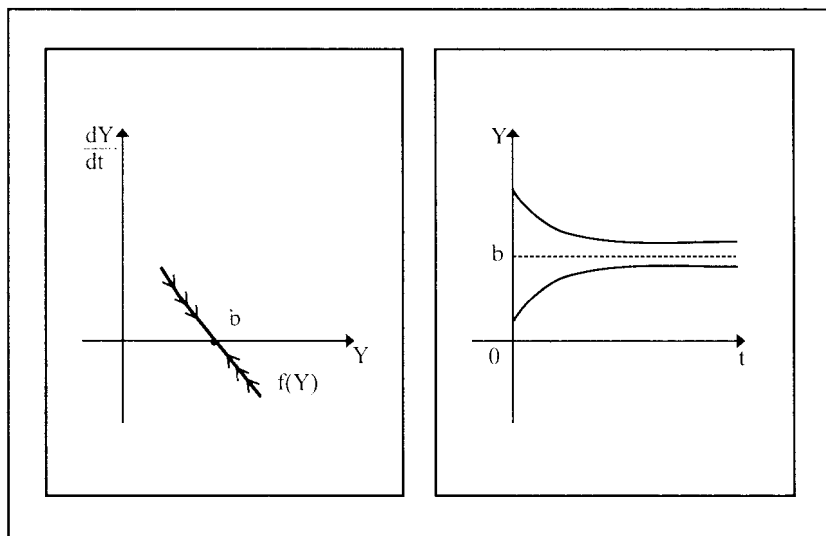
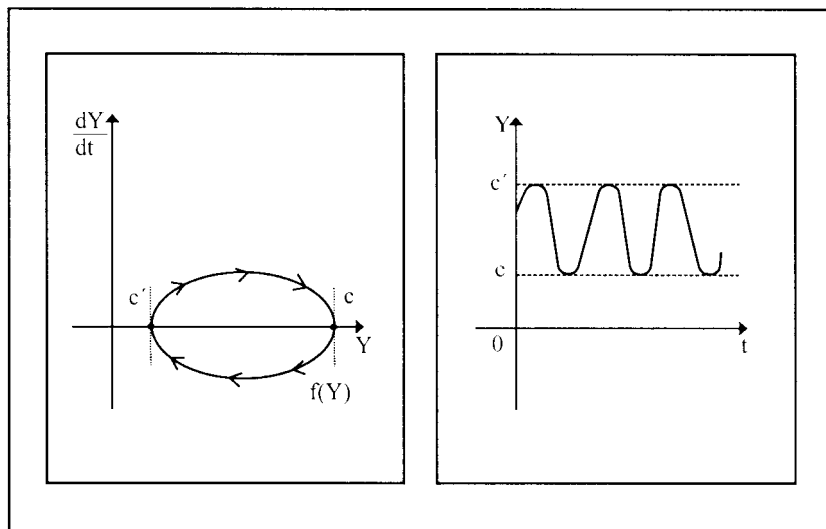


Gráfico No. 2.13



De los dos casos anteriores podemos obtener una conclusión importante, que involucra a la pendiente de la curva de fase: si ésta es negativa ($dY'/dY < 0$), aseguramos la estabilidad dinámica de la variable; si es positiva ($dY'/dY > 0$), tratamos con inestabilidad dinámica²³.

El último caso presenta dos puntos en $Y' = 0$. Éstos no representan puntos de equilibrio, ya que son las cotas de una trayectoria *fluctuante*. Este tipo de movimiento se debe a que nos podemos situar tanto en la zona donde $Y' > 0$ como en la que $Y' < 0$. Además podemos apreciar que dY'/dY es indeterminada, hecho que descarta a c y a c' de ser puntos de equilibrio.

4.3.2 Diagramas de fase de dos variables

Hasta el momento hemos resaltado que es posible evaluar cualitativamente cualquier variable dinámica mediante la elaboración de un diagrama de fase. Del mismo modo, podemos analizar sistemas de ecuaciones diferenciales. A continuación trataremos el enfoque gráfico-cualitativo de un sistema de primer orden y *autónomo*, definido como:

$$\begin{aligned} X'(t) &= dX/dt = f(X, Y) \\ Y'(t) &= dY/dt = g(X, Y) \end{aligned}$$

Recordemos que al resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, las trayectorias de las variables involucradas se caracterizan por mostrar las mismas raíces. De esta manera, si una variable converge (o diverge) en el largo plazo a su solución particular, la otra también lo hará, por lo que el análisis puede resumirse de manera integral a la convergencia (divergencia) del sistema.

Como en el caso de una sola variable, el diagrama de fase de dos variables es realizado sobre un plano cartesiano donde los ejes están dados por las variables dinámicas, mas no por sus tasas de cambio (X e Y , no X' e Y'). En los Gráficos No. 2.11 y 2.12, los equilibrios están dados por puntos que hacen que $Y' = 0$; al incrementar el número de variables, el equilibrio del sistema

23. Esto puede comprobarse fácilmente con una ecuación diferencial lineal, de primer orden y con término constante $Y' + aY = b$, donde la trayectoria final está dada por $Y_{(t)} = \left[Y_{(0)} - \frac{b}{a} \right] e^{-at} + \frac{b}{a}$. Cuando $t \rightarrow \infty$ (largo plazo), ésta converge si $-a < 0$ y diverge en el caso contrario, $-a > 0$. Si consideramos que $dY'/dY = -a$, llegaremos a los mismos resultados.

está dado, por ende, cuando *ambas* variables alcanzan sus respectivos estados estacionarios. Esta situación puede ser graficada: los estados estacionarios de las variables generan las *curvas de fase* ($X' = 0$ e $Y' = 0$) y la intersección de ambas, el punto de equilibrio intertemporal del sistema (las curvas de fase, representadas por $f(X, Y) = 0$ y $g(X, Y) = 0$, nos proporcionan relaciones entre las variables (involucradas en los ejes) que podemos graficar sin mayor complicación²⁴).

Al cruzarse las curvas de demarcación o de fase en el punto de equilibrio ($X' = Y' = 0$), el espacio de fases se divide en cuatro regiones distintas. Fuera del equilibrio, alguna variable o ambas reportan cambios con el tiempo en las direcciones que indiquen las derivadas temporales²⁵ (parciales) $\partial X'/\partial X$, $\partial Y'/\partial Y$ o bien, como manera alternativa, las derivadas cruzadas $\partial X'/\partial Y$, $\partial Y'/\partial X$. Estos movimientos generan las *trayectorias de fase* o *sendas de fase* del diagrama²⁶ (que pueden ser graficadas) y las combinaciones de ellas generan diversos tipos de equilibrios: nodos, puntos de silla, focos y vórtices. Cabe resaltar que, según su forma funcional, las curvas de fase pueden determinar más de un punto de equilibrio; cada uno de ellos tendrá, consecuentemente, las mencionadas cuatro regiones y pueden corresponder a distintas categorías²⁷.

Para explicar la elaboración del diagrama de fase de dos variables, así como la naturaleza de los equilibrios, consideremos el siguiente ejemplo, del cual desprendemos seis casos particulares²⁸ ilustrados en el Gráfico No. 2.14.

24. De la misma forma que el diagrama de fase de una variable, para atribuir aspectos cualitativos a un sistema de ecuaciones diferenciales, no necesitamos más que un esbozo o una aproximación gráfica. Por ello, es importante recordar la regla de la derivada de una función implícita (las curvas de fase toman esta forma: $f(\bullet)=0$):

$$dY/dX = - (\partial f(\bullet)/\partial X) / (\partial f(\bullet)/\partial Y) = - f_x / f_y$$

25. La interpretación de las derivadas temporales es conocida: la variación de la tasa de cambio de una variable (Z' o Y') ante una variación en la misma variable (Z o Y).

26. Estas trayectorias pueden desplazarse de una región a otra sin mayor complicación, y así adoptar diversos movimientos.

27. El análisis de estos casos es esencialmente el mismo que el explicado en esta sección.

28. Existe una mayor cantidad de casos que el lector puede desarrollar y evaluar por su cuenta.

Definimos un sistema diferencial **lineal**: $Z' = f(Y, Z) = aZ + bY + h$
 $Y' = g(Y, Z) = cZ + dY + k$

Las curvas de fase son representadas por dos rectas, con pendientes $-b/a$ para $Z' = 0$ y $-d/c$ para $Y' = 0$:

$$Z' = 0 \rightarrow aZ + bY + h = 0 \rightarrow Z = -b/aY - h/a$$

$$Y' = 0 \rightarrow cZ + dY + k = 0 \rightarrow Z = -d/cY - k/c$$

Además, $\partial Z'/\partial Z = f_Z = a$ $\partial Y'/\partial Y = g_Y = d$

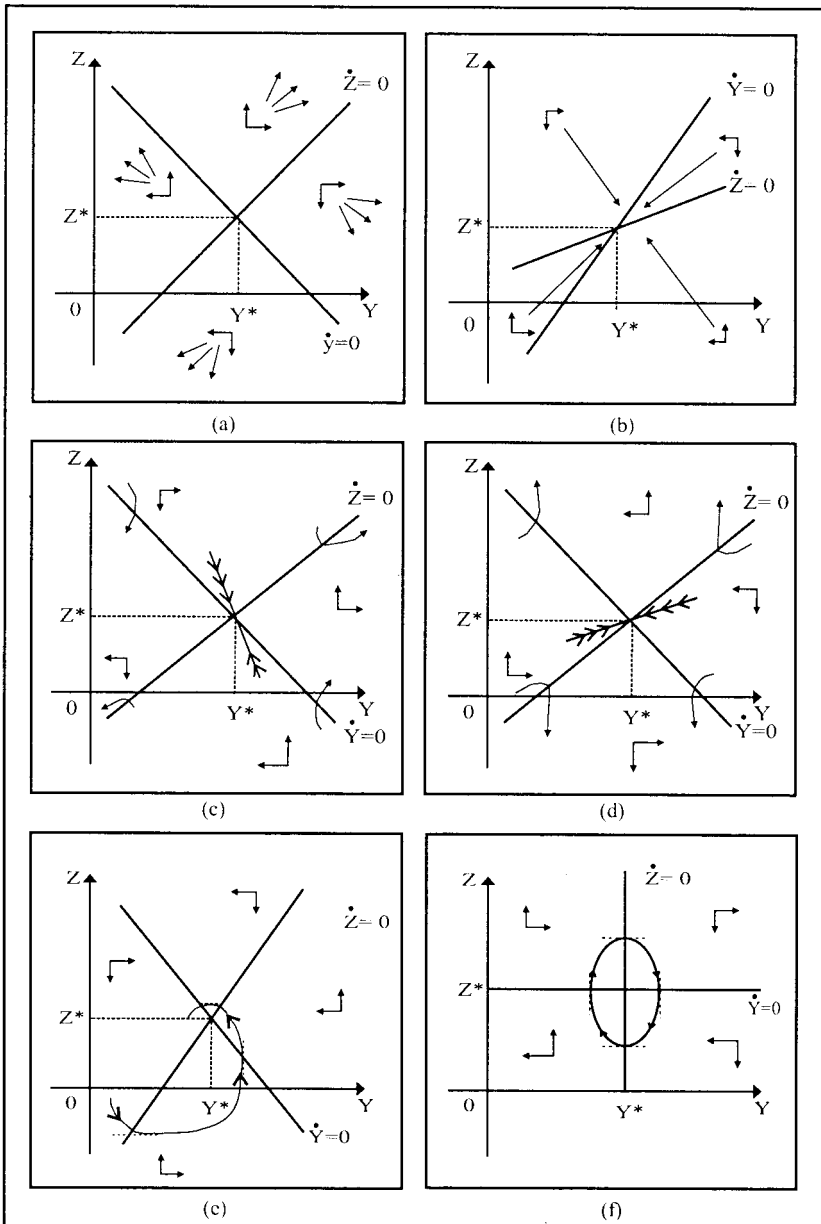
Una vez determinadas las curvas de demarcación, las graficamos en un plano YZ y determinamos el equilibrio: $(Y^*, Z^*) = [(hc - ak)/(ad - bc), (bk - hd)/(ad - bc)]$.

Caso (a): $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

De estas condiciones, vemos que $Z' = 0$ constituye una recta de pendiente positiva mientras que $Y' = 0$, de pendiente negativa. Examinemos cuidadosamente el origen de la dinámica en el Gráfico No. 2.14 (a). Al ser $\partial Z'/\partial Z = a > 0$, apreciamos que conforme aumenta Z (zona superior a la curva de fase $Z' = 0$) su variación con el tiempo también lo hace; por ello, trazamos dos flechas (una en cada región involucrada) de abajo hacia arriba. Análogamente, dibujamos un par de flechas en dirección opuesta (de arriba hacia abajo) en las dos regiones restantes, ya que en ellas Z' disminuye, por lo que Z también lo hará. Este movimiento vertical se debe exclusivamente a que la variable Z representa al eje de las ordenadas.

Centrémonos ahora en movimientos horizontales. Tenemos que $\partial Y'/\partial Y = d > 0$, por lo que al ser positiva la variación temporal de Y (zona superior a $Y' = 0$), Y aumentará, lo que describe movimientos de izquierda a derecha en las regiones correspondientes. En las regiones restantes, por simetría, los movimientos serán contrarios. De esta forma, hemos determinado el comportamiento que adoptará cada variable en cada zona de fase y, de esa forma, las trayectorias. Un simple vistazo al Gráfico No. 2.14 (a) nos sugiere que el punto de equilibrio es inestable. Efectivamente, se trata de un nodo inestable.

Gráfico No. 2.14



Caso (b): $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

En este caso, las pendientes de ambas curvas son positivas. Además suponemos que $-b/a > -d/c$, hecho que hace que $Y' = 0$ sea más inclinada que $Z' = 0$.

Tenemos que $\partial Z'/\partial Z < 0$ y $\partial Y'/\partial Y < 0$, por lo que encontramos relaciones inversas entre las variables y sus tasas de cambio: al ser positiva Y' (zona inferior de $Y' = 0$), Y disminuirá y al ser Z' positiva (zona inferior de $Z' = 0$), Z también se verá reducida. Podemos percatarnos que tratamos con un equilibrio estable (Gráfico No. 2.14 (b)), ya que todas las posibles trayectorias tienden a éste (gráficamente, las flechas "señalan" al punto de intersección). Formalmente, en este caso se presenta un nodo estable.

Tanto en el caso (a) como en el (b), hemos catalogado a los equilibrios como nodos. Un *nodo* es un equilibrio tal que las posibles trayectorias fluyen de manera directa hacia él (estable, Gráfico No. 2.14 (b)) o hacia fuera de él (Gráfico No. 2.14 (a)).

Caso (c): $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$ (queda de tarea para el lector)**Caso (d): $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$**

En estos dos casos (Gráfico No. 2.14 (c) y (d)), se presenta un punto de silla como equilibrio. Puede considerarse al *punto de silla* como un equilibrio que presenta dos comportamientos: es estable en un par de trayectorias (las ramas estables), que fluyen directa y consecuentemente al equilibrio, e inestable en otro par. Por esta característica particular, el punto de silla es calificado como inestable.

En el Gráfico No. 2.14 (c) y (d), las líneas que atraviesan el equilibrio son denominadas *sendas de ensilladura* y están compuestas por el conjunto de trayectorias convergentes del sistema. Por ello, con el fin de obtener un sistema estable, las condiciones iniciales de éste deben ubicarse sobre la senda; de lo contrario, las trayectorias serán divergentes y el sistema, inestable.

Caso (e): $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$

En el Gráfico No. 2.14 (e) se presenta un *foco* estable. Este equilibrio se caracteriza por contar con trayectorias que se aproximan (estable) o se alejan (inestable) del estado estacionario del sistema de manera cíclica, describiendo gráficamente una espiral al cruzar de una zona a otra. Es así como Y y Z son, en este caso, trayectorias fluctuantes.

La posición e inclinación de las curvas juegan un rol importante, ya que determinan la estabilidad o inestabilidad de la trayectoria; pero en cualquiera de estas situaciones su pendiente en los puntos de cruce será infinita (en $Y' = 0$, puesto que se establece un movimiento perfectamente vertical) o cero (en $Z' = 0$, movimiento perfectamente horizontal).

Caso (f): $a = 0, b < 0, c < 0, d = 0$ y, para efectos prácticos, $h > 0, k < 0$

Notemos que los nuevos valores de los parámetros cambian la forma de las curvas de fase (dejan de ser rectas): $Z' = 0$ es una línea vertical e $Y' = 0$ es una función constante:

$$Z' = 0 \rightarrow Y = -h/b$$

$$Y' = 0 \rightarrow Z = -k/c$$

En este caso, las derivadas que hemos utilizado hasta el momento no nos proporcionan ninguna información dinámica ($\partial Z'/\partial Z = \partial Y'/\partial Y = 0$), por lo que recurrimos al uso de las derivadas temporales cruzadas: ya que $\partial Z'/\partial Y = b < 0$, vemos que conforme Y aumenta (a la derecha de $Z' = 0$), Z varía negativamente, por lo que trazamos en esa zona flechas de arriba hacia abajo; por otro lado, dibujamos flechas de izquierda a derecha en las regiones sobre $Y' = 0$, ya que $\partial Y'/\partial Z = c > 0$.

Apreciamos que el equilibrio es rodeado por trayectorias que forman círculos o espirales concéntricas a través de un movimiento perpetuo. Este tipo es conocido como *vórtice* (o *centro*) y puesto que el equilibrio es inalcanzable (con una excepción: $(Y_{(0)}, Z_{(0)}) = (Y^*, Z^*)$), es automáticamente clasificado como inestable. De esta forma, las trayectorias Y y Z son similares, individualmente, a la mostrada en el Gráfico No. 2.13: fluctuantes pero de manera uniforme.

A manera de conclusión, confirmamos la idea de que el diagrama de fase constituye una herramienta útil para atribuir aspectos cualitativos a las variables dinámicas. Sin embargo, tiene ciertas limitaciones: por ejemplo, no puede determinar la rapidez o aceleración con que las trayectorias convergen o divergen; así como, resulta complicado analizar con mayor detalle el comportamiento que éstas toman sin considerar el equilibrio de largo plazo.

4.3.3 Aplicación: explotación óptima de peces²⁹

Suponga que una población de “N(t)” peces en un cierto lago, crece a la siguiente tasa:

$$N'(t) = aN(t) - bN^2(t) \quad (a, b > 0)$$

en ausencia de actividades de extracción. En una comunidad cercana al lago se consume una cantidad “C(t)” de pescado, que brinda una utilidad igual “U(C)” ($U'(C) > 0$, $U''(C) < 0$) y altera el crecimiento de la biomasa de la siguiente forma:

$$N'(t) = aN(t) - bN^2(t) - C(t) \quad (a, b > 0)$$

El objetivo de la comunidad es maximizar las utilidades futuras descontadas a la tasa ρ :

$$V[C] = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(C) dt$$

Considerando la población actual de peces $N_0 = a/b$, y la ecuación que explica el crecimiento de la población de peces, el problema de cálculo de variaciones a resolver sería el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V[N] = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} U(aN - bN^2 - N') dt \\ \text{sujeto a} & N(0) = \frac{a}{b} \end{array}$$

29. Esta aplicación fue tomada de Kamien, Morton I. y Nancy L. y Schwartz, *op. cit.*, p. 183. Dicho problema está basado en el trabajo de Clark, Colin W. y Gordon R. Munro. "The Economics of Fishing and Modern Capital Theory: A Simplified Approach", en *Journal of Environmental Economics and Management*, Academic Press, 1975, pp. 92-106.

En primer lugar, para elaborar el diagrama de fase que permita obtener una solución cualitativa del problema debemos emplear la ecuación de Euler. Las derivadas que conforman la ecuación son las siguientes:

$$U_N = U'(C) \frac{dC}{dN} = U'(C)(a - 2bN)$$

$$U_{N'} = U'(C) \frac{dC}{dN'} = -U'(C)$$

$$\frac{d}{dt} U_{N'} = -U''(C)C'$$

Al reemplazar las derivadas en la ecuación de Euler (18) obtenemos:

$$U'(C)(a - 2bN) = -U''(C)C' + \rho U'(C)$$

La ecuación de Euler y la ecuación de comportamiento de la población de peces, conforman el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de primer orden:

$$C' = \frac{U'(C)}{U''(C)}(2bN - a + \rho)$$

$$N' = aN - bN^2 - C$$

Para construir el diagrama de fase es necesario establecer las curvas de demarcación, que representan el conjunto de puntos para los cuales las variables del problema se mantienen constantes o estacionarias. Estas curvas se obtienen estableciendo las condiciones $C' = 0$ y $N' = 0$ en el sistema de ecuaciones diferenciales. Al fijar $C' = 0$ en la ecuación de Euler, obtenemos la curva de demarcación:

$$N = \frac{a - \rho}{2b}$$

Por otra parte, al establecer $N' = 0$ en la ecuación de comportamiento de la biomasa, obtenemos la otra curva:

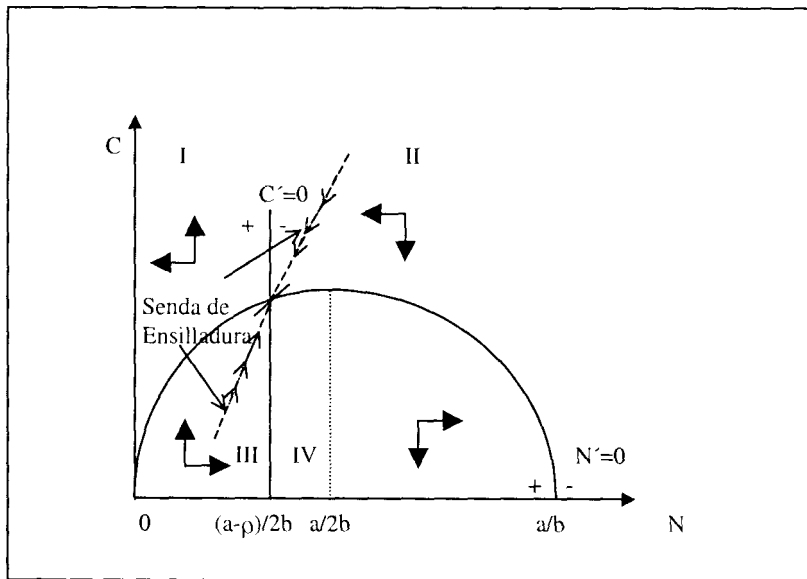
$$C = aN - bN^2$$

Ambas ecuaciones de demarcación determinan el diagrama de fase presentado en el Gráfico No. 2.15.

Para hallar la dinámica de las dos variables, es necesario analizar su comportamiento en cada una de las cuatro áreas delimitadas por las curvas de demarcación. La dinámica del consumo se obtiene a partir de la derivada parcial de la primera ecuación diferencial (C') con respecto a la población de peces (N):

$$\frac{\partial C'}{\partial N} = \frac{U'(C)}{U''(C)} 2b < 0$$

Gráfico No. 2.15



Dado que la función de utilidad presenta una utilidad marginal del consumo positiva y decreciente ($U'(C) > 0$, $U''(C) < 0$), el ratio de la primera derivada de la función sobre la segunda derivada será estrictamente negativa, con lo cual la derivada parcial analizada también es negativa. La relación existente entre C' y N implica que conforme se incrementa N , la derivada del consumo con respecto al tiempo (C') disminuirá, así como el nivel de consumo. En vista de que a lo largo de la curva de demarca-

ción el consumo permanece estacionario, al lado derecho de la curva, con un mayor valor de N , el consumo tendrá un comportamiento decreciente; mientras que al lado izquierdo, para un menor valor de N , el consumo será creciente. Esta evolución del consumo puede ser representada mediante flechas con una dirección hacia abajo, al lado derecho de la curva (áreas II y IV), y con dirección hacia arriba, al lado izquierdo de la curva (áreas I y III).

Por otra parte, la derivada parcial de la segunda ecuación diferencial (N') con respecto a C es negativa:

$$\frac{\partial N'}{\partial C} = -1 < 0$$

Siguiendo el mismo análisis, esta condición implica que ante un incremento del consumo, la derivada de la población de peces con respecto al tiempo (N') disminuirá y, por ende, lo hará también la población de peces. En este sentido, en la parte superior de la curva de demarcación, para un mayor valor de C , la población de peces disminuirá; y por el contrario, en el lado inferior de la curva, para un valor menor de C , la población de peces tendrá una trayectoria creciente. La dinámica de la población de peces, en este caso, también puede representarse mediante flechas. En la parte superior de la curva (áreas I y II), el comportamiento decreciente de N se indica mediante flechas con dirección a la izquierda; y en la parte inferior de la curva (áreas III y IV), el comportamiento creciente de la población de peces se representa mediante flechas con dirección a la derecha.

Considerando de manera conjunta el comportamiento de ambas variables, la dinámica del sistema quedaría determinado por flechas similares a las manecillas del reloj, las que se encuentran incluidas en el Gráfico No. 2.15. El equilibrio descrito en este diagrama de fase se denomina **equilibrio inestable**, lo cual significa que las variables C y N no siempre convergen al estado estacionario. Si estas variables tuvieran un valor inicial que se ubicara en las áreas I o IV, la dinámica del sistema, representada a través de las flechas, muestra una trayectoria divergente en el tiempo. Por el contrario, si las condiciones iniciales se ubicaran en un conjunto de puntos dentro de las áreas II o III, también denominada senda de ensilladura, las variables convergerían directamente al estado estacionario. El consumo y la población de peces en es-

tado estacionario se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones definido por las ecuaciones de demarcación. De esta forma, ambas variables en el equilibrio toman el siguiente valor:

$$N^* = \frac{a - \rho}{2b}$$

$$C^* = \frac{a^2 - \rho^2}{4b}$$

Un aspecto que llama la atención en el problema es el nivel de consumo en estado estacionario. A pesar de que la curva de demarcación determinada a partir de $N' = 0$ posee un mayor nivel de consumo para $N = a/2b$, éste no constituye el punto de equilibrio del diagrama de fase. Ello se debe a la existencia de la tasa de descuento. Esta tasa, como se mencionó anteriormente, cumple la función de brindarle una menor ponderación a las utilidades provenientes de las generaciones futuras. En este sentido, como el agente optimizador tiene un mayor bienestar por las utilidades cercanas al presente, la decisión óptima consistirá en acceder a niveles altos de consumo en el presente, lo cual ocasiona una depredación del recurso marino y, por ende, un menor consumo en el largo plazo o estado estacionario. Si la tasa de descuento fuera muy elevada, como por ejemplo $\rho = a$, se asignaría una ponderación baja a las utilidades futuras, y el consumo y la población de peces serían iguales a cero en el estado estacionario³⁰. Por el contrario, si la tasa de descuento fuera baja, como por ejemplo $\rho = 0$, se daría igual importancia a las utilidades presentes y futuras, de tal forma que el consumo y la población de peces en el estado estacionario tomarían el máximo valor posible determinado por la curva de marcación.

Ejercicios

1. Mediante la ecuación de Euler, halle la senda óptima en los siguientes casos:

a. $V[y] = \int_0^2 (7y'^2) dt$ sujeto a $y(0) = 9; y(2) = 11$

b. $V[y] = \int_0^1 (y'^2 - 2yy' + 10ty) dt$ sujeto a $y(0) = 1; y(1) = 2$

30. Ello puede comprobarse reemplazando $\rho = a$ en el consumo y la población de peces en el estado estacionario (C^* , N^*).

$$c. \quad V[y] = \int_0^{\sqrt{2}} (y^2 + 4yy' + 2y'^2) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 2; y(\sqrt{2}) = e + e^{-1}$$

$$d. \quad V[y] = \int_0^{\sqrt{2\pi}} (2y^2 + 3yy' - 4y'^2) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 1; y\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right) = 2$$

$$e. \quad V[y] = \int_0^2 (2ye' + y^2 + y'^2) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 2; y(2) = 2e^2 + e^{-2}$$

$$f. \quad V[y] = \int_0^5 (7y' + 1) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 3; y(5) = 8$$

$$g. \quad V[y] = \int_0^5 (t + y^2 + 3y') dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 0; y(5) = 3$$

$$h. \quad V[y] = \int_0^T e^{-\rho t} \ln(ay - y') dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = b; y(T) = 0 \quad (a, b, \rho, T > 0)$$

$$i. \quad V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 0; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$j. \quad V[y] = \int_0^4 (y'^2 e^{-y'}) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 2; y(4) = 1$$

2. Mediante la ecuación de Euler y las condiciones de transversalidad, halle la senda óptima en los siguientes casos:

$$a. \quad V[y] = \int_0^T (ay'^2 + by) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 0; y(T) = c \quad (a, b, c > 0; T \text{ libre})$$

$$b. \quad V[y] = \int_0^T (ty' + y'^2) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 1; y(T) = 10 \quad (T \text{ libre})$$

$$c. \quad V[y] = \int_0^2 \left(\frac{y'^2}{t^2}\right) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 1; y(2) = y_2 (y_2 \text{ libre})$$

$$d. \quad V[y] = \int_0^1 (50y - y^2 - 2y' - y'^2) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 1; y(1) = y_1 (y_1 \text{ libre})$$

$$e. \quad V[y] = \int_0^T (\sqrt{1 + y'^2}) dt \quad \text{sujeto a} \quad y(0) = 0; y(T) = 1 - T^2$$

3. Una firma monopolista presenta la siguiente función de costos cuadrática:

$$C = Q^2 + Q + 1$$

La producción de esta firma no se almacena, por lo tanto, la cantidad producida Q siempre es igual a la cantidad demandada. Por otra parte, la cantidad demandada depende tanto del precio $P(t)$ como de la tasa de variación del precio $P'(t)$:

$$Q = 2 - 2P(t) + P'(t)$$

La función de beneficios del monopolio en el instante “ t ” está determinada del siguiente modo:

$$\pi(P, P') = PQ - C$$

a. Encuentre la trayectoria del precio que maximice los beneficios totales del monopolio en el intervalo de tiempo $[0, 5]$, tomando en cuenta un precio inicial de 3 y un precio final de 6. Es decir, resuelva el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad \Pi[P] &= \int_0^5 \pi(P, P') dt \\ \text{sujeto a} \quad P(0) &= 3 \\ P(5) &= 6 \end{aligned}$$

b. Compruebe la condición de suficiencia.

4. Una mina contiene una cantidad "A" de un recurso mineral. La compañía propietaria de la mina desea determinar el patrón de extracción del recurso que maximice el valor presente de sus beneficios descontados a la tasa ρ en el intervalo de tiempo $[0, T]$. Considerando que $y(t)$ constituye las ventas acumuladas del mineral en el período "t", $y'(t)$ la extracción en el período "t", y la función de beneficios de la compañía es igual a:

$$\pi(y') = 1 - e^{-ky'}$$

- a. Halle la evolución de las ventas acumuladas $y(t)$, la extracción del recurso $y'(t)$ y el tiempo óptimo "T" para explotar la totalidad del recurso "A". En otras palabras, resuelva el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad \Pi[y] &= \int_0^T e^{-\rho t} \pi(y') dt \\ \text{sujeto a} \quad y(0) &= 0 \\ y(T) &= A \end{aligned}$$

- b. Demuestre que en el último período "T", el beneficio promedio de la compañía iguala al beneficio marginal.
- c. Compruebe la condición de suficiencia.
5. Los ingresos (B) de largo plazo de una firma dependen del *stock* de capital de la siguiente forma:

$$B(k) = 50k - k^2$$

Para incrementar el *stock* de capital, la firma incurre en costos que dependen de manera cuadrática de la inversión realizada (i). Asumiendo que la depreciación es igual a cero, la inversión equivale a la variación del *stock* de capital ($i = k'$), con lo cual la función de costos sería igual a:

$$C(k') = k'^2 + 2k'$$

De este modo, la función de beneficios queda determinada por:

$$\pi(k, k') = B - C = 50k - k^2 - k'^2 - 2k'$$

- a. Encuentre la senda del *stock* de capital que maximice el valor presente de los beneficios descontados a una tasa de 10 por ciento ($\rho = 0.1$) con un horizonte temporal infinito. Considere un *stock* inicial de capital de 10 unidades. Resuelva el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } \Pi[k] &= \int_0^{\infty} e^{-0.1t} \pi(k, k') dt \\ \text{sujeto a } &k(0) = 10 \end{aligned}$$

- b. Demuestre que en la inversión óptima en el período “ t ”, ($i^*(t)$) es una fracción (β) de la brecha existente entre el *stock* de capital vigente ($k^*(t)$) y el nivel de capital de largo plazo (\bar{k}):

$$i^*(t) = \beta[\bar{k} - k^*(t)] \quad (0 < \beta < 1)$$

- c. Construya un diagrama de fase en el espacio inversión-capital ($i - k$), a partir de la ecuación de Euler obtenida en la sección (a) y la relación $i = k'$.
- d. Compruebe la condición de suficiencia.
6. Suponga una economía cerrada donde existe una población constante compuesta por “ L ” trabajadores, y el consumo per cápita de cada trabajador es $c(t)$. Cada individuo tiene una función de utilidad logarítmica ($U(c) = L \ln c$). Además, un planificador central desea determinar un plan de consumo que maximice el flujo de utilidades futuras de la sociedad descontadas a la tasa “ δ ”:

$$\text{Maximizar } V[c] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} LU(c(t)) dt$$

En esta economía, la producción se genera a partir de los insumos capital (K) y trabajo (L) mediante una función de producción Cobb-Douglas ($F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$). Por otro lado, la producción puede destinarse a consumo o a inversión con el fin de incrementar el *stock* de capital. De esta forma:

$$F(K, L) = Lc(t) + K' \quad \text{Dado } K(0) = K_0$$

- a. Plantee un diagrama de fase que explique la dinámica del consumo y el capital per cápita en la economía.
 - b. Halle el valor del consumo, el capital y el producto en términos per cápita en el estado estacionario.
7. En una economía se desea maximizar el flujo futuro de utilidades de la sociedad, descontadas a la tasa “ δ ” ($\delta > 0$):

$$\text{Maximizar } V[c] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(c) dt$$

Si se sabe que la sociedad tiene una función de utilidad logarítmica ($U(c) = \ln(c)$) y que el consumo (c) depende del *stock* de capital (k) de acuerdo con la siguiente función:

$$c(t) = rk(t) - k'(t)$$

Donde “ r ” representa la tasa de interés ($r > 0$).

- a. Halle las sendas del consumo (c) y del *stock* de capital (k) óptimas, considerando que el *stock* inicial del capital es igual a “ β ” y el *stock* en el período “ T ” ($T > 0$) es igual a cero.
- b. Indique el signo de la tasa de crecimiento del consumo si $\delta > r$. Interprete el resultado.

Anexos A

A. Regla de Leibnitz

Dada la integral definida:

$$F(t, c) = \int_a^b f(c, t) dt \quad (1)$$

La derivada con respecto a "c" (también definida como la regla de Leibnitz) es igual a:

$$\frac{dF}{dc} = \int_a^b \frac{\partial f(c, t)}{\partial c} dt \quad (2)$$

La derivada con respecto a "b" es igual a:

$$\frac{\partial F}{\partial b} = f(t, c)|_{t=b} = f(b, c) \quad (3)$$

Si el límite superior de la integral dependiera de la variable "c":

$$F(t, c) = \int_a^{b(c)} f(c, t) dt \quad (4)$$

La derivada con respecto a "c" se obtiene a partir de las propiedades (2) y (3):

$$\frac{dF}{dc} = \int_a^{b(c)} \frac{\partial f(c, t)}{\partial c} dt + f(b(c), c) \frac{db}{dc} \quad (5)$$

B. Condición de concavidad de una función

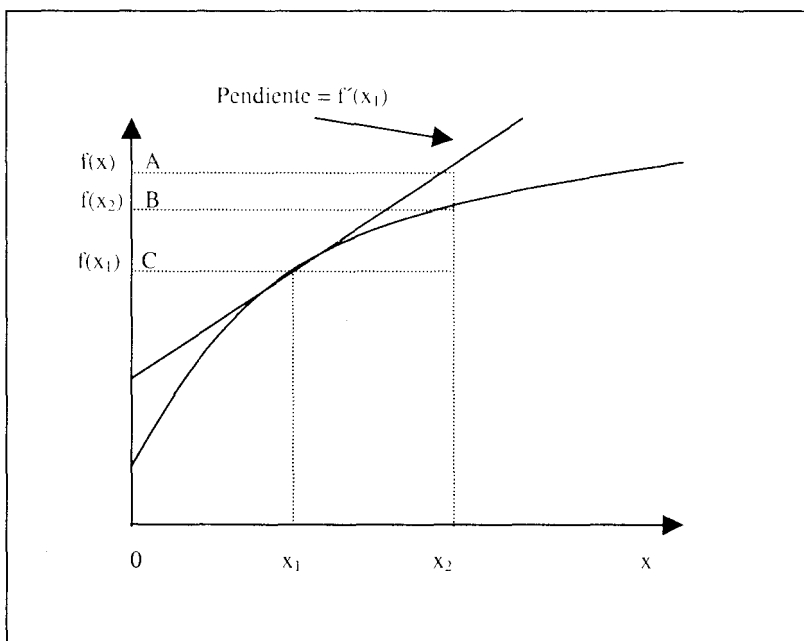
Dada una función cóncava que depende de una sola variable $f(x)$, como la mostrada en el Gráfico A, ésta cumple con la condición:

$$f(x_2) - f(x_1) \leq f'(x_1)(x_2 - x_1) \quad (1)$$

En términos simples, la condición (1) significa que en toda función cóncava el segmento "AC" siempre será mayor o igual que el segmento "BC". La condición (1) es válida también para el caso de dos variables (x e y) o más:

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \leq f_x(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + f_y(x_1, y_1)(y_2 - y_1) \quad (2)$$

Gráfico A



III

Control óptimo

En el capítulo anterior se analizó en detalle la resolución de un tipo específico de problema de optimización dinámica: **el cálculo de variaciones**. En esta sección se desarrollará la teoría del **control óptimo**, mediante la cual pueden desarrollarse problemas de optimización intertemporal más complejos. El problema básico de control óptimo a resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^T f(t, y, u) dt \quad (1) \\ \text{sujeto a} & y' = g(t, y, u) \\ & y(0) = y_0 \text{ (} y_0 \text{ dado)} \\ & y(T) = y_T \text{ (} y_T \text{ libre)} \\ & u(t) \in \Omega \quad \forall t \in [0, T] \end{array}$$

Tal como se mencionó en el primer capítulo, en el problema de control óptimo intervienen básicamente tres tipos de variables: el tiempo (t), la variable de estado (y) y la variable de control (u). Algunos ejemplos económicos de variables de control y estado podrían ser la emisión monetaria y la inflación, o el gasto en publicidad y las ventas de una empresa. En estos casos, la primera variable, la de control, está sujeta a la decisión del agente que enfrenta el problema de optimización intertemporal, mientras que la segunda variable, la de estado, refleja el resultado de las decisiones tomadas sobre la variable de control.

La trayectoria de la variable de estado se encuentra determinada a través de la **ecuación de movimiento** o **ecuación de estado**, en la cual se relaciona la variación de la variable de estado con respecto al tiempo (\dot{y}) con las variables “ t ”, “ y ” y “ u ” a través de la función $g(\bullet)$. Una vez seleccionado el valor óptimo de la variable de control en un instante del tiempo, la función $g(\bullet)$ determina la dirección de crecimiento de la variable de estado y , de este modo, su trayectoria en el tiempo. De esta manera, cuando el agente optimizador selecciona la senda óptima de la variable de control, afecta tanto de manera directa el funcional objetivo mediante la variable “ u ”, como de manera indirecta a través de la variable “ y ”, que se encuentra definida por la ecuación de movimiento.

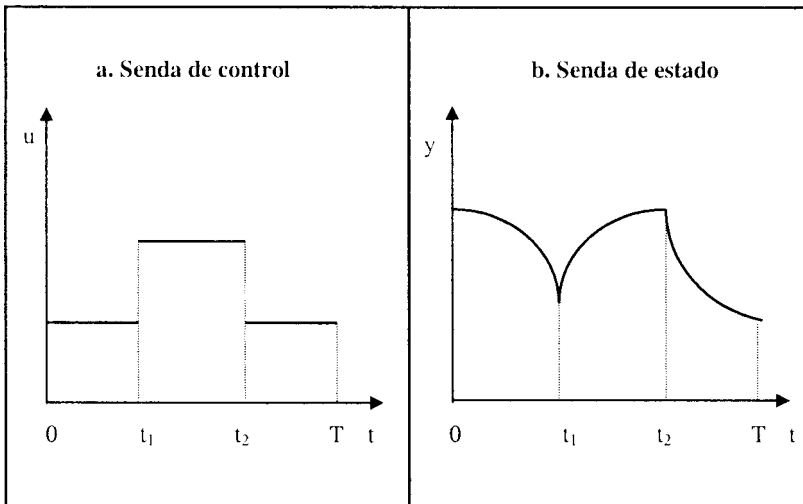
Por otra parte, en el problema (I) se considera un valor libre de $y(T)$. Esta característica se debe a que en la derivación de la condición de primer orden del problema de control óptimo, se hace referencia a sendas de control factibles, similares a las empleadas en la demostración de la ecuación de Euler. A través de la ecuación de movimiento, cada senda de control factible posee una correspondiente trayectoria factible de la variable de estado. En este sentido, si el problema tuviera un valor terminal $y(T) = y_T$ dado, las sendas de control factibles no serían arbitrarias, sino que estarían predeterminadas para que satisfagan el valor terminal de la variable de estado. De este modo, un valor terminal libre permite derivar la condición de primer orden del problema de control óptimo.

Con respecto a la variable de control, ésta se encuentra restringida al conjunto Ω , que por lo general es un conjunto compacto y convexo. Esta restricción abre la posibilidad de que existan soluciones de esquina en el problema de optimización, a diferencia de los problemas de cálculo de variaciones, en los cuales sólo se admiten soluciones interiores. En algunos problemas no se establecen restricciones a la senda de control ($\Omega =]-\infty, \infty[$), por lo que se omite la condición $u(t) \in \Omega$.

Una de las ventajas que presenta la técnica de control óptimo, es que no requiere necesariamente la continuidad y diferenciabilidad de las sendas de las variables de control y de estado en todo el horizonte de tiempo $[0, T]$. Para el caso de la senda óptima de control, basta con que se sea continua por tramos o *piecewise continuous*. Este requisito implica que la trayectoria de la variable de control puede presentar un número determinado de puntos con discontinuidades, siempre y cuando en dichos puntos no tome un valor infinito. Un

ejemplo de ello puede observarse en el Gráfico No. 3.1 (a), donde la variable de control es discontinua en los instantes t_1 y t_2 . En el caso de la trayectoria de la variable de estado, al menos se requiere que sea continua y diferenciable por tramos o *piecewise differentiable*. Ello significa que la senda de la variable de estado puede contener puntos en los cuales no sea diferenciable con respecto al tiempo. Gráficamente, ello implica que la trayectoria presenta puntos con “esquinas”, tal como se muestra en el Gráfico No. 3.1 (b).

Gráfico No. 3.1



En los Gráficos No. 3.1 (a) y 3.1 (b), los instantes t_1 y t_2 en los cuales se presentan discontinuidades en la variable de control coinciden exactamente con aquellos en los cuales la variable de estado presenta “esquinas”. Esta coincidencia se debe a la forma cómo se obtiene la variable de estado. En este caso en particular, una vez determinada la senda de control óptima en el intervalo $[0, t_1]$, mediante la ecuación de movimiento y la condición inicial $y(0) = y_0$, es posible hallar la evolución de la variable de estado para el mismo intervalo de tiempo. Para el segundo intervalo $[t_1, t_2]$, nuevamente se puede hallar la trayectoria de la variable de control y para determinar la evolución de la variable de estado, necesitamos la ecuación de movimiento y una condición inicial. La condición inicial relevante es el valor terminal de la senda de la variable de estado del primer tramo. Para los sucesivos puntos de discontinuidad de la

variable de control se realiza el mismo procedimiento, de tal forma que se asegura la continuidad de la variable de estado.

El presente capítulo se encuentra compuesto por cinco partes. En la primera se deriva la condición de primer orden al problema de control óptimo, también conocido como **principio del máximo**. En la segunda, se explican las condiciones de transversalidad para resolver el problema de control óptimo cuando se establecen condiciones alternativas para el valor final de la variable de estado. En la tercera sección, se revisan las condiciones de suficiencia del problema de control óptimo. En la cuarta, se compara las similitudes existentes entre el problema de control óptimo y el del cálculo de variaciones, y se explica cómo este último constituye un caso especial de control óptimo. Finalmente, en la última sección, se desarrolla el problema de control óptimo para el caso de un horizonte temporal infinito.

1. Condición de primer orden: principio del máximo

Así como el cálculo de variaciones presenta una similitud con la optimización estática sin restricciones, el control óptimo vendría a ser equivalente a un problema de optimización estática sujeta a restricciones. En dicho caso, el problema puede resolverse mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. A partir de la función objetivo, la restricción y una variable auxiliar λ , conocida como multiplicador de Lagrange, se conforma una nueva función, denominada Lagrangiana. Los valores que resuelven el problema se determinan a partir de la optimización de esta función.

De igual forma, en el control óptimo, a partir de la función intermedia $f(t, y, u)$, la ecuación de movimiento $y' = g(t, y, u)$ y una variable auxiliar $\lambda(t)$, denominada variable de **coestado**, se determina la función Hamiltoniana del siguiente modo:

$$H(t, y, u, \lambda) = f(t, y, u) + \lambda(t)g(t, y, u) \quad (2)$$

Para determinar la senda de las variables de control y estado que resuelven el problema, a partir de la función Hamiltoniana se emplea una condición de primer orden, denominada **principio del máximo**. A continuación, se derivarán las condiciones del principio del máximo y se desarrollarán algunas aplicaciones.

1.1 El principio del máximo (3.2.1)

Las sendas $u^*(t)$, $y^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ resuelven el problema (1) si satisfacen las condiciones del principio del máximo establecidas para la función Hamiltoniana (2):

$$a. \underset{u}{\text{Max}} H(t, y, u, \lambda) \quad \text{sujeto a } u(t) \in \Omega \quad (3)$$

$$b. \quad y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

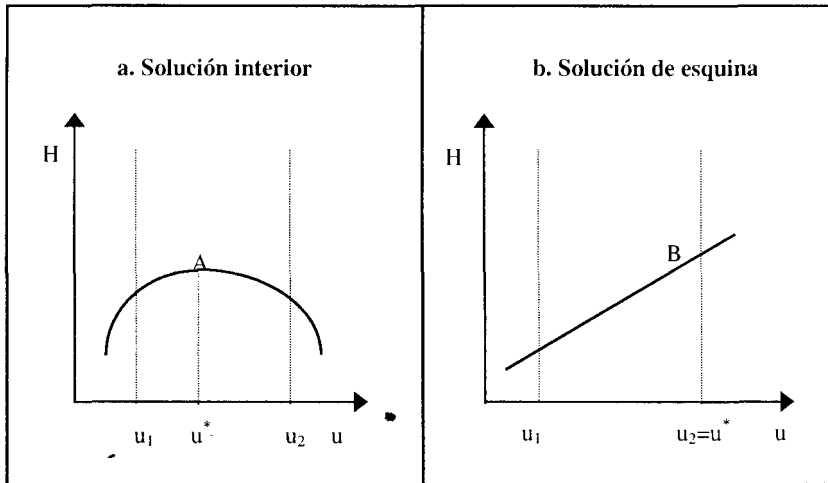
$$c. \quad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$d. \quad \lambda(T) = 0$$

La primera condición establece que el Hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control, sujeto a la restricción dada por el conjunto Ω . La maximización del Hamiltoniano puede brindar básicamente dos tipos de soluciones: una solución al interior del conjunto Ω o una solución en el contorno. Asumiendo que el conjunto de control es igual a $\Omega = [u_1, u_2]$ ($u_1, u_2 \in \mathbb{R}$) y que H es una función que depende de manera no lineal de “ u ”, entonces nos encontraríamos en una situación como la presentada en la parte (a) del Gráfico No. 3.2. En este caso, para maximizar H , en el punto A se debe cumplir que la primera derivada con respecto a la variable de control sea igual a cero y que el Hamiltoniano sea cóncavo con respecto a “ u ” ($\partial H/\partial u = 0$; $\partial^2 H/\partial u^2 \leq 0$). Por otra parte, con el mismo conjunto Ω , si H dependiera linealmente de la variable de control, la primera derivada nunca se haría igual a cero. En este caso, la maximización daría una solución de esquina, tal como se ilustra en la parte (b) del Gráfico No. 3.2 ($\partial H/\partial u > 0$).

La segunda condición constituye la ecuación de movimiento de la variable de estado. La tercera condición representa la ecuación de movimiento de la variable de coestado. Estas dos ecuaciones, simultáneamente, se denominan **sistema canónico** o **sistema Hamiltoniano**. Finalmente, la cuarta condición consiste en la condición de transversalidad para el problema de control óptimo, cuando el valor terminal de la variable de estado es libre.

Gráfico No. 3.2



Como regla práctica, para determinar la solución al problema (1) se pueden seguir los siguientes pasos:

- 1) Resolver la condición (a) del principio del máximo y, si es posible, expresar "u" en función de "t", " λ " e "y".
- 2) Plantear el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para la variable de estado y coestado, a partir de las condiciones (b) y (c) del principio del máximo. Si en este sistema apareciera la variable de control, debe reemplazarse por la expresión hallada en el primer paso.
- 3) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales considerando las constantes $y(0) = y_0$ y $\lambda(T) = 0$.
- 4) Expresar "u", " λ " e "y" como funciones del tiempo.

A continuación se derivarán las condiciones del principio del máximo para el caso en el cual el Hamiltoniano presenta una solución interior, y la variable de control no se encuentra restringida.

Demostración

Para demostrar que el principio del máximo resuelve el problema del control óptimo, en primer lugar, modificaremos el funcional objetivo de tal forma que incorpore a la función Hamiltoniana. La demostración se realizará partiendo del problema (1) y omitiendo la restricción $u(t) \in \Omega$.

En dicho problema se debe cumplir la igualdad $y' = g(t, y, u)$; por lo tanto, la diferencia $g(t, y, u) - y'$ siempre debe ser igual a cero en el intervalo $[0, T]$. A partir de esta diferencia construimos la expresión $\lambda(t)(g(t, y, u) - y')$, que también debe ser igual a cero a lo largo del horizonte temporal. De este modo, debe satisfacerse la condición:

$$\int_0^T \lambda(t)[g(t, y, u) - y'] dt = 0 \quad (5)$$

En vista de que la condición (5) siempre se cumple, es que puede introducirse dicha integral en el funcional objetivo sin alterar el planteamiento inicial del problema. En este sentido, el nuevo funcional objetivo (W) sería igual a:

$$W = V + \int_0^T \lambda(t)[g(t, y, u) - y'] dt = \int_0^T \{f(t, y, u) + \lambda(t)[g(t, y, u) - y']\} dt \quad (6)$$

Tomando en cuenta la función Hamiltoniana (2), el funcional W podría ser expresado del siguiente modo:

$$W = \int_0^T [H(t, y, u, \lambda) - \lambda(t)y'] dt = \int_0^T H(t, y, u, \lambda) dt - \int_0^T \lambda(t)y' dt \quad (7)$$

Integrando por partes la segunda integral de (7), obtenemos la siguiente relación:

$$-\int_0^T \lambda(t)y' dt = -\lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 + \int_0^T y\lambda'(t) dt \quad (8)$$

De este modo, a partir de (8), obtenemos la expresión para el funcional W :

$$W = \int_0^T [H(t, y, u, \lambda) + \lambda'(t)y] dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 \quad (9)$$

Para verificar que solamente las sendas óptimas $u^*(t)$, $y^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ satisfacen las condiciones del principio del máximo, en primer lugar, debemos construir sendas factibles de la variable de control que sean próximas a la trayectoria óptima $u^*(t)$. Así, para formar las sendas factibles de $u(t)$ empleamos una senda auxiliar $z(t)$ y un número θ arbitrariamente pequeño:

$$u(t) = u^*(t) + \theta z(t) \quad (10)$$

Por otra parte, dada una senda factible de la variable de control, mediante la ecuación de movimiento se determina la respectiva trayectoria factible de la variable de estado. Sin pérdida de generalidad, podemos definir a la variable de estado factible del siguiente modo:

$$y(t) = y^*(t) + \theta h(t) \quad (11)$$

Donde $h(t)$ representa otra senda auxiliar. Finalmente, si T e y_T fueran libres, podrían definirse valores factibles de estas variables de la siguiente forma:

$$T = T^* + \theta \Delta T \quad (12)$$

$$y_T = y_T^* + \theta \Delta y_T \quad (13)$$

De manera similar al caso de cálculo de variaciones, elaboramos una función $D(\theta)$ conformada por la diferencia entre el valor subóptimo del funcional W y el valor óptimo W^* :

$$D(\theta) = W(t, y, u, \lambda) - W^*(t, y^*, u^*, \lambda^*) \quad (14)$$

$$D(\theta) = \int_0^{T^* + \theta \Delta T} \{H(t, y^* + \theta h(t), u^* + \theta z(t), \lambda) + \lambda' [y^* + \theta h(t)]\} dt - \lambda(T^* + \theta \Delta T) [y_T^* + \theta \Delta y_T] \\ + \lambda(0) y_0 - \int_0^{T^*} [H(t, y^*, u^*, \lambda^*) + \lambda' y] dt - \lambda(T^*) y_T + \lambda(0) y_0$$

En vista de que W^* es el valor máximo del funcional, la función $D(\theta)$ siempre tendrá un valor no positivo, y alcanzará su máximo cuando $\theta = 0$. De este modo, para maximizar la función $D(\theta)$, se debe cumplir que $D'(0) = 0$. Empleando la regla de Leibnitz, la primera derivada de la función sería igual a:

$$D'(\theta) = \int_0^{T^* + \theta \Delta T} \left\{ \frac{\partial H}{\partial y} h(t) + \frac{\partial H}{\partial u} z(t) + \lambda' h(t) \right\} dt + [H + \lambda' y]_{t=T^*} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T - \lambda'(T) y_T \Delta T \quad (15)$$

En la expresión (15) se eliminó el término $\lambda(0)y_0$ debido a que es una constante. Por otro lado, tomando en cuenta la siguiente igualdad:

$$[\lambda' y]_{t=T^*} \Delta T = \lambda'(T) y_T \Delta T \quad (16)$$

simplificamos el segundo y cuarto elemento de la expresión (15), y planteamos la condición de maximización $D'(0) = 0$:

$$D'(0) = \int_0^{T^*} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda' \right) h(t) + \frac{\partial H}{\partial u} z(t) \right\} dt + [H]_{t=T^*} \Delta T^* - \lambda(T^*) \Delta y_{T^*} = 0 \quad (17)$$

Considerando que en el problema (1) el tiempo se encuentra predeterminado, en la expresión (17) se cumple que $\Delta T = 0$ y, por lo tanto, $[H]_{t=T} \Delta T = 0$. Para que la condición de maximización se satisfaga para las sendas óptimas $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$, y para cualesquiera sendas auxiliares $h(t)$ y $z(t)$, cada uno de los elementos de la integral debe ser igual a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} + \lambda' &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Por otra parte, como el valor terminal de las sendas de estado se encuentra libre, Δy_T podría tomar cualquier valor. De este modo, para asegurar que se cumpla la condición de optimización, se debe satisfacer la condición de transversalidad:

$$\lambda(T) = 0 \quad (19)$$

Por último, en la derivación se ha supuesto que la ecuación de movimiento se cumple en todo el período de la optimización $t \in [0, T]$:

$$y' = g(t, y, u) \quad (20)$$

Para que la condición (17) se cumpla, deben verificarse necesariamente (18), (19) y (20), que constituyen las condiciones del principio del máximo.

A continuación se desarrollarán tres aplicaciones de control óptimo, en las cuales se explica la metodología tanto en la resolución de problemas que presentan soluciones de esquina como en aquellos que presentan soluciones interiores.

Ejemplo 1.- Halle las trayectorias $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ que resuelvan el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^1 (y + u) dt \\ \text{sujeto a} & y' = 1 - u^2 \\ & y(0) = 1 \end{array}$$

El primer paso para desarrollar el problema de control óptimo consiste en formar la función Hamiltoniana:

$$H(t, y, u, \lambda) = y + u + \lambda(1 - u^2)$$

En segundo lugar, debemos maximizar la función Hamiltoniana con respecto a la variable de control. Para ello es necesario verificar si el Hamiltoniano es o no una función lineal de la variable de control. Si fuera no lineal, la solución sería interior; en caso contrario, nos enfrentaríamos a un problema con una solución de esquina. En este problema, el Hamiltoniano presenta una variable de control elevada al cuadrado, por lo que podemos emplear las condiciones clásicas de maximización:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - 2\lambda u = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2\lambda \leq 0$$

A partir de esta maximización del Hamiltoniano, puede obtenerse la variable de control en función de la variable de coestado: $u^*(t) = 1/2\lambda$. En segundo lugar, planteamos las ecuaciones de movimiento para las variables de estado y coestado:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = 1 - u^2$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1$$

Ambas ecuaciones de movimiento forman un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. Con el fin de simplificar la resolución del problema, se resolverá cada ecuación de manera separada. Primero se puede resolver la ecuación de movimiento de la variable de coestado, mediante la integración de ambos lados de la ecuación:

$$\int d\lambda = \int -dt$$

$$\lambda^*(t) = -t + H_1$$

Para hallar la constante de integración, evaluamos la senda óptima de la variable de coestado en la condición de transversalidad del principio del máximo, con lo cual obtendríamos:

$$\lambda^*(t) = -t + 1 \tag{21}$$

Esta trayectoria óptima de la variable de coestado toma un valor comprendido en el intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$ para el intervalo de tiempo $t \in [0, 1]$, el cual permite satisfacer la condición de segundo orden de la maximización del Hamiltoniano con respecto a la variable de control. La trayectoria de control óptima vendría dada por:

$$u^*(t) = \frac{1}{2\lambda^*} = \frac{1}{2(1-t)} \tag{22}$$

Para hallar la senda de la variable de estado tenemos que reemplazar la variable de control en la ecuación de movimiento:

$$y' = 1 - u^2 = 1 - \frac{1}{4(1-t)^2}$$

Esta ecuación diferencial se resuelve integrando ambos lados de la ecuación y empleando la condición inicial $y(0) = 1$, con lo cual llegaríamos al siguiente resultado:

$$y^*(t) = t - \frac{1}{4(1-t)} + \frac{5}{4} \quad (23)$$

De este modo, las sendas de (21), (22) y (23) cumplen con las condiciones del principio del máximo y resuelven el problema propuesto.

Ejemplo 2.- Halle las trayectorias $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ que resuelvan el problema:

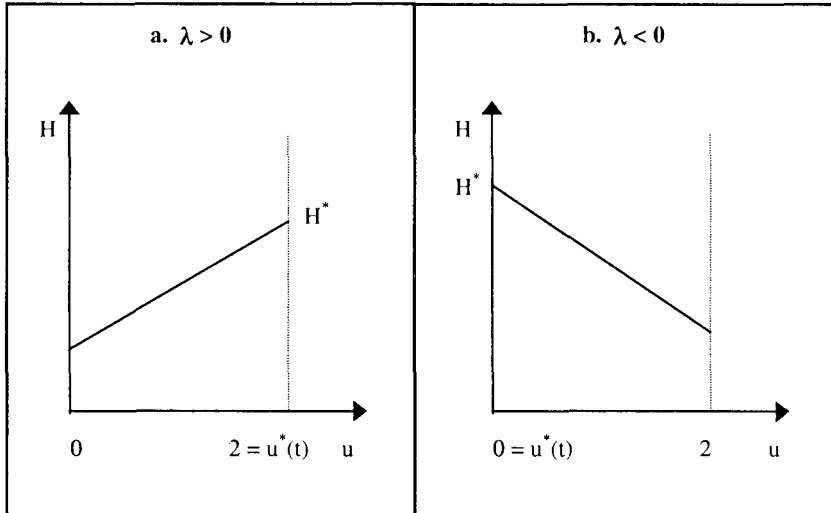
$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^1 3y dt \\ \text{sujeto a} & y' = y + u \\ & y(0) = 5 \\ & u(t) \in [0, 2] \end{array}$$

La función Hamiltoniana del problema es la siguiente:

$$H(t, y, u, \lambda) = 3y + \lambda(y + u) = (3y + \lambda y) + \lambda u$$

En este caso, la función depende de manera lineal de la variable de control, lo que indica que la variable de control óptima se ubicará en la frontera del conjunto Ω . La maximización del Hamiltoniano puede arrojar dos posibles resultados. Si $\lambda > 0$, entonces es una función creciente de la variable de control, por lo que el valor óptimo sería $u^*(t) = 2$. Por el contrario, si $\lambda < 0$, el Hamiltoniano sería una función decreciente de "u" y tomaría el valor óptimo $u^*(t) = 0$. Ambos casos se ilustran en el Gráfico No. 3.3.

Gráfico No. 3.3



De esta forma, para hallar la senda de control óptima, debe determinarse en cuál de los dos casos anteriores se encuentra la variable de coestado del problema. La trayectoria de la variable de coestado puede obtenerse a partir de la siguiente ecuación de movimiento:

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -3 - \lambda$$

Resolviendo esta ecuación diferencial y empleando la condición de transversalidad $\lambda(4) = 0$, llegamos a la siguiente trayectoria para la variable de coestado:

$$\lambda^*(t) = 3e^{4-t} - 3 \quad (24)$$

La senda óptima de la variable de coestado es exponencialmente decreciente y toma valores positivos en todo el intervalo $t \in [0, 4]$; por consiguiente, nos encontraremos en el primer caso ($\lambda > 0$) y el control óptimo será:

$$u^*(t) = 2 \quad (25)$$

La trayectoria de la variable de estado puede obtenerse mediante la ecuación de movimiento y reemplazando la variable de control $u^*(t) = 2$:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y + u^* = y + 2$$

Con la condición inicial $y(0) = 5$, la solución de la ecuación diferencial sería:

$$y^*(t) = 7e^t - 2 \quad (26)$$

En este ejemplo, las sendas óptimas en (24), (25) y (26) satisfacen las condiciones del principio del máximo y resuelven el problema propuesto.

Ejemplo 3.- Halle las trayectorias $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ que resuelvan el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_1^5 (uy - u^2 - y^2) dt \\ \text{sujeto a} & y' = y + u \\ & y(1) = 2 \end{array}$$

La función Hamiltoniana del problema es la siguiente:

$$H(t, y, u, \lambda) = uy - u^2 - y^2 + \lambda(y + u)$$

Tal como se observa, la función Hamiltoniana depende de manera no lineal de “u”; por tanto, la solución al problema es interior y debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = y - 2u + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 \leq 0$$

A partir de esta condición de maximización, expresamos la variable de control en función del resto de variables: $u = (\lambda + y)/2$. Las ecuaciones de movimiento de las variables de estado y coestado son:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial y} = v + u$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -u + 2y - \lambda$$

Reemplazando la variable de control $u = (\lambda + y)/2$ en el sistema canónico, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$y' = y + \frac{\lambda + y}{2}$$

$$\lambda' = -\frac{\lambda + y}{2} + 2y - \lambda$$

Para resolver este sistema de ecuaciones diferenciales, resulta conveniente expresarlo matricialmente de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ \lambda' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con las condiciones $\lambda(5) = 0$ e $y(1) = 2$.

La solución general del problema viene dada por:

$$\begin{bmatrix} y^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 e^{t/2} + G_2 e^{3t/2} \\ H_1 e^{t/2} + H_2 e^{3t/2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} \quad (27)$$

La integral particular del sistema de ecuaciones está dada por:

$$\begin{bmatrix} J \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las raíces características se obtienen a partir del siguiente determinante:

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 \\ -3/2 & 3/2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

que forma la siguiente ecuación característica:

$$r^2 - 3 = 0$$

Para $r_1 = \sqrt{3}$ se puede obtener la relación existente entre G_1 y H_1 :

$$\begin{bmatrix} -3/2 + \sqrt{3} & -1/2 \\ -3/2 & 3/2 + \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$H_1 = G_1(2\sqrt{3} - 3)$$

Del mismo modo, para $r_2 = -\sqrt{3}$ se obtiene la relación entre G_2 y H_2 :

$$\begin{bmatrix} -3/2 - \sqrt{3} & -1/2 \\ -3/2 & 3/2 - \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ H_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$H_2 = G_2(-2\sqrt{3} - 3)$$

Una solución más simplificada de (27), que incorpore las relaciones existentes entre los coeficientes H_i y G_i ($i = 1, 2$) y la integral particular, es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} y^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 e^{\sqrt{3}t} & + & G_2 e^{-\sqrt{3}t} \\ G_1(2\sqrt{3} - 3)e^{\sqrt{3}t} & + & G_2(-2\sqrt{3} - 3)e^{-\sqrt{3}t} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Los valores de G_1 y G_2 se obtienen al evaluar la sendas óptimas de la variable de estado y coestado en los puntos $\lambda(5) = 0$ e $y(1) = 2$. A partir de esos puntos se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\lambda(5) = G_1(2\sqrt{3} - 3)e^{5\sqrt{3}} + G_2(-2\sqrt{3} - 3)e^{-5\sqrt{3}} = 0$$

$$y(1) = G_1 e^{\sqrt{3}} + G_2 e^{-\sqrt{3}} = 2$$

Resolver este sistema de ecuaciones arroja como resultado aproximado las constantes $G_1 \approx 4,73$ y $G_2 \approx 11,30$, por lo que las sendas óptimas de las variables de estado, coestado y control quedarían definidas del siguiente modo:

$$y^*(t) = 4,73e^{\sqrt{3}t} + 11,30e^{-\sqrt{3}t}$$

$$\lambda^*(t) = 4,73(2\sqrt{3} - 3)e^{\sqrt{3}t} + 11,30(-2\sqrt{3} - 3)e^{-\sqrt{3}t}$$

$$u^*(t) = \frac{\lambda + y}{2} = \frac{9,46(\sqrt{3} - 1)e^{\sqrt{3}t} - 22,60(\sqrt{3} + 1)e^{-\sqrt{3}t}}{2}$$

1.2 Aplicación: nivel óptimo de contaminación¹

Suponga una economía que produce una cantidad $C(t)$ de un bien de consumo, y esta producción se elabora a partir de una cantidad $L(t)$ de trabajo, de acuerdo con la siguiente función:

$$C(t) = \alpha L(t) \quad (\alpha > 0)$$

Por otra parte, la evolución del *stock* de polución $P(t)$ en la economía se determina a partir de la siguiente ecuación de movimiento:

$$P'(t) = C^2(t) - \gamma P(t) \quad (\gamma > 0)$$

Esta ecuación diferencial indica que un incremento del consumo afecta positivamente el nivel de contaminación, y que la contaminación presenta una tasa natural de eliminación igual a γ .

Por otra parte, el bienestar de la sociedad es una función del consumo, el esfuerzo y la contaminación:

$$U = LnC - \beta L^2 - \theta P$$

1. Esta aplicación fue tomada de Léonard, Daniel y Ngo Van Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993, pp. 224–226. El problema se basa en el artículo escrito por Forster, Bruce A., "On a One State Variable Optimal Control Problem: Consumption-Pollution Trade-Offs", en Forster, Bruce A., *Applications of Control Theory to Economic Analysis*, Amsterdam: North Holland, 1977.

En la función de utilidad, el consumo incrementa el nivel de bienestar, mientras que el trabajo y la contaminación lo disminuyen.

Si consideramos que la sociedad descuenta las utilidades futuras a la tasa ρ , y reemplazamos la condición $C = \alpha L$ en la función de utilidad, el problema de control óptimo se resumiría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V = \int_0^T \left[LnC - \frac{\beta}{\alpha^2} C^2 - \theta P \right] e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a} \quad & P' = C^2 - \gamma P \\ & P(0) = 1 \\ & P(T) = P_T \quad (P_T \text{ libre}) \end{aligned}$$

En este problema, la variable de control viene dada por el consumo (C), mientras que la variable de estado está representada por el *stock* de polución (P). La función Hamiltoniana es la siguiente:

$$H(t, C, P, \lambda) = (LnC - \frac{\beta}{\alpha^2} C^2 - \theta P) e^{-\rho t} + \lambda (C^2 - \gamma P)$$

Para maximizar el Hamiltoniano, debe cumplirse las condiciones de optimización²:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \left[\frac{1}{C} - \frac{2\beta}{\alpha^2} C \right] e^{-\rho t} + 2\lambda C = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial C^2} = \left[-\frac{1}{C^2} - \frac{2\beta}{\alpha^2} \right] e^{-\rho t} + 2\lambda \leq 0$$

Despejando la condición de primer orden obtenemos la siguiente expresión para el consumo:

$$C = \left[\frac{2\beta}{\alpha^2} - 2\lambda e^{\rho t} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

2. Posteriormente se demuestra que la variable de coestado es no positiva en el periodo de optimización, con lo cual la condición de segundo orden de la maximización se cumple.

El sistema Hamiltoniano del problema viene dado por el siguiente par de ecuaciones de movimiento:

$$P' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = C^2 - \gamma P$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial P} = \theta e^{-\rho t} + \gamma \lambda$$

La ecuación de movimiento de la variable de coestado constituye una ecuación diferencial de primer orden, que puede ser resuelta de manera independiente. La solución general de esta variable es la siguiente:

$$\lambda'(t) = H_1 e^{\rho t} - \frac{\theta}{\rho + \gamma} e^{-\rho t}$$

Para hallar la constante H_1 , basta con aplicar la condición de transversalidad:

$$\lambda'(T) = H_1 e^{\rho T} - \frac{\theta}{\rho + \gamma} e^{-\rho T} = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos H_1 en función de todos los parámetros del problema, con lo cual llegamos a las variables de coestado y control óptimas:

$$\lambda^*(t) = \frac{\theta}{\rho + \gamma} e^{-\rho t} [e^{-(\rho + \gamma)(T-t)} - 1] \quad (29)$$

$$C^*(t) = \left[\frac{2\beta}{\alpha^2} + \frac{2\theta}{\rho + \gamma} (1 - e^{-(\rho + \gamma)(t-T)}) \right]^{-1/2} \quad (30)$$

Este problema de optimización intertemporal da como resultado una variable de coestado no positiva en todo el horizonte temporal³. Dado que esta variable se interpreta como el precio sombra del *stock* de polución, es razonable que tome un valor no positivo. Ello implica que el incremento de una unidad adicional de polución disminuye el valor del funcional objetivo, compuesto por la agregación de las utilidades futuras descontadas.

3. Ello puede ser comprobado por el lector, ya que el segundo término exponencial siempre es inferior a la unidad, con lo cual la variable de coestado sería no positiva.

La senda del *stock* de polución puede obtenerse reemplazando la senda óptima de consumo en la ecuación de movimiento:

$$P' = \left[\frac{2\beta}{\alpha^2} + \frac{2\theta}{\rho + \gamma} (1 - e^{(\rho+\gamma)(t-T)}) \right]^{-1} - \gamma P$$

Esta ecuación diferencial se resuelve mediante métodos numéricos, por lo cual no se derivará una solución exacta. En su lugar, se esbozará una solución genérica de la trayectoria de la contaminación. Para ello se traslada al lado izquierdo de la ecuación el término γP y se multiplica toda la expresión por $e^{\gamma t}$:

$$e^{\gamma t} \left[\frac{2\beta}{\alpha^2} + \frac{2\theta}{\rho + \gamma} (1 - e^{(\rho+\gamma)(t-T)}) \right]^{-1} = e^{\gamma t} (P' - \gamma P) = \frac{d}{dt} (P e^{\gamma t})$$

Si integramos esta expresión entre 0 y t , y empleamos como variable auxiliar τ , obtendríamos finalmente la siguiente expresión para el *stock* de contaminación:

$$P^*(t) = e^{-\gamma t} \left[1 + \int_0^t e^{\gamma \tau} \left[\frac{2\beta}{\alpha^2} + \frac{2\theta}{\rho + \gamma} (1 - e^{(\rho+\gamma)(\tau-T)}) \right]^{-1} d\tau \right] \quad (31)$$

2. Condición de transversalidad

El problema base de control óptimo (1) puede ser modificado asumiendo un valor final de la variable de estado determinado (y_T , T fijo), un horizonte de tiempo indeterminado (T libre), o un valor final de la variable de estado que dependa del tiempo (curva terminal $y_T = \phi(T)$). Para resolver el problema de control óptimo en estos tres casos, es necesario contar con condiciones de transversalidad distintas a las establecidas en el principio del máximo (3). La condición de transversalidad genérica para estos tres casos puede obtenerse a partir de los dos últimos términos de la ecuación (17):

$$[H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T = 0 \quad (32)$$

A continuación se explican las condiciones de transversalidad específicas para los tres casos anteriores.

2.1 Casos especiales de la condición de transversalidad

Caso 1.- Valor terminal y horizonte temporal fijo

Cuando el valor terminal de la variable de estado y el horizonte temporal se encuentran prefijados, se cumple que sus diferencias Δy_T y ΔT son iguales a cero; por lo tanto, (28) se satisface automáticamente. En este sentido, para determinar la solución del problema de control óptimo, basta emplear la condición:

$$y(T) = y_T \quad (T, y_T \text{ dado}) \quad (33)$$

Ejemplo.- Halle las trayectorias $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ que resuelvan el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^T \frac{u^{1-\theta}}{1-\theta} \quad (\theta \in]0,1[) \\ \text{sujeto a} & y' = -y - u \\ & y(0) = 2 \\ & y(1) = 1 \end{array}$$

La función Hamiltoniana del problema sería la siguiente:

$$H(t, y, u, \lambda) = \frac{u^{1-\theta}}{1-\theta} + \lambda(-y - u)$$

En esta caso, el Hamiltoniano constituye una función no lineal, por lo cual pueden emplearse las condiciones de optimización tradicionales:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u^{-\theta} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -\theta u^{-\theta-1} \leq 0$$

A partir de la condición de maximización puede expresarse la variable de control óptima en función de la variable de coestado: $u^*(t) = \lambda^{-1/\theta}$. Posteriormente, se pueden plantear las ecuaciones de movimiento para las variables de estado y coestado:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -y - u$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = \lambda$$

Al reemplazar la variable de control óptima en la ecuación de movimiento de la variable de estado, las dos ecuaciones anteriores constituirían un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. Para obtener las trayectorias óptimas de una manera simplificada, resulta conveniente resolver independientemente cada ecuación de movimiento. La senda óptima de la variable de coestado está dada por la solución de su ecuación de movimiento:

$$\lambda^*(t) = H_1 e^t \quad (34)$$

A partir de (34) es posible obtener la senda óptima de la variable de control:

$$u^*(t) = (\lambda^*(t))^{-\frac{1}{\theta}} = (H_1 e^t)^{-\frac{1}{\theta}} = H_1^{-\frac{1}{\theta}} e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (35)$$

La senda óptima de la variable de estado puede hallarse reemplazando la variable de control en la ecuación de movimiento:

$$y' = -y - H_1^{-\frac{1}{\theta}} e^{-\frac{t}{\theta}}$$

La solución general de la ecuación diferencial es la siguiente:

$$y^*(t) = H_2 e^{-t} + \frac{\theta}{1-\theta} H_1^{-\frac{1}{\theta}} e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (36)$$

Las constantes H_1 y H_2 del problema pueden obtenerse a partir de la condición inicial y terminal de la variable de estado:

$$y^*(0) = H_2 + \frac{\theta}{1-\theta} H_1^{-\frac{1}{\theta}} = 2$$

$$y^*(1) = H_2 e^{-1} + \frac{\theta}{1-\theta} H_1^{-\frac{1}{\theta}} e^{-\frac{1}{\theta}} = 1$$

Este sistema de ecuaciones tiene como solución los siguientes valores:

$$H_1 = \left[\left(\frac{1-\theta}{\theta} \right) \left(\frac{1-2e^{-1}}{e^{-\frac{1}{\theta}} - e^{-1}} \right) \right]^{-\theta}$$

$$H_2 = \frac{2e^{-\frac{1}{\theta}} - 1}{e^{-\frac{1}{\theta}} - e^{-1}}$$

Estas dos constantes junto con las sendas (34), (35) y (36), determinan la solución al problema de control óptimo.

Caso 2.- Valor terminal fijo

En este caso, como el valor terminal de la variable de estado es constante, se cumple que su primera diferencia Δy_T es igual a cero. En este sentido, para que se satisfaga la condición (32) independientemente del valor que tome la diferencia del horizonte de tiempo ΔT , debe cumplirse:

$$[H]_{t=T} = 0 \quad (37)$$

Es decir, el Hamiltoniano debe ser igual a cero en el último período. Este caso es similar al analizado en el cálculo de variaciones, y la representación del problema es la misma a la presentada en el Gráfico No. 2.7.

Ejemplo.- Halle las trayectorias $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ que resuelvan el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V = \int_0^T (-u^2 - ut) dt \\ \text{sujeto a} \quad & y' = u \\ & y(0) = 1 \\ & y(T) = 5 \quad (T \text{ libre}) \end{aligned}$$

La función Hamiltoniana del problema está dada por:

$$H(t, y, u, \lambda) = -u^2 - ut + \lambda u$$

Aplicando las condiciones del principio del máximo, optimizamos la función Hamiltoniana con respecto a la variable de control:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u - t + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$$

Simplificando la condición de primer orden podemos expresar la variable de control en función de la variable de coestado y el tiempo: $u(t) = (\lambda - t)/2$. Posteriormente, obtenemos el sistema canónico dado por las ecuaciones de movimiento de las variables de estado y coestado:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Integrando ambos lados de la ecuación de movimiento de la variable de coestado obtenemos su trayectoria óptima, que en este caso es una constante:

$$\int d\lambda = \int 0 dt \quad (38)$$

$$\lambda^*(t) = H_1$$

Reemplazando esta solución en la variable de control, obtenemos la siguiente senda óptima:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{H_1}{2} \quad (39)$$

La senda de la variable de coestado puede obtenerse a partir de (39) y la respectiva ecuación de movimiento:

$$\int dy = \int \left(-\frac{1}{2}t + \frac{H_1}{2} \right) dt \quad (40)$$

$$y^*(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{H_1}{2}t + H_2$$

Para hallar las constantes H_1 y H_2 del problema, debemos emplear tres condiciones. La primera se obtiene al evaluar la variable de estado $y^*(t)$ en el punto inicial; la segunda, al evaluar la misma variable en el punto final (con el horizonte de tiempo desconocido); y la tercera está dada por la condición de transversalidad $[H]_{t=T} = 0$. A partir de la primera condición $y(0) = 1$ se obtiene el valor de la constante H_2 :

$$y^*(0) = H_2 = 1$$

Por otra parte, la condición de transversalidad brinda la siguiente relación:

$$[H]_{t=T} = -u^*(T)^2 - u^*(T)T + \lambda^*(T)u^*(T) = 0$$

Esta condición, junto con la senda óptima de control $u^*(t) = (\lambda - t)/2$, se reduce a la ecuación $u^2(T) = 0$ o $u(T) = 0$. Empleando (39), planteamos dicha condición:

$$u^*(T) = -\frac{1}{2}T + \frac{H_1}{2} = 0$$

$$H_1 = T$$

Finalmente, al evaluar a la variable de estado en el punto final y empleando la condición $H_1 = T$, obtenemos la siguiente ecuación cuadrática:

$$y(T) = -\frac{1}{4}T^2 + \frac{H_1}{2}T + 1 = 5$$

$$y(T) = -\frac{1}{4}T^2 + \frac{1}{2}T^2 + 1 = 5$$

Las raíces de esta ecuación son los valores $T = \pm 4$, como el valor $T = -4$ no es relevante, el horizonte de tiempo que resuelve el problema sería $T = 4$. De este modo, a partir de (38), (39) y (40) junto con las constantes $H_1 = 4$ y $H_2 = 1$, se obtendrían las trayectorias óptimas del problema de control óptimo:

$$y'(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 2t + 1$$

$$u'(t) = -\frac{1}{2}t + 2$$

$$\lambda'(t) = 4$$

Caso 3.- Curva terminal

En este último caso, el valor terminal de la variable de estado depende del horizonte de tiempo a través de la función $y_T = \phi(T)$. Aplicando diferencias, obtenemos una condición que relaciona la variación del horizonte temporal ΔT con la variación del valor terminal Δy_T : $\Delta y_T = \phi'(T)\Delta T$. Reemplazando esta condición en (32) obtenemos:

$$[H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T)\phi'(T)\Delta T = [H - \lambda\phi']_{t=T} \Delta T = 0$$

Para un valor arbitrario de ΔT , bastará que se cumpla la condición de transversalidad:

$$[H - \lambda\phi']_{t=T} = 0 \quad (41)$$

Este problema es similar al desarrollado mediante el cálculo de variaciones, y la representación de la condición de transversalidad se muestra en el Gráfico No. 2.8.

Ejemplo.- Halle la senda con menor distancia entre el origen y la curva $y(t) = 10 - t^2$.

Este es un problema de minimización de la distancia, el cual ha sido desarrollado en el capítulo anterior mediante el cálculo de variaciones. La resolución mediante el control óptimo no implica mayores dificultades. El planteamiento del problema es el siguiente⁴:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V = \int_0^T -\sqrt{1+u^2} dt \\ \text{sujeto a} \quad & y' = u \\ & y(0) = 0 \\ & y(T) = 10 - T^2 \end{aligned}$$

El Hamiltoniano del problema está dado por:

$$H(t, y, u, \lambda) = -\sqrt{1+u^2} + \lambda u$$

Como la función Hamiltoniana es no lineal con respecto a la variable de control, entonces se aplican las condiciones de maximización:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} 2u + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -(1+u^2)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

4. Si se reemplazara la ecuación de movimiento $y' = u$ en la función intermedia, obtendríamos el planteamiento de un problema de cálculo de variaciones.

A partir de la maximización del Hamiltoniano se obtiene la siguiente expresión para la variable de control: $u^*(t) = \lambda/(1 - \lambda^2)^{1/2}$. Las ecuaciones de movimiento para las variables de estado y coestado vienen dadas por:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Integrando ambos lados de la segunda ecuación de movimiento, obtenemos que la variable de coestado es igual a una constante:

$$\lambda^*(t) = H_1 \quad (42)$$

Reemplazando (42) en la variable de control, obtenemos lo siguiente:

$$u^*(t) = \frac{H_1}{\sqrt{1 - H_1^2}} \quad (43)$$

A partir de (43) y la primera ecuación de movimiento, se puede obtener la senda óptima de la variable de estado:

$$y^*(t) = \frac{H_1}{\sqrt{1 - H_1^2}} t + H_2 \quad (44)$$

Al igual que en el caso anterior, para hallar las constantes H_1 y H_2 del problema, es necesario emplear tres condiciones: la variable de estado evaluada en el punto inicial, la variable de estado evaluada en el punto final (con el tiempo y el valor terminal desconocido) y la condición de transversalidad. La variable de estado en el punto inicial cumple con la condición:

$$y^*(0) = H_2 = 0$$

Aplicando la condición de transversalidad (41) con la curva terminal $\phi(T) = 10 - T^2$, obtenemos la condición:

$$[H - \lambda\phi']_{t=T} = -\sqrt{1 + \frac{H_1^2}{1 - H_1^2}} + \frac{H_1^2}{\sqrt{1 - H_1^2}} + 2TH_1 = 0$$

Simplificando la condición de transversalidad llegamos a la siguiente relación:

$$\frac{H_1}{\sqrt{1 - H_1^2}} = \frac{1}{2T}$$

Finalmente, reemplazando la relación anterior en el valor terminal de la variable de estado, obtenemos una ecuación cuadrática:

$$y^*(T) = \frac{H_1}{\sqrt{1 - H_1^2}} T = \frac{1}{2T} T = \frac{1}{2} = 10 - T^2$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son: $T = \pm\sqrt{38}/2$. En este caso, el valor negativo queda descartado y el horizonte de tiempo estaría dado por $T = \sqrt{38}/2$. Empleando este resultado obtenemos las trayectorias óptimas que resuelven el problema:

$$y^*(t) = \sqrt{\frac{1}{38}} t$$

$$u^*(t) = \sqrt{\frac{1}{38}}$$

$$\lambda^*(t) = \sqrt{\frac{1}{39}}$$

2.2 Aplicación: asignación de consumo y ahorro⁵

La asignación de consumo y ahorro de un agente puede ser formulada de una manera sencilla, en un problema de optimización intertemporal. Consideremos un individuo que vive “ T ” años, a lo largo de los cuales percibe una remuneración igual a “ w ”, gana una tasa de interés “ r ” sobre sus ahorros, y paga sus deudas a la misma tasa. Dado una senda del nivel de consumo (C) a lo largo del tiempo, sus ahorros (S) evolucionan de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$S' = w + rS - C$$

Esta ecuación de movimiento determina la evolución de los ahorros a lo largo del tiempo. En términos sencillos, ésta establece que la diferencia entre los ingresos ($w + rS$) y el consumo (C) determina la variación del ahorro. Por otra parte, este agente no ha recibido herencia alguna y piensa consumir toda su riqueza a lo largo de su vida:

$$S(0) = S(T) = 0$$

Por último, el individuo presenta la siguiente función de utilidad intertemporal:

$$U = \int_0^T \text{Ln}(C)e^{-\rho t} dt$$

El problema que debe resolver el agente, para determinar las trayectorias óptimas del consumo (variable de control) y el ahorro (variable de estado), es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U = \int_0^T \text{Ln}(C)e^{-\rho t} dt \\ \text{suje}to & a \quad S' = w + rS - C \\ & S(0) = 0 \\ & S(T) = 0 \end{array}$$

5. Esta aplicación fue tomada de Dixit, Avinash. *Optimization in Economic Theory*, Oxford: Oxford University Press, 1993, pp. 154–155.

La función Hamiltoniana del problema es la siguiente:

$$H(t, y, u, \lambda) = Ln(C)e^{-\rho t} + \lambda(w + rS - C)$$

Como la función es no lineal con respecto al consumo, aplicamos las condiciones de optimización tradicionales:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = \frac{1}{C} e^{-\rho t} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial C^2} = -\frac{1}{C^2} e^{-\rho t} \leq 0$$

Simplificando esta condición podemos obtener el consumo en función de la variable de coestado $C = (e^{-\rho t})/\lambda$. Por otro lado, la variable de coestado puede obtenerse a partir de su ecuación de movimiento:

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial S} = -r\lambda$$

Cuya solución es:

$$\lambda^*(t) = H_1 e^{-rt}$$

La trayectoria óptima de la variable de coestado puede reemplazarse en la condición de optimización del Hamiltoniano, y así obtenemos la senda del consumo:

$$C^*(t) = \frac{1}{H_1} e^{(r-\rho)t}$$

Por último, para hallar la senda del ahorro, reemplazamos el consumo óptimo en la ecuación de movimiento:

$$S' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = w + rS - C^* = w + rS - \frac{1}{H_1} e^{(r-\rho)t}$$

Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos la siguiente función de ahorro:

$$S'(t) = H_2 e^{rt} + \frac{1}{H_1 \rho} e^{(r-\rho)t} - \frac{w}{r}$$

Evaluando la senda óptima del ahorro en la condición inicial y final $S(0) = S(T) = 0$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que determina las constantes H_1 y H_2 :

$$S'(0) = H_2 + \frac{1}{H_1 \rho} - \frac{w}{r} = 0$$

$$S'(T) = H_2 e^{rT} + \frac{1}{H_1 \rho} e^{(r-\rho)T} - \frac{w}{r} = 0$$

La solución a este sistema de ecuaciones está dada por:

$$H_1 = \frac{r e^{rT} (e^{-\rho T} - 1)}{\rho w (1 - e^{rT})}$$

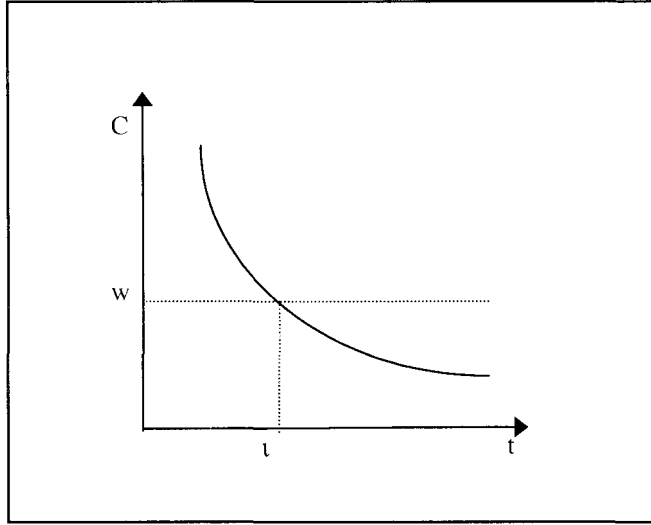
$$H_2 = \frac{w (e^{(r-\rho)T} - 1)}{r e^{rT} (e^{-\rho T} - 1)}$$

La evolución del consumo a lo largo del tiempo dependerá del valor relativo de la tasa de interés con respecto a la tasa de descuento. Por ejemplo, si la tasa de descuento de la utilidad es superior a la tasa de interés, la tasa de crecimiento del consumo sería negativa:

$$\frac{C'}{C} = r - \rho < 0$$

En ese caso, el consumo sería superior al ingreso laboral “w” hasta el período “t”, mientras que sería inferior a “w” a partir de dicho instante. Esto implica que en un período de tiempo, el individuo acumula deudas y posteriormente disminuye su consumo, de tal forma que financia toda la deuda contraída previamente. Este comportamiento se ilustra en el Gráfico No. 3.4. Queda como ejercicio para el lector determinar el período crítico “t” en función de los parámetros del problema.

Gráfico No. 3.4



3. Condición de segundo orden

De manera similar al cálculo de variaciones, para que el funcional objetivo sea maximizado debe satisfacerse una condición de suficiencia. Si se cumple la *condición de segundo orden*, entonces el *principio del máximo* es suficiente para la maximización del funcional. A continuación se desarrollará una condición de suficiencia, conocida como el **teorema de suficiencia de Mangasarian**.

3.1 Condición de segundo orden (teorema de suficiencia de Mangasarian)⁶

Si la función Hamiltoniana (2) es cóncava (convexa) respecto a (y, u) y el horizonte de tiempo (T) se encuentra fijo, entonces el principio del máximo es una condición suficiente para la maximización (minimización) del funcional objetivo.

6. Basado en el trabajo de Mangasarian. O.L., "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems", en *SIAM Journal on Control*, vol. 4, 1966, pp. 139–152.

3.2 Condiciones de concavidad y convexidad

El Hamiltoniano es una función cóncava con respecto a (y, u) si:

- a) $f(t, y, u)$ es cóncava, $g(t, y, u)$ es cóncava y $\lambda(t) \geq 0$.
- b) $f(t, y, u)$ es cóncava, $g(t, y, u)$ es convexa y $\lambda(t) \leq 0$.

El Hamiltoniano es una función convexa con respecto a (y, u) si:

- a) $f(t, y, u)$ es convexa, $g(t, y, u)$ es convexa y $\lambda(t) \geq 0$.
- b) $f(t, y, u)$ es convexa, $g(t, y, u)$ es cóncava y $\lambda(t) \leq 0$.

Demostración

La demostración se realizará sobre la base del problema más simple de control óptimo (1). Considerando la función Hamiltoniana (2) y que las funciones $f(t, y, u)$ y $g(t, y, u)$ son cóncavas y diferenciables, el principio del máximo establece las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \quad (45)$$

$$\lambda' = -\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad (46)$$

$$\lambda(T) = 0 \quad (47)$$

Además, para asegurar la concavidad de la función Hamiltoniana, supondremos que $\lambda(t) \geq 0$ ($\forall t \in [0, T]$). Por otra parte, considerando que las funciones $f(t, y, u)$ y $g(t, y, u)$ son cóncavas, y la existencia de sendas óptimas (λ^*, y^*, u^*) , y sendas factibles (λ, y, u) , entonces se cumplen las desigualdades:

$$f(t, y, u) - f(t, y^*, u^*) \leq f_y(t, y^*, u^*)(y - y^*) + f_u(t, y^*, u^*)(u - u^*) \quad (48)$$

$$g(t, y, u) - g(t, y^*, u^*) \leq g_y(t, y^*, u^*)(y - y^*) + g_u(t, y^*, u^*)(u - u^*)$$

Si integramos ambos lados de la primera desigualdad en (48), obtenemos lo siguiente:

$$V - V^* \leq \int_0^T [f_y(t, y^*, u^*)(y - y^*) + f_u(t, y^*, u^*)(u - u^*)] dt \quad (49)$$

Reemplazando las condiciones del principio del máximo (45) y (46) en la desigualdad (49), se obtiene:

$$V - V^* \leq \int_0^T [(-\lambda^* g_y(t, y, u) - \lambda') (y - y^*) - \lambda^* g_u(t, y, u)(u - u^*)] dt \quad (50)$$

Simplificando (50) se llega a la siguiente expresión:

$$V - V^* \leq \int_0^T [-\lambda' (y - y^*) - \lambda^* g_y(t, y^*, u^*)(y - y^*) - \lambda^* g_u(t, y^*, u^*)(u - u^*)] dt \quad (51)$$

El primer componente de la integral de (51) puede ser modificado mediante una integración por partes del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \int_0^T [-\lambda' (y - y^*)] dt &= [-\lambda^* (y - y^*)]_0^T - \int_0^T [-\lambda^* (y' - y'^*)] dt \\ &= -\lambda^* (T)(y_T - y_T^*) + \lambda^* (0)(y_0 - y_0^*) + \int_0^T [\lambda^* (y' - y'^*)] dt \end{aligned} \quad (52)$$

El primero de los términos es igual a cero por la condición de transversalidad (47), y el segundo término también desaparece, ya que el valor inicial de la senda óptima y la senda factible son iguales ($y_0^* = y_0$). Finalmente, si consideramos que la variación de la variable de estado viene determinada por la ecuación de movimiento, la expresión (52) se resumiría del siguiente modo:

$$\int_0^T [-\lambda' (y - y^*)] dt = \int_0^T [\lambda^* (g(t, y, u) - g(t, y^*, u^*))] dt \quad (53)$$

Reemplazando (53) en (51) se obtiene la desigualdad:

$$V - V^* \leq \int_0^T [\lambda^* (g(t, y, u) - g(t, y^*, u^*)) - \lambda^* g_y(t, y^*, u^*) (y - y^*) - \lambda^* g_u(t, y^*, u^*) (u - u^*)] dt \quad (54)$$

$$V - V^* \leq \int_0^T [\lambda^* [(g(t, y, u) - g(t, y^*, u^*) - g_y(t, y^*, u^*) (y - y^*) - g_u(t, y^*, u^*) (u - u^*))]] dt$$

Tomando en cuenta la segunda desigualdad en (48) y que la variable de coestado es no negativa⁷, el lado izquierdo de la desigualdad tomaría un valor no positivo y, por lo tanto, se cumpliría:

$$V \leq V^* \quad (55)$$

De este modo, si las funciones $f(t, y, u)$ y $g(t, y, u)$ son cóncavas, y la variable de coestado es no negativa en todo el horizonte de tiempo, entonces, las sendas (u^*, y^*, λ^*) obtenidas a partir de las condiciones del principio del máximo aseguran que el funcional objetivo sea maximizado. Expresado de otra forma, si la función Hamiltoniana es cóncava con respecto a la variable de control y estado (y, u) , el principio del máximo es una condición suficiente para la maximización del funcional objetivo, es decir, para que se cumpla la desigualdad (55). Si las funciones $f(t, y, u)$ y $g(t, y, u)$ fueran estrictamente cóncavas, la desigualdad (55) sería estricta y el funcional objetivo alcanzaría un único máximo global. Cuando se considera el valor terminal de la variable de estado fijo, los resultados anteriores no se ven alterados. Empleando la condición (52), el lector puede demostrar que en dicho caso la desigualdad (55) se mantiene.

Ejemplo 1.- Evalúe la condición de segundo orden para el problema desarrollado en la sección 1.2 de este capítulo.

En este caso se verificará la condición de suficiencia de manera separada para la ecuación de movimiento y la función intermedia. La ecuación de movimiento del problema es la siguiente:

$$g(C, P) = C^2(t) - \gamma P(t)$$

7. Tal como lo establece el caso (a) de la sección 3.2 del presente capítulo.

y su matriz Hessiana es:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los menores principales de la matriz son $\Delta_1 = 2$ y $\Delta_2 = 0$, por lo que la matriz es semidefinida positiva y la ecuación de movimiento es convexa. Por otra parte, la función intermedia es la siguiente:

$$f(C, P) = \ln C - \frac{\beta}{\alpha^2} C^2 - \theta P$$

la cual presenta la siguiente matriz Hessiana:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{C^2} - \frac{2\beta}{\alpha^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y los menores principales:

$$\Delta_1 = \left| -\frac{1}{C^2} - \frac{2\beta}{\alpha^2} \right| = -\frac{1}{C^2} - \frac{2\beta}{\alpha^2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \left(-\frac{1}{C^2} - \frac{2\beta}{\alpha^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz Δ es semidefinida negativa y, por lo tanto, la función intermedia es cóncava. Considerando que la variable de coestado es no positiva en este ejemplo, nos encontraríamos en el caso (b) del punto 3.2, de tal forma que la función Hamiltoniana sería cóncava y se cumpliría la condición de suficiencia de Mangasarian.

Ejemplo 2.- Evalúe la condición de segundo orden para el problema desarrollado en la sección 2.2 de este capítulo.

En el problema de asignación de consumo y ahorro, la función Hamiltoniana está definida por:

$$H(t, S, C, \lambda) = \ln(C)e^{-\rho t} + \lambda(w + rS - C)$$

La matriz Hessiana del Hamiltoniano es la siguiente:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C^2} e^{-\rho t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los menores principales son iguales a:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{C^2} e^{-\rho t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{C^2} e^{-\rho t} < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{C^2} e^{-\rho t} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz Δ es semidefinida negativa; por lo tanto, la función Hamiltoniana es cóncava. De esta manera, la condición de suficiencia se satisface, y se comprueba que las sendas óptimas halladas maximizan el funcional objetivo.

4. Comparación entre el cálculo de variaciones y el control óptimo

Hasta el momento, hemos estudiado el problema de cálculo de variaciones y el de control óptimo de manera separada. En esta sección se demostrará que el cálculo de variaciones constituye tan sólo un caso particular del problema de control óptimo, y que tanto las condiciones de primer orden como las de suficiencia llegan a ser similares para ambos casos.

Consideremos el siguiente problema general de cálculo de variaciones:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^T f(t, y, y') dt \\ \text{sujeto a} & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\ & y(T) = y_T \quad (y_T \text{ libre}) \end{array} \quad (56)$$

Estableciendo la ecuación de movimiento $y' = g(y, u) = u$, el problema de control óptimo equivalente sería el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^T f(t, y, u) dt \\ \text{sujeta a} & y' = u \\ & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\ & y(T) = y_T \quad (y_T \text{ libre}) \end{array} \quad (57)$$

Para resolver el problema (57), en primer lugar debemos plantear la función Hamiltoniana:

$$H = f(t, y, u) + \lambda u$$

A partir de la función Hamiltoniana, derivamos las condiciones que conforman el principio del máximo⁸:

$$\begin{array}{ll} a. & \frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda = 0 \\ b. & y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \\ c. & \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -f_y \\ d. & \lambda(T) = 0 \end{array} \quad (58)$$

A partir de las condiciones (a) y (b) del principio del máximo, obtenemos la relación:

$$\lambda = -f_{y'} \quad (59)$$

Derivando la expresión (59) con respecto al tiempo se obtiene lo siguiente:

$$\lambda' = -\frac{d}{dt} f_{y'} \quad (60)$$

8. Por simplicidad asumiremos que la función Hamiltoniana presenta una solución interior.

Al igualar (60) con la condición (c) del principio del máximo llegamos a la siguiente identidad:

$$f_y = \frac{d}{dt} f_{y'} \quad (61)$$

que no es otra cosa que la ecuación de Euler planteada en la ecuación (4) del capítulo II. De esta manera, a partir de la condición de primer orden del problema de control óptimo, puede obtenerse la respectiva condición de primer orden para el problema de cálculo de variaciones. Con respecto a la condición de transversalidad del problema (57), a partir de (59) y la condición (d) del principio del máximo, se obtiene lo siguiente:

$$\{f_{y'}\}_{t=T} = 0 \quad (62)$$

que también representa la condición de transversalidad del problema de cálculo de variaciones planteada en la ecuación (39) del capítulo II. Para las otras condiciones terminales y empleando (58), las condiciones de transversalidad tanto del problema de control óptimo como del cálculo de variaciones llegan a ser equivalentes. En el Cuadro No. 3.1 se resume la relación existente entre las condiciones de transversalidad de ambos problemas.

Cuadro No. 3.1

CONDICIONES DE TRANSVERSALIDAD PARA LOS PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO Y CÁLCULO DE VARIACIONES

Condición terminal	Condición de transversalidad Control óptimo	Condición de transversalidad Cálculo de variaciones
$(y_T \text{ fijo, } T \text{ fijo})$	$y(T) = y_T$	$y(T) = y_T$
$(y_T \text{ fijo, } T \text{ libre})$	$[H]_{t=T} = 0$	$\{f - y'f_{y'}\}_{t=T} = 0$
$(y_T = \phi(T))$	$[H - \lambda\phi'(T)]_{t=T} = 0$	$\{f + (\phi'(T) - y')f_{y'}\}_{t=T} = 0$

La condición de segundo orden en ambos problemas también llega a ser similar. La condición de suficiencia en el problema de control óptimo establece que si la función Hamiltoniana es cóncava (convexa) con respecto a la varia-

ble de control y estado, entonces, el principio del máximo resuelve el problema de maximización (minimización) del funcional objetivo. Para que el Hamiltoniano sea cóncavo, la matriz de segundas derivadas y derivadas cruzadas debe ser definida o semidefinida negativa. Es decir, dada la siguiente matriz:

$$\Delta = \begin{bmatrix} H_{yy} & H_{yu} \\ H_{uy} & H_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{yy} & f_{yu} \\ f_{uy} & f_{uu} \end{bmatrix} \quad (63)$$

los menores principales Δ_1 y Δ_2 :

$$\Delta_1 = |f_{yy}|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{yy} & f_{yu} \\ f_{uy} & f_{uu} \end{vmatrix}$$

deben satisfacer las condiciones $\Delta_1 \leq 0$ y $\Delta_2 \geq 0$, si la matriz es semidefinida negativa, y $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$, si es definida negativa. En el cálculo de variaciones, la condición de suficiencia establece que la función intermedia debe ser cóncava (convexa) para que la ecuación de Euler y la condición de transversalidad resuelvan el problema de maximización (minimización) del funcional objetivo. Reemplazando la ecuación de movimiento $y' = u$ en (63), obtendríamos la condición de suficiencia para el problema de cálculo de variaciones. Es decir, dada la matriz:

$$\Delta = \begin{bmatrix} f_{yy} & f_{yy'} \\ f_{y'y} & f_{y'y'} \end{bmatrix} \quad (64)$$

y los menores principales Δ_1 y Δ_2 :

$$\Delta_1 = |f_{yy}|$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{yy} & f_{yy'} \\ f_{y'y} & f_{y'y'} \end{vmatrix}$$

La función intermedia será cóncava si la matriz (64) es semidefinida negativa ($\Delta_1 \leq 0$ y $\Delta_2 = 0$), y estrictamente cóncava si la matriz es definida negativa ($\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 > 0$).

5. Control óptimo con factor de descuento

Un problema de control óptimo común es aquel en el cual la función intermedia se encuentra multiplicada por un factor de descuento. En estos casos, mediante un artificio, el Hamiltoniano puede ser transformado de tal forma que las condiciones del principio del máximo sean derivadas de una forma más sencilla. Consideremos el siguiente problema de control óptimo con factor de descuento:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V = \int_0^T e^{-\rho t} f(t, y, u) dt & (65) \\ \text{sujeto a} \quad & y' = g(t, y, u) \\ & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\ & y(T) = y_T \quad (y_T \text{ libre}) \\ & u(t) \in \Omega \end{aligned}$$

Con la respectiva función Hamiltoniana:

$$H = e^{-\rho t} f(t, y, u) + \lambda g(t, y, u) \quad (66)$$

Con el objeto de eliminar el factor de descuento y simplificar la derivación de las condiciones de primer orden, multiplicamos (66) por el factor $e^{\rho t}$, con lo cual obtenemos la siguiente expresión:

$$He^{\rho t} = H^* = f(t, y, u) + e^{\rho t} \lambda g(t, y, u) \quad (67)$$

Por otra parte, realizando una transformación a la variable de coestado:

$$m = \lambda e^{\rho t} \quad (68)$$

llegaríamos a la siguiente expresión:

$$H^* = f(t, y, u) + mg(t, y, u) \quad (69)$$

A la expresión (66) se le denomina Hamiltoniano en **valor presente** debido a que cuenta con un factor de descuento, mientras que a la expresión (69) se le denomina Hamiltoniano en **valor corriente**. En el primer caso, la variable de coestado (λ) se interpreta como el precio sombra de la variable de estado expresado en valor presente; y en el segundo, la nueva variable de coestado (m) se interpreta como el precio sombra expresado en valor corriente. A continuación obtendremos la condición del principio del máximo para el Hamiltoniano expresado en valor corriente.

La primera condición del principio del máximo establece que en cada instante del horizonte de tiempo, la función Hamiltoniana debe ser maximizada con respecto a la variable de control. Como el factor de descuento no depende de la variable de control, ésta se considera como una constante positiva que no altera el resultado del proceso de maximización. De esta forma, dicha condición puede plantearse del siguiente modo:

$$\underset{u}{\text{Maximizar}} H^* \quad \text{sujeto a } u(t) \in \Omega \quad (70)$$

La ecuación de movimiento para la variable de estado puede plantearse del siguiente modo:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(t, y, u) = \frac{\partial H^*}{\partial m} \quad (71)$$

La ecuación de movimiento de la nueva variable de coestado (m) puede derivarse a partir de la siguiente condición:

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (72)$$

Al derivar (68) con respecto al tiempo obtenemos la siguiente igualdad:

$$\lambda' = m' e^{-\rho t} - \rho m e^{-\rho t} \quad (73)$$

Además, a partir de (67) se cumple:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial H^*}{\partial y} e^{-\rho t} \quad (74)$$

Finalmente, reemplazando (74) y (73) en (72), obtenemos la ecuación de movimiento:

$$m' = -\frac{\partial H^*}{\partial y} + \rho m \quad (75)$$

La condición de transversalidad se puede obtener directamente a partir de (68) y de la condición del principio del máximo $\lambda(T) = 0$.

$$\lambda(T) = [m e^{-\rho T}]_{t=T} = m(T) e^{-\rho T} = 0 \quad (76)$$

A manera de resumen, el principio del máximo para el problema de control óptimo (65) estaría conformado por las siguientes condiciones:

- a. Maximizar H^* sujeto a $u(t) \in \Omega$ (77)
- b. $y' = \frac{\partial H^*}{\partial m}$
- c. $m' = -\frac{\partial H^*}{\partial y} + \rho m$
- d. $m(T) e^{-\rho T} = 0$

6. Control óptimo con horizonte temporal infinito

Al igual que en el cálculo de variaciones, algunas aplicaciones económicas de control óptimo se desarrollan suponiendo un horizonte temporal infinito. Este planteamiento si bien en muchos casos se ajusta a la realidad que se desea modelar, puede traer problemas en la medida en que el funcional objetivo no converja. Las condiciones para la convergencia del funcional objetivo analizadas en el capítulo anterior se siguen cumpliendo para el problema de control óptimo.

El problema básico de control óptimo con horizonte infinito a resolver es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^{\infty} f(t, y, u) dt \quad (78) \\ \text{sujeto a} & y' = g(t, y, u) \\ & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \end{array}$$

En la presente sección se desarrollarán las condiciones de primer y segundo orden necesarias para resolver el problema (78). Asimismo, se empleará la técnica del diagrama de fase para obtener una solución cualitativa al problema con horizonte temporal infinito.

6.1 Condiciones de primer y segundo orden

Las tres primeras condiciones del principio del máximo (3) se siguen cumpliendo para el horizonte temporal infinito; sin embargo, la cuarta, que representa la condición de transversalidad, debe ser modificada. En el problema con horizonte temporal infinito se debe cumplir que el límite en el infinito de (32) debe ser igual a cero, es decir:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (H|_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T) = 0 \quad (79)$$

Como el horizonte temporal T tiende a infinito, la diferencia ΔT es distinta de cero, por lo que necesariamente debe cumplirse:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = 0 \quad (80)$$

Si la variable de estado se encuentra libre, entonces Δy_T es distinto de cero y, por lo tanto, adicionalmente debe satisfacerse la condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0 \quad (81)$$

Por el contrario, si el valor terminal de la variable de estado se encuentra determinado, en lugar de la condición anterior, basta con emplear una meta asintótica:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\infty} \quad (82)$$

Donde y_{∞} es una constante que pertenece a los números reales. A continuación desarrollaremos un ejemplo, empleando los conceptos vistos hasta el momento.

Ejemplo.- Halle las trayectorias $y^*(t)$, $u^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ que resuelvan el problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V = \int_0^{\infty} e^{-3t} \left(-\frac{u^2}{2} + yu - \frac{y^2}{2} \right) dt \\ \text{sujeto a} \quad & y' = u \\ & y(0) = 1 \end{aligned}$$

La función Hamiltoniana del problema es la siguiente:

$$H = e^{-3t} \left(-\frac{u^2}{2} + yu - \frac{y^2}{2} \right) + \lambda u$$

La primera condición del principio del máximo establece que el Hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control. Como nos encontramos ante una función no lineal, se plantean las condiciones clásicas de optimización:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= e^{-3t}(-u + y) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} &= -e^{-3t} < 0 \end{aligned}$$

Simplificando la condición de primer orden obtenemos la siguiente relación:

$$\lambda = e^{-3t}(u - y) \quad (83)$$

Por otra parte, las ecuaciones de movimiento de las variables de estado y coestado son las siguientes:

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \quad (84)$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -e^{-3t}(u - y) \quad (85)$$

Al reemplazar (83) en la ecuación de movimiento de la variable de coestado, llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$\lambda' + \lambda = 0 \quad (86)$$

Cuya solución es:

$$\lambda^*(t) = H_1 e^{-t} \quad (87)$$

Donde H_1 es una constante desconocida por el momento. Para hallar la trayectoria de la variable de estado reemplazamos (87) y (84) en (83), con lo cual obtenemos la ecuación diferencial:

$$y' - y = H_1 e^{2t} \quad (88)$$

que presenta la siguiente solución:

$$y^*(t) = H_2 e^t + H_1 e^{2t} \quad (89)$$

Donde H_2 constituye una nueva constante. A partir de (89) y la ecuación de movimiento (84), obtenemos la senda óptima de la variable de control:

$$u^*(t) = H_2 e^t + 2H_1 e^{2t} \quad (90)$$

Para obtener el valor de las constantes H_1 y H_2 , en primer lugar, necesitamos la condición inicial $y(0) = 1$, con lo cual:

$$y^*(0) = H_2 + H_1 = 1 \quad (91)$$

Además, necesitamos contar con las condiciones de transversalidad para el caso de horizonte temporal infinito. La condición asociada al valor terminal libre es la siguiente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = H_1 e^{-t} = 0 \quad (92)$$

Como en esta expresión el exponente es negativo, la variable de coestado converge a cero, con lo cual la condición se satisface automáticamente independientemente del valor que tome la constante H_1 . En este sentido, necesitamos la otra condición de transversalidad para hallar el valor de las constantes:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-3t} \left(-\frac{u^2}{2} + uy - \frac{y^2}{2} \right) + \lambda u \right] = 0 \quad (93)$$

Simplificando el límite anterior obtenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-3t} \frac{1}{2} (u - y)^2 + \lambda u \right] \quad (94)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-3t} \frac{1}{2} (H_1 e^{2t})^2 + H_1 e^{-t} (H_2 + 2H_1 e^{2t}) \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} H_1^2 e^t + H_1 H_2 + 2H_1^2 e^t \right]$$

Para que la anterior expresión converja a cero, se debe cumplir que $H_1 = 0$. De este modo, la otra constante tomaría el valor $H_2 = 1$ y la solución al problema estaría dada por las sendas:

$$y^*(t) = e^t$$

$$u^*(t) = e^t$$

$$\lambda^*(t) = 0$$

Para verificar la condición de segundo orden evaluamos la matriz de derivadas cruzadas y segundas derivadas de la función Hamiltoniana:

$$\Delta = \begin{bmatrix} -e^{-3t} & e^{-3t} \\ e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (95)$$

Como la matriz es semidefinida negativa ($\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 0$), el principio del máximo y las condiciones de transversalidad constituyen condiciones suficientes para la maximización del funcional objetivo.

6.2 Aplicación: modelo neoclásico de crecimiento⁹

El modelo neoclásico de crecimiento fue planteado inicialmente por el matemático inglés Frank Ramsey en 1928, y posteriormente fue modificado por David Cass y Tjallingij C. Koopmans en 1965. Este modelo intenta explicar desde un enfoque neoclásico (asumiendo una función de producción neoclásica y supuestos de competencia perfecta), las características esenciales de un crecimiento económico óptimo. De esta forma se plantea un problema de optimización intertemporal del bienestar de las generaciones presentes y futuras de la sociedad, a partir del cual se pueden obtener las trayectorias óptimas de consumo, capital y producto. Cabe destacar que en este modelo se asume la existencia de un **planificador social**, que resuelve el problema y decide las asignaciones de consumo y capital. El modelo supone una economía en la cual se produce un solo bien, de acuerdo con la siguiente función de producción que depende del capital (K) y el trabajo (L):

$$Y = F(K, L) \quad (96)$$

Esta función de producción es neoclásica, en la medida en que cumpla tres propiedades. En primer lugar, debe presentar productos marginales positivos y decrecientes, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0 \\ \frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \end{aligned} \quad (97)$$

En segundo lugar, la función de producción debe presentar retornos constantes a escala:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \quad (\lambda > 0) \quad (98)$$

9. Si bien el modelo neoclásico de crecimiento fue desarrollado inicialmente por Cass, David ("Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", en *Review of Economic Studies*, vol. 32, No. 3, pp. 233-240) y Koopmans, T.C. (*On the Concept of Optimal Economic Growth*, Discussion paper, New Haven: Coules Foundation, Yale University, 1963), el desarrollo específico de esta aplicación fue tomado de Barro, Robert J. y Xavier Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw-Hill, 1995, pp. 59-74.

En tercer lugar, se deben cumplir las condiciones de Inada¹⁰:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 0} F_K &= \lim_{L \rightarrow 0} F_L = \infty \\ \lim_{K \rightarrow \infty} F_K &= \lim_{L \rightarrow \infty} F_L = 0 \end{aligned} \quad (99)$$

Por otro lado, se asume que la fuerza laboral crece a una tasa exógena "n":

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n \quad (100)$$

por lo tanto, presenta la siguiente trayectoria temporal:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \quad (L_0 > 0) \quad (101)$$

En el modelo también se asume una economía cerrada, en la cual se cumple la identidad macroeconómica:

$$Y = C + I \quad (102)$$

Es decir, la oferta agregada (Y) es igual a la suma de los componentes de la demanda agregada: consumo (C) e inversión bruta (I). Como la economía es cerrada, toda la inversión es financiada mediante el ahorro interno (S), en otras palabras, se cumple la igualdad $I = S$. La inversión bruta se define como la variación del *stock* de capital más la depreciación del capital. Considerando una tasa de depreciación del capital constante e igual a "δ", obtenemos lo siguiente:

$$I = K' + \delta K \quad (103)$$

Con la finalidad de simplificar el problema, se planteará el modelo en forma intensiva, es decir, expresando las variables en términos per cápita¹¹. A partir de (102) y (103) obtenemos la siguiente expresión para la identidad macroeconómica:

$$\frac{Y}{L} = \frac{C}{L} + \frac{K'}{L} + \delta \frac{K}{L} \quad (104)$$

10. Inada, Ken-Ichi, "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization", en *Review of Economic Studies*, vol. 30, 1963, pp. 119-127.

11. Se asume por simplicidad, que la población es igual al número de trabajadores.

Al expresar las variables per cápita en minúsculas, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\frac{K'}{L} = y - c - \delta k \quad (105)$$

Para obtener el ratio de variación del *stock* de capital sobre la cantidad de trabajadores, realizamos la siguiente derivación:

$$\begin{aligned} k' &= \left(\frac{K}{L} \right)' = \frac{K'}{L} - \frac{K}{L^2} L' \\ k' &= \frac{K'}{L} - \frac{K}{L} \frac{L'}{L} \\ k' &= \frac{K'}{L} - nk \end{aligned} \quad (106)$$

Además, considerando que la función de producción es homogénea de grado 1, se cumple que:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \Psi(k) \quad (107)$$

Reemplazando (107) y (106) en (105), obtenemos una versión simplificada de la identidad macroeconómica (105):

$$k' = \Psi(k) - c - (n + \delta)k \quad (108)$$

La ecuación diferencial (108) se interpreta también como la ecuación de movimiento del capital, ya que indica la evolución del *stock* de capital per cápita dada una senda de consumo específica.

Los agentes del modelo son homogéneos, es decir, presentan la misma función de utilidad con las siguientes características:

$$U'(c) > 0, U''(c) < 0 \quad (109)$$

Como los agentes son homogéneos, cada uno de ellos consume un monto igual al consumo per cápita (c). La utilidad agregada de la sociedad en un instante determinado, viene dada por la utilidad individual multiplicada por el número de agentes en la economía:

$$U(c)L(t) \quad (110)$$

De esta manera, el funcional objetivo del problema es igual a la suma de las utilidades futuras de la sociedad descontadas a la tasa ρ :

$$V = \int_0^{\infty} U(c)L(t)e^{-\rho t} dt = \int_0^{\infty} U(c)L_0 e^{nt} e^{-\rho t} dt = L_0 \int_0^{\infty} U(c)e^{(n-\rho)t} dt \quad (111)$$

En este sentido, el problema que enfrenta la sociedad es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & V = \int_0^{\infty} U(c)e^{(n-\rho)t} dt \\ \text{sujeto a} \quad & k' = \Psi(k) - c - (n + \delta)k \\ & k(0) = k_0 \quad (k_0 > 0) \\ & 0 \leq c \leq \Psi(k) \end{aligned} \quad (112)$$

Con respecto al problema intertemporal (112) cabe destacar cuatro puntos. En primer lugar, para que el funcional objetivo sea convergente debe cumplirse que $(n - \rho) < 0$. En segundo lugar, la variable de control del problema está dada por el consumo per cápita, y la variable de estado por el *stock* de capital per cápita. En tercer lugar, como el valor inicial del factor trabajo (L_0) es una constante positiva, por conveniencia se ha fijado dicho valor en la unidad. En cuarto lugar, para que el modelo sea consistente, el consumo no debe ser superior al producto. En la medida en que se considera una economía cerrada, los agentes no pueden acceder a un nivel de consumo superior al producto que se genera.

La función Hamiltoniana en valor corriente del problema (112) es la siguiente:

$$H^* = U(c) + m(\Psi(k) - c - (n + \delta)k) \quad (113)$$

El principio del máximo establece, en primer lugar, que el Hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control, que en este caso viene dada por el consumo:

$$\frac{\partial H^*}{\partial c} = U'(c) - m = 0 \quad (114)$$

$$\frac{\partial^2 H^*}{\partial c^2} = U''(c) < 0$$

La maximización del Hamiltoniano arroja la siguiente condición de equilibrio:

$$m = U'(c) \quad (115)$$

La condición (115) tiene una interpretación económica: en cada instante del tiempo, el precio sombra del capital expresado en valor corriente (m) debe ser igual a la utilidad marginal del consumo. Esta condición de equilibrio implica una asignación de recursos eficiente entre consumo e inversión en todo el horizonte de tiempo. Si no fuera este el caso, analicemos qué sucedería con la trayectoria del consumo y el capital. Partamos considerando la ecuación de equilibrio (102), que establece que el monto total de la producción se destina solamente a dos fines: consumo o inversión. Ahora, supongamos que en lugar de la condición (115) se cumpliera la desigualdad $m < U'(c)$. En dicho caso, el precio sombra sería inferior a la utilidad marginal del consumo. Esta situación no sería de equilibrio, ya que el valor marginal que posee el capital sería inferior al del consumo, de tal forma que aumentaría el nivel de bienestar de la sociedad incrementando el consumo y, por ende, disminuyendo el monto de inversión. Este incremento del consumo disminuiría el valor de la utilidad marginal, hasta que eventualmente se igualaría al precio sombra¹². Por el contrario, si se cumpliera la desigualdad $m > U'(c)$, el valor marginal del capital sería superior al del consumo y, por lo tanto, la decisión óptima sería disminuir el consumo y aumentar el monto de inversión. La disminución del consumo incrementaría el valor de la utilidad marginal hasta que se iguale al precio sombra del capital. De esta forma, la única situación de equilibrio admisible es (115), donde el precio sombra del capital se iguala a la utilidad marginal.

12. La utilidad marginal disminuiría por las propiedades de la función de utilidad establecida en (112).

Las ecuaciones de movimiento para el capital y la variable de coestado vienen dadas por:

$$k' = \frac{\partial H^*}{\partial m} = \Psi(k) - c - (n + \delta)k \quad (116)$$

$$m' = -\frac{\partial H^*}{\partial k} + (\rho - n)m = -m(\Psi'(k) - (n + \delta)) + (\rho - n)m = -m(\Psi'(k) - (\rho + \delta)) \quad (117)$$

Las dos ecuaciones anteriores constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, que depende de tres variables: el consumo (c), el capital (k) y la variable de coestado (m). Con el objeto de construir un diagrama de fase que explique la dinámica de crecimiento de la economía, se expresará el sistema de ecuaciones en función solamente del consumo y el capital. Para ello, debemos despejar tanto la variable de coestado como su primera diferencia del sistema de ecuaciones anterior. La primera diferencia de la variable de coestado es igual a:

$$m' = U''(c)c' \quad (118)$$

Reemplazando (115) y (118) en (117), obtenemos la expresión:

$$c' = -\frac{U'(c)}{U''(c)}(\Psi'(k) - (\rho + \delta)) \quad (119)$$

Dividiendo ambos lados de la ecuación (119) entre el consumo se obtiene:

$$\frac{c'}{c} = -\frac{U'(c)}{U''(c)c}(\Psi'(k) - (\rho + \delta))$$

La expresión $-U'(c)/U''(c)c$ es igual a la inversa de la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo. Ello puede apreciarse en la siguiente expresión:

$$\eta(c) = -\frac{d(U'(c))}{dc} \frac{c}{U'(c)} = -\frac{U''(c)c}{U'(c)} \quad (120)$$

La elasticidad $\eta(c)$ indica la sensibilidad de la utilidad marginal ante cambios en el nivel de consumo. Como en la parte superior de este ratio se encuentra la segunda derivada de la función de utilidad, esta elasticidad constituye una medida del grado de concavidad de la función de utilidad. Mientras mayor sea la elasticidad, mayor será la curvatura o concavidad de la función de utilidad. En el caso del modelo de crecimiento neoclásico, como la función de utilidad satisface los requisitos de (109), la elasticidad tomará siempre un valor positivo.

Finalmente, las ecuaciones (119) y (120) establecen lo siguiente:

$$\frac{c'}{c} = \frac{1}{\eta(c)} (\Psi'(k) - (\rho + \delta)) \quad (121)$$

La ecuación (121) también se conoce como la regla de **Keynes-Ramsey** de consumo óptimo. Esta relación establece de forma explícita, los componentes que determinan la senda óptima de consumo. En esta ecuación, cuando la productividad marginal del capital neta de depreciación ($\Psi'(k) - \delta$) es superior a la tasa de descuento subjetiva (ρ), la tasa de crecimiento del consumo (c'/c) es positiva. Ello se puede interpretar de la siguiente forma: cuando la productividad marginal del capital o la tasa de interés¹³ es relativamente elevada, resulta conveniente destinar una buena parte de la riqueza (producto) al ahorro (inversión), con lo cual el consumo será mayor en el futuro que en el presente. De este modo, la trayectoria temporal del consumo será creciente. En caso contrario, $\Psi'(k) - \delta < \rho$, como la tasa de interés neta es inferior al grado de impaciencia intertemporal (ρ), la estrategia óptima sería disminuir el ahorro (inversión) para incrementar el consumo presente, con lo cual disminuyen las posibilidades de consumo futuro. En este caso, la senda de consumo tendría un comportamiento decreciente en el tiempo ($c'/c < 0$).

Por otra parte, mientras mayor sea el grado de concavidad de la función de utilidad, es decir un valor de $\eta(c)$ más elevado, la senda óptima de consumo será más estable. Por ejemplo, en el caso que la elasticidad de la utilidad marginal tienda a infinito, la tasa de crecimiento del consumo tendería a cero

13. En una situación de competencia perfecta se cumple que la retribución al capital o la tasa de interés es igual a la productividad marginal del capital. Ello se deriva a partir de la maximización de los beneficios de una firma $\Pi = P(K, L) - wL - rK$, donde el precio del bien se normaliza a 1, y los precios del capital y el trabajo son iguales a "r" y "w", respectivamente. En forma intensiva, los beneficios son $\pi = \Psi(k) - w - rk$. La condición de primer orden de maximización de beneficios establece $r = \Psi'(k)$, lo cual implica que en competencia perfecta la retribución al capital debe ser igual a su productividad marginal.

y, por lo tanto, se apreciaría un comportamiento del consumo casi constante. De manera opuesta, si la elasticidad tendiera a un valor cercano a cero, la tasa de crecimiento del consumo tendería a infinito y la trayectoria del consumo sería explosiva.

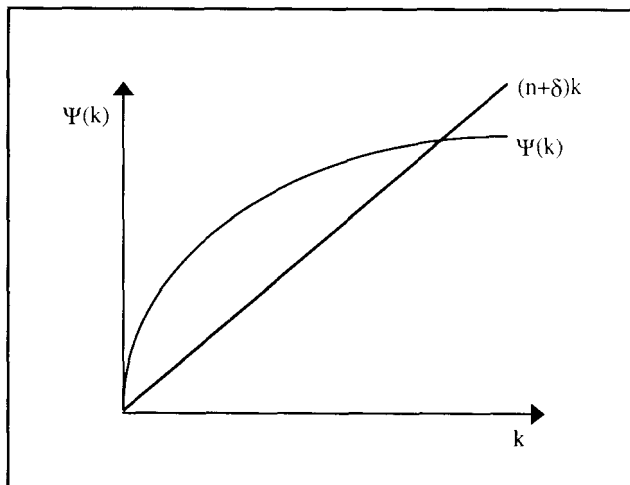
A partir de (116) y (121) conformamos el sistema de ecuaciones diferenciales con el cual se construirá el diagrama de fase. En primer lugar, debemos fijar el consumo y el capital per cápita en su estado estacionario ($k' = c' = 0$) para obtener las curvas de demarcación:

$$c = \Psi(k) - (n + \delta)k \quad (122)$$

$$\Psi'(k) = \rho + \delta \quad (123)$$

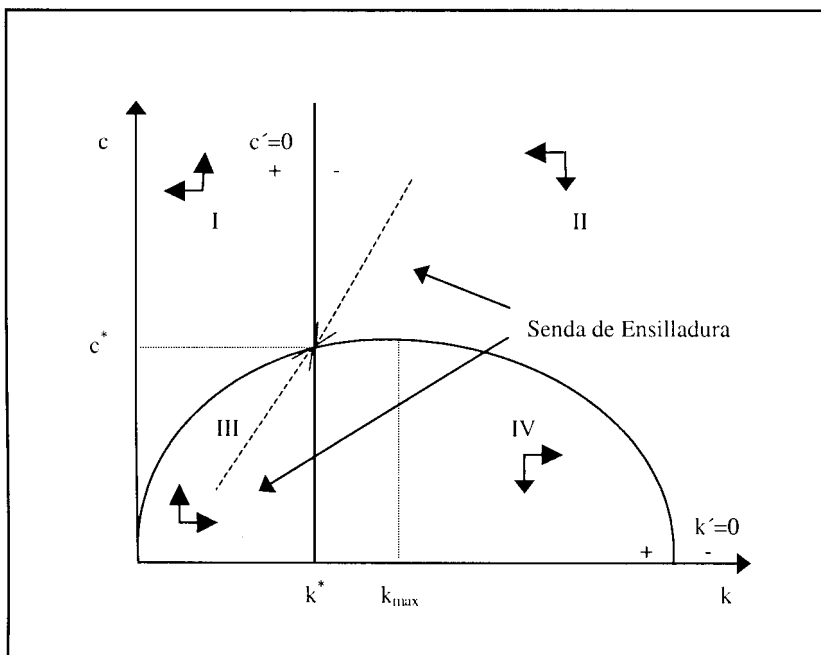
La primera curva de demarcación es una función que se obtiene a partir de la diferencia de dos componentes: la función de producción $\Psi(k)$ y la recta $(n + \delta)k$. La función de producción cumple con las condiciones de Inada en forma intensiva: $\lim_{k \rightarrow 0} \Psi'(k) = \infty$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi'(k) = 0$ razón por la cual puede representarse como una función cóncava, tal como aparece en el Gráfico No. 3.5. La diferencia de ambas funciones da como resultado una función similar a una parábola (ver el Gráfico No. 3.6.).

Gráfico No. 3.5



La segunda curva de demarcación (123) constituye una recta perfectamente vertical. Como la curva de productividad marginal es una función homogénea y depende solamente del capital per cápita (k), la ecuación (123) da como resultado un valor constante del capital que depende de los parámetros ρ y δ : $k^* = \Gamma(\rho, \delta)$. Las curvas de demarcación (122) y (123) se encuentran representadas en el Gráfico No. 3.6, y constituyen el lugar geométrico en el cual el capital y el consumo, respectivamente, se encuentran en estado estacionario ($\dot{c} = \dot{k} = 0$).

Gráfico No. 3.6



Una propiedad que se cumple en el diagrama de fase es que el consumo y el capital en el estado estacionario, siempre son inferiores al máximo nivel que se puede obtener de estas variables. Si maximizamos la ecuación (122) con respecto al nivel del capital, se obtiene la siguiente condición:

$$\Psi'(k_{max}) = n + \delta \quad (124)$$

Como $\rho > n$, se cumple $\rho + \delta > n + \delta$ y, por lo tanto, $\Psi'(k^*) > \Psi'(k_{\max})$. Al ser la curva de productividad marginal del capital $\Psi'(k)$ decreciente, entonces necesariamente se satisface la desigualdad $k^* < k_{\max}$. Al *stock* de capital k_{\max} se le denomina nivel de capital de **la regla de oro**, debido a que constituye el máximo valor factible que puede alcanzarse en la economía. El valor k^* , que representa el nivel en el estado estacionario, recibe el nombre de capital de **la regla de oro modificada**, ya que es el máximo valor del capital que se obtiene al resolver el problema de maximización intertemporal.

La trayectoria del consumo y el capital en cada una de las cuatro áreas del diagrama de fase presentado en el Gráfico No. 3.6, se obtiene a partir de las derivadas parciales de las ecuaciones (116) y (121):

$$\frac{\partial k'}{\partial c} = -1 < 0 \quad (125)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial k} = \frac{c}{\eta(c)} \Psi''(k) < 0 \quad (126)$$

El signo de la derivada en (125) indica que conforme se incrementa el consumo, la variación del *stock* de capital con respecto al tiempo disminuirá, y por ende el *stock* de capital. Ello implica que niveles de consumo por encima de la curva $k' = 0$ disminuyen el *stock* de capital; y niveles de consumo inferiores, incrementan el *stock* de capital. En el Gráfico No. 3.2, esta dinámica se representa mediante flechas con dirección a la izquierda en las áreas I y II, y con dirección a la derecha en las áreas III y IV.

Por otra parte, el signo de la derivada (126) indica que conforme se incrementa el *stock* de capital, la variación del consumo con respecto al tiempo disminuirá, y por lo tanto el nivel de consumo. De esta forma, cualquier nivel de capital que se encuentre a la derecha del lugar geométrico $c' = 0$ ocasionará una disminución del consumo, y cualquier nivel de capital a la izquierda de dicha curva significará un crecimiento del consumo. De manera similar al caso anterior, este comportamiento se representa mediante flechas con dirección hacia abajo en las regiones II y IV, y con dirección hacia arriba en las regiones I y III.

El impacto negativo del consumo sobre el capital y viceversa se debe al carácter de asignaciones competitivas que tienen el consumo y la inversión. Un crecimiento del consumo puede lograrse a través de una disminución de la

inversión y, por ende, de una caída del capital en el futuro. Asimismo, un incremento del *stock* de capital se obtiene a través de una mayor inversión, lo cual sólo es posible de obtener a través de una disminución del consumo.

La dirección de las trayectorias definidas por las derivadas (125) y (126) dan como resultado un equilibrio inestable, en el cual se puede alcanzar el estado estacionario (c^* , k^*) solamente a través de la senda de ensilladura. Cualquier nivel de consumo y capital que se encuentre fuera de la senda de ensillada, conduce a trayectorias divergentes de estas dos variables.

Para el caso específico de una función logarítmica $U(c) = \ln(c)$ y una función de producción Cobb-Douglas $F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, el nivel de estado estacionario o de largo plazo del capital y el consumo está definido del siguiente modo:

$$k^* = \left(\frac{\rho + \delta}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \quad (127)$$

$$c^* = \left(\frac{\rho + \delta}{\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha-1)} - (n + \delta) \left(\frac{\rho + \delta}{\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)} \quad (128)$$

Ejercicios

1. Halle las sendas óptimas $u^*(t)$, $y^*(t)$ y $\lambda^*(t)$ en los siguientes casos:

a. $V = \int_0^2 (3y - 2u^2) dt$ sujeto a $y' = 3u - 1$; $y(0) = 1$; $y(2) = y_2$ (y_2 libre)

b. $V = \int_0^1 \ln(4yu) dt$ sujeto a $y' = 4y(1 - u)$; $y(0) = 1$; $y(1) = e^2$

c. $V = \int_0^1 -u^2 dt$ sujeto a $y' = y + u$; $y(0) = 1$; $y(1) = 0$

$$d. \quad V = \int_0^1 -\frac{1}{2}(u^2 + y^2)dt \quad \text{sujeto a} \quad y' = u - y; y(0) = 1; y(1) = y_1 \quad (y_1 \text{ libre})$$

$$e. \quad V = \int_0^T -dt \quad \text{sujeto a} \quad y' = y + u; y(0) = 5; y(T) = 11; (T \text{ libre})$$

$$f. \quad V = \int_0^\infty (1-y)udt \quad \text{sujeto a} \quad y' = (1-y)u; y(0) = 0; (u(t) \in [0,1])$$

$$g. \quad V = \int_0^T (y^2 + ay + bu + cu^2)dt \quad \text{sujeto a} \quad y' = u; y(0) = d; y(T) = y_T \quad (y_T \text{ libre}) \quad (a, b, c, d > 0)$$

$$h. \quad V = \int_0^1 (2y - 3u - u^2)dt \quad \text{sujeto a} \quad y' = y + u \quad y(0) = 5; y(1) = y_1 \quad (y_1 \text{ libre})$$

2. El siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \int_0^T f(y, u)dt \\ \text{sujeto a} & y' = g(y, u) \\ & y(0) = y_0 \quad (y_0 \text{ dado}) \\ & y(T) = y_T \quad (y_T \text{ dado}) \end{array}$$

Se denomina autónomo debido a que no depende explícitamente del tiempo (t).

- Demuestre que en el problema anterior, el Hamiltoniano óptimo es constante en todo el horizonte temporal.
- Demuestre que para $g(y, u) = u$ se cumple la condición:

$$f - y'f_y = c \quad \forall t \in [0, T]$$

Donde c pertenece a los números reales.

3. Dado el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & V(a) = \int_0^{\infty} e^{-rt} Ln(u) dt \\
 \text{sujeto a} & y' = by - u \\
 & y(a) = c \\
 & \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \\
 & (a, b, c > 0)
 \end{array}$$

Demuestre que se cumple la siguiente condición:

$$V(a) = e^{-ra} V(0)$$

4. La curva de demanda de un mercado en el instante "t" viene dada por:

$$q(t) = a - bp(t) \quad (a, b > 0)$$

Donde $q(t)$ y $p(t)$ representan la cantidad y el precio, respectivamente. En este mercado existe una firma grande que fija el precio, y un grupo de firmas pequeñas que son tomadoras de precios. Nuevas firmas pequeñas entrarán al mercado si la firma grande determina un precio mayor a p^* . La producción agregada de las firmas pequeñas ($y(t)$) se comporta de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{array}{l}
 y' = k(p - p^*) \quad (k > 0) \\
 y(0) = y_0 \quad (y_0 > 0)
 \end{array}$$

La compañía grande produce una cantidad $q(t) - y(t)$, y presenta un costo medio constante e igual a c ($p^* > c > 0$). El objetivo de la empresa es maximizar el valor presente de sus beneficios descontados a la tasa "r":

$$\Pi = \int_0^{\infty} e^{-rt} [p - c][a - bp - y] dt$$

- a. Plantee un diagrama de fase que explique la dinámica del precio y la producción de las pequeñas firmas.
 - b. Encuentre el valor del precio y la producción de las pequeñas firmas en el estado estacionario.
 - c. Compruebe la condición de suficiencia de Mangasarian.
5. La variación de las ventas (V) de un producto de la firma XYZ decrece de manera proporcional al monto de las ventas, pero aumenta proporcionalmente al gasto en publicidad (P) destinado al sector del mercado que aún no adquiere el producto. De esta forma, las ventas se comportan de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial:

$$V' = -aV + bP \left[1 - \frac{V}{M} \right] \quad (a, b, M > 0)$$

$$\text{Dado } V(0) = V_0 \quad (V_0 > 0)$$

Donde M es el valor de las ventas de todas las empresas dentro del mercado. El objetivo de la empresa es maximizar el valor de las ventas hasta el período " T ":

$$I = \int_0^T V(t) dt$$

- a. Si la firma XYZ puede destinar a lo más 3,000 unidades monetarias (u.m.) en publicidad, mediante el principio del máximo halle la política publicitaria óptima y la evolución de las ventas. Asuma los siguientes valores para los parámetros: $a = 1$, $b = 2$, $M = 100$, $\alpha = 4$, $T = 12$. Considere que las variables de control y estado se encuentran expresadas en miles de u.m.
 - b. Compruebe si se cumple la condición de suficiencia de Mangasarian.
6. Suponga que un partido político acaba de ganar las elecciones presidenciales ($t = 0$) y que las próximas elecciones se realizarán dentro de " T " años. El partido gobernante desea ser reelegido en las siguientes elecciones, razón por la cual busca maximizar la intención de voto de la ciudadanía representada a través de la función $v(\bullet)$. Los votantes evalúan al gobierno sobre la base de la evolución de la inflación (p) y el desempleo (u) durante el período de gobierno. Los electores le asignan una mayor

importancia a la situación económica cercana al período de elección, de acuerdo con el factor e^{rt} . De este modo, el funcional objetivo del partido gobernante es el siguiente:

$$V = \int_0^T v(u, p) e^{rt} dt \quad (r > 0)$$

La inflación, el desempleo y la inflación esperada (π) en la economía se relacionan de acuerdo con la curva de Phillips:

$$p = a - bu + c\pi \quad (a, b, c > 0)$$

Por otra parte, la inflación esperada se forma de acuerdo con expectativas adaptativas:

$$\pi' = d(p - \pi) \quad (d > 0)$$

Si la intención de voto de los electores se representa a través de la siguiente función:

$$v(u, p) = -u^2 - kp \quad (k > 0)$$

- a. Halle la trayectoria del desempleo, la inflación y la inflación esperada, si el valor inicial de la inflación esperada es $\pi(0) = \pi_0$ y el valor terminal es libre. Considere al desempleo como la variable de control y a la inflación esperada como la variable de estado.
- b. Compruebe la condición de suficiencia de Mangasarian.

IV

Programación dinámica

En este capítulo estudiaremos la tercera de las técnicas de optimización intertemporal más empleadas en la formulación de problemas económicos: la **programación dinámica**. Esta metodología de optimización dinámica fue desarrollada por el matemático Richard Bellman en 1957¹ y, desde entonces, ha sido utilizada principalmente en el planteamiento de modelos de macroeconomía dinámica. La formulación básica del problema de programación dinámica es muy similar al del control óptimo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & V = \sum_{t=0}^T f_t(y_t, u_t) + Z(y_{T+1}) \\ \text{sujeto a} & y_{t+1} \leq g_t(y_t, u_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \\ & y_0 \text{ dado} \\ & y_{t+1} \text{ libre} \\ & y_t \geq 0 \\ & u_t \geq 0 \end{array} \quad (1)$$

Con el fin de introducirnos en la técnica de la programación dinámica, desarrollaremos los problemas en tiempo discreto. La programación dinámica en tiempo continuo involucra el conocimiento de ecuaciones diferenciales parciales, y la explicación de ese tema excede los objetivos del presente texto. Por otro lado, los elementos que componen el problema (1) son los mismos que en el control óptimo. Las variables u_t e y_t constituyen las variables de control y estado respectivamente, a la función $g(\bullet)$ se le denomina ecuación de movimiento o de transición, y a la función $f(\bullet)$ se le conoce como función de retorno (ésta es equivalente a la función intermedia). Finalmente, al igual que en los capítulos anteriores, a “V” se le denomina funcional objetivo.

1. Bellman, Richard, *Dynamic Programming*, Princeton: Princeton University Press, 1957.

Antes de iniciar con la explicación de la técnica de programación dinámica cabe resaltar tres aspectos. En primer lugar, si bien un mismo problema puede plantearse a través de la programación dinámica y del control óptimo, existe una suerte de especialización. En aquellos problemas en los cuales se considera el tiempo continuo y variables determinísticas, usualmente se emplea la técnica de control óptimo; mientras que aquellos en los cuales se consideran el tiempo discreto y variables estocásticas (es decir, variables que tienen un comportamiento aleatorio), se emplea la técnica de programación dinámica.

En segundo lugar, mientras que en el control óptimo es posible obtener una solución analítica de una forma relativamente sencilla para las variables en análisis, en la programación dinámica no ocurre lo mismo. Por lo general, a partir de las condiciones de primer orden del problema de programación dinámica se obtienen características cualitativas acerca del proceso de optimización intertemporal que enfrentan los agentes. Solamente bajo formas funcionales específicas de la ecuación de movimiento y la función de retorno, se pueden obtener soluciones analíticas simples para el problema (1). En caso contrario, las trayectorias de las variables de control y de estado se obtienen a través de métodos numéricos o de computación.

En tercer lugar, las variables de control óptimas en programación dinámica son de **circuito cerrado** (también denominado *closed-loop control*), es decir, dependen tanto de la variable de estado (y_t) como del tiempo (t). En el caso del control óptimo, las variables de control son de **circuito abierto** (también denominado *open-loop control*), ya que éstas dependen exclusivamente del tiempo. A la estrategia que determina el valor del control óptimo para un valor dado de la variable de estado se le denomina función de política (*policy function*), y se le representará mediante la función $u_t = h(y_t)$. Esta función constituye la esencia de la solución al problema (1).

El presente capítulo está compuesto por cuatro secciones. En la primera se desarrollará, a manera de introducción, la forma convencional de resolver el problema de optimización intertemporal discreto, es decir, empleando las **condiciones de Kuhn-Tucker**. En la segunda sección se plantea cómo a través de **la ecuación de Bellman** un problema de optimización multiperíodos se transforma en una secuencia de problemas de solamente dos períodos. Adicionalmente, se desarrollarán las condiciones de primer orden cuando el horizonte temporal es finito. En la tercera sección, se extenderán los resultados a un horizonte temporal infinito. Por último, se considerará el problema de programación dinámica en un entorno de incertidumbre.

1. Optimización dinámica empleando las condiciones de Kuhn-Tucker

En el problema (1), el objetivo consiste en determinar las secuencias de las variables de control y estado que logren maximizar el funcional objetivo. No obstante, dicho problema puede ser interpretado como un problema de optimización estática en el cual se deben determinar las “ $2T + 2$ ” variables² que optimicen la función objetivo. Con el fin de introducirnos en la programación dinámica, desarrollaremos el problema (1) bajo el segundo enfoque.

1.1 Las condiciones de Kuhn-Tucker

Dada la función Lagrangiana del problema (1):

$$L = \sum_{t=0}^T f_t(y_t, u_t) + Z(y_{T+1}) + \sum_{t=0}^T \lambda_t (g_t(y_t, u_t) - y_{t+1}) \quad (2)$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker establecen que las variables que optimizan la función objetivo cumplen con las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_t} \leq 0 & \quad u_t \geq 0 & \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} u_t = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_{t+1}} \leq 0 & \quad y_{t+1} \geq 0 & \quad \frac{\partial L}{\partial y_{t+1}} y_{t+1} = 0 & \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \geq 0 & \quad \lambda_t \geq 0 & \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \lambda_t = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Para simplificar el problema, asumiremos que la solución es interior. Por lo tanto, las condiciones de primer orden se resumen del siguiente modo:

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial y_{t+1}} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (4)$$

2. Se determinan “ $T + 1$ ” variables de control y “ $T + 1$ ” variables de estado.

Desarrollando cada una de las tres condiciones, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$a. \quad \frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (5)$$

$$b. \quad \frac{\partial L}{\partial y_{t+1}} = \frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \lambda_t = 0$$

$$c. \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = g_t(y_t, u_t) - y_{t+1} = 0$$

Para obtener el conjunto de variables que optimizan la función objetivo es necesario seguir el siguiente procedimiento. En primer lugar, se desarrolla la ecuación (5.b) para $t = T$:

$$\frac{\partial Z}{\partial y_{T+1}} - \lambda_T = 0 \quad (6)$$

En segundo lugar, se debe reemplazar la ecuación (6) en (5.a) para el período “T”, con lo cual obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{\partial f_T}{\partial u_T} + \frac{\partial g_T}{\partial u_T} \frac{\partial Z}{\partial y_{T+1}} = 0 \quad (7)$$

La ecuación (7) junto con la ecuación de transición para el período “T”:

$$y_{T+1} = g_T(y_T, u_T) \quad (8)$$

constituyen un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas (u_T , y_T , y_{T+1}). A partir de dicho sistema se puede obtener una función de política que indique la elección óptima de la variable de control (u_t), dada la variable de estado (y_t): $u_T = h(y_T)$.

En tercer lugar, desarrollamos la ecuación (5.b) para el período $t = T-1$:

$$\frac{\partial f_T}{\partial y_T} + \lambda_T \frac{\partial g_T}{\partial y_T} - \lambda_{T-1} = 0 \quad (9)$$

Reemplazando (9) y (6) en la ecuación (5.a), obtenemos para el período $t = T-1$ la siguiente condición:

$$\frac{\partial f_{T-1}}{\partial u_{T-1}} + \frac{\partial g_{T-1}}{\partial u_{T-1}} \left[\frac{\partial f_T}{\partial y_T} + \frac{\partial g_T}{\partial y_T} \frac{\partial Z}{\partial y_{T+1}} \right] = 0 \quad (10)$$

Como se ha podido encontrar una función de política $u_T = h(y_T)$, en realidad la variable y_{T+1} puede expresarse en función y_T del siguiente modo: $y_{T+1} = g(y_T, h(y_T))$. De esta forma, en la condición (10) intervienen 3 variables: u_{T-1} , y_{T-1} e y_T . Dicha ecuación junto con la ecuación de movimiento para el período "T - 1":

$$y_{T-1} = g_{T-1}(y_{T-1}, u_{T-1}) \quad (11)$$

representan nuevamente un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. A partir de dichas relaciones se puede obtener la función de política para el período "T - 1": $u_{T-1} = h(y_{T-1})$. En general, para el período "t", la función de política $u_t = h_t(y_t)$ se obtendrá a partir del siguiente sistema recursivo:

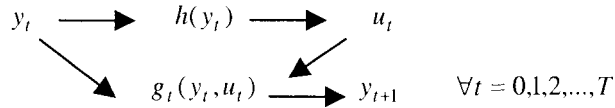
$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} + \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \left\{ \frac{\partial f_{t+2}}{\partial y_{t+2}} + \frac{\partial g_{t+2}}{\partial y_{t+2}} \left(\dots \frac{\partial Z}{\partial y_{T+1}} \right) \right\} \right] = 0 \quad (12)$$

$$y_{t+1} = g_t(u_t, y_t)$$

$$\forall t = 0, 1, 2, \dots, T$$

Este método, utilizado para hallar la función de política, es denominado **inducción hacia atrás**, ya que es necesario resolver el problema empezando desde el último período hasta el tiempo inicial $t = 0$. Tal como se puede apreciar en (12), el método permite obtener la variable de control óptima en el período "t" excluyendo los valores pasados de las variables de control y de estado ($u_j, y_j, \forall j = 0, 1, 2, \dots, t-1$). Esta característica de la condición de primer orden (12) constituye la base del **principio de optimalidad** desarrollado por Bellman, el cual será explicado en la sección 2.1 del presente capítulo.

Una vez obtenida la función de política para cada período, la secuencia de variables de control y estado óptimas se obtienen de una manera relativamente sencilla, siguiendo el esquema que se presenta a continuación:



En el período $t = 0$ contamos con el valor inicial y_0 ($y_0 > 0$), y empleamos la función de política $h(\bullet)$ para obtener el control óptimo u_0 . A continuación, reemplazamos los valores u_0 e y_0 en la ecuación de transición, con lo cual se obtiene la variable de estado en el siguiente período y_1 . Se repite el procedimiento para $t = 1$, y se obtiene la variable de control u_1 y la variable de estado y_2 . Siguiendo el mismo esquema hasta el último período, se halla el valor óptimo de las “ $2T + 2$ ” variables que intervienen en el problema.

1.2 La ecuación de Euler: condición de optimización intertemporal

En un problema económico, muchas veces más importante que obtener la trayectoria de una variable es la condición de optimización intertemporal, y cómo se interpreta dicha condición en el marco de la teoría económica. Con este propósito se emplea una condición de equilibrio denominada **ecuación de Euler**. Esta ecuación es similar a la vista en el cálculo de variaciones; sin embargo, en el presente caso está planteada en tiempo discreto. Para derivar la ecuación de Euler utilizaremos las condiciones de primer orden planteadas en (5). En primer lugar, debe despejarse el multiplicador de Lagrange de la ecuación (5.b), con lo cual se obtiene la siguiente expresión:

$$\lambda_t = \frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \quad (13)$$

Por otro lado se despeja la ecuación (5.a) y se adelanta un período, con lo cual se obtiene:

$$\lambda_{t+1} = - \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}}} \quad (14)$$

Reemplazando (13) y (14) en la condición (5.a), finalmente obtenemos la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \left(\frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}}} \right) \right] = 0 \quad (15)$$

La ecuación de Euler junto con la ecuación de transición:

$$y_{t+1} = g_t(u_t, y_t) \quad (16)$$

resumen las condiciones de primer orden del problema (1). Para interpretar de una manera más sencilla la ecuación de Euler, asumiremos que la ecuación de transición no depende de la variable estado ($g_t(u_t)$), con lo cual (15) se simplifica del siguiente modo:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} = 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (17)$$

Esta condición implica que la elección de la variable de control en el período “t” debe ser tal que garantice que la función de retorno en el mismo período sea la mayor posible, pero considerando el efecto de la asignación sobre la función de retorno en el período siguiente. Ello se debe a que a través de la ecuación de movimiento, las variables en distintos períodos de tiempo se encuentran interrelacionadas. De este modo, las decisiones en un período afectarán a la función de retorno en los siguientes períodos. En este sentido, el segundo término de la ecuación (17) es un producto de derivadas que miden el efecto de la elección de la variable de control u_t sobre la función de retorno en el período “t+1”. Dichas derivadas constituyen una aplicación de la regla de la cadena, ya que indican cómo cambia la función de retorno ante una variación de la variable de estado en el período “t + 1”, multiplicado por la variación de esta variable ante un cambio en la variable de control en el período “t”.

De esta manera, si la condición (17) se cumple para todos los períodos, la secuencia de la variable de control es óptima en la medida en que garantiza que el control en cada período toma en cuenta el efecto sobre las funciones de retorno en el futuro. Si estuviéramos en el caso en el cual no existiera una ecuación

ción de movimiento ($g_t = 0$), y no hubiera interrelación entre las variables de distintos períodos, entonces nos enfrentaríamos a la siguiente condición de optimización:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} = 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (18)$$

que constituye la condición de optimización empleada en los problemas estáticos. La condición (18) implica que la función de retorno en cada período se encuentra maximizada. Dicho resultado es consistente, ya que no es necesario considerar los efectos de la variable de control sobre períodos futuros.

1.3 Condición de segundo orden³

Para asegurar que efectivamente a partir de las condiciones de primer orden se obtengan las secuencias de las variables de control y estado óptimas, es necesario emplear las condiciones de suficiencia planteadas en Sargent⁴. Estas condiciones establecen que si se cumple que:

- a) $f_t(u_t, y_t)$ es una función cóncava y acotada.
- b) El conjunto definido por $\{y_{t+1}, y_t, u_t: y_{t+1} \leq g_t(u_t, y_t)\}$ es convexo y compacto para cualquier senda u_t factible.
- c) La secuencia de variables $y_{t+1}, u_t (\forall t = 0, 1, 2, \dots, T)$ satisface las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker.

Entonces, $y_{t+1}, u_t (\forall t = 0, 1, 2, \dots, T)$ da como resultado un máximo global de V . Si la función de retorno fuera estrictamente cóncava, dicho máximo global sería único.

A continuación desarrollaremos dos aplicaciones económicas sobre los conceptos vistos hasta el momento. En el primer ejemplo desarrollaremos un problema microeconómico, en el cual un individuo enfrenta la decisión de determinar la senda de consumo que maximice su utilidad intertemporal. El segundo ejemplo es una aplicación macroeconómica, en la cual se determina el patrón de crecimiento óptimo de una economía. En vista de que el proce-

3. Basado en las condiciones de suficiencia de Kuhn-Tucker.

4. Sargent, Thomas. *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge: Harvard University Press, 1987.

dimiento para obtener los valores óptimos de las variables de control y estado es relativamente engorroso, limitaremos la solución del problema a la obtención de la función de política.

Ejemplo 1.- Asignación de consumo y ahorro⁵

Un individuo cuenta con un *stock* de ahorros igual a S_t . Cada período, el agente retira de sus ahorros un monto igual a c_t para destinarlo a bienes de consumo. El *stock* de ahorros remanente ($S_t - C_t$) se deposita en un banco que paga una tasa de interés constante e igual a “ r ” ($0 < r < 1$). De este modo, en el siguiente período, el nuevo *stock* de ahorros será igual a $(1 + r)(S_t - C_t)$. Esta operación se repite período a período hasta el momento T , cuando termina el horizonte de optimización del individuo. El comportamiento de los ahorros puede ser expresado de una manera simple, a través de una ecuación de movimiento:

$$S_{t+1} \leq (1 + r)(S_t - C_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (19)$$

Dado un *stock* inicial de ahorros S_0 , el objetivo del individuo consiste en maximizar su bienestar intertemporal hasta el período “ T ”, empleando el factor de descuento β ($0 < \beta < 1$):

$$U = \sum_{t=0}^T \beta^t f(C_t) \quad (20)$$

Donde $f(C_t)$ es la función de retorno, que se interpreta como la función de utilidad asociada a cada período. El problema que enfrenta el consumidor se resume del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U = \sum_{t=0}^T \beta^t f(C_t) \\ \text{sujeto a} & S_{t+1} \leq \alpha(S_t - C_t) \quad (\alpha = (1 + r)) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \\ & S_0 > 0 \\ & S_{T+1} \text{ libre} \\ & S_t \geq 0 \\ & C_t \geq 0 \end{array} \quad (21)$$

5. Para mayor detalle sobre esta aplicación económica, ver Léonard, Daniel y Ngo van Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993, pp. 179–181.

La resolución del problema se divide en tres partes. En la primera se desarrollará la ecuación de Euler, para una función de utilidad genérica $f_t(C_t)$; en la segunda, se hallará una función de política; y finalmente, se evaluarán las condiciones de segundo orden.

a) Ecuación de Euler

En los casos en que la función de utilidad es compleja, no es posible obtener la función de política de una manera analítica, por lo que resulta conveniente analizar la condición de optimización intertemporal. Asumiendo una función de utilidad general $f(C_t)$ ($f'(C_t) > 0$, $f''(C_t) < 0$) y empleando la ecuación de Euler (15), obtenemos la siguiente condición de equilibrio intertemporal:

$$\beta^t \frac{\partial f}{\partial C_t} - \alpha \left[0 - \alpha \beta^{t+1} \frac{\partial f}{\partial C_{t+1}} \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \right] = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial C_t}}{\beta \frac{\partial f}{\partial C_{t+1}}} = 1 + r$$

El lado izquierdo representa la tasa marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro, e indica cuánto valora el consumidor en términos relativos una unidad de consumo de un período a otro. El lado derecho de la ecuación representa la tasa de interés bruta ($1 + r$), es decir, cuánto se valora en el sistema financiero una unidad de consumo de un período a otro. En el equilibrio, las dos valoraciones deben ser iguales; de lo contrario, la asignación de consumo no sería óptima. Si la tasa marginal de sustitución fuera mayor a la tasa de interés bruta, el agente valora más el consumo que el sistema financiero, por lo tanto resultaría conveniente incrementar el consumo. Por el contrario, si la tasa marginal de sustitución fuera inferior a la tasa de interés bruta, convendría disminuir el consumo. Cuando la asignación de consumo es óptima en cada período de tiempo, entonces ambas tasas deben ser iguales.

La condición de equilibrio también puede ser interpretada de otra forma. Supongamos que en un período “ t ” disminuye el consumo en una unidad, ello trae como consecuencia una disminución de la utilidad en $\beta^t f'(C_t)$. Esta unidad de consumo puede ser invertida en un banco, donde se puede obtener un rendimiento constante e igual a “ r ”. En el período siguiente se podrá contar

con $(1 + r)$ unidades de consumo. En “ $t + 1$ ”, el bienestar del agente se incrementará en $\beta^{t+1} f'(C_{t+1})(1 + r)$. Si la asignación es óptima, se debe cumplir que el agente debe ser indiferente entre ambas opciones, con lo cual llegamos a la siguiente condición:

$$\frac{\partial f}{\partial C_t} = \beta \frac{\partial f}{\partial C_{t+1}} (1 + r) \quad (23)$$

la cual es equivalente a la ecuación de Euler.

b) Función de política

Asumiendo una función de utilidad logarítmica $f(C_t) = \ln C_t$, la función Lagrangiana del problema es la siguiente:

$$L = \sum_{t=0}^T \beta^t \ln C_t + \sum_{t=0}^T \lambda_t (\alpha(S_t - C_t) - S_{t+1}) \quad (24)$$

La condición de primer orden se resume del siguiente modo:

$$\begin{aligned} a. \quad & \frac{\partial L}{\partial C_t} = \beta^t \frac{1}{C_t} - \alpha \lambda_t \leq 0 \quad C_t \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial C_t} C_t = 0 \\ b. \quad & \frac{\partial L}{\partial S_{t+1}} = -\lambda_t + \alpha \lambda_{t+1} \leq 0 \quad S_{t+1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial S_{t+1}} S_{t+1} = 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \\ c. \quad & \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \alpha(S_t - C_t) - S_{t+1} \geq 0 \quad \lambda_t \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_t} \lambda_t = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Ahora resolveremos el problema mediante inducción hacia atrás. En primer lugar, empezaremos por resolver el problema en el período “ T ”. Para dicho período se cumple:

$$\begin{aligned} a. \quad & \frac{\partial L}{\partial C_T} = \beta^T \frac{1}{C_T} - \alpha \lambda_T \leq 0 \quad C_T \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial C_T} C_T = 0 \\ b. \quad & \frac{\partial L}{\partial S_{T+1}} = -\lambda_T \leq 0 \quad S_{T+1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial S_{T+1}} S_{T+1} = 0 \\ c. \quad & \frac{\partial L}{\partial \lambda_T} = \alpha(S_T - C_T) - S_{T+1} \geq 0 \quad \lambda_T \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_T} \lambda_T = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

De manera intuitiva podría determinarse cuáles son las asignaciones de consumo y ahorro en el último período. ¿Qué sucedería si el nivel de ahorro fuera positivo en el período “T + 1”? En dicho caso nos encontraríamos en una situación subóptima, ya que en la medida en que no existe utilidad por el consumo realizado más allá del período “T”, cualquier “herencia” dejada por el agente implicaría una pérdida de bienestar. En este sentido, el ahorro óptimo S_{T+1} debería ser igual a cero. Del mismo modo, como la utilidad marginal es siempre positiva, el consumo óptimo deberá ser mayor a cero en todo el horizonte temporal. A continuación se demostrarán estos resultados matemáticamente. Dado que $C_T > 0$, entonces se satisface la condición:

$$\frac{\partial L}{\partial C_T} = \beta^T \frac{1}{C_T} - \alpha \lambda_T = 0 \quad (27)$$

$$\lambda_T = \frac{\beta^T}{\alpha} \frac{1}{C_T}$$

Reemplazando (27) en (26.b) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\beta^T}{\alpha} \frac{1}{C_T} \geq 0 \quad (28)$$

Como el consumo es positivo, la expresión anterior es estrictamente positiva. Por otra parte, en (26.b) se cumple la tercera condición:

$$\frac{\beta^T}{\alpha} \frac{1}{C_T} S_{T+1} = 0 \quad (29)$$

Como el primer término en (29) es estrictamente positivo, ello implica que el ahorro en el último período es igual a cero. Esta igualdad equivale a la condición de transversalidad del problema de control óptimo y del cálculo de variaciones, en la medida en que determina el valor de la variable de estado en el último período. El resultado obtenido ($S_{T+1} = 0$) lo reemplazamos en la ecuación de movimiento, con lo cual obtenemos la siguiente función de política:

$$C_T = S_T \quad (30)$$

De igual forma, en el período “T - 1” se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned}
 a. \frac{\partial L}{\partial C_{T-1}} &= \beta^{T-1} \frac{1}{C_{T-1}} - \alpha \lambda_{T-1} \leq 0 & C_{T-1} &\geq 0 & \frac{\partial L}{\partial C_{T-1}} C_{T-1} &= 0 \\
 b. \frac{\partial L}{\partial S_T} &= -\lambda_{T-1} + \alpha \lambda_T \leq 0 & S_T &\geq 0 & \frac{\partial L}{\partial S_T} S_T &= 0 \\
 c. \frac{\partial L}{\partial \lambda_{T-1}} &= \alpha(S_{T-1} - C_{T-1}) - S_T \geq 0 & \lambda_{T-1} &\geq 0 & \frac{\partial L}{\partial \lambda_{T-1}} \lambda_{T-1} &= 0
 \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando que $C_{T-1} > 0$ y despejando la ecuación (31.a.), obtenemos lo siguiente:

$$\lambda_{T-1} = \frac{\beta^{T-1}}{\alpha} \frac{1}{C_{T-1}} \quad (32)$$

Por otra parte, si consideramos que $S_T > 0$, se cumple:

$$\lambda_{T-1} = \alpha \lambda_T \quad (33)$$

Reemplazando (27) y (32) en (33), se llega a la siguiente relación:

$$\frac{\beta^{T-1}}{\alpha} \frac{1}{C_{T-1}} = \beta^T \frac{1}{C_T} \quad (34)$$

$$C_T = \alpha \beta C_{T-1}$$

Reemplazando (30) y (34) en la ecuación de movimiento, se obtiene finalmente la función de política para el período “T - 1”:

$$\alpha \beta C_{T-1} = \alpha(S_{T-1} - C_{T-1}) \quad (35)$$

$$C_{T-1} = \frac{S_{T-1}}{1 + \beta}$$

Para el período “T - 2” se cumplirán las condiciones:

$$\begin{aligned}
 a. \quad & \frac{\partial L}{\partial C_{T-2}} = \beta^{T-2} \frac{1}{C_{T-2}} - \alpha \lambda_{T-2} \leq 0 \quad C_{T-2} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial C_{T-2}} C_{T-2} = 0 \quad (36) \\
 b. \quad & \frac{\partial L}{\partial S_{T-1}} = -\lambda_{T-2} + \alpha \lambda_{T-1} \leq 0 \quad S_{T-1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial S_{T-1}} S_{T-1} = 0 \\
 c. \quad & \frac{\partial L}{\partial \lambda_{T-2}} = \alpha(S_{T-2} - C_{T-2}) - S_{T-1} \geq 0 \quad \lambda_{T-2} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_{T-2}} \lambda_{T-2} = 0
 \end{aligned}$$

Las condiciones de (36) junto con la función de política (35) determinan la función de política:

$$C_{T-2} = \frac{S_{T-2}}{1 + \beta + \beta^2} \quad (37)$$

En general, para el período “t”, la función de política tomará la siguiente forma:

$$C_t = \frac{S_t}{1 + \beta + \dots + \beta^{T-t}} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^{T-t+1}} S_t \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (38)$$

Esta función de política indica que el consumo es igual a una fracción, cambiante en el tiempo, del nivel de ahorro.

c) Condición de suficiencia

Con el fin de asegurar que las condiciones de Kuhn-Tucker efectivamente maximicen la función objetivo, se evaluará la condición de suficiencia. En primer lugar, la función de retorno debe ser cóncava, lo cual se satisface:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial C_t^2} = -\frac{1}{C_t^2} < 0 \quad (39)$$

En segundo lugar, la ecuación de movimiento es lineal y se clasifica como función convexa:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial C_t^2} = 0 \quad (40)$$

Por lo tanto, la función de política obtenida a través de las condiciones de Kuhn-Tucker permite obtener las secuencias de las variables de control y estado que maximizan la función objetivo.

Ejemplo 2.- Modelo de crecimiento neoclásico⁶

Suponga una economía en la cual se produce un solo bien de acuerdo con la función de producción $\phi(k_t)$. Cada período, la producción se destina solamente a dos fines: consumo (C_t) o inversión en capital para el período siguiente (k_{t+1}). Dicho proceso de asignación puede representarse a través de la siguiente ecuación de movimiento:

$$C_t + k_{t+1} \leq \phi(k_t) \quad (41)$$

Por otra parte, el objetivo de la sociedad es maximizar su bienestar intertemporal empleando el factor de descuento β :

$$U = \sum_{t=0}^T \beta^t f(C_t) \quad (0 < \beta < 1) \quad (42)$$

De esta manera, el problema que enfrenta el planificador social se resume del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U = \sum_{t=0}^T \beta^t f(C_t) \\ \text{sujeto a} & C_t + k_{t+1} \leq \phi(k_t) \\ & k_0 > 0 \\ & k_{T+1} \text{ libre} \\ & k_{t+1} \geq 0 \\ & C_t \geq 0 \end{array} \quad (43)$$

6. La aplicación ha sido tomada de Sargent, Thomas, *op. cit.*, pp. 24-27. El modelo propuesto se basa en el artículo escrito por Brock, William y Leonard Mirman, "Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case", en *Journal of Economic Theory*, 1972, pp. 479-513.

Al igual que en el primer ejemplo, la resolución del problema se divide en tres partes. En la primera se establece la condición de primer orden del problema, para funciones generales $f(C_t)$ y $\phi(k_t)$. En la segunda, se halla la función de política óptima. Finalmente, en la tercera sección, se evalúa la condición de segundo orden.

a) Ecuación de Euler

Como se mencionó anteriormente, en algunos casos, en lugar de hallar las trayectorias de las variables de control y estado resulta conveniente analizar la condición de optimización. Asumiendo funciones genéricas para el nivel de utilidad $f(C_t)$ ($f'(C_t) > 0$ $f''(C_t) < 0$) y la producción $\phi(k_t)$ ($\phi'(k_t) > 0$ $\phi''(k_t) < 0$), podemos plantear la ecuación de Euler para analizar la condición de equilibrio intertemporal. Considerando la ecuación de movimiento $k_{t+1} = \phi(k_t) - C_t$, la ecuación de Euler establece lo siguiente:

$$\beta' \frac{\partial f}{\partial C_t} - 1 \left[0 - \phi'(k_{t+1}) \beta^{t+1} \frac{\partial f}{\partial C_{t+1}} (-1) \right] = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial C_t}}{\beta \frac{\partial f}{\partial C_{t+1}}} = \phi'(k_{t+1})$$

La interpretación de la ecuación de Euler es muy similar a la del ejemplo anterior. En el contexto macroeconómico, el uso alternativo de una unidad de consumo ya no consiste en realizar un depósito en un banco sino en la inversión en capital. De esta forma, la ecuación de Euler establece que la tasa marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro debe ser igual a la productividad marginal del capital. Si la tasa marginal de sustitución fuera mayor a la productividad marginal, entonces, la sociedad como un todo valora más el consumo presente que la inversión en capital; por lo tanto, la decisión óptima sería aumentar el consumo y disminuir la inversión en capital. Por el contrario, si la tasa marginal de sustitución fuera inferior a la productividad marginal, convendría disminuir el consumo e incrementar la inversión en capital. De esta forma, en el equilibrio, las secuencias óptimas de consumo y capital deben cumplir con una relación de igualdad entre la tasa marginal de sustitución y la productividad marginal.

b) Función de política

Para obtener la función de política asumiremos una función de utilidad logarítmica $f(C_t) = \text{Ln}C_t$, asimismo se asumirá la función de producción $\phi(k_t) = k_t^\alpha$. Como la utilidad marginal es siempre positiva, entonces nunca se desperdiciarán unidades de consumo y la restricción (41) siempre se cumplirá con igualdad. De este modo, para simplificar el problema, reemplazaremos la restricción (41) en la función objetivo (42), con lo cual obtendríamos la siguiente función Lagrangiana:

$$L = \sum_{t=0}^T \beta^t \text{Ln}(k_t^\alpha - k_{t+1}) \quad (45)$$

Este problema presenta una ligera variación con respecto al anterior. Con el fin de hacer más simples los cálculos operativos, se ha eliminado la variable C_t del problema y se ha considerado como única variable de elección a k_{t+1} . En este sentido, la condición de primer orden es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} &= -\beta^t \frac{1}{(k_t^\alpha - k_{t+1})} + \beta^{t+1} \frac{\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}}{(k_{t+1}^\alpha - k_{t+2})} \leq 0 \quad k_{t+1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} k_{t+1} = 0 \quad (46) \\ \forall t &= 0, 1, 2, \dots, T-1 \\ \frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} &= -\beta^t \frac{1}{(k_t^\alpha - k_{t+1})} \leq 0 \quad k_{t+1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} k_{t+1} = 0 \\ \forall t &= T \end{aligned}$$

Para resolver el problema mediante el método de inducción hacia atrás, debemos empezar por la condición de primer orden en el período “T”:

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = -\beta^T \frac{1}{(k_T^\alpha - k_{T+1})} \leq 0 \quad k_{T+1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} k_{T+1} = 0 \quad (47)$$

Al igual que en el ejemplo anterior, intuitivamente resulta razonable plantear que el *stock* de capital k_{T+1} sea igual a cero. En caso contrario, se estarían desperdiciando recursos y la sociedad alcanzaría un nivel de bienestar subóptimo. A continuación demostraremos este resultado matemáticamente. La derivada del lagrangiano con respecto a k_{T+1} es igual a:

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = \beta^T \frac{1}{(k_T^\alpha - k_{T+1})} \geq 0 \quad (48)$$

La expresión (48) es estrictamente positiva, ya que por la restricción (41) el denominador equivale al consumo⁷. Ello implica que se debe cumplir la condición:

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} k_{T+1} = \beta^T \frac{1}{(k_T^\alpha - k_{T+1})} k_{T+1} = 0 \quad (49)$$

Lo cual significa que necesariamente $k_{T+1} = 0$. Siguiendo con el procedimiento, en el período “T - 1” se cumplen las condiciones:

$$\frac{\partial L}{\partial k_T} = -\beta^{T-1} \frac{1}{(k_{T-1}^\alpha - k_T)} + \beta^T \frac{\alpha k_T^{\alpha-1}}{(k_T^\alpha - k_{T+1})} \leq 0 \quad k_T \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial k_T} k_T = 0 \quad (50)$$

Para resolver las condiciones partimos de la condición $k_T > 0$, con lo cual se cumple:

$$\frac{\partial L}{\partial k_T} = -\beta^{T-1} \frac{1}{(k_{T-1}^\alpha - k_T)} + \beta^T \frac{\alpha k_T^{\alpha-1}}{(k_T^\alpha - k_{T+1})} = 0 \quad (51)$$

$$k_T = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} k_{T-1}^\alpha$$

La condición (51) constituye la función de política que determina el *stock* de capital óptimo para el período “T”, en función del capital en “T - 1”. En “T - 2”, las condiciones de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T-1}} = -\beta^{T-2} \frac{1}{(k_{T-2}^\alpha - k_{T-1})} + \beta^{T-1} \frac{\alpha k_{T-1}^{\alpha-1}}{(k_{T-1}^\alpha - k_T)} \leq 0 \quad k_{T-1} \geq 0 \quad \frac{\partial L}{\partial k_{T-1}} k_{T-1} = 0 \quad (52)$$

Partiendo de la condición $k_{T-1} > 0$, se cumple que:

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T-1}} = -\beta^{T-2} \frac{1}{(k_{T-2}^\alpha - k_{T-1})} + \beta^{T-1} \frac{\alpha k_{T-1}^{\alpha-1}}{(k_{T-1}^\alpha - k_T)} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\alpha\beta k_{T-1}^{\alpha-1}}{(k_{T-1}^\alpha - k_T)} = \frac{1}{(k_{T-2}^\alpha - k_{T-1})}$$

7. Para que el modelo sea consistente, el consumo debe ser estrictamente positivo. De lo contrario, a partir de la función de retorno no se podrían obtener valores reales que representen el nivel de bienestar.

Reemplazando (51) en (53) se obtiene la función de política para el período “ $T - 2$ ”:

$$k_{T-1} = \alpha\beta \frac{1 + \alpha\beta}{1 + \alpha\beta + \alpha^2\beta^2} k_{T-2}^\alpha \quad (54)$$

En general, la función de política para el período “ t ” viene dada por:

$$k_{t+1} = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^{T-t}}{1 - (\alpha\beta)^{T-t+1}} k_t^\alpha \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \quad (55)$$

De manera similar al ejemplo anterior, el capital en un período constituye una fracción variante en el tiempo de la producción agregada en la economía.

c) Condición de suficiencia

En la medida en que la función de utilidad es estrictamente cóncava:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial C_t^2} = -\frac{1}{C_t^2} < 0 \quad (56)$$

y la ecuación de transición es convexa:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial C_t^2} = 0 \quad (57)$$

las condiciones de Kuhn-Tucker constituyen una condición necesaria y suficiente para la maximización de la función objetivo. En este sentido, la secuencia de consumo y capital generada a partir de la función de política (55) es óptima.

2. Programación dinámica con horizonte temporal finito

La resolución del problema (1) a través de las condiciones de Kuhn-Tucker, si bien es correcta, no es la manera más eficiente de enfrentar el problema. Tal como se ha podido apreciar, la resolución de las condiciones de primer orden de Kuhn-Tucker involucra cálculos engorrosos para despejar las varia-

bles de control y de estado óptimas. Con la finalidad de resolver aquellos problemas con una estructura similar a (1), Bellman⁸ desarrolló el método de programación dinámica. Esta técnica aprovecha la naturaleza recursiva del problema para resumir el planteamiento en una relación denominada **ecuación de Bellman**. El método se sustenta en el principio de optimalidad, el cual será explicado a continuación.

2.1 El principio de optimalidad

El problema de programación dinámica (1) cumple con dos propiedades fundamentales, que permiten la resolución de una forma recursiva:

a) Propiedad de separabilidad: Para todo t , las funciones de retorno y transición, $f_t(\bullet)$ y $g_t(\bullet)$, dependen de “ t ” y de los valores contemporáneos de las variables de control y estado, pero no de sus valores pasados o futuros.

b) Propiedad de aditividad: El funcional objetivo V es la suma de las funciones de retorno en los “ T ” períodos.

Sobre la base de estos dos principios se establece el principio de optimalidad:

Principio de optimalidad

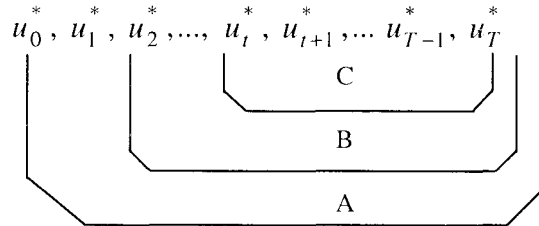
La secuencia de variables de control u_t^* ($\forall t = 0, 1, 2, \dots, T$) es una solución óptima al problema (1) si y sólo si u_t^* ($\forall t = t, t + 1, t + 2, \dots, T$) resuelve el siguiente problema $\forall t = 0, 1, 2, \dots, T$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & V_t = \sum_{\tau=t}^T f_{\tau}(y_{\tau}, u_{\tau}) + Z(y_{T+1}) \\
 \text{sujeto a} & y_{\tau+1} = g_{\tau}(y_{\tau}, u_{\tau}) \quad \forall \tau = t, t + 1, t + 2, \dots, T \\
 & y_t \quad \text{dado} \\
 & y_{T+1} \quad \text{dado}
 \end{array} \tag{58}$$

Nótese que en el problema (58), sin pérdida de generalidad, se ha supuesto que las trayectorias de las variables de control y estado son estrictamente positivas y que la ecuación de movimiento se satisface con una relación de igualdad.

8. Bellman, Richard, *op. cit.*

En términos intuitivos, el principio de optimalidad establece que la variable de control óptima u_t^* posee la propiedad de que en cualquier período “t”, el conjunto de decisiones restantes $u_{t+1}^*, u_{t+2}^*, \dots, u_T^*$ debe ser óptima con respecto al valor actual de la variable de estado y_t , el cual se encuentra determinado en función del valor inicial y_0 y las decisiones pasadas de la variable de control $u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_{t-1}^*$. La esencia del principio de optimalidad puede resumirse en el siguiente esquema:



La secuencia de variables de control u_t^* ($\forall t = 0, 1, 2, \dots, T$) perteneciente al conjunto “A” será óptima si y solo si dicha secuencia es óptima por tramos⁹. Es decir, el conjunto “A” será óptimo si todos los subconjuntos (tales como, “B” y “C”) también son óptimos¹⁰.

Demostración

El principio de optimalidad puede ser demostrado formalmente a partir de una contradicción. Supongamos que la secuencia $u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_T^*$ es óptima y resuelve el problema (1). Ahora, consideremos que la secuencia $u_t^*, u_{t+1}^*, u_{t+2}^*, \dots, u_T^*$ no cumple con la condición (58). Definamos la secuencia $u_t^\bullet, u_{t+1}^\bullet, u_{t+2}^\bullet, \dots, u_T^\bullet$, como la solución al problema (58). Si así fuera, la secuencia $u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_{t-1}^*, u_t^\bullet, \dots, u_T^\bullet$ generaría un mayor valor del funcional objetivo V que el conjunto de variables de control $u_0^*, u_1^*, u_2^*, \dots, u_{t-1}^*, u_t^*, \dots, u_T^*$. Este resultado contradice la hipótesis inicial, la cual establece que la última secuencia de variables constituye la solución al problema (1).

9. Por tramos se entiende a aquellas secuencias de variables de control que empiezan en un período arbitrario “t”, y terminan en el último período “T”.

10. Es decir, resuelven (58).

2.2 La ecuación de Bellman

El problema (58) puede ser planteado en términos de una relación recursiva denominada **ecuación de Bellman**:

$$\begin{aligned}
 V_t(y_t) = \underset{u_t}{\text{Maximizar}} \quad & [f_t(y_t, u_t) + V_{t+1}(y_{t+1})] & (59) \\
 \text{sujeto a} \quad & y_{t+1} = g_t(y_t, u_t) & \forall t = 0, 1, 2, \dots, T \\
 & y_t \text{ dado} \\
 & y_0 > 0 \\
 & y_{T+1} \text{ dado}
 \end{aligned}$$

En la ecuación (59), la maximización se realiza exclusivamente con respecto a la variable de control, y la variable de estado se mantiene constante con el fin de obtener la función de política. En la ecuación de Bellman, V_t representa la función de valor para el problema (58) en el período "t". Si reemplazamos la restricción en la función objetivo, la condición de primer orden del problema sería la siguiente:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial y_{t+1}} = 0 \quad (60)$$

La condición (60) junto con la ecuación de transición representan un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas (u_t , y_t , y_{t+1}). A partir de dicho sistema es posible obtener la función de política que relacione la variable de control con la de estado: $u_t = h(y_t)$.

2.3 La ecuación de Benveniste y Scheinkman

Para caracterizar completamente las condiciones de primer orden del problema (1), también es necesaria la ecuación de Benveniste y Scheinkman¹¹, que constituye una aplicación del teorema de la envolvente¹². Para obtener esta ecuación reemplazamos la función de política $u_t = h(y_t)$ en la ecuación de

11. Benveniste, Lawrence y Jose Scheinkman, "On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics", en *Econometrica*, vol. 47, No. 3, Evanston, Ill.: Blackwell Publishers, 1979, pp. 727-732.

12. Ver el Anexo al final del capítulo.

transición, con lo cual obtenemos $y_{t+1} = g_t(y_t, h(y_t))$. Posteriormente se reemplazan la función de política y la ecuación de transición en la ecuación de Bellman maximizada, con lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$V_t(y_t) = f_t(y_t, h(y_t)) + V_{t+1}(g_t(y_t, h(y_t))) \quad (61)$$

En (61), la variación de y_t afecta directamente a la función de valor a través de la misma variable e indirectamente, a través de la ecuación de movimiento ($y_{t+1} = g_t(y_t, h(y_t))$) y la función de política ($u_t = h(y_t)$). El teorema de la envolvente establece que cuando la función de valor se encuentra maximizada, solamente se consideran los efectos directos. En este sentido, a partir del teorema de la envolvente, se cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial V_t}{\partial y_t} = \frac{\partial f_t}{\partial y_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \frac{\partial g_t}{\partial y_t} \quad (62)$$

A la relación (62) se le denomina la ecuación de Benveniste y Scheinkman.

2.4 La ecuación de Euler

A partir de la condición de primer orden de la ecuación de Bellman y la ecuación de Benveniste y Scheinkman, es posible obtener la ecuación de Euler derivada en la sección anterior. El primer paso para obtener la ecuación de Euler consiste en despejar la derivada de la función de valor en (60) y adelantarla un período:

$$\frac{\partial V_{t+2}}{\partial y_{t+2}} = - \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}}} \quad (63)$$

El segundo paso consiste en adelantar la ecuación de Benveniste-Scheinkman un período, y reemplazar la relación obtenida en (63):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial y_{t+1}} = \frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \quad (64)$$

Reemplazando (64) en la condición de primer orden de la ecuación de Bellman (60) obtenemos:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} - \frac{\partial g_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \left(\frac{\frac{\partial f_{t+1}}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g_{t+1}}{\partial u_{t+1}}} \right) \right] = 0 \quad (65)$$

que no es otra cosa que la ecuación de Euler derivada en (15). De igual forma, asumiendo una ecuación de transición que depende solamente de la variable de control, obtenemos una versión simplificada de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \frac{\partial g_t}{\partial u_t} \frac{\partial f_{t+1}}{\partial y_{t+1}} = 0 \quad (66)$$

Tal como se ha analizado anteriormente, la ecuación de Euler garantiza que la elección de la variable de control óptima sea tal que la función de retorno tome el valor máximo posible, considerando los efectos en los siguientes períodos.

A continuación se desarrollarán los mismos ejemplos vistos en la primera sección, empleando la técnica de la programación dinámica. Como los conceptos de la ecuación de Euler y la condición de suficiencia son iguales a los analizados anteriormente, en los ejemplos solamente se incluirá la derivación de la función de política y la función de valor.

Ejemplo 1.- Asignación de consumo y ahorro

En términos de la ecuación de Bellman (59), el problema que enfrenta el consumidor para elegir entre consumo y ahorro se resume del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V_t(S_t) = \underset{C_t}{\text{Maximizar}} \quad & [\beta^t \text{Ln}C_t + V_{t+1}(S_{t+1})] \\ \text{sujeto a} \quad & S_{t+1} = \alpha(S_t - C_t) \quad (\alpha = 1+r) \quad \forall t = 0,1,2,\dots,T \\ & S_t \text{ dado} \\ & S_0 > 0 \\ & S_{T+1} = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Para hallar la función de política es necesario resolver el problema empezando por el último período. Como la función de utilidad intertemporal no considera beneficio alguno por el consumo generado más allá del período "T" (no hay bienestar por dejar herencias), la función de valor V_{t+1} es igual a cero. Así, el problema en el último período se resume del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V_T(S_T) = \underset{C_T}{\text{Maximizar}} \quad & [\beta^T \text{Ln}C_T] \\ \text{sujeto a} \quad & 0 = \alpha(S_T - C_T) \\ & S_T \text{ dado} \end{aligned} \quad (68)$$

El resultado de este problema es la función de política en el período "T":

$$C_T = S_T \quad (69)$$

y la función de valor:

$$V_T = \beta^T \text{Ln}S_T \quad (70)$$

En el período "T - 1", la ecuación de Bellman respectiva es la siguiente:

$$\begin{aligned} V_{T-1}(S_{T-1}) = \underset{C_{T-1}}{\text{Maximizar}} \quad & [\beta^{T-1} \text{Ln}C_{T-1} + \beta^T \text{Ln}S_T] \\ \text{sujeto a} \quad & S_T = \alpha(S_{T-1} - C_{T-1}) \\ & S_{T-1} \text{ dado} \end{aligned} \quad (71)$$

La condición de primer orden de (71) da como resultado la función de política en el período "T":

$$\beta^{T-1} \frac{1}{C_{T-1}} - \beta^T \frac{1}{S_{T-1} - C_{T-1}} = 0 \quad (72)$$

$$C_{T-1} = \frac{S_{T-1}}{1 + \beta}$$

Al reemplazar la función de política en la ecuación de Bellman, se obtiene la función de valor:

$$V_{T-1} = \beta^{T-1} [\beta \text{Ln} \alpha \beta - (1 + \beta) \text{Ln}(1 + \beta) + (1 + \beta) \text{Ln}S_{T-1}] \quad (73)$$

Para el período $T - 2$, la ecuación de Bellman está dada por:

$$V_{T-2}(S_{T-2}) = \underset{C_{T-2}}{\text{Maximizar}} \quad [\beta^{T-2} \text{Ln} C_{T-2} + \beta^{T-1} \{ \beta \text{Ln} \alpha \beta + (1 + \beta) \text{Ln} \frac{S_{T-1}}{1 + \beta} \}] \quad (74)$$

sujeto a $S_{T-1} = \alpha(S_{T-2} - C_{T-2})$
 S_{T-2} dado

la cual da como resultado la función de política:

$$C_{T-2} = \frac{S_{T-2}}{1 + \beta + \beta^2} \quad (75)$$

y la función de valor:

$$V_{T-2} = \beta^{T-2} [(\beta + 2\beta^2) \text{Ln} \alpha \beta - (1 + \beta + \beta^2) \text{Ln}(1 + \beta + \beta^2) + (1 + \beta + \beta^2) \text{Ln} S_{T-2}] \quad (76)$$

En general, para el período “ t ”, la función de política y la función de valor tomarán la siguiente forma:

$$C_t = \frac{S_t}{1 + \beta + \dots + \beta^{T-t}} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^{T-t+1}} S_t \quad (77)$$

$$V_t = \beta^t \left[\left(\sum_{j=0}^{T-t} j \beta^j \right) \text{Ln} \alpha \beta - \left(\frac{1 - \beta^{T-t+1}}{1 - \beta} \right) \text{Ln} \left(\frac{1 - \beta^{T-t+1}}{1 - \beta} \right) + \left(\frac{1 - \beta^{T-t+1}}{1 - \beta} \right) \text{Ln} S_t \right] \quad (78)$$

Como se puede apreciar, la función de política obtenida a través de la técnica de programación dinámica es la misma que la obtenida a través de las condiciones de Kuhn-Tucker.

Ejemplo 2.- Modelo de crecimiento neoclásico

La ecuación de Bellman para el problema de crecimiento económico óptimo está definida del siguiente modo:

$$V_t(k_t) = \underset{k_{t+1}}{\text{Maximizar}} \quad [\beta^t \text{Ln}(k_t^\alpha - k_{t+1}) + V_{t+1}(k_{t+1})] \quad (79)$$

k_t dado
 $k_{t+1} = 0$

Este problema difiere ligeramente del anterior, en la medida en que la función de retorno incorpora la ecuación de movimiento. Sin embargo, esta característica no altera los resultados de la ecuación de Bellman. En este problema, como el capital en el período "T + 1" no genera bienestar a la sociedad, se cumple que $V_{T+1} = 0$. Al igual que en el ejemplo anterior, para obtener la función de política es necesario resolver la ecuación de Bellman empezando desde el período "T" hasta el período inicial. Para $t = T$, la ecuación de Bellman es la siguiente:

$$V_T(k_T) = \underset{k_{T+1}}{\text{Maximizar}} [\beta^T \text{Ln}(k_T^\alpha - k_{T+1})] \quad (80)$$

k_T dado
 $k_{T+1} = 0$

Como el *stock* de capital óptimo en el período "T + 1" es igual a cero, la función de valor sería la siguiente:

$$V_T = \beta^T \text{Ln} k_T^\alpha \quad (81)$$

Para el período "T - 1", la ecuación de Bellman sería la siguiente:

$$V_{T-1}(k_{T-1}) = \underset{k_T}{\text{Maximizar}} [\beta^{T-1} \text{Ln}(k_{T-1}^\alpha - k_T) + \beta^T \text{Ln}(k_T^\alpha)] \quad (82)$$

k_{T-1} dado

A partir de la condición de primer orden se obtiene la función de política respectiva:

$$-\beta^{T-1} \frac{1}{k_{T-1}^\alpha - k_T} + \beta^T \frac{1}{k_T^\alpha} \alpha k_T^{\alpha-1} = 0 \quad (83)$$

$$k_T = \frac{\alpha\beta}{1 + \alpha\beta} k_{T-1}^\alpha$$

Reemplazando la función de política (83) en la ecuación de Bellman, se obtiene la función de valor:

$$V_{T-1} = \beta^{T-1} [\alpha\beta \text{Ln} \alpha\beta - (1 + \alpha\beta) \text{Ln}(1 + \alpha\beta) + (1 + \alpha\beta) \text{Ln} k_{T-1}^\alpha] \quad (84)$$

Para el período “T - 2”, la ecuación de Bellman correspondiente sería:

$$V_{T-2}(k_{T-2}) = \underset{k_{T-1}}{\text{Maximizar}} \left[\beta^{T-2} \text{Ln}(k_{T-2}^\alpha - k_{T-1}) + \beta^{T-1} \left[\alpha\beta \text{Ln}\alpha\beta + (1+\alpha\beta) \text{Ln} \left(\frac{k_{T-1}^\alpha}{1+\alpha\beta} \right) \right] \right] \quad (85)$$

dado

La condición de primer orden de (85) está dada por:

$$-\beta^{T-2} \frac{1}{k_{T-2}^\alpha - k_{T-1}} + \beta^{T-1} \frac{(1+\alpha\beta)\alpha k_{T-1}^{\alpha-1}}{k_{T-1}^\alpha} = 0 \quad (86)$$

$$\frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta)k_{T-1}^{\alpha-1}}{k_{T-1}^\alpha} = \frac{1}{(k_{T-2}^\alpha - k_{T-1})}$$

Reemplazando la función de política (83) en (86), se obtiene la función de política para el período respectivo:

$$k_{T-1} = \alpha\beta \frac{1+\alpha\beta}{1+\alpha\beta + \alpha^2\beta^2} k_{T-2}^\alpha \quad (87)$$

Por otra parte, para el período “T-2”, la función de valor es la siguiente:

$$V_{T-2} = \beta^{T-2} [(\alpha\beta)(1+\alpha\beta)\text{Ln}(\alpha\beta)(1+\alpha\beta) - (1+\alpha\beta + (\alpha\beta)^2)\text{Ln}(1+\alpha\beta + (\alpha\beta)^2) + \alpha\beta^2\text{Ln}(\alpha\beta) - \beta(1+\alpha\beta)\text{Ln}(1+\alpha\beta) + (1+\alpha\beta + (\alpha\beta)^2)\text{Ln}k_{T-2}^\alpha] \quad (88)$$

En general para el período “t”, la función de política y la función de valor serán:

$$k_{t+1} = \alpha\beta \frac{1 - (\alpha\beta)^{T-t}}{1 - (\alpha\beta)^{T-t+1}} k_t^\alpha \quad (89)$$

$$V_t = \beta^t \left[\sum_{j=0}^{T-t} \beta^j \left[(\alpha\beta) \left(\frac{1 - (\alpha\beta)^{T-j}}{1 - \alpha\beta} \right) \text{Ln}(\alpha\beta) \left(\frac{1 - (\alpha\beta)^{T-j}}{1 - \alpha\beta} \right) - \left(\frac{1 - (\alpha\beta)^{T-j+1}}{1 - \alpha\beta} \right) \text{Ln} \left(\frac{1 - (\alpha\beta)^{T-j+1}}{1 - \alpha\beta} \right) \right] + \left(\frac{1 - (\alpha\beta)^{T-t+1}}{1 - \alpha\beta} \right) \text{Ln} k_t^\alpha \right] \quad (90)$$

3. Programación dinámica con horizonte temporal infinito

Al igual que en el control óptimo, existen problemas de optimización dinámica donde el horizonte temporal relevante es infinito. El problema general de programación dinámica en dichos casos es el siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & V = \sum_{t=0}^{\infty} f_t(y_t, u_t) \\
 \text{sujeto a} & y_{t+1} = g_t(y_t, u_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & y_0 \text{ dado}
 \end{array} \tag{91}$$

El problema (91), al igual que (1), se resuelve mediante la ecuación de Bellman y la ecuación de Benveniste y Scheinkman. Sin embargo, como la función de retorno usualmente se encuentra multiplicada por un factor de descuento del siguiente modo:

$$f_t(y_t, u_t) = \beta^t f(y_t, u_t) \tag{92}$$

resulta conveniente modificar la ecuación de Bellman con el fin de eliminar la variable temporal (t) que aparece en el factor de descuento, para así obtener una expresión más simple de la función de valor. Para ello definiremos la función de valor corriente (W_t), que no es otra cosa que la función de valor (V_t) multiplicada por la inversa del factor de descuento:

$$W_t(y_t) = \beta^{-t} V_t(y_t) \tag{93}$$

Mientras que la función de valor (V_t) se encuentra medida en términos del bienestar percibido en el período inicial ($t = 0$), la función de valor corriente (W_t) se encuentra expresada en unidades de bienestar percibido en el período "t". De esta manera, empleando el concepto de la función de valor corriente, la ecuación de Bellman (59) para la función de retorno descontada (92) es la siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 W_t(y_t) = \underset{u_t}{\text{Maximizar}} & [f(y_t, u_t) + \beta W_{t+1}(y_{t+1})] \\
 \text{sujeto a} & y_{t+1} = g_t(y_t, u_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & y_t \text{ dado} \\
 & y_0 \text{ dado}
 \end{array} \tag{94}$$

Tal como se puede apreciar en (94), el tiempo no aparece explícitamente en la ecuación, lo cual facilita en cierta medida la resolución del problema.

Adicionalmente a la ecuación de Bellman, es necesario emplear una metodología complementaria para poder hallar la función de política del problema. En esta sección veremos dos de las metodologías más conocidas para hallar la función de política y la función de valor: la metodología de las **aproximaciones sucesivas** y la metodología de **“adivinar y verificar”**. Asimismo, se desarrollarán los dos ejemplos vistos en la sección anterior, pero incorporando un horizonte temporal infinito.

3.1 Método de las aproximaciones sucesivas

Este método consiste en construir una secuencia convergente de funciones de valor con sus respectivas funciones de política. Esta secuencia se obtiene iterando la ecuación de Bellman (59)

$$\begin{aligned}
 W_{j+1}(y_{T-j}) = & \underset{u_{T-j}}{\text{Maximizar}} \quad [f(y_{T-j}, u_{T-j}) + \beta W_j(y_{T-j+1})] \\
 \text{sujeto a} \quad & y_{T-j+1} = g_j(y_{T-j}, u_{T-j}) \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & y_{T-j} \quad \text{dado} \\
 & y_0 \quad \text{dado}
 \end{aligned} \tag{95}$$

Se parte de una condición inicial $W_0 = 0$, y a partir de (95) calculamos la siguiente función de valor corriente W_1 . Posteriormente, reemplazamos W_1 en la ecuación de Bellman para obtener W_2 . El procedimiento se realiza iterativamente hasta que se obtenga una función de valor corriente W_j convergente. En términos prácticos, el método de las aproximaciones sucesivas consiste en resolver la ecuación de Bellman de la misma forma que en el caso del horizonte temporal finito, pero además a la función de valor y a la función de política resultantes se les debe tomar el límite cuando $T \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.- Asignación de consumo y ahorro

El problema de asignación de consumo y ahorro cuando el horizonte temporal es infinito es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} \quad & U = \sum_{t=0}^{\infty} L_t C_t \\
 \text{sujeto a} \quad & S_{t+1} = \alpha(S_t - C_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & S_0 \quad \text{dado}
 \end{aligned} \tag{96}$$

Mediante el método de las aproximaciones sucesivas, la solución a (96) se obtiene tomando el límite a (77) cuando $T \rightarrow \infty$, con lo cual se obtiene la función de política convergente:

$$C_t = (1 - \beta)S_t \quad (97)$$

La función de política (97) indica que el consumo óptimo en un horizonte temporal infinito constituye una fracción constante de los ahorros. Por otro lado, teniendo en cuenta la igualdad¹³:

$$\sum_{t=0}^{\infty} t\beta^t = \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \quad (98)$$

la función de valor convergente para un horizonte temporal infinito es la siguiente:

$$V_t = \beta^t \left[\frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \text{Ln}\alpha\beta + \frac{1}{1 - \beta} \text{Ln}(S_t(1 - \beta)) \right] \quad (99)$$

Considerando la definición (93), la función de valor corriente para el horizonte temporal infinito sería:

$$W_t = \frac{\beta}{(1 - \beta)^2} \text{Ln}\alpha\beta + \frac{1}{1 - \beta} \text{Ln}(S_t(1 - \beta)) \quad (100)$$

la cual no incorpora de manera explícita el tiempo.

Ejemplo 2.- Modelo de crecimiento neoclásico

El problema de crecimiento óptimo para un horizonte temporal infinito sería el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \text{Ln}C_t \\ \text{sujeto a} & k_{t+1} = k_t^\alpha - C_t \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ & k_0 \text{ dado} \end{array} \quad (101)$$

13. Dicha igualdad se encuentra desarrollada en la ecuación 21 del libro de Sargent, Thomas, *Macroeconomic Theory*, Nueva York: Academic Press, 1979, p. 88.

La solución a (101) se obtiene tomando límite a (89) cuando $T \rightarrow \infty$, con lo cual la función de política converge a la expresión:

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha \quad (102)$$

La función de política (102) indica que el *stock* de capital en un período es una fracción constante de la producción (k_t^α) en el período anterior. Del mismo modo, al tomar el límite a (90) obtenemos la función de valor para el horizonte temporal infinito:

$$V_t(k_t) = \beta' \left[\frac{1}{1-\beta} \left[\text{Ln}(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \text{Ln}\alpha\beta \right] + \frac{1}{1-\alpha\beta} \text{Ln}k_t^\alpha \right] \quad (103)$$

Sobre la base de la definición (93), la función de valor corriente sería la siguiente:

$$W_t(k_t) = \frac{1}{1-\beta} \left[\text{Ln}(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \text{Ln}\alpha\beta \right] + \frac{1}{1-\alpha\beta} \text{Ln}k_t^\alpha \quad (104)$$

3.2 Método de “adivinar y verificar”

Este método consiste en “adivinar” la función de valor o la función de política y posteriormente verificar la “adivinanza”, a través de la ecuación de Bellman y la ecuación de Benveniste y Scheinkman. La eficiencia de este método para resolver (91) dependerá de: (a) la existencia de una solución única al problema, y (b) la suerte en realizar la “adivinanza”. Este método se utiliza usualmente para formas funcionales específicas, tales como preferencias cuadráticas y restricciones lineales o preferencias logarítmicas y restricciones con funciones Cobb-Douglas.

El ejemplo de asignación de consumo y ahorro se resolverá adivinando la función de política, mientras que el modelo neoclásico de crecimiento se resolverá adivinando la función de valor.

Ejemplo 1.- Asignación de consumo y ahorro

Resolveremos el problema de asignación de consumo y ahorro con horizonte temporal infinito, suponiendo que la función de política toma la siguiente forma:

$$C_t = \chi S_t \quad (105)$$

donde χ constituye una constante por determinar. Para hallar el valor de χ , reemplazamos (105) en la ecuación de Euler (22), asumiendo una función de retorno logarítmica $f(C_t) = \text{Ln}(C_t)$, con lo cual obtenemos:

$$\frac{\chi S_{t+1}}{\chi \beta S_t} = \alpha \quad (106)$$

Reemplazando la ecuación de transición (19) en (106), obtenemos la expresión:

$$\frac{\chi \alpha S_t (1 - \chi)}{\chi \beta S_t} = \alpha \quad (107)$$

Con lo cual obtendríamos la solución:

$$\chi = 1 - \beta \quad (108)$$

y la función de política:

$$C_t = (1 - \beta) S_t \quad (109)$$

Esta función coincide exactamente con la solución hallada en (97). Para hallar la función de valor para el período "t", es necesario realizar un artificio. Empleando la definición de la función de valor (61), realizamos reemplazos sucesivos de la función de valor hasta derivar la siguiente expresión:

$$V_t(y_t) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{t+j}(y_{t+j}, h(y_{t+j})) \quad (110)$$

donde $h(y_t)$ constituye la función de política. Para el presente problema es necesario evaluar la siguiente función de valor:

$$V_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{t+j} \text{Ln} C_{t+j} \quad (111)$$

Reemplazando la función de política (109) en la ecuación de transición (19), obtenemos una función que relaciona el consumo en cada período con el ahorro en el período "t":

$$C_{t+j} = (1 - \beta)(\alpha\beta)^j S_t \quad (112)$$

Reemplazando (112) en (111), finalmente obtenemos la función de valor:

$$V_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{t+j} \text{Ln}(1-\beta)(\alpha\beta)^j S_t \quad (113)$$

La función de valor (113) converge a la siguiente expresión:

$$V_t = \beta^t \left[\frac{\beta}{(1-\beta)^2} \text{Ln}\alpha\beta + \frac{1}{1-\beta} \text{Ln}(S_t(1-\beta)) \right] \quad (114)$$

Mientras que la función de valor corriente sería igual a:

$$W_t = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} \text{Ln}\alpha\beta + \frac{1}{1-\beta} \text{Ln}(S_t(1-\beta)) \quad (115)$$

Tanto (114) como (115) coinciden con la solución obtenida a través del método de las aproximaciones sucesivas.

Ejemplo 2.- Modelo de crecimiento neoclásico

Para resolver este ejemplo supondremos que la función de valor corriente toma la siguiente forma:

$$W_t(k_t) = \delta + \theta \text{Ln}k_t \quad (116)$$

donde δ y θ son constantes por determinarse. Considerando la función de valor (116), la ecuación de Bellman expresada en términos de la función de valor corriente sería la siguiente:

$$W_t(k_t) = \underset{k_{t+1}}{\text{Maximizar}} [\text{Ln}(k_t^\alpha - k_{t+1}) + \beta W_{t+1}(k_{t+1})] \quad (117)$$

La condición de primer orden de la ecuación de Bellman es la siguiente:

$$-\frac{1}{k_t^\alpha - k_{t+1}} + \beta\theta \frac{1}{k_{t+1}} = 0 \quad (118)$$

a partir de la cual se deriva la función de política:

$$k_{t+1} = \frac{\theta\beta}{1+\theta\beta} k_t^\alpha \quad (119)$$

Reemplazando la función (119) en la ecuación de Bellman obtenemos:

$$\delta + \theta \text{Ln} k_t = \text{Ln} \left(\frac{k_t^\alpha}{1+\theta\beta} \right) + \beta\delta + \beta\theta \text{Ln} \left(\frac{\theta\beta}{1+\theta\beta} k_t^\alpha \right) \quad (120)$$

Como resultado de la ecuación (120) se obtienen los parámetros δ y θ :

$$\theta = \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \quad (121)$$

$$\delta = \frac{1}{1-\beta} \left[\text{Ln}(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \text{Ln}\alpha\beta \right]$$

Sobre la base de (116), (119) y (121), la función de política y la función de valor corriente del problema serían las siguientes:

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha \quad (122)$$

$$W_t(k_t) = \frac{1}{1-\beta} \left[\text{Ln}(1-\alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta} \text{Ln}\alpha\beta \right] + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \text{Ln} k_t \quad (123)$$

Nuevamente, la solución coincide con la respuesta obtenida a través del método de las aproximaciones sucesivas.

3.3 Condición de transversalidad

De igual forma que en el control óptimo, en el problema de programación dinámica con horizonte temporal infinito es necesario imponer una condición de transversalidad para obtener la secuencia óptima de las variables. Esta condición de transversalidad se deriva de las condiciones de Kuhn-Tucker desarrolladas en la sección 1.1 del presente capítulo. A continuación aplicaremos este concepto a los dos ejemplos vistos hasta el momento.

Ejemplo 1.- Asignación de consumo y ahorro

Tomando el límite cuando $T \rightarrow \infty$ a la condición de transversalidad (29), obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\beta^T}{\alpha} \frac{1}{C_T} S_{T+1} = 0 \quad (124)$$

Como C_t y α son siempre distintos de cero, (124) se simplifica del siguiente modo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-1} S_t = 0 \quad (125)$$

Ésta constituye la condición de transversalidad del problema de programación dinámica cuando el horizonte temporal es infinito. En términos intuitivos, la condición (125) asegura una trayectoria convergente de la variable de estado, que en este caso está definida como el *stock* de ahorros. De no cumplirse la condición de transversalidad habría la posibilidad de que exista una secuencia del *stock* de ahorros que sea explosiva, la cual solamente podría obtenerse con bajos niveles de consumo en el largo plazo.

Ejemplo 2.- Modelo de crecimiento neoclásico

Tomando el límite cuando $T \rightarrow \infty$ a la condición de transversalidad (49), obtenemos:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \beta^T \frac{1}{(k_T^\alpha - k_{T+1})} k_{T+1} = 0 \quad (126)$$

Como el consumo, definido como $(k_t^\alpha - k_{t+1})$, es estrictamente positivo, (126) se simplifica a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^{t-1} k_t = 0 \quad (127)$$

que constituye la condición de transversalidad para el modelo de crecimiento neoclásico con horizonte temporal infinito. Al igual que en el caso anterior, esta condición asegura que la variable de estado (el *stock* de capital) presente una secuencia de valores convergente.

4. Programación dinámica con incertidumbre

En esta sección desarrollaremos un caso especial de optimización dinámica, en el cual se incorpora un entorno estocástico. En todos los tipos de problemas vistos hasta el momento, tanto de cálculo de variaciones como de control óptimo y programación dinámica, se ha supuesto que las variables son determinísticas, es decir, que los valores futuros de las variables de control y estado en el futuro pueden ser conocidas de antemano por el agente. En el caso de la programación dinámica con incertidumbre no ocurre lo mismo. A pesar de que el agente optimizador debe elegir una secuencia de variables futuras, enfrenta el problema que éstas presentan aleatoriedad, es decir, su valor no puede ser conocido con anticipación. De esta forma, el agente busca optimizar el valor esperado de la función objetivo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & V = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} f_t(y_t, u_t) \\
 \text{sujeto a} & y_{t+1} = g_t(y_t, u_t, \varepsilon_{t+1}) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & y_0 \quad \text{dado}
 \end{array} \tag{128}$$

En el problema (128) cabe destacar dos aspectos. En primer lugar, la incertidumbre en el problema es introducida a través de la variable aleatoria ε_{t+1} , que aparece en la ecuación de transición. El valor que toma dicha variable es conocido en el período “t + 1”, una vez que la variable de control u_t ha sido elegida en el período “t”. También se asume que ε_{t+1} ($\forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty$) constituye una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas¹⁴ (con una función de distribución conocida). En segundo lugar, al término $E_t(\bullet)$ se le denomina esperanza matemática condicional a la información en el período “t”. En (128), la optimización se realiza con la esperanza matemática condicional al período inicial ($t = 0$). En términos prácticos, la esperanza matemática indica el valor promedio de una variable aleatoria. De este modo, el problema que enfrenta el agente consiste en maximizar el valor promedio de su función objetivo intertemporal.

La solución a (128) será una función que determine la variable de control óptima para un valor dado de la variable de estado: $u_t = h(y_t)$. Esta función es similar a la función de política definida en las secciones anteriores y se le denomina “**plan contingente**”. La función tiene esta denominación porque la

14. Lo cual corresponde al caso más simple en programación dinámica con incertidumbre.

elección de la variable de control óptima dependerá del valor que tome la variable de estado, la cual es desconocida a priori debido a la existencia de la variable aleatoria ε_{t+1} .

El método para resolver un problema de programación dinámica con incertidumbre no difiere en gran medida de la metodología vista hasta el momento. Es necesario emplear los conceptos de la ecuación de Bellman, la ecuación de Benveniste-Scheinkman y la ecuación de Euler, pero incorporando el concepto de la esperanza matemática.

4.1 La ecuación de Bellman

La ecuación de Bellman incorporando un horizonte temporal infinito y un entorno estocástico es la siguiente:

$$W_t(y_t) = \underset{u_t}{\text{Maximizar}} [f(y_t, u_t) + \beta E_t[W_{t+1}(y_{t+1})]] \quad (129)$$

sujeto a $y_{t+1} = g_t(y_t, u_t, \varepsilon_{t+1}) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty$
 y_t *dado*
 y_0 *dado*

La condición de primer orden del problema viene dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} + \beta E_t \left[\frac{\partial g_t}{\partial u_t} \frac{\partial W_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \right] = 0 \quad (130)$$

La condición (130) es similar a la condición de primer orden derivada en (60), no obstante incorpora la función de valor corriente (W_t) y la esperanza matemática $E_t(\bullet)$. En este caso, la condición de primer orden permite obtener un plan contingente $u_t = h(y_t)$ que maximice el valor esperado de la función objetivo.

4.2 La ecuación de Benveniste y Scheinkman

Al reemplazar el plan contingente en la ecuación de Bellman, obtenemos la siguiente función de valor corriente:

$$W_t(y_t) = f(y_t, h(y_t)) + \beta E_t[W_{t+1}(g_t(y_t, h(y_t), \varepsilon_{t+1}))] \quad (131)$$

Aplicando el teorema de la envolvente a (131), obtenemos la ecuación de Benveniste y Scheinkman para el problema (128):

$$\frac{\partial W_t}{\partial y_t} = \frac{\partial f}{\partial y_t} + \beta E_t \left[\frac{\partial g_t}{\partial y_t} \frac{\partial W_{t+1}}{\partial y_{t+1}} \right] \quad (132)$$

4.3 La ecuación de Euler estocástica

Debido a la existencia de la esperanza matemática, no es posible simplificar fácilmente (131) y (132) para hallar una expresión general de la ecuación de Euler. Para ello sería necesario tener un conocimiento previo de las formas funcionales de la función de retorno, la ecuación de movimiento y la función de distribución. En lugar de ello, derivaremos la ecuación de Euler para el caso especial en el cual la ecuación de transición depende exclusivamente de la variable de control. En dicho caso (132) se simplificaría a:

$$\frac{\partial W_t}{\partial y_t} = \frac{\partial f}{\partial y_t} \quad (133)$$

De este modo, la ecuación de Euler estocástica sería la siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} + \beta E_t \left[\frac{\partial g_t}{\partial u_t} \frac{\partial f}{\partial y_{t+1}} \right] = 0 \quad (134)$$

Ejemplo 1.- Selección de portafolio¹⁵

En este ejemplo introduciremos algunas modificaciones al problema de asignación de consumo y ahorro que hemos visto hasta el momento. Hasta ahora, el consumidor enfrentaba el problema de seleccionar la trayectoria del consumo que maximice su utilidad intertemporal. En este ejemplo incorporaremos un nuevo tipo de decisión. Además de decidir cuánto destinar a consumo y ahorro, el agente deberá tomar una decisión de portafolio. Es decir, deberá elegir entre asignar sus ahorros a un instrumento libre de riesgo (como un bono del gobierno) que brinda un retorno constante (r), o invertir en un instru-

15. Este ejemplo fue tomado de Blanchard, Olivier Jean y Stanley Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge: The MIT Press, 1993, pp. 279–285. Dicho modelo se basa en el trabajo de Samuelson, Paul, "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", en *Review of Economics and Statistics*, No. 51, 1969, pp. 239–246.

mento riesgoso (como es el caso de las acciones) que presenta una rentabilidad (z_t) variable en el tiempo e incierta. Asumiremos que el retorno z_t es una variable independiente e idénticamente distribuida. En este caso, las variables de control serán el consumo y la participación de los ahorros que destina a cada instrumento. Impondremos la restricción de que la suma de las participaciones es igual a uno. En este sentido, la fracción de los ahorros destinada al instrumento libre de riesgo será (ω_t) y la destinada en el instrumento riesgoso será ($1 - \omega_t$). De este modo, el problema que debe resolver el consumidor será el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(C_t) & (135) \\ \text{sujeto a} \quad & S_{t+1} = (S_t - C_t)[(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)] \\ & S_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

En el problema asumiremos que la función de retorno es logarítmica $f(C_t) = \text{Ln}C_t$. Para resolver (135), en primer lugar, debemos plantear la ecuación de Bellman estocástica:

$$\begin{aligned} W_t(S_t) = \text{Maximizar}_{C_t, \omega_t} \quad & [\text{Ln}C_t + \beta E_t[W_{t+1}(S_{t+1})]] & (136) \\ \text{sujeto a} \quad & S_{t+1} = (S_t - C_t)[(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)] \\ & S_t \text{ dado} \\ & S_0 \text{ dado} \end{aligned}$$

En este caso emplearemos el método más simple, el de “adivinar y verificar”. Dado que la función objetivo es la misma que en los casos anteriores, supondremos que la función de valor corriente toma la siguiente forma:

$$W_t = \delta + \theta \text{Ln}S_t \quad (137)$$

Tomando en cuenta (137), desarrollamos las condiciones de primer orden de la ecuación de Bellman:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_t} - \theta \beta E_t \left[\frac{[(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)]}{(S_t - C_t)[(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)]} \right] &= 0 & (138) \\ E_t \left[\frac{(S_t - C_t)(r - z_t)}{(S_t - C_t)[(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)]} \right] &= \frac{1}{\theta \beta C_t} \end{aligned}$$

Simplificando (138) obtenemos el plan contingente del consumo (C_t):

$$C_t = \frac{S_t}{1 + \theta\beta} \quad (139)$$

Al reemplazar el plan contingente (139) en la ecuación de Bellman (136), obtenemos la igualdad:

$$\delta + \theta \text{Ln} S_t = \text{Ln} \frac{S_t}{1 + \theta\beta} + \beta E_t \left[\delta + \theta \text{Ln} \frac{\theta\beta}{1 + \theta\beta} S_t [(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)] \right] \quad (140)$$

Despejando (140) podemos obtener la solución para los parámetros θ y δ :

$$\theta = \frac{1}{1 - \beta} \quad (141)$$

$$\delta = \frac{1}{1 - \beta} \left[\text{Ln}(1 - \beta) + \frac{\beta}{1 - \beta} \text{Ln}\beta + \frac{\beta}{1 - \beta} E_t [\text{Ln}(\omega_t(r - z_t))] \right]$$

Finalmente, hallamos los planes contingentes para el consumo, la decisión de portafolio y la función de valor corriente:

$$C_t = (1 - \beta)S_t \quad (142)$$

$$E_t \left[\frac{(r - z_t)}{(1+r)\omega_t + (1+z_t)(1-\omega_t)} \right] = 0 \quad (143)$$

$$W_t = \frac{1}{1 - \beta} \left[\text{Ln}(1 - \beta) + \frac{\beta}{1 - \beta} \text{Ln}\beta + \frac{\beta}{1 - \beta} E_t [\text{Ln}(\omega_t(r - z_t))] \right] + \frac{1}{1 - \beta} \text{Ln} S_t \quad (144)$$

En (143), la decisión de portafolio (ω_t) se encuentra definida implícitamente. Bajo el supuesto de que la rentabilidad del activo riesgoso es una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida, la participación de los ahorros destinada al activo libre de riesgo será una constante a lo largo del tiempo.

La principal conclusión del problema de selección de portafolio consiste en que la decisión de portafolio (elección de ω) y la decisión de consumo y ahorro (elección de C_t) se realizan de manera separada. Ello puede apreciarse en la ecuación (143), donde la variable ω se define implícitamente independientemente del nivel de ahorros. De este forma, para cualquier nivel de riqueza inicial (S_0), la estrategia de portafolio óptima para unas preferencias logarítmicas siempre será la misma.

Ejemplo 2.- Modelo de crecimiento neoclásico estocástico¹⁶

En este ejemplo desarrollaremos el modelo de crecimiento neoclásico en un entorno de incertidumbre. Asumiremos que la variable estocástica afecta la función de producción de la siguiente forma:

$$\phi(k_t, \varepsilon_t) = k_t^\alpha \varepsilon_t \quad (145)$$

La variable aleatoria ε_t puede ser interpretada como *shocks* que afectan la oferta agregada de la economía, como desastres naturales o *shocks* de tecnología. Por otra parte, supondremos que $\text{Ln}\varepsilon_t$ presenta una distribución normal con media cero ($E_t[\text{Ln}\varepsilon_t] = 0$) y varianza constante ($E_t[\text{Ln}\varepsilon_t]^2 = \sigma^2$).

Asumiendo una función de utilidad logarítmica, la ecuación de Bellman correspondiente a este problema sería la siguiente:

$$W_t(k_t, \varepsilon_t) = \underset{k_{t+1}}{\text{Maximizar}} \left[\text{Ln}(k_t^\alpha \varepsilon_t - k_{t+1}) + \beta E_t[W_{t+1}(k_{t+1}, \varepsilon_{t+1})] \right] \quad (146)$$

k_t dado
 k_0 dado

Para resolver el problema recursivo (146) emplearemos el método de “adivinar y verificar”. De este modo, supondremos que la función de valor corriente presenta la siguiente forma:

$$W_t = \delta + \theta \text{Ln}k_t + \gamma \text{Ln}\varepsilon_t \quad (147)$$

16. La aplicación fue tomada de Sargent, Thomas. *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge: Harvard University Press, 1987, pp. 35–36. Dicho modelo se basa en el artículo escrito por Kydland y Prescott, “Time to Build and Aggregate Fluctuations”, en *Econometrica*, Evans-ton III: Blackwell Publishers, 1982, pp. 473–491.

La condición de primer orden de la ecuación de Bellman es la siguiente:

$$-\frac{1}{k_t^\alpha \varepsilon_t - k_{t+1}} + \beta \theta \frac{1}{k_{t+1}} = 0 \quad (148)$$

a partir de la cual se deriva la función de política:

$$k_{t+1} = \frac{\theta\beta}{1 + \theta\beta} k_t^\alpha \varepsilon_t \quad (149)$$

Reemplazando la función de política (149) en la ecuación de Bellman, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\delta + \theta \text{Ln} k_t + \gamma \text{Ln} \varepsilon_t = \text{Ln} \left[\frac{1}{1 + \theta\beta} k_t^\alpha \varepsilon_t + \beta E_t \left[\delta + \theta \text{Ln} \frac{\theta\beta}{1 + \theta\beta} k_t^\alpha \varepsilon_t + \gamma \text{Ln} \varepsilon_{t+1} \right] \right] \quad (150)$$

Con lo cual obtenemos las soluciones para los parámetros γ , θ y δ :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{1 - \alpha\beta} \\ \theta &= \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \\ \delta &= \frac{1}{1 - \beta} \left[\text{Ln}(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \text{Ln} \alpha\beta \right] \end{aligned} \quad (151)$$

Empleando (151), hallamos el plan contingente óptimo y la función de valor corriente:

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^\alpha \varepsilon_t \quad (152)$$

$$W_t = \frac{1}{1 - \beta} \left[\text{Ln}(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \text{Ln} \alpha\beta \right] + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \text{Ln} k_t + \frac{1}{1 - \alpha\beta} \text{Ln} \varepsilon_t \quad (153)$$

Tal como se puede apreciar, la función de valor corriente hallada en (153) es consistente con la “adivinada” en (147); por lo tanto, el plan contingente (152) determina la secuencia de variables de control y estado que maximiza el valor esperado de la utilidad intertemporal.

Ejercicios

1. Resuelva el siguiente modelo correspondiente al problema de asignación de consumo y ahorro de tres períodos:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & U = \sum_{t=1}^3 \text{Ln } C(t) \\ \text{sujeto a} \quad & S(t+1) = 1.1S(t) - C(t) \\ & S(1) = 1 \quad S(4) = 1.21 \end{aligned}$$

2. Un consumidor vive durante tres períodos designados por $t = 0, 1, 2$, y consume avena (a) y brócoli (b) cada día. Este consumidor tiene preferencias sobre cantidades de consumo según la función de utilidad que se muestra. Este consumidor debe elegir cuánto consumir de los bienes (a) y (b) en cada uno de los tres períodos, y dispone de un ingreso de 300 u.m. para los tres períodos. Además, se sabe que la cantidad de dinero que no gasta en un determinado día permanece en su bolsillo, no obteniéndose ningún interés. Halle las cantidades óptimas de avena (a) y brócoli (b) que maximicen la utilidad del consumidor para cada uno de los tres períodos.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & U(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2) = (a_0 b_0)^{0.25} + 0.9(a_1 b_1)^{0.25} + 0.8(a_2 b_2)^{0.25} \\ & P_a = 1 \quad I = 300 \quad P_b = 1.1 \end{aligned}$$

3. Desarrolle el problema de asignación de consumo y ahorro para un horizonte temporal finito (T) e infinito (∞), con las siguientes funciones de utilidad instantáneas:

a. $f(C_t) = \frac{1}{1-\sigma} C_t^{1-\sigma} \quad (\sigma > 0)$

b. $f(C_t) = \mu C_t - \lambda C_t^2 \quad (\mu, \lambda > 0)$

c. $f(C_t) = -\left(\frac{1}{\eta}\right) e^{-\eta C_t} \quad (\eta > 0)$

4. Resuelva el modelo neoclásico de crecimiento para el caso en que existe persistencia en los hábitos de consumo:

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} \quad & U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\text{Ln}C_t + \phi \text{Ln}C_{t-1}) \\
 \text{sujeto a} \quad & k_{t+1} = k_t^\alpha - C_t \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & k_0 \text{ dado} \\
 & C_{-1} \text{ dado}
 \end{aligned}$$

Para los parámetros $\alpha, \beta, \phi \in]0, 1[$

5. Considere el problema de asignación de consumo y ahorro, en el cual existe solamente un instrumento financiero que presenta un retorno (r_t) incierto, y el consumidor tiene la función instantánea de utilidad ($f(C_t)$) mostrada en (1.a):

$$\begin{aligned}
 \text{Maximizar} \quad & U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\sigma} C_t^{1-\sigma} \\
 \text{sujeto a} \quad & S_{t+1} = (1+r_t)(S_t - C_t) \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, \infty \\
 & S_0 \text{ dado}
 \end{aligned}$$

Para $\beta \in]0, 1[$, y $\sigma > 0 \wedge \sigma \neq 1$.

- a. Calcule el coeficiente de aversión al riesgo relativa (C.A.R.R.), definido por:

$$- \frac{f''(C_t)C_t}{f'(C_t)}$$

- b. Halle el plan contingente del consumo.
- c. Suponga que $\text{Ln}(1+r_t)$ tiene una distribución normal con media cero y varianza constante θ^2 . Bajo esas propiedades estadísticas se cumple que:

$$E_t [(1+r_t)^{1-\sigma}] = E_t [1+r_t]^{1-\sigma} e^{\frac{-\sigma(1-\sigma)\theta^2}{2}}$$

Empleando dicha propiedad, indique el efecto de un incremento del rendimiento esperado $E_t[1 + r_t]$ (todo lo demás constante) sobre el consumo. Considere los casos en los cuales el C.A.R.R. es mayor a uno y menor a uno.

6. Un individuo busca maximizar el valor esperado de su utilidad intertemporal:

$$U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(C_t)$$

Asimismo, el agente invierte una cantidad de dinero A_t en una acción que presenta un precio (p_t) y un dividendo (d_t), ambos con un comportamiento estocástico. La rentabilidad de la acción R_t (que también es una variable aleatoria) está definida por:

$$R_t = \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t}$$

Por otra parte, la ecuación de movimiento que describe la evolución de la inversión es la siguiente:

$$A_{t+1} = \left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} \right) (A_t - C_t)$$

Asimismo, defina la variable de control $u_t = A_t - c_t$, y la función de valor corriente $W_t(A_t, R_{t+1})$.

- a. Resuelva la ecuación de Bellman:

$$W_t(A_t, R_{t+1}) = \underset{u_t}{\text{Maximizar}} \quad [f(A_t - u_t) + \beta E_t W_{t+1}(A_{t+1}, R_t)]$$

sujeto a $A_{t+1} = R_t u_t$

y demuestre a partir de la condición de primer orden y la ecuación de Benveniste y Scheinkman, que se cumple lo siguiente:

$$f'(C_t) = \beta E_t f'(C_{t+1}) \left(\frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} \right)$$

- b. Demuestre a partir de (a) que el precio de equilibrio de la acción es el siguiente:

$$p_t = E_t \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \frac{f'(C_{t+j})}{f'(C_t)} d_{t+j}$$

(Sugerencia: Considere la ley de las expectativas iteradas, la cual establece que $E_t[E_{t+1}[X]] = E_t[X]$)

- c. Desarrolle la expresión de (b) para la función de utilidad $f(C_t) = C_t$

Anexo

TEOREMA DE LA ENVOLVENTE

Los problemas de optimización en economía usan funciones dependientes de cierta cantidad de parámetros, como precios, ingreso y otros. Estos parámetros, normalmente, se mantienen constantes durante el análisis, pero podrían variar según lo que se pretende analizar. En teoría del consumidor, por ejemplo, podríamos calcular la utilidad máxima considerando los precios que enfrenta como parámetros, y luego querer averiguar cómo cambia esa utilidad máxima al cambiar los precios. El teorema de la envolvente nos brinda un resultado general acerca de cómo derivar la función de valor:

Consideremos el siguiente problema de optimización estática:

$$\underset{x}{\text{MAX}} f(x, r) \quad \text{sujeto a} \quad g_j(x, r) = 0 \quad j = 1, \dots, m$$

Donde $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$ es un vector de parámetros. Aquí r se mantiene constante durante la maximización con respecto a $x = (x_1, \dots, x_n)$. El valor máximo de $f(x, r)$ que se obtenga del proceso anterior se denota mediante $f^*(r)$, también llamado función de valor. Si designamos por (x_1^*, \dots, x_n^*) los valores del vector x para los cuales se alcanza el valor máximo, entonces:

$$f^*(r) = f(x^*(r), r) = f(x_1^*(r), \dots, x_n^*(r), r_1, \dots, r_k)$$

El resultado siguiente muestra de manera general, cómo derivar la función de valor:

Si $f^*(r) = \max_x f(x, r)$ y $x^*(r)$ es el valor de x que maximiza $f(x, r)$, entonces:

$$\frac{\partial f^*(r)}{\partial r_j} = \frac{\partial f(x^*(r), r)}{\partial r_j} \quad j = 1, \dots, k$$

Este es el llamado teorema de la envolvente y resulta muy útil. Nótese que si varía r_j , entonces $f^*(r)$ cambia por dos razones: en primer lugar, un cambio en r_j cambia el vector r y así cambia $f(x, r)$ directamente. En segundo lugar, un cambio en r_j cambia todas las funciones $x_1^*(r), \dots, x_n^*(r)$ y, por lo tanto, $f(x^*(r), r)$ cambia indirectamente. El resultado anterior demuestra que el efecto total sobre la función de valor de un pequeño cambio en r_j se puede hallar calculando la derivada parcial de $f(x^*(r), r)$ con respecto a r_j , ignorando el efecto indirecto de la dependencia de x^* de r .

Consideremos, ahora, el problema más general y supongamos que $\lambda_i = \lambda_i(r)$, $i = 1, \dots, m$, son los multiplicadores de Lagrange que se obtienen de las condiciones de primer orden para el problema. Sea, además, $L(x, r) = f(x, r) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x, r)$, la función de Lagrange correspondiente. Entonces:

$$\frac{\partial f^*(r)}{\partial r_j} = \frac{\partial L(x^*(r), r)}{\partial r_j} \quad j = 1, \dots, k$$

Según este resultado, el efecto total sobre el valor de $f^*(r)$ de un cambio pequeño de r_j se puede hallar derivando parcialmente la función lagrangiana $L(x, r)$ con respecto a r_j , considerando como constantes las x y las λ . Este es el teorema general de la envolvente.

Bibliografía

Barro, Robert J. y Xavier Sala-i-Martin, *Economic Growth*, McGraw-Hill, 1995.

Bellman, Richard, *Dynamic Programming*, Princeton: Princeton University Press, 1957.

Benveniste, Lawrence y Jose Scheinkman, "On the Differentiability of the Value Function in Dynamic Models of Economics", en *Econometrica*, vol. 47, No. 3, Evanston, Ill.: Blackwell Publishers, 1979, pp. 727-732.

Berck, Peter y Knut Sydsaeter, *Economists' Mathematical Manual*, Springer-Verlag, 1993.

Blanchard, Olivier Jean y Stanley Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge: The MIT Press, 1993.

Brock, William y Leonard Mirman, "Optimal Economic Growth and Uncertainty", en McCall, J.J. (ed.), Chicago: The University of Chicago Press, 1972, pp. 1-43.

Brock, William y Leonard Mirman, "Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case", en *Journal of Economic Theory*, 1972, pp. 479-513.

Cass, David, "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", en *Review of Economic Studies*, vol. 32, No. 3, 1965, pp. 233-240.

Clark, Colin W. y Gordon R. Munro, "The Economics of Fishing and Modern Capital Theory: A Simplified Approach", en *Journal of Environmental Economics and Management*, Academic Press, 1975, pp. 92-106.

Chiang, Alpha, *Métodos fundamentales de economía matemática*, 3a. Edición, Madrid: McGraw-Hill, 1996.

Chiang, Alpha, *Elements of Dynamic Optimization*, 3a. edición, Nueva York: McGraw-Hill, 1992.

Dixit, Avinash, *Optimization in Economic Theory*, Oxford: Oxford University Press, 1993.

Evans, G.C., "The Dynamics of Monopoly", en *American Mathematical Monthly*, febrero 1924, pp. 77-83.

Forster, Bruce A., "On a One State Variable Optimal Control Problem: Consumption-Pollution Trade-Offs", en Forster, Bruce A., *Applications of Control Theory to Economic Analysis*, Amsterdam: North Holland, 1977.

Hotelling, Harold, "The Economics of Exhaustible Resources", en *Journal of Political Economy*, Chicago: The University of Chicago Press, abril 1931, pp. 137-175.

Inada, Ken-Ichi, "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization", en *Review of Economic Studies*, vol. 30, 1963, pp. 119-127.

Intriligator, Michael D., *Optimización matemática y teoría económica*, Bogotá: Editorial: Prentice-Hall Internacional, 1973.

Kamien, Morton I. y Nancy L. Schwartz, *Dynamic Optimization. The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, 2a. edición, Amsterdam: North-Holland, 1991.

Kline, M., *Mathematics: A Cultural Approach*, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

Koopmans, T.C., *On the Concept of Optimal Economic Growth*, Discussion paper, New Haven: Coules Foundation, Yale University, 1963.

- Kreps, David M., *Curso de teoría microeconómica*, Madrid: McGraw-Hill, 1995.
- Kydland y Prescott, "Time to build and aggregate fluctuations", en *Econometrica*, Evanston Ill.: Blackwell Publishers, 1982, pp. 473–491.
- Léonard, Daniel y Ngo van Long, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- Mangasarian. O.L, "Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems", en *SIAM Journal on Control*, vol. 4, 1966, pp. 139–152.
- Obtsfeld, Maurice y Kenneth Rogoff, *Foundations of International Macroeconomics*, Cambridge: The MIT Press, 1997.
- Pontryagin, L.S., *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, 1962.
- Ramsey, Frank P., "A Mathematical Theory of Savings", en *Economic Journal*, Oxford: Blackwell Publishers, diciembre 1928, pp. 543-559.
- Samuelson, Paul, "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", en *Review of Economics and Statistics*, No. 51, 1969, pp. 239–246.
- Sargent, Thomas, *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge: Harvard University Press, 1987.
- Sargent, Thomas, *Macroeconomic Theory*, Nueva York: Academic Press, 1979.
- Stokey, Nancy, Robert Lucas y E. Prescott, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge: Harvard University Press, 1989.
- Sydsaeter, Knut y Peter J. Hammond, *Mathematics for Economic Analysis*, Prentice-Hall, 1995.
- Takayama, Akira, *Analytical Methods in Economics*, Harvester Wheatsheaf, 1994.
- Taylor, Dean, "Stopping Inflation in the Dornbusch Model: Optimal Monetary Policies with Alternate Price-Adjustment Equations", en *Journal of Macroeconomics*, Baton Rouge: Louisiana State University Press, 1989, pp. 199-216.

Tu, Pierre N.V., *Introductory Optimization Dynamics. Optimal Control with Economics and Management Applications*, Springer-Verlag, 1991.

Urrutia, Carlos, *Notas sobre crecimiento y ciclos económicos*, Ila-des/Georgetown University, 1996.

Varian, Hal R., *Análisis microeconómico*, Barcelona: Antonio Bosch editor, 1992.

Varian, Hal R., *Microeconomía intermedia*, Barcelona: Antonio Bosch editor, 1988.

APUNTES DE ESTUDIO

1. Portocarrero Suárez, Felipe, *Cómo hacer un trabajo de investigación*, 3a. ed., Lima: CIUP, 1990.
2. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo I, 3a. ed., Lima: CIUP, 1991.
3. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo II, 3a. ed., Lima: CIUP, 1991.
4. Injoque Espinoza, Javier, *WordPerfect 5.1. Fundamentos y orientaciones prácticas*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1992.
5. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo III, Lima: CIUP, 1991.
6. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiese Rebagliati, *Elementos de gramática española*, 4a. ed., Lima: Universidad del Pacífico, 2008.
7. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiese Rebagliati, *Técnicas de lectura y redacción. Lenguaje científico y académico*, 4a. ed., Lima: Universidad del Pacífico, 2009.
8. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos de política de la empresa*, Lima: CIUP, 1992.
9. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo IV, Lima: CIUP, 1992.
10. Pipoli de Butrón, Gina (comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, Lima: CIUP, 1992.
11. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo V, Lima: CIUP, 1993.
12. Rivero, Eduardo, *Contabilidad I*, 2a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 2000.

13. Altamirano, Jesús, *Lotus 2.4. Conceptos y consejos prácticos*, Lima: Universidad del Pacífico, 1993.
14. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Colección de casos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1993.
15. Chong, Esteban y otros, *Teoría y práctica de la contabilidad intermedia*, Lima: CIUP, 1994.
16. Wong, David, *Finanzas en el Perú: un enfoque de liquidez, rentabilidad y riesgo*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1995.
17. Mayorga, David y Patricia Araujo, *La importancia de la mercadotecnia estratégica: el caso de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1994.
18. Aliaga Valdez, Carlos, *Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos*, 4a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1999.
19. Ángeles, Julio; Jorge Rubio; Yván Soto y Jorge Toma, *Procesamiento estadístico de datos con Minitab y Harvard Graphics*, Lima: Universidad del Pacífico, 1995.
20. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Casos peruanos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1995.
21. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VI, Lima: CIUP, 1995.
22. Vento Ortiz, Alfredo, *Finanzas aplicadas*, 7a. ed., Lima: CIUP, 2005.
23. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos peruanos de negocios internacionales*, Lima: CIUP, 1995.
24. Muñoz, José Luis, *Análisis e interpretación de estados financieros ajustados por inflación*, Lima: CIUP, 1995.
25. Pipoli de Butrón, Gina (comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, tomo II, Lima: CIUP, 1996.
26. Beltrán, Arlette y Hanny Cueva, *Ejercicios de evaluación privada de proyectos*, 3a. ed., Lima: CIUP, 2000.

27. Aliaga Valdez, Carlos, *Aplicaciones prácticas de matemática financiera: 603 problemas resueltos*, 1a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1998.
28. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VII, Lima: CIUP, 1996.
29. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos sobre la mercadotecnia estratégica de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1997.
30. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VIII, Lima: CIUP, 1997.
31. Seinfeld, Janice y otros, *Introducción a la economía de los recursos naturales y del medio ambiente*, Lima: 2a. ed., CIUP, 1999.
32. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo IX, Lima: CIUP, 1998.
33. Bonifaz, José Luis y Ruy Lama C., *Optimización dinámica y teoría económica*, 1a. ed. corregida, Lima: CIUP, 2002.
34. Franco Concha, Pedro, *Planes de negocios: una metodología alternativa*, 2a. ed., Lima: CIUP, 2005.
35. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo X, Lima: CIUP, 1999.
36. Schuldt, Jürgen, *Dolarización oficial de la economía: un debate en once actos*, Lima: CIUP, 1999.
37. Schwalb, María Matilde y Juan Carlos Casafranca, *Casos ganadores de los Premios MAX/EFFIE*, Lima: CIUP, 2000.
38. Medina, Oswaldo, *El ahorramiento: una interpretación sociológica*, Lima: CIUP, 2000.
39. Espejo Reese, Ricardo, *Ética y empresas: el caso de la banca peruana*, 2a. ed. corregida y aumentada, Lima: CIUP, 2003.
40. Malca, Óscar, *Comercio electrónico*, Lima: Universidad del Pacífico, 2001.

41. Lescano, Lucio. *La disciplina del servicio*, 2a. ed. corregida y aumentada, Lima: CIUP, 2003.
42. Schwalb, María Matilde; Patricia Araujo y David Mayorga, *Casos ganadores de los Premios Effie 1999*, Lima: Universidad del Pacífico-AFP Integra, 2001.
43. Urrunaga, Roberto; Tami Hiraoka y Antonio Risso, *Fundamentos de economía pública*, Lima: CIUP, 2001.
44. Bonifaz, José Luis y Diego Winkelried, *Matemáticas para la economía dinámica*, 1a. ed. corregida, Lima: CIUP, 2003.
45. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos de administración general en organizaciones que operan en el Perú*, tomo XI, Lima: CIUP, 2001.
46. Pipoli de Butrón, Gina, *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, tomo II, Lima: CIUP, 2002.
47. Malca, Óscar, *Comercio internacional*, 4a. ed., Lima: CIUP, 2008.
48. Schwalb, María Matilde; Patricia Araujo y David Mayorga, *Casos ganadores de los Premios Effie 2000*, Lima: Universidad del Pacífico-Alicorp, 2002.
49. Mayorga, David; María Matilde Schwalb y Patricia Araujo, *Casos ganadores de los Premios Effie 2001*, Lima: Universidad del Pacífico-Alicorp, 2002.
50. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos de administración general en organizaciones que operan en el Perú*, tomo XII, Lima: CIUP, 2002.
51. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos peruanos de comportamiento organizacional*, tomo I, Lima: CIUP, 2003.
52. Siu K., Ricardo y Carlos Andaluz Z., *Cálculo diferencial: teoría y aplicaciones*, Lima: CIUP, 2003.
53. Schwalb, María Matilde; Claudia Ortega y Emilio García (editores), *Casos de responsabilidad social*, Lima: CIUP, 2003.

54. Araujo, Patricia; David Mayorga y María Matilde Schwalb, *Casos ganadores de los Premios Effie 2002*, Lima: Universidad del Pacífico, 2003.
55. Mayorga, David; Patricia Araujo y María Matilde Schwalb, *Casos ganadores de los Premios Effie 2003*, Lima: Universidad del Pacífico - Interbank, 2004.
56. Malca, Oscar, *Perfiles de productos con potencial agroexportador*, Lima: CIUP, 2004.
57. Miyashiro, Isabel, *Empresa y gerencia en Asia: el caso de la República Popular China*, Lima: CIUP, 2004.
58. Schwalb, María Matilde y Emilio García (editores), *Buenas prácticas peruanas de responsabilidad social empresarial*, Lima: CIUP, 2004.
59. Cortez, Rafael y Luis Rosales, *340 ejercicios de Microeconomía*, Lima: CIUP, 2005.
60. Seinfeld, Janicc, *Análisis económico de la salud*, Lima: CIUP, 2005.
61. Yamada, Gustavo y Patricia Pérez, *Evaluación de impacto de proyectos de desarrollo en el Perú*, Lima: CIUP, 2005.
62. Alva, Edgar, *Fundamentos de Contabilidad. Un enfoque de diálogo con un lenguaje claro*, Lima: CIUP, 2005.
63. Schwalb, María Matilde; Emilio García y Virginia Soldevilla (eds.), *Buenas prácticas peruanas de responsabilidad social empresarial. Colección 2005*, Lima: CIUP, 2006.
64. Toma Inafuko, Jorge y Jorge Luis Rubio Donet, *Estadística aplicada. Primera parte*, Lima: CIUP, 2007.
65. Siu, Koochoy, Ricardo y Carlos Andaluz Zúñiga, *Álgebra*, Lima: CIUP, 2007.
66. Yamada, Gustavo y Juan Chacaltana, *Generación de empleo en el Perú: seis casos recientes de éxito*, Lima: CIUP, 2007.

67. Urrunaga, Roberto y José Luis Bonifaz (eds.), *Estudios de caso sobre regulación en infraestructura y servicios públicos en el Perú*, Lima: CIUP, 2008.
68. Schuldt, Jürgen, *Modelos macroeconómicos computarizados (una introducción)*, Lima: CIUP, 2008.
69. Toma Inafuko, Jorge y Jorge Luis Rubio Donet, *Estadística aplicada. Segunda parte*, Lima: CIUP, 2008.
70. Del Castillo, Elsa y Gustavo Yamada, *Responsabilidad social y buen clima laboral: una fórmula ganadora*, Lima: CIUP, 2008.
71. Beltrán, Arlette; Juan Francisco Castro y Gustavo Yamada, *Hacia un programa de crédito de largo plazo para la educación superior en el Perú*, Lima: CIUP, 2008.
72. Schwalb, María Matilde (editora), *Experiencias exitosas de responsabilidad empresarial*, Lima: Universidad del Pacífico, 2010.
73. Siu Koochoy, Ricardo y Carlos Andaluz Zúñiga, *Aritmética*, Lima: Universidad del Pacífico, 2011.
74. Siu Koochoy, Ricardo y Carlos Andaluz Zúñiga, *Cálculo diferencial de funciones con varias variables*, Lima: Universidad del Pacífico, 2012.
75. Yamada, Gustavo; Juan Francisco Castro y Roberto Asmat, *Inversión en educación e ingresos laborales. Más allá de la ecuación de Mincer*, Lima: Universidad del Pacífico, 2013.