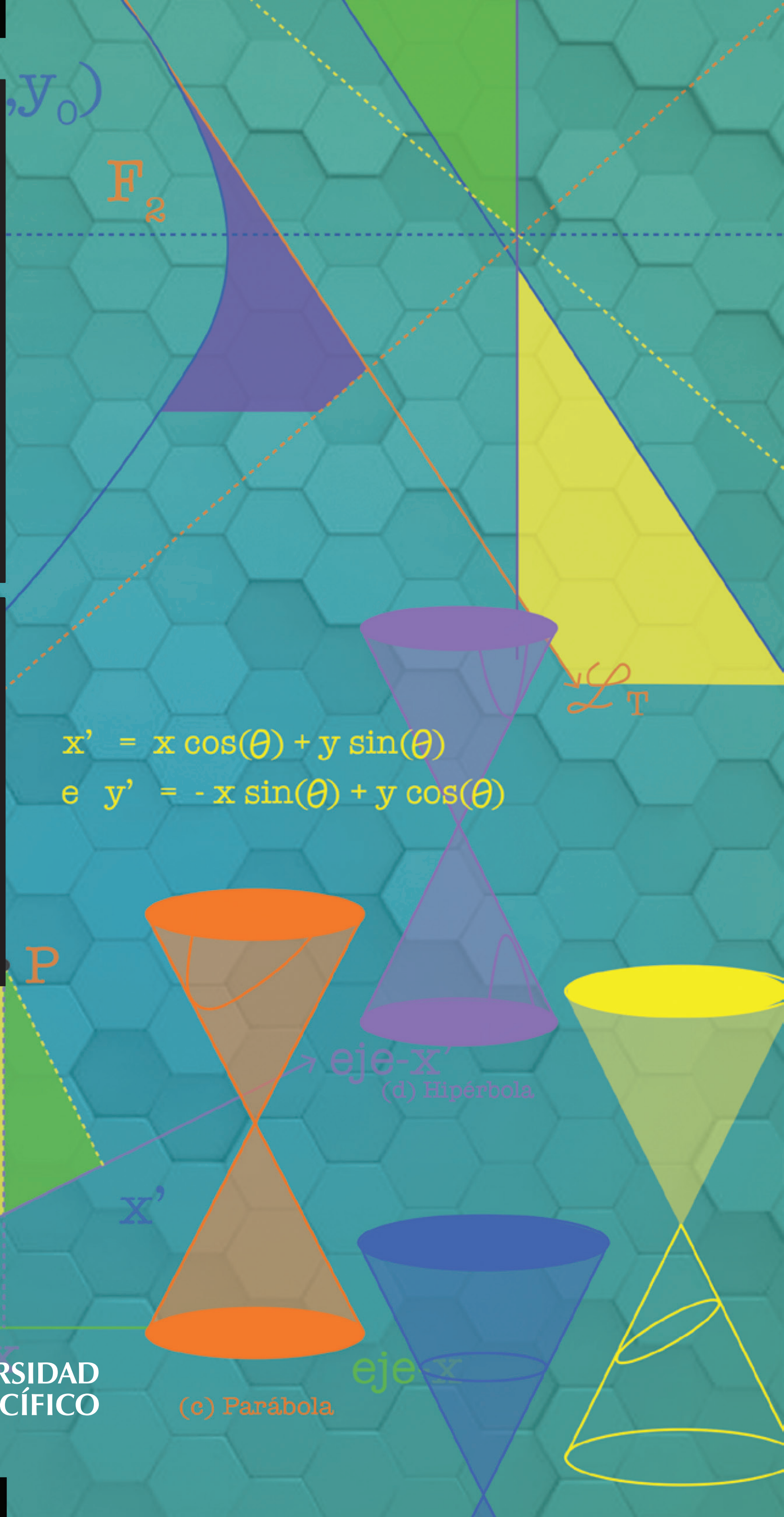
INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

JOHN COTRINA

PHAMELA ESCUDERO



97

Apuntes de Estudio

Fondo Editorial

UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

JOHN COTRINA

PHAMELA ESCUDERO

97

Apuntes de Estudio

Fondo Editorial
UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

De esta edición:

© Universidad del Pacífico
Jr. Gral. Luis Sánchez Cerro 2141
Lima 15072, Perú

Introducción a la geometría analítica
John Cotrina y Phamela Escudero

1.ª edición: mayo 2021
Diseño de la carátula: Icono Comunicadores
ISBN ebook: 978-9972-57-466-5
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: 2021-0538
Doi: http://dx.doi.org/10.21678/978-9972-57-466-5
Disponible en fondoeditorial.up.edu.pe

BUP

Cotrina Asto, John.
Introducción a la geometría analítica / John Cotrina, Phamela Escudero. -- 1a edición. -- Lima : Universidad del Pacífico, 2021.
220 p. -- (Apuntes de estudio ; 97)

1. Geometría analítica -- Problemas, ejercicios, etc.
I. Escudero, Phamela
II. Universidad del Pacífico

516.3 (SCDD)

«In my opinion,
everything happens in nature in a mathematical way.»

René Descartes

Dedicado a nuestros niños,
Santiago y Emiliano

Contenido

Prólogo

En áreas como Administración, Economía, Ciencias Sociales e Ingeniería se puede apreciar cómo la geometría analítica juega un rol importante, como una herramienta para lograr resolver problemas de la vida cotidiana; estas situaciones pueden revisarse en los siguientes textos: La Serna Studzinski y Serván Lozano (2016); Sydsaeter, Hammond, y Carvajal (2012); Varian (2010); Arya y Lardner (2008); Haeussler, Paul, y Wood (2008); Stewart, Redlin, y Watson (2011). Por tal razón, la presente publicación tiene como objetivo introducir al lector a la geometría analítica mediante el desarrollo de una base teórica, la resolución detallada de ejercicios de menor a mayor nivel de dificultad y la presentación de una lista de ejercicios propuestos.

Los contenidos han sido desarrollados suponiendo que el lector está familiarizado con los temas de ecuaciones polinomiales, y de razones trigonométricas de un triángulo rectángulo, los que se desarrollan en Cotrina (2015); Zúñiga (2013); Siu Koochoy y Andaluz Zúñiga (2015); Reyes Perez, Reyes Perez, Revatta Navarro, y Casio Romero (2013), trabajos que se recomienda revisar como complemento para la buena comprensión de este texto.

El primer capítulo tiene como objetivo presentar al plano cartesiano, los cuadrantes, la distancia entre dos puntos, así como la razón de cambio.

En el segundo capítulo se muestran las distintas ecuaciones de una recta; algunas propiedades son consideradas con respecto al concepto de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

En el tercer capítulo se introducen las cónicas como lugar geométrico y se presentan sus ecuaciones en el caso particular de tener al eje focal paralelo a uno de los ejes coordenados.

El cuarto capítulo trata de transformaciones de coordenadas; básicamente se muestran tres tipos de transformaciones: la traslación, el re-escalamiento y la rotación.

Finalmente, en el quinto capítulo se brindan las respuestas a los ejercicios propuestos en cada capítulo del libro. Se recomienda como lecturas complementarias las publicaciones de Cotrina (2015); Zúñiga (2013); Siu Koochoy y Andaluz Zúñiga (2013); Flores Espíritu y Gutiérrez Cárdenas (2017).

Además, con el fin de hacer autocontenido el presente texto, en el último capítulo haremos una revisión de varios conceptos de la geometría euclidiana útiles para obtener resultados dentro de la geometría analítica, como por ejemplo los triángulos, los cuadriláteros y la circunferencia. El lector interesado puede revisar Moise y Downs (1991), donde encontrará con mayor detalle el estudio de los triángulos con ejercicios tanto de cálculo como de demostraciones.

En la actualidad, existe una gran variedad de libros en los que se desarrollan ejercicios resueltos y propuestos sobre geometría plana, los cuales evidentemente ayudarán a reforzar los conocimientos y ganar experiencia en dicho tema; entre ellos, recomendamos a Flores Espíritu y Gutiérrez Cárdenas (2017); Reyes Perez *et al*. (2013). Finalmente, para aquellos interesados en profundizar el estudio de la geometría se recomienda revisar el libro de Descamps (2004).

Queremos agradecer a la Universidad del Pacífico por permitirnos elaborar este trabajo, con el que pretendemos apoyar al desarrollo de habilidades para el manejo de técnicas geométricas de los estudiantes, sobre todo aquellos que asisten a los cursos de Matemática que se imparten en la universidad durante los primeros años. Asimismo, queremos agradecer a nuestros colegas del equipo de profesores del curso de Nivelación de Matemáticas por sus valiosas sugerencias.

1
El plano cartesiano

Básicamente, el plano cartesiano es representado por dos rectas reales que forman un ángulo recto, como se aprecia en la Figura 1.1.

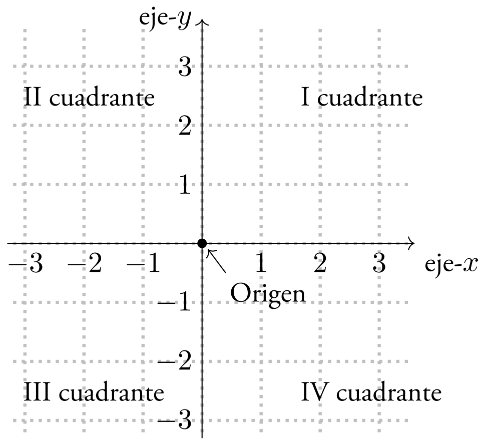


Figura 1.1

Al igual que el conjunto de los números reales, denotado por $\mathbb{R}$, es representado por los puntos de una recta (la recta real), es posible representar los pares ordenados de números reales como puntos de un plano, el cual es denominado el *plano cartesiano*. Tal representación es denominada *sistema de coordenadas* y fue establecida en 1637 por el filósofo francés René Descartes.

La recta horizonal real es denominada *eje de abscisas* o *eje-x*, y la recta vertical real es usualmente llamada *eje de ordenadas* o *eje-y*. El plano es identificado como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo. De ahora en adelante usaremos la notación $\mathbb{R}^2$ para identificar el plano cartesiano. El punto de intersección de los ejes es denominado *origen de coordenadas* y dichos ejes determinan cuatro conjuntos llamados *cuadrantes*, los cuales son definidos como:

- El *primer cuadrante*, I C, es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0\ \wedge\ y > 0\}$;
- el *segundo cuadrante*, II C, es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x < 0\ \wedge\ y > 0\}$;
- el *tercer cuadrante*, III C, es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x < 0\ \wedge\ y < 0\}$;
- el *cuarto cuadrante*, IV C, es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0\ \wedge\ y < 0\}$.

Usaremos letras mayúsculas como por ejemplo A, B, $C, \ldots$ para representar los elementos de $\mathbb{R}^2$. Los números reales x e y del par ordenado (x, y) son denominados *primera coordenada* y *segunda coordenada*, respectivamente. Así, podemos decir que el primer cuadrante consiste de todos los puntos del plano con coordenadas positivas.

Ejemplo 1.1. El punto A de coordenadas $(3, -5)$ pertenece al cuarto cuadrante. Además, podemos decir que la abscisa y la ordenada de A son 3 y -5, respectivamente.

Dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ del plano cartesiano son *iguales* si sus coordenadas son iguales, es decir $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Ejemplo 1.2. Sean $A = (1, k)$ y $B = (h, 3)$ dos puntos del plano cartesiano. Si $A = B$ entonces se deduce que $h = 1$ y $k = 3$.

Notemos que cualquier punto ubicado en los ejes coordenados no pertenece a ningún cuadrante. Más aun, no es difícil ver que el eje-x y el eje-y son los conjuntos

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{R}\}\ \text{ y }\ \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in \mathbb{R}\},$$

respectivamente.

Ubicación de puntos en el plano cartesiano

La ubicación de cada punto (a, b) en el plano cartesiano consiste en ubicar el valor de a en el eje-x y trazar por él una recta paralela al eje-y, de igual forma ubicar el valor de b en el eje-y y trazar por él una recta paralela al eje-x. Luego, el punto de intersección de dichas rectas trazadas es el punto en cuestión. Además, el valor absoluto de a representa la distancia del eje-y al punto, y de igual manera el valor absoluto de b representa la distancia del eje-x al punto. Por ejemplo, si consideramos el punto (a, b) en el primer cuadrante, podemos ubicarlo geométricamente como se aprecia en la Figura 1.2.

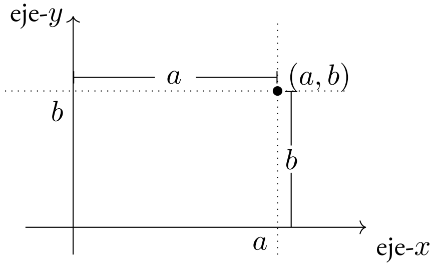


Figura 1.2

Ejemplo 1.3. El proceso de ubicar el punto $P = (-2, 1)$ en el plano cartesiano se muestra en la Figura 1.3. Primero, ubicamos las coordenadas en los ejes coordenados, es decir, ubica-

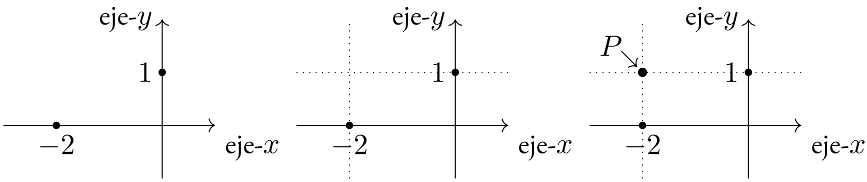


Figura 1.3

mos a -2 en el eje-x y 1 en el eje-y. Segundo, trazamos líneas paralelas a los ejes opuestos por ellas; esto significa que por -2 que se encuentra en el eje-x trazamos una línea paralela al eje-y. De igual manera por 1. Así, el punto P es el punto de intersección de dichas líneas.

Distancia entre puntos

Gracias al Teorema de Pitágoras, la *distancia* entre los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, denotado por $d(A, B)$, se define como

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.1}$$

Las expresiones $y_2 - y_1$ y $x_2 - x_1$ son denominadas *variación* en y y *variación* en x de A hacia B, respectivamente. Dichas variaciones son denotadas usualmente como Δy y Δx.

La Figura 1.4 nos da una representación geométrica del concepto de distancia.

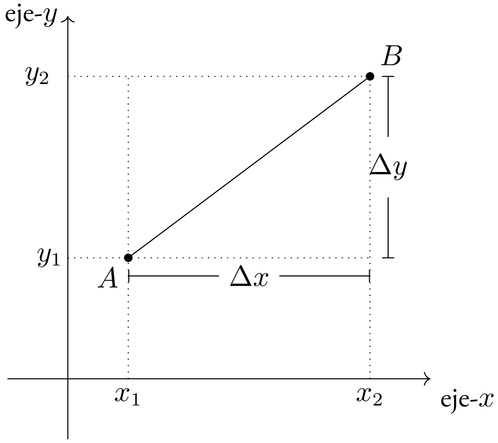


Figura 1.4

Notemos que cuando hablamos de la variación en x de A hacia B no es lo mismo que la variación en x de B hacia A. Veamos el siguiente ejemplo que ilustra esta observación.

Ejemplo 1.4. Sean $A = (2, 3)$ y $B = (5, 7)$. La variación en x de A hacia B es 3. Sin embargo, la variación en x de B hacia A es -3.

También notemos que cuando queremos calcular la distancia entre dos puntos, no importa cómo se tomen las variaciones.

Ejemplo 1.5. Para calcular la distancia entre los puntos A y B del Ejemplo 1.4, aplicamos directamente la expresión (1.1) y obtenemos

$$d(A,B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Un importante resultado es el enunciado a continuación, el cual establece que el camino más corto para ir de un punto a otro en el plano cartesiano es el segmento que lo une. La prueba de tal resultado es dejado como ejercicio para el lector interesado.

Teorema 1.1 (Desigualdad triangular)**.** *Sean A, B y C tres puntos en el plano cartesiano. Se cumple que:*

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C). \tag{1.2}$$

La desigualdad (1.2) *anterior se convierte en igualdad si y solo si el punto B se encuentra sobre el segmento entre A y C. Geométricamente, la desigualdad triangular se aprecia en la Figura 1.5.*

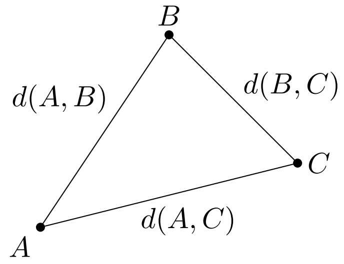


Figura 1.5

Ejemplo 1.6. Sean $A = (2, 5)$ y $B = (6, 1)$ dos puntos de $\mathbb{R}^2$. Se desea determinar el punto P en el eje-y tal que $d(A, P) + d(P, B)$ es mínima.

Ubicamos el punto $A' = (-2, 5)$ en el plano cartesiano, conjuntamente con los puntos A, B y P. Luego, los triángulos sombreados en la Figura 1.6 resultan ser congruentes. Es claro que $d(A', P) = d(A, P)$. Además, por el Teorema 1.1 ocurre que

$$d(A, P) + d(P, B) = d(A', P) + d(P, B) \geq d(A', B)$$

y como se desea que dicha suma de distancias sea la menor posible se deduce que el punto P debe encontrarse en el segmento de extremos A' y B. Por esta razón, el gráfico debería ser modificado, como se muestra en la Figura 1.7, donde los nuevos triángulos sombreados son semejantes.

Así, por semejanza de triángulos, se tiene

$$\frac{d(A', R)}{d(P, R)} = \frac{d(Q, B)}{d(P, Q)}$$

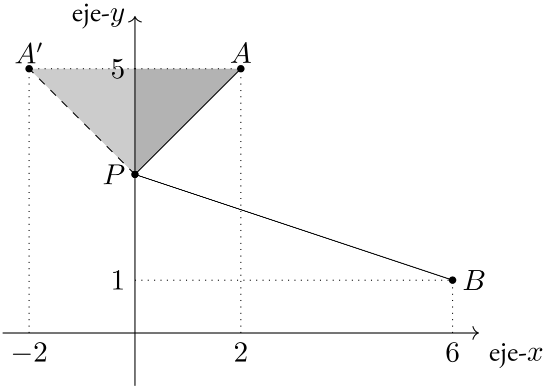


Figura 1.6

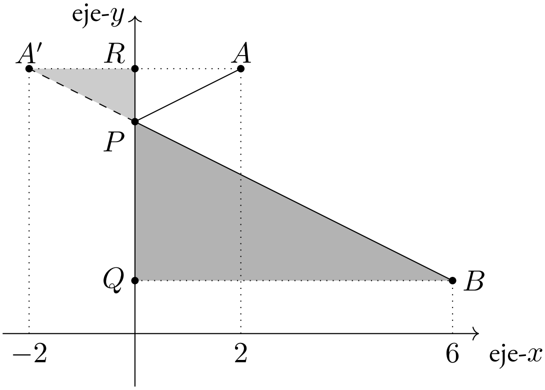


Figura 1.7

es decir

$$\frac{2}{d(P,R)} = \frac{6}{d(P,Q)}.$$

Como $d(P,R) + d(P,Q) = 4$, se deduce que $d(P,R) = 1$ y $d(P,Q) = 3$. Por tanto, el punto P tiene coordenadas $(0,4)$.

División de un segmento en una razón dada

Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se definen la *suma* de A y B, el *producto escalas* de λ y A denotados por por $A + B$ y λA, respectivamente, como:

$$A + B = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \ \text{ y } \ \lambda A = (\lambda x_1, \lambda y_1).$$

Dado un segmento determinado por los puntos A y B, en ese orden, diremos que el punto P *divide al segmento* $\overline{AB}$ en la razón $r > 0$, si este se encuentra sobre el segmento y

$$\frac{d(A, P)}{d(P, B)} = r. \tag{1.3}$$

Para poder determinar las coordenadas de P, primero consideremos que A y B no se encuentran en una recta horizontal ni vertical, ubicamos los puntos en cuestión en el plano cartesiano y formamos dos triángulos rectángulos, ver la Figura 1.8.

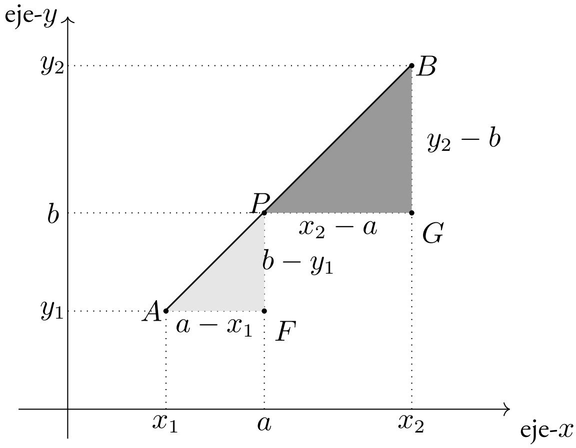


Figura 1.8

Los triángulos $\triangle AFP$ y $\triangle PGB$ son semejantes, esto implica que

$$r = \frac{d(A, P)}{d(P, B)} = \frac{d(A, F)}{d(P, G)} = \frac{d(F, P)}{d(G, B)}$$

es decir

$$r = \frac{a - x_1}{x_2 - a} = \frac{b - y_1}{y_2 - b}$$

de donde se deduce

$$a = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} \text{ y } b = \frac{y_1 + ry_2}{1+r},$$

esto es

$$P = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r} \right) = \frac{1}{1+r}A + \frac{r}{1+r}B. \tag{1.4}$$

Ahora, cuando los puntos se encuentran sobre una recta vertical significa que ambos puntos tienen la misma primera coordenada, es decir $A = (x, y_1)$ y $B = (x, y_2)$. Así, P debe tener coordenadas de la forma (x, p) como se aprecia en la Figura 1.9.

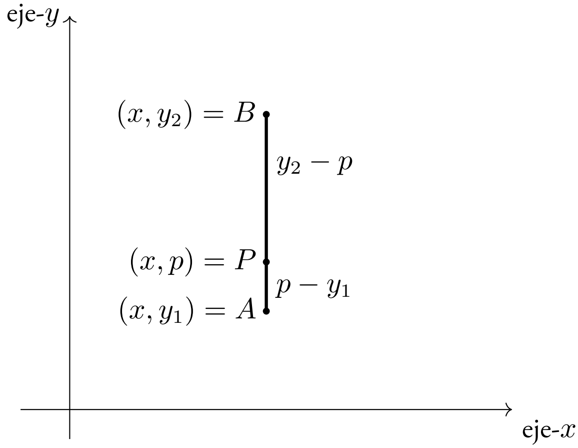


Figura 1.9

Luego, $d(A, P) = p - y_1$ y $d(P, B) = y_2 - p$. Entonces

$$r = \frac{p - y_1}{y_2 - p},$$

lo que implica $p = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$. Por consiguiente

$$P = \frac{1}{1+r}A + \frac{r}{1+r}B,$$

es decir, se cumple (1.4).

Finalmente, cuando los puntos se encuentran sobre una recta horizontal se procede de forma similar al caso anterior y también se cumple (1.4).

Como caso particular obtendremos las coordenadas del *punto medio* M de un segmento, es decir, aquel punto donde la razón es $r = 1$ en la relación (1.3). Usando el mecanismo anterior para determinar sus coordenadas, se observa que se puede calcular como el promedio de sus respectivas coordenadas, esto es, si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ entonces el punto medio M viene dado por

$$M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.7. El punto medio entre $A = (1, -1)$ y $B = (5, 7)$ es $M = (3, 3)$.

Un resultado interesante es la ubicación del baricentro de un triángulo.

Teorema 1.2 (Teorema del baricentro)**.** *Las coordenadas del baricentro* $G = (x_0, y_0)$ *de un triángulo de vértices* $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ *y* $C = (x_3, y_3)$ *se calcula como el promedio de sus respectivas coordenadas, es decir*

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \ \text{ y } \ y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

La prueba del teorema previo es dejada como un ejercicio para el lector interesado.

Ejemplo 1.8. El baricentro G del triángulo de vértices $(3, 6)$, $(-5, 2)$ y $(7, -6)$, por el Teorema 1.2, es

$$G = \left(\frac{3 - 5 + 7}{3}, \frac{6 + 2 - 6}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Razón de cambio

Dados dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ en el plano cartesiano con $x_1 \neq x_2$; se define la *razón de cambio* entre A y B como

$$\mathrm{rc}(A, B) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1.6}$$

Notemos que en la definición de razón de cambio hemos tomado las variaciones de A hacia B, pero es equivalente a si tomamos ambas variaciones de B hacia A.

Por otro lado, la razón de cambio resulta ser la tangente del ángulo formado por el segmento y una paralela al semi eje-x positivo que pasa por el punto de menor ordenada como se aprecia en la Figura 1.10.

De la Figura 1.10 se observa que si la razón de cambio entre dos puntos es positiva, entonces su ángulo asociado es un ángulo agudo. De igual forma, si la razón de cambio es negativa, su ángulo es obtuso.

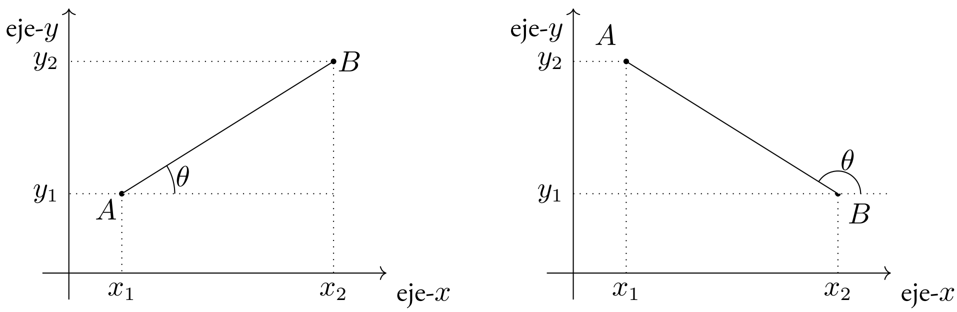


Figura 1.10

Ejemplo 1.9. La razón de cambio entre los puntos $(-1, 1)$ y $(3, 5)$ es

$$\frac{5-1}{3-(-1)} = 1.$$

Ejemplo 1.10. Si el ángulo formado por el segmento de extremos A y B, y una paralela del eje-x es $45°$; entonces $\text{rc}(A, B) = 1$.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1. Ubique los siguientes puntos $(2, -1)$, $(0, 0)$, $(-3, 2)$, $(-1, -4)$ y $(3, 1)$ en el plano cartesiano.

Solución. Ver la Figura 1.11. □

Ejercicio 1.2. Determine todos los valores reales de k tales que el punto $(3k - 6, 12 - 4k)$ pertenece al primer cuadrante.

Solución. Como el punto pertenece al primer cuadrante ocurre que

$$3k - 6 > 0 \text{ y } 12 - 4k > 0,$$

de donde se deduce que $k \in]2, 3[$. □

Ejercicio 1.3. Determine todos los valores reales de m tal que el punto de coordenadas $(m^2 + 2m + 2, -m^2 + 1)$ pertenece al cuarto cuadrante.

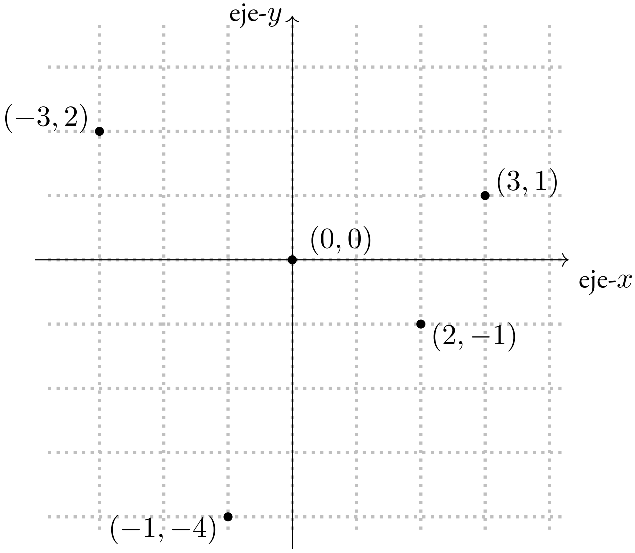


Figura 1.11

Solución. Notemos primero que

$$m^2 + 2m + 2 = (m+1)^2 + 1 > 0.$$

Luego, como pertenece al cuarto cuadrante es suficiente exigir que

$$-m^2 + 1 < 0$$

lo cual es equivalente a resolver

$$m^2 - 1 = (m+1)(m-1) > 0$$

de donde se deduce que $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. □

Ejercicio 1.4. Calcule el área del triángulo de vértices $(-2,1)$, $(5,4)$ y $(2,-3)$.

Solución. Primero ubicamos los vértices en el plano cartesiano e identificamos el área por calcular. Luego, como se muestra en la Figura 1.12, se prolonga algunas coordenadas hasta formar un rectángulo que contiene al triángulo en cuestión.

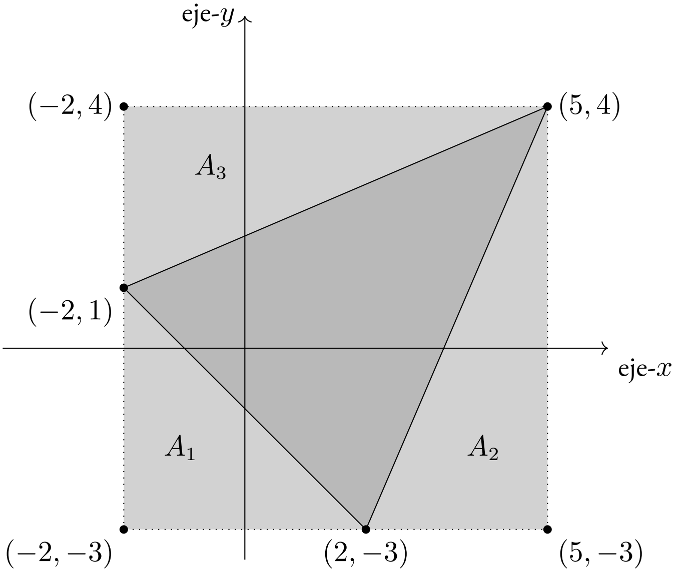


Figura 1.12

Finalmente, se deduce que el área del triángulo se puede calcular como:

$$\text{Área(cuadrado)} - A_1 - A_2 - A_3.$$

Se obtiene que $A_1 = 8\ u^2$, $A_2 = A_3 = \frac{21}{2}\ u^2$. Así, el área del triángulo es $20\ u^2$. $\square$

Ejercicio 1.5. La distancia entre $A = (2, 4)$ y $B = (5, y)$ es $\sqrt{13}$. Determine el valor de y. ¿Existe algún valor de y para el cual la distancia entre A y B es 2?

Solución. A partir de $d(A, B) = \sqrt{13}$ obtenemos

$$\begin{aligned}(5-2)^2 + (y-4)^2 &= 13\\ y^2 - 8y + 12 &= 0\\ (y-2)(y-6) &= 0\end{aligned}$$

de donde $y = 2$ o $y = 6$.

Por otro lado, si $d(A, B) = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}(5-2)^2 + (y-4)^2 &= 4\\ 5 + (y-4)^2 &= 0\end{aligned}$$

Esta última ecuación no tiene solución. Por lo tanto, no existe y tal que $d(A, B) = 2$. $\square$

Ejercicio 1.6. Determine las coordenadas de los vértices B y D del cuadrado que se muestra en la Figura 1.13.

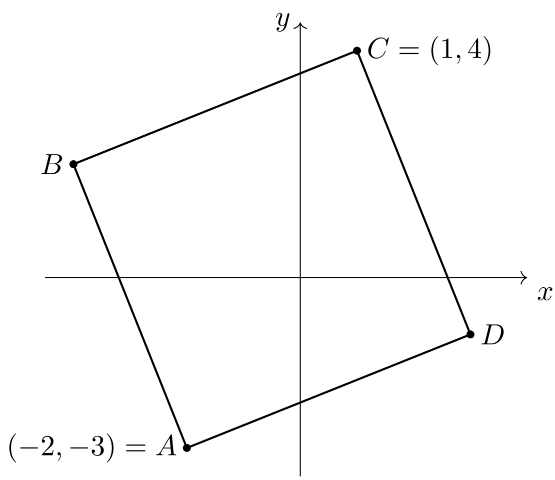


Figura 1.13

Solución. Al prolongar las coordenadas de los vértices como se muestra en la Figura 1.14, desde que los cuatro triángulos sombreados son congruentes, se deduce que el cuadrilátero $A'B'C'D'$ es un cuadrado con lado de longitud 7 unidades.

Denotemos por a a la longitud de $\overline{AA}'$. Luego, por congruencia de triángulos se tiene que el segmento que une C con C' tiene por longitud a y por tanto $\overline{A'D'}$ tiene longitud $3 + 2a$. Se deduce que $a = 2$. Por consecuencia, $B = (-4, 2)$ y $D = (3, -1)$.

$\square$

Ejercicio 1.7. Si los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-3, -1)$ y $C = (4, y)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, determine el valor de y.

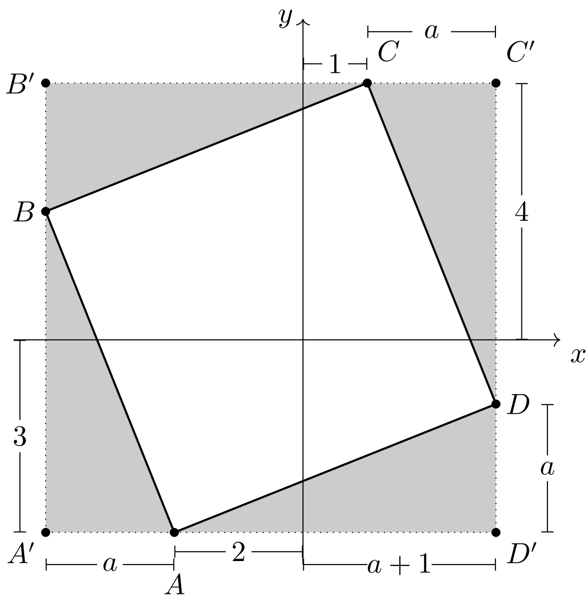


Figura 1.14

Solución. Para que un triángulo sea rectángulo es suficiente mostrar que las condiciones del teorema de Pitágoras sean satisfechas. Para esto primero notemos que

$$d(A,B) = 2\sqrt{5},\ d(A,C) = \sqrt{25+(y-1)^2} \text{ y } d(B,C) = \sqrt{49+(y+1)^2}.$$

Luego, analíticamente tenemos tres posibilidades:

1. El primer caso es $d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$, el cual implica que $y = -1$.
2. El segundo caso es $d(A,B)^2 + d(B,C)^2 = d(A,C)^2$, el cual implica que $y = -11$.
3. El último caso es $d(B,C)^2 + d(A,C)^2 = d(A,B)^2$, el cual es imposible resolver en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto, $y = -1$ o $y = -11$. □

Ejercicio 1.8. Considere los puntos $A = (1,6)$ y $B = (6,1)$. Determine el punto P en el eje-x y el punto Q en el eje-y tales que $d(A,Q) + d(P,Q) + d(B,P)$ es mínima.

Solución. En la Figura 1.15 ubicamos los puntos P y Q de forma arbitraria. Luego, hemos ubicado el punto Q' de forma $d(O,Q') = d(O,Q)$, donde O es el origen de coordenadas; esto implica que $d(P,Q) = d(P,Q')$. También se ha ubicado el punto A' de forma que los

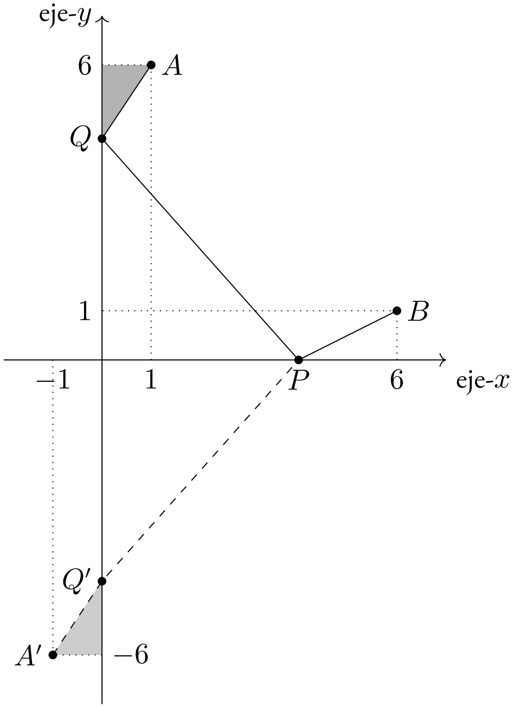


Figura 1.15

triángulos sombreados resulten ser congruentes, obteniéndose que $d(A,Q) = d(A',Q')$. Así,

$$d(A,Q) + d(P,Q) + d(B,P) = d(A',Q') + d(P,Q') + d(B,P) \geq d(A',B).$$

Como queremos que dicha suma de distancias sea la menor posible, esto implica que los puntos Q' y P deben encontrarse en el segmento de extremos A' y B. Esto es representado en la Figura 1.16, donde los nuevos triángulos sombreados son semejantes. Si denotamos por $R = (0,-6)$ y $S = (6,0)$, entonces por semejanza de triángulos lo siguiente

$$\frac{d(B,S)}{d(P,S)} = \frac{d(O,Q')}{d(O,P)} = \frac{d(R,Q')}{d(A',R)}.$$

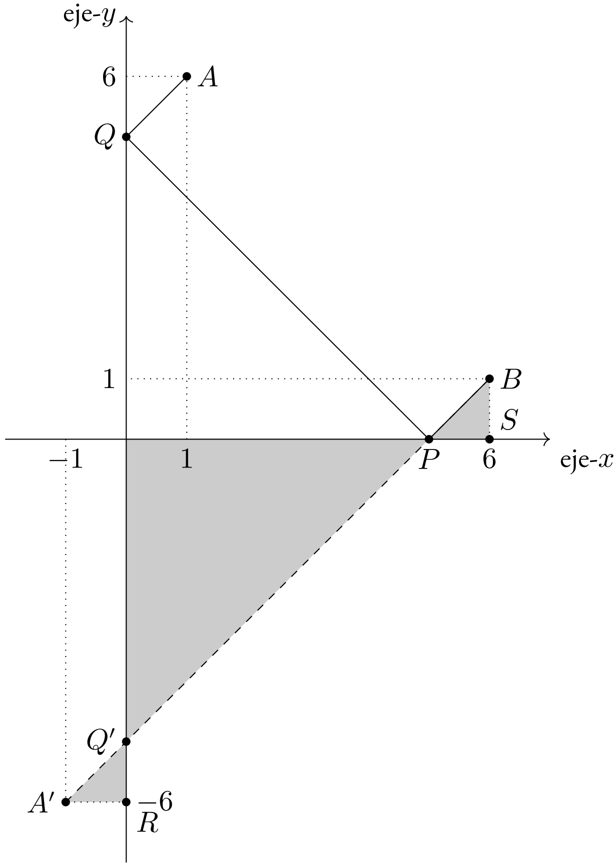


Figura 1.16

Además, desde que

$$d(O,P) = 6 - d(P,S) \text{ y } d(O,Q') = 6 - d(Q',R)$$

Se deduce que $d(P,S) = 1$ y por tanto $P = (5,0)$ y $Q = (0,5)$. $\square$

Ejercicio 1.9. Sean $A = (-2,1)$, $B = (4,4)$ y C los vértices de un triángulo tal que $d(A,C) = d(A,B)$. Si C se encuentra ubicado en el cuarto cuadrante y $d(B,C) = 6$, calcule las coordenadas de C.

Solución. Sea el punto $C = (x, y)$, donde $x > 0$ e $y < 0$ por pertenecer al cuarto cuadrante.

Empleando la igualdad $d(A, C) = d(A, B)$, dato del problema, tenemos:

$$\begin{aligned} d^2(A, C) &= d^2(A, B) \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 &= 45 \\ x^2 + 4x + y^2 - 2y &= 40. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Análogamente, por medio de la igualdad $d(B, C) = 6$ obtenemos:

$$\begin{aligned} d^2(B, C) &= 36 \\ (x-4)^2 + (y-4)^2 &= 36 \\ x^2 - 8x + y^2 - 8y &= 4. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Restando las ecuaciones (1.7) y (1.8) obtenemos $2x + y = 6$, despejando una variable $y = 6 - 2x$, la que se procede a reemplazar en la ecuación (1.7), se obtiene la ecuación cuadrática

$$5x^2 - 16x - 16 = 0,$$

que posee dos soluciones $x_1 = 4$, $x_2 = -\dfrac{4}{5}$, pero por condiciones del problema la abscisa del punto C es positiva; luego el valor adecuado es $x = 4$ y su correspondiente ordenada es $y = -2$.

□

Ejercicio 1.10. Determine los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A = (-5, 2)$ y $B = (4, 21)$.

Solución. Llamemos $C = (m, n)$ y $D = (r, s)$ a los puntos que trisecan el segmento de extremos $A = (-5, 2)$ y $B = (4, 21)$, como se muestra en la Figura 1.17

Sabemos que el punto C se encuentra en el segmento de extremos A y B; además el punto C divide al segmento en la razón dada por

$$\frac{d(A, C)}{d(C, B)} = \frac{1}{2}.$$

Luego las coordenadas del punto C, empleando la ecuación mostrada en (1.4), son

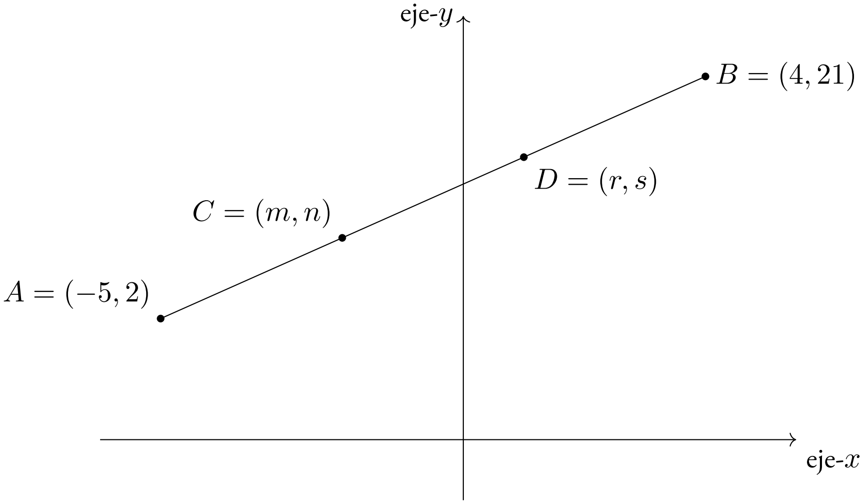


Figura 1.17

$$m = \frac{-5 + \frac{1}{2}(4)}{1 + \frac{1}{2}} = -2,\ n = \frac{2 + \frac{1}{2}(21)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{25}{3}.$$

Así, $C = (-2, 25/3)$.

Para obtener las coordenadas del punto D aprovechamos que D es punto medio del segmento de extremos C y B, empleando la ecuación mostrada en (1.5). Así, las coordenadas del punto D son

$$r = \frac{-2 + 4}{2} = 1,\ s = \frac{\frac{25}{3} + 21}{2} = \frac{44}{3}.$$

Por lo tanto, $C = \left(-2, \dfrac{25}{3}\right)$ y $D = \left(1, \dfrac{44}{3}\right)$. $\square$

Ejercicio 1.11. El segmento que une $A = (-2, -1)$ con $B = (2, 2)$ se prolonga hasta C. Si se sabe que $d(B, C) = 3d(A, B)$, determine las coordenadas de C.

Solución. En la Figura 1.18 se muestran los puntos dados.

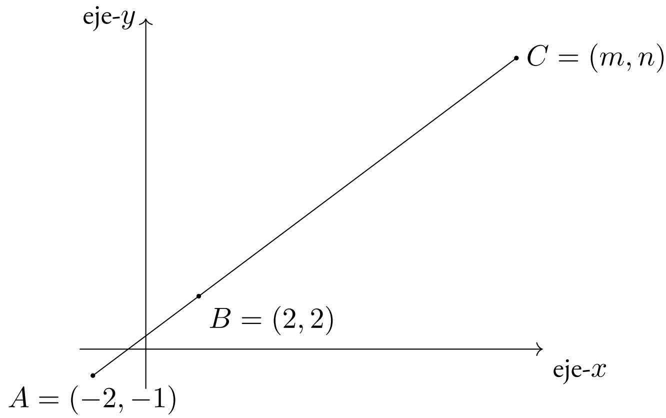


Figura 1.18

Observamos que el punto B se encuentra en el segmento de extremos A y C. Además, B divide al segmento en la razón

$$\frac{d(A, B)}{d(B, C)} = \frac{1}{3}.$$

Luego las coordenadas del punto B se obtienen en términos de las coordenadas de los extremos A y C, empleando la ecuación (1.4), tenemos

$$2 = \frac{-2 + \frac{1}{3}(m)}{1 + \frac{1}{3}}, \; 2 = \frac{-1 + \frac{1}{3}(n)}{1 + \frac{1}{3}}.$$

Así, se obtienen los siguientes valores $m = 14$ y $n = 11$. Por tanto, $C = (14, 11)$. $\square$

Ejercicio 1.12. Determine las coordenadas de los vértices de un triángulo, si se sabe que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son $M = (2, 3)$, $N = (4, -2)$, y por último $P = (0, -1)$.

Solución. Sean $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ y $C = (x_3, y_3)$ los vértices del triángulo, cuyos puntos medios son los dados en el problema como se muestra en la Figura 1.19

Empleando punto medio y aplicando la ecuacion (1.5), podemos establecer las siguientes relaciones:

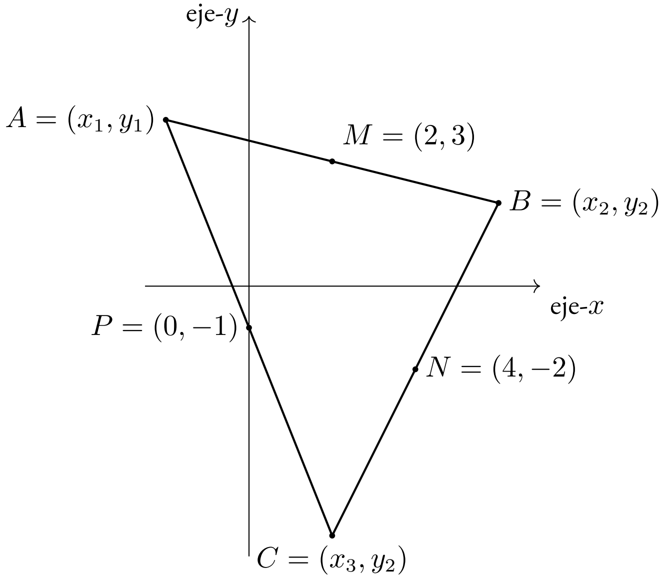


Figura 1.19

$$\frac{A+B}{2} = M \tag{1.9}$$
$$\frac{B+C}{2} = N \tag{1.10}$$
$$\frac{A+C}{2} = P \tag{1.11}$$

Sumando las relaciones (1.9), (1.10) y (1.11) obtenemos

$$A + B + C = M + N + P = (6, 0). \tag{1.12}$$

Reemplazando la ecuación (1.9) en (1.12) se tiene el punto $C = (2, -6)$. Análogamente, obtenemos las coordenadas de los vértices $A = (-2, 4)$ y $B = (6, 2)$.

$\square$

Ejercicio 1.13. El punto $(3, 5)$ es punto medio del segmento cuyos extremos se encuentran en los ejes coordenados. Determine el área encerrada por el segmento y los ejes coordenados.

Solución. La Figura 1.20 representa los datos pedidos y el área por calcular.

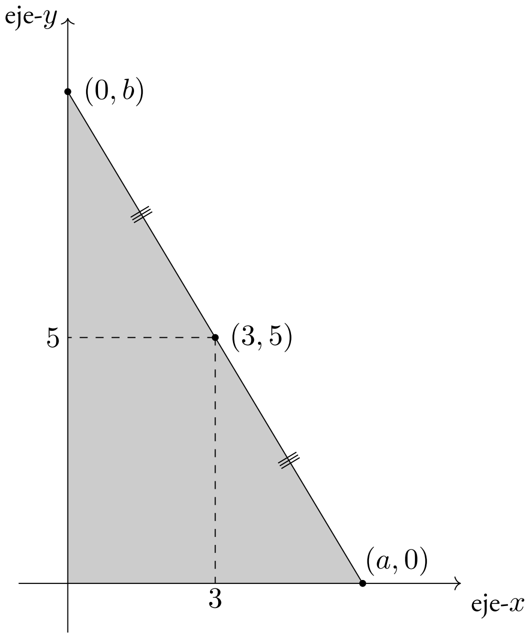


Figura 1.20

Por punto medio, se deduce que $b = 10$ y $a = 6$. Luego, el área de la región sombreada es $30\ u^2$. $\square$

Ejercicio 1.14. Considere el paralelogramo $ABCD$ con vértices $A = (1, 1)$, $B = (3, 9)$, $C = (9, 11)$ y $D = (d_1, d_2)$. Los puntos M y N son puntos medios de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente . Determine las coordenadas de los puntos P y Q, siendo P punto de intersección de $\overline{BM}$ con la diagonal $\overline{AC}$ y Q intersección de $\overline{BN}$ con la diagonal $\overline{AC}$.

Solución. En primer lugar, determinamos las coordenadas del vértice D del paralelogramo. En ese sentido, trazamos sus diagonales, las que se cortan en su punto medio denominado E como se muestra en la Figura 1.21

El punto E es punto medio del segmento de extremos $A = (1, 1)$ y $C = (9, 11)$, por lo cual $E = (5, 6)$.

Similarmente, el punto $E = (5, 6)$ es punto medio del segmento $\overline{BD}$, obteniendo así las coordenadas del vértice $D = (7, 3)$.

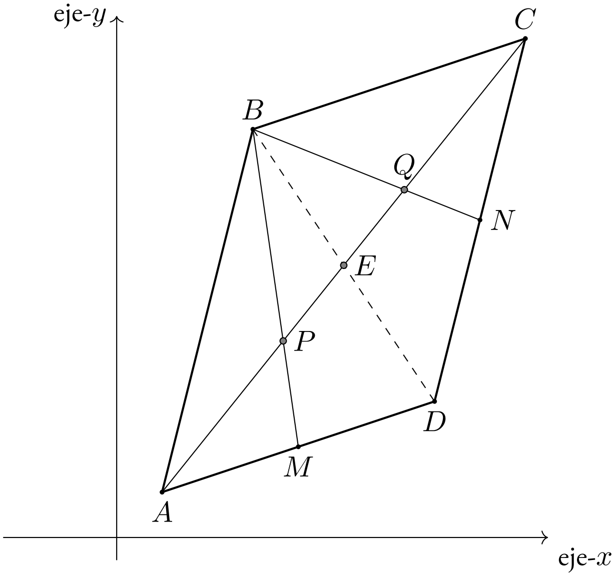


Figura 1.21

Para determinar las coordenadas del punto P, intersección de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BM}$, notamos que él corresponde al baricentro del triángulo $\triangle ABD$, esto se debe a que $\overline{AE}$ y $\overline{BM}$ son medianas. En ese sentido, empleamos la ecuación dada en el Teorema 1.2, esto es

$$P = \frac{1}{3}(A + B + D).$$
$$P = \left(\frac{11}{3}, \frac{13}{3}\right).$$

Análogamente, el punto Q corresponde al baricentro del triángulo $\triangle BCD$, luego

$$Q = \frac{1}{3}(B + C + D).$$
$$Q = \left(\frac{19}{3}, \frac{23}{3}\right).$$

□

Ejercicio 1.15. Sean A, B, C y D los vértices de un cuadrado en el plano, donde $A = (2, 3)$ y $D = (6, 0)$. Si B y C pertenecen al primer cuadrante, determine las coordenadas del punto medio entre B y C.

Solución. Primero debemos ubicar el cuadrado en el plano cartesiano según los datos establecidos. A continuación, por los puntos A y C tracemos líneas paralelas al eje-y, y por B una línea paralela al eje-x. Luego, los triángulos sombreados en la Figura 1.22 resultan ser congruentes.

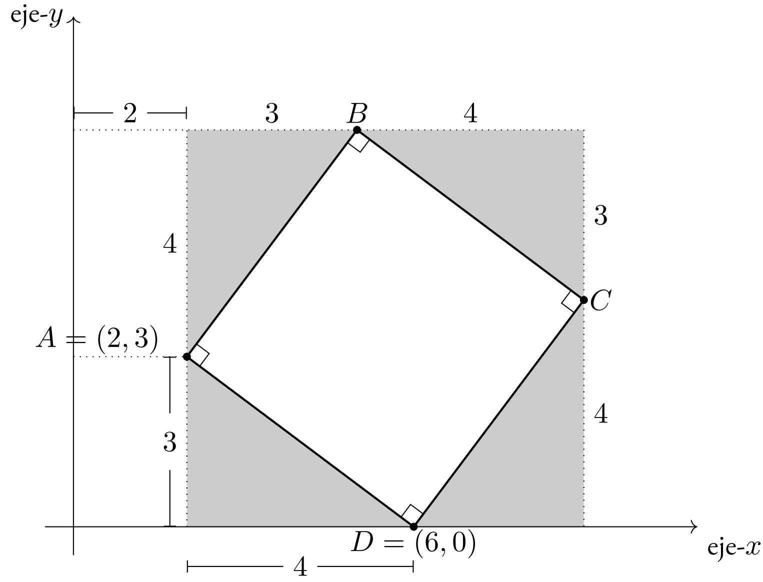


Figura 1.22

De donde se deduce que $B = (5, 7)$ y $C = (9, 4)$. Por lo tanto, $\dfrac{B + C}{2} = \left(7, \dfrac{11}{2}\right)$. □

Ejercicio 1.16. El punto $A = (-2, 1)$ es el vértice correspondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo isósceles $\triangle ABC$. El punto $P = (1, 4)$ divide al cateto $\overline{AC}$ en la relación

$$\frac{d(A, P)}{d(P, C)} = \frac{1}{2}.$$

Determine las coordenadas del vértice B.

Solución. Desde que el punto $P = (1, 4)$ divide al segmento de extremos $A = (-2, 1)$ y $C = (m, n)$ en la razón $r = \dfrac{1}{2}$, empleando la ecuación dada en (1.4), obtenemos

$$1 = \frac{-2 + \frac{1}{2}(m)}{1 + \frac{1}{2}}\ ,\ 4 = \frac{1 + \frac{1}{2}(n)}{1 + \frac{1}{2}}.$$

Entonces, $C = (7, 10)$. Para obtener el vértice B, empleamos la condición del triángulo de ser isósceles y recto en A. Además, observamos en la Figura 1.23 que existen dos posibilidades para el vértice B.

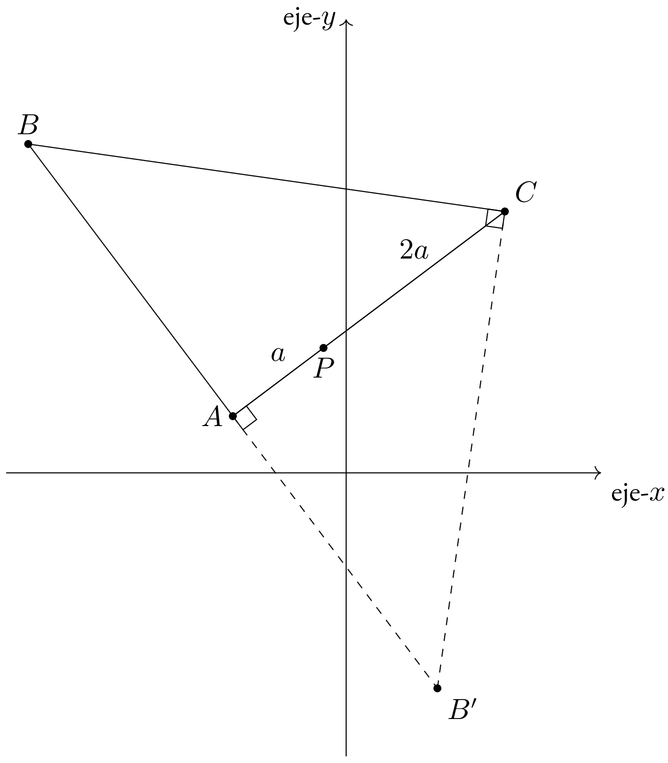


Figura 1.23

Sea el vértice $B = (a, b)$, por ser isósceles se cumple $d(A, B) = d(A, C) = \sqrt{162}$, entonces

$$(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 162. \tag{1.13}$$

Asimismo, el triángulo es recto en A, luego se cumple el teorema de Pitagoras, es decir $d^2(C, B) = d^2(A, B) + d^2(A, C) = 324$, por lo que se deduce la siguiente ecuación

$$(a - 7)^2 + (b - 10)^2 = 324. \tag{1.14}$$

Restando las ecuaciones (1.13) y (1.14) obtenemos la relación $a = -b-1$; al reemplazar tal relación en la ecuación (1.13), encontramos la ecuación cuadrática

$$81 = (a + 2)^2,$$

determinando así dos valores posibles para la abscisa del vértice B, los valores $a_1 = 7$ y $a_2 = -11$. Así, las cordenadas de ambos puntos que cumplen las condiciones del ejercicio son $B = (-11, 10)$ y $B' = (7, -8)$, las que se muestran en la figura. □

Ejercicio 1.17. Indique por qué son falsas las siguientes proposiciones:

- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [\ (-a, b) \in \text{III C} \ \rightarrow\ (-b, -a + b) \in\ \text{I C}\ ].$
- $\forall P, Q \in \text{I C},\ [\ \text{rc}(P, Q) > 0\ ].$
- $\forall P, Q \in \mathbb{R}^2,\ [\ (Q \in \text{I C} \ \wedge\ \text{rc}(P, Q) > 0) \ \rightarrow\ P \in \text{I C}\ ].$

Solución. En este tipo de ejercicios es suficiente que mostremos un contraejemplo en cada caso.

- Considere $a = 1$ y $b = -1$. Notemos que $(-1, -1) \in$ III C, sin embargo se tiene que $(1, -2) \notin$ I C.
- Considere los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (2, 1)$, los cuales pertenecen al primer cuadrante. No obstante, $\text{rc}(P, Q) = -1$.
- Tome $Q = (1, 1)$ y $P = (-1, -1)$, se observa que $Q \in$ I C y $\text{rc}(P, Q) = 1$, pero $P \notin$ I C.

□

Ejercicio 1.18. Sean A, B, C y D los vértices de un paralelogramo con A y B ubicados en los ejes x e y, respectivamente. Además, $C = (1, 7)$ y $D = (2, 5)$, determine las coordenadas de A y B.

Solución. Primero, recordemos que en un paralelogramo las diagonales se intersectan en su punto medio. Así, debe ocurrir que

$$\frac{A + C}{2} = \frac{B + D}{2} \tag{1.15}$$

Por condición del problema podemos escribir los puntos A y B de la siguiente manera

$$A = (a, 0) \text{ y } B = (0, b).$$

Luego, reemplazando esto en (1.15) obtenemos

$$\left(\frac{1 + a}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(1, \frac{b + 5}{2}\right)$$

de donde se deduce que $a = 1$ y $b = 2$. Por tanto, $A = (1, 0)$ y $B = (0, 2)$. □

Ejercicio 1.19. Sea OAB un triángulo rectángulo recto en $A = (9, 12)$. Si B pertenece al eje de abscisas y O es el origen de coordenadas, determine las coordenadas del punto medio de A y B.

Solución. Ubicamos los datos en el plano cartesiano, como se muestra en la Figura 1.24, se observa que el ángulo AOB es $53°$. Por lo cual, B tiene coordenadas $(25, 0)$.

Por lo tanto, el punto medio de A y B es $M = (17, 6)$. □

Ejercicio 1.20. Sean $Q = (2, -3)$ y $R = (0, 5)$, determine las coordenadas del punto $P \in \mathbb{R}^2$ tal que $\text{rc}(P, Q) = -1$ y $\text{rc}(P, R) = 2$. Además, indique en qué cuadrante se encuentra P.

Solución. Si $P = (x_0, y_0)$ entonces

$$\text{rc}(P, Q) = \frac{y_0 + 3}{x_0 - 2} = -1 \text{ y } \text{rc}(P, R) = \frac{y_0 - 5}{x_0 - 0} = 2.$$

Estas expresiones forman el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 &= -1 \\ 2x_0 - y_0 &= -5 \end{aligned}$$

cuya solución es $(x_0, y_0) = (-2, 1)$, el cual pertenece al segundo cuadrante. □

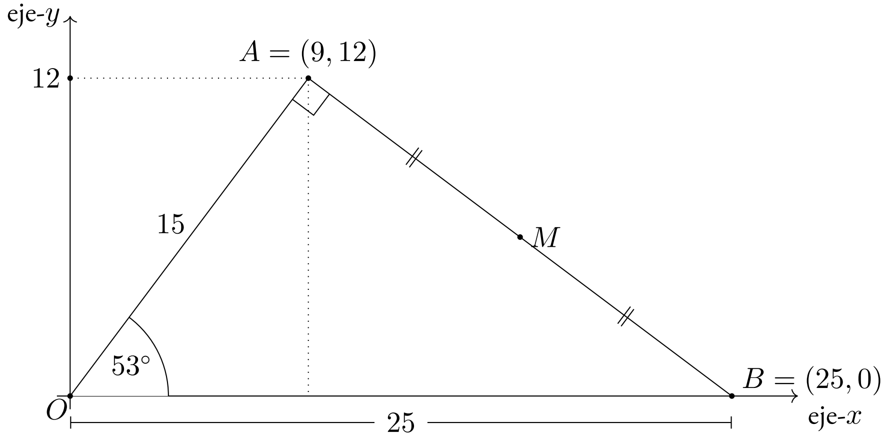


Figura 1.24

Ejercicio 1.21. Sea $P = (2, 2)$, determine todos los puntos $Q \in \mathbb{R}^2$ tales que cumplan:

$$d(P, Q) = d(P, O) \ \wedge \ \text{rc}(P, Q).\text{rc}(P, O) = -1.$$

Solución. Primero, debemos notar que O es el origen de coordenadas. Luego, no es difícil verificar que $d(P, O) = \sqrt{8}$ y $\text{rc}(P, O) = 1$. Usaremos las variaciones de P hacia Q para simplificar algunos cálculos, pero recordemos que si $Q = (x_0, y_0)$, entonces $\Delta x = x_0 - 2$ y $\Delta y = y_0 - 2$. Así, se debe cumplir que

$$d(P, Q)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = 8 \ \text{ y } \ \text{rc}(P, Q) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

De la segunda igualdad se deduce que $\Delta y = -\Delta x$, al reemplazar esto en la primera igualdad obtenemos una expresión en términos de la variación en x, es decir

$$(\Delta x)^2 + (-\Delta x)^2 = 8.$$

Al resolver la ecuación anterior se deduce que $\Delta x = 2$ o $\Delta x = -2$.

En el primer caso, $\Delta x = 2$ implica que $\Delta y = -2$, de donde $Q = (4, 0)$. El segundo caso, $\Delta x = -2$ implica que $\Delta y = 2$, de donde $Q = (0, 4)$. $\square$

Ejercicio 1.22. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos progresiones aritméticas con diferencias comunes positivas. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $P_m = (a_m, b_m) \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ [\ \text{rc}(P_{k+1}, P_k) \text{ es constante } \ ]$$

Solución. Como las progresiones son aritméticas, existen d_a y d_b dos números reales positivos tales que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_{k+1} - a_k = d_a \text{ y } b_{k+1} - b_k = d_b.$$

De donde, se deduce que

$$\text{rc}(P_{k+1}, P_k) = \frac{b_{k+1} - b_k}{a_{k+1} - a_k} = \frac{d_b}{d_a}.$$

□

Ejercicios propuestos

1. Sean $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ tales que $a < 0 < b < c$, determine en qué cuadrante se encuentran los siguientes puntos:

   a) $(b + a - c, c - b - a)$

   b) $(-3, b + c - a)$

   c) $(-a, b - c)$

   d) $(-b, b - a)$

2. Sean a y b dos números reales tales que el punto $(a + b, a - b)$ pertenece al primer cuadrante, determine si el punto $(b - a, a^2)$ pertenece a algún cuadrante.

3. Determine si el triángulo de vértices en los puntos $A = (4, 7), B = (-1, -8)$ y $C = (8, 5)$ es rectángulo o no. Además, calcule su perímetro.

4. La abscisa de un punto es -6 y su distancia al punto $A = (1, 3)$ es $\sqrt{74}$. Determine la ordenada de dicho punto.

5. Determine el área del triángulo sombreado en la Figura 1.25.

6. Dados los puntos $A = (4, 2)$ y $B = (5, 8)$, determine las coordenadas del punto P tal que
$$\text{rc}(A, P) = -1 \quad \wedge \quad d(B, P) = 5.$$

7. Grafique y determine el perímetro del triángulo que resulta de unir los puntos medios de los lados del triángulo $\triangle ABC$, donde $A = (-2, 4)$, $B = (4, 8)$ y $C = (2, -6)$.

8. Sean A y B dos puntos en el plano, ubicados en los cuadrantes, demuestre que el triángulo $\triangle ABC$ es recto en O si y solo si rc(A, O).rc(O, B)=-1

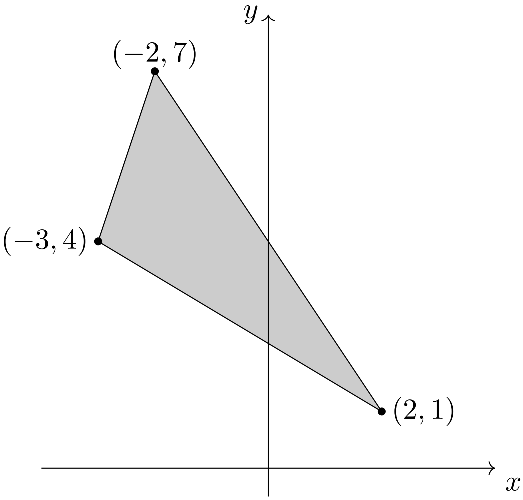


Figura 1.25

9. De la Figura 1.26 determine las coordenadas de A, si el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero y $d(O,B) = 2$.

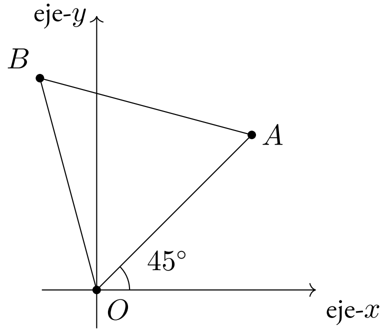


Figura 1.26

10. Determine el punto $P = (x, y)$ tal que

$$\text{rc}(A, P) + \text{rc}(B, P) = 2 \quad \text{y} \quad d(A, P) = d(B, P)$$

donde $A = (1, 1)$ y $B = (5, 5)$.

11. Determine las coordenadas del punto P tal que $\text{rc}(P, O) = 1$ y $\text{rc}(P, A) = \dfrac{1}{2}$, donde $A = (-1, 0)$ y O es el origen de coordenadas.

12. Sean $A = (-9, 0)$ y $B = (0, 12)$, determine la distancia de P al origen de coordenadas, si se sabe que P divide al segmento $\overline{AB}$ en razón de $\dfrac{1}{2}$.

13. Determine el área del triángulo $\triangle ABM$, mostrado en la Figura 1.27, si el cuadrilátero de vértices A, B, C y D es un paralelogramo, y el área de la región sombreada es $8u^2$.

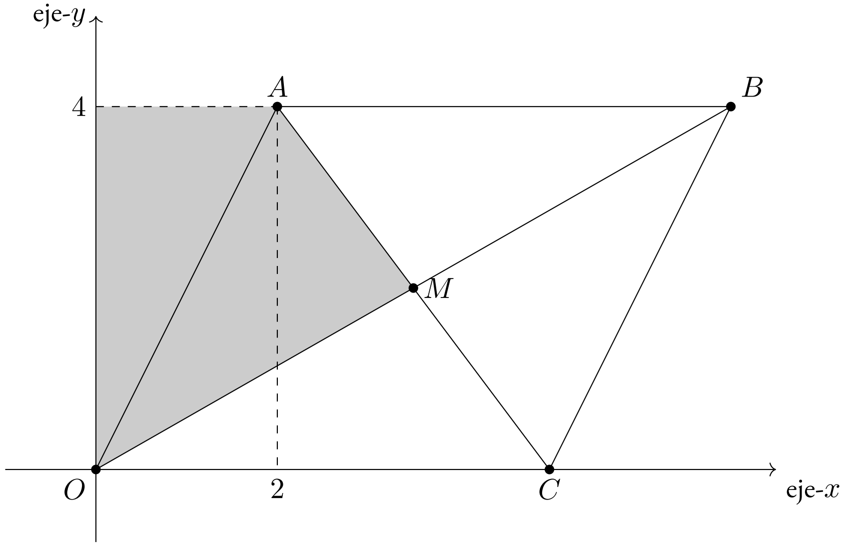


Figura 1.27

14. Sean $A = (-2, 0)$ y $B = (0, 2)$, determine las coordenadas del punto C de forma que B divide a $\overline{AC}$ en razón de $\dfrac{1}{3}$.

15. De la Figura 1.28, calcule $d(M, N)$.

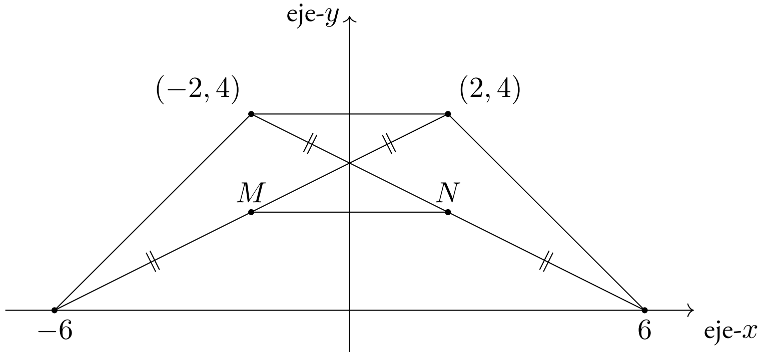


Figura 1.28

16. De la Figura 1.29 determine la distancia del punto D al origen de coordenadas, si $B=(-1,0)$ y el área de la región sombreada es $3u^2$.

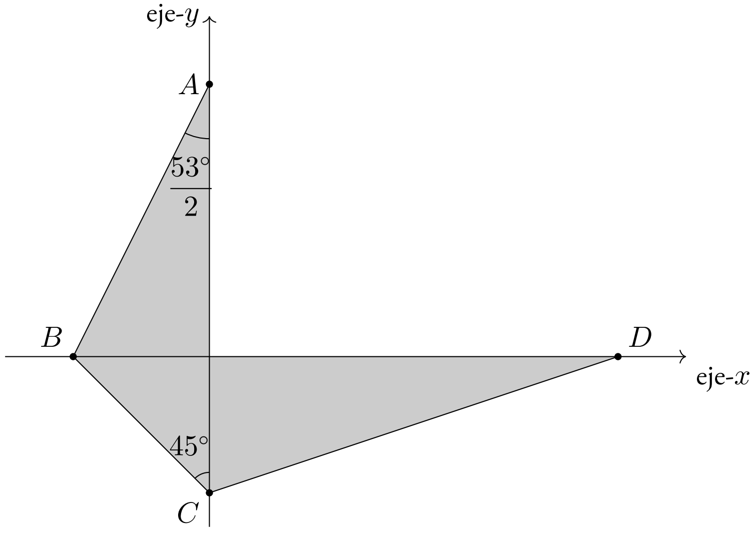


Figura 1.29

17. El cuadrilátero de vértices A, B, C y D, mostrado en la Figura 1.30, es un rombo. Calcule el área de la región sombreada.

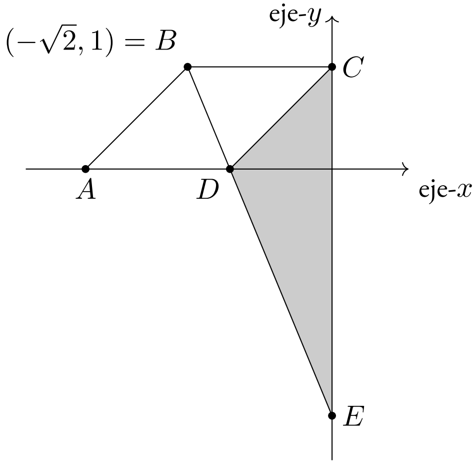


Figura 1.30

18. De la Figura 1.31, calcule las coordenadas del punto B.

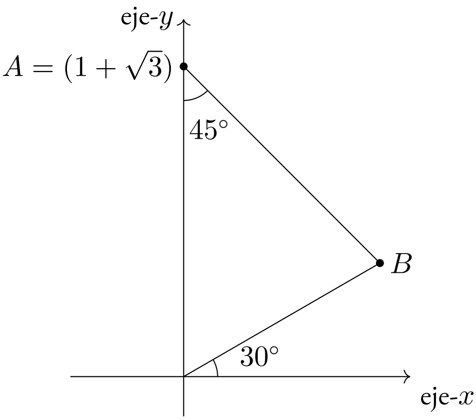


Figura 1.31

19. De la Figura 1.32, determine el área de la región sombreada si se sabe que el cuadrilátero de vértices B, C, D y E es un paralelogramo.

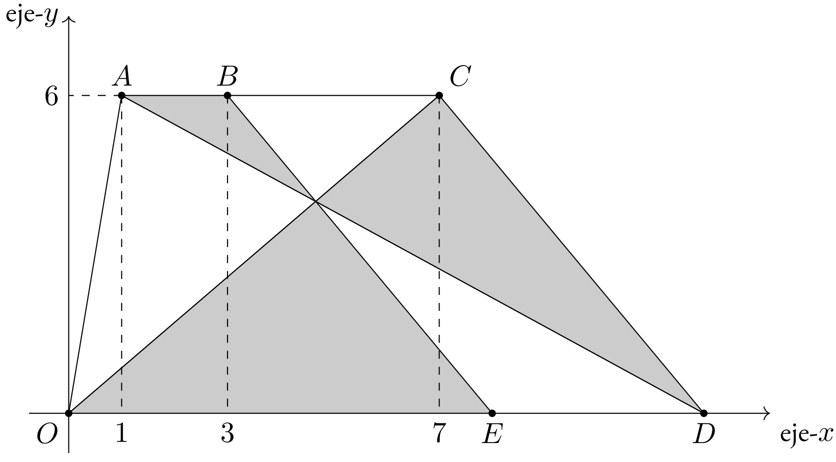


Figura 1.32

20. De la Figura 1.33, el cuadrilátero de vértices O, A, B y C es un trapecio. Si se cumple que $d(O, A) = d(B, C)$, $A = (4, 6)$, $C = (14, 0)$ y M es punto medio del segmento $\overline{BC}$; calcule el área del triángulo sombreado.

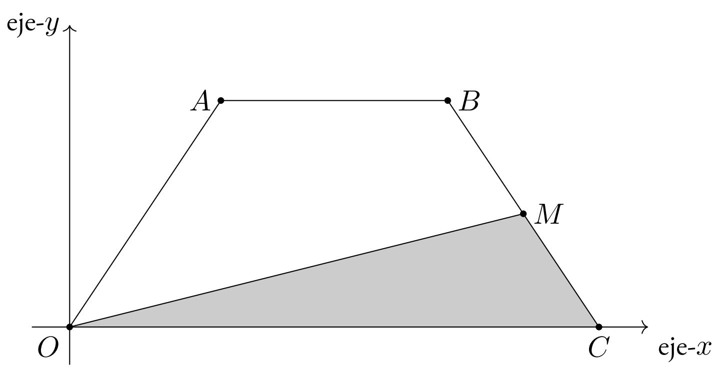


Figura 1.33

21. Sean $A = (-2, 2)$, $B = (4, 2)$, $C = (6, -4)$ y $D = (-4, -2)$ puntos en el plano cartesiano, determine el área del cuadrilátero que resulta de unir los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.

22. Demuestre que
$$x_1\,x_2 + y_1\,y_2 \leq d(A, O)d(B, O)$$
para cualesquiera $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$, donde O es el origen de coordenadas.

23. Demuestre el Teorema 1.1.

24. Demuestre
$$d(O, A + B) \leq d(O, A) + d(O, B)$$
para todo $A, B \in \mathbb{R}^2$, donde O es el origen.

2
Rectas

Los postulados 1 y 2 de Euclides establecen que por dos puntos diferentes pasa una y solo una recta. Esto significa que si conocemos dos puntos de una recta entonces podemos conocer su gráfica. Así, una pregunta natural es ¿cómo podemos determinar un punto de una recta? La respuesta a dicha interrogante está asociada al hecho de que toda recta está representada por una ecuación, lo que es motivo de estudio de la siguiente sección.

Ecuación general de una recta

Toda recta $\mathscr{L}$ es un conjunto de puntos que cumplen una ecuación lineal o de primer grado, es decir

$$\mathscr{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by + c = 0\},$$

con la restricción $a^2 + b^2 \neq 0$. En ese sentido, diremos que $\mathscr{L}$ es la recta de *ecuación general*

$$ax + by + c = 0.$$

Como casos particulares tenemos las rectas horizontales y verticales, cuyas ecuaciones generales vienen dadas por

$$by + c = 0 \ \text{ y } \ ax + c = 0,$$

respectivamente.

Ejemplo 2.1. El eje de abscisas es una recta horizontal cuya ecuación general es $y = 0$, es decir que todo punto sobre el eje de abscisas tiene por ordenada cero. Otro ejemplo es el eje de ordenadas cuya ecuación general es $x = 0$.

Debemos notar que si se conoce la ecuación de una recta, para saber si un punto P pertenece o no a tal recta, debemos verificar si las coordenadas del punto satisfacen o no la ecuación de esta. Veamos un ejemplo que nos ayude a entender este proceso.

Ejemplo 2.2. Sea $P = (1, 2)$ y $\mathscr{L}$ la recta de ecuación general $x + y + 5 = 0$. Notemos que

$$1 + 2 + 5 \neq 0,$$

lo cual implica que $P \notin \mathscr{L}$.

Por otro lado, para encontrar las coordenadas de algunos puntos sobre una recta se sigue el proceso de tabulación, el cual consiste en asignar un valor a la abscisa y determinar el valor de la ordenada que satisface la ecuación o viceversa. El siguiente ejemplo nos ilustra este proceso.

Ejemplo 2.3. Sea $\mathscr{L}$ una recta de ecuación general $x - 2y - 6 = 0$. Para determinar el punto P en la recta con abscisa 4, debemos reemplazar dicho valor en la ecuación y obtener el valor de la ordenada, es decir se reduce a resolver la siguiente ecuación

$$4 - 2y - 6 = 0$$

cuya solución es $y = -1$. Por lo tanto, P tiene coordenadas $(4, -1)$.

Es importante notar que en el ejemplo previo se consideró una recta no vertical ni horizontal, pues en estos casos, ya se tiene determinada una de las coordenadas y la otra por determinar puede ser cualquier número real.

Ejemplo 2.4. Un punto P en la recta vertical $\mathscr{L}$, de ecuación $x = 1$, tiene por coordenadas $(1, 5)$. Otro punto puede ser $(1, -3)$.

Dadas dos rectas diferentes, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, solo existen dos formas de graficarlas en un mismo plano, la primera cuando no tienen ningún punto en común y la segunda cuando solo tienen un punto en común. Es importante notar que si ellas tienen dos puntos diferentes en común, por los postulados 1 y 2 de Euclides se tiene que dichas rectas son iguales, lo que será imposible porque ellas son diferentes. En el primer caso $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son llamadas *rectas paralelas* y en el segundo son llamadas *rectas secantes*.

En caso de tener dos rectas iguales, a ellas se les considerará paralelas.

Ejemplo 2.5. Los puntos de intersección con los ejes coordenados de la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $3x - 4y - 5 = 0$ se calculan de la siguiente manera.

Para determinar el punto de intersección con el eje de abscisas se debe reemplazar $y = 0$ en la ecuación de la recta, es decir

$$3x - 4(0) - 5 = 0$$

deduciéndose que $x = 5/3$. Así, el punto de intersección con el eje-x es $(5/3, 0)$.

Para el punto de intersección con el eje de ordenadas se debe reemplazar $x = 0$ en la ecuación de la recta. En nuestro caso, se obtiene $(0, -5/4)$, ver Figura 2.1.

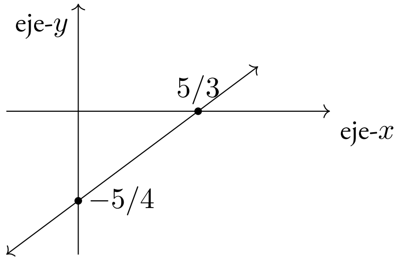


Figura 2.1

La ordenada y la abscisa del punto de intersección de una recta $\mathscr{L}$ con los ejes coordenados se denominan *y-intercepto* y *x-intercepto*, respectivamente.

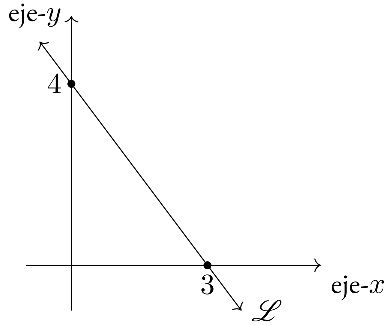


Figura 2.2

Ejemplo 2.6. Dada la recta $\mathscr{L}$ mostrada en la Figura 2.2 se observa que su x-intercepto es 3 y su y-intercepto es 4, pero su intersección con el eje-x es $(3, 0)$ y su intersección con el eje-y es $(0, 4)$.

Ángulo de inclinación de una recta

Es importante observar que cualquier recta no vertical ni horizontal corta, necesariamente, al eje de abscisas. Luego, por semejanza de triángulos, uno deduce que la razón de cambio de dos puntos diferentes cualesquiera de esta es constante. Por ello, se define el *ángulo de inclinación* de una recta no vertical ni horizontal $\mathscr{L}$ como el ángulo, medido en grados sexagesimales o radianes, asociado a la razón de cambio de dos puntos diferentes cualesquiera de esta, ver Figura 2.3.

El ángulo de inclinación de una recta horizontal se dice que es $0°$ y la inclinación de una recta vertical se dice que es $90°$.

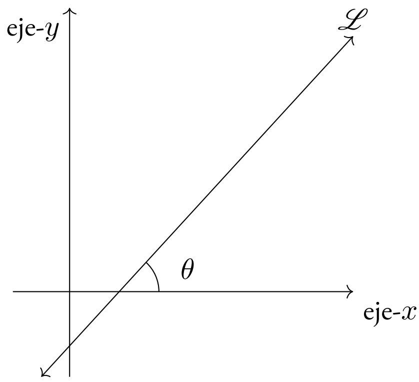


Figura 2.3

Dada una recta no vertical $\mathscr{L}$, se define su *pendiente* como la tangente de su ángulo de inclinación o como la razón de cambio de dos puntos diferentes de esta.

Ejemplo 2.7. La recta del Ejemplo 2.6 tiene pendiente $-\dfrac{4}{3}$. Mientras que la recta del Ejemplo 2.5 tiene pendiente $3/4$.

El siguiente resultado caracteriza las rectas paralelas.

Teorema 2.1. *Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas diferentes, estas son paralelas si y solo si tienen el mismo ángulo de inclinación. Si son rectas no verticales, entonces estas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.*

La prueba del teorema anterior es dejada como ejercicio para el lector interesado.

Ejemplo 2.8. Las rectas de ecuaciones generales:

$$\mathscr{L}_1 : \; x + y + 1 = 0 \; \text{ y } \; \mathscr{L}_2 : \; 2x + 2y + 1 = 0$$

son paralelas.

Dado que una recta está bien definida por dos puntos diferentes por donde esta pase, se deduce que cualquier recta no vertical está definida si se conoce un punto sobre ella y el valor de su pendiente, es decir dados $P = (x_0, y_0)$ y $m \in \mathbb{R}$, la recta $\mathscr{L}$ con pendiente m que pasa por P, ver Figura 2.4, es el conjunto

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x,y) = P \; \vee \; \mathrm{rc}((x,y),P) = m\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x,y) = P \; \vee \; \frac{y - y_0}{x - x_0} = m\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x,y) = P \; \vee y - y_0 = m(x - x_0)\right\},\end{aligned}$$

de donde, se dice que $\mathscr{L}$ tiene por ecuación *punto-pendiente*

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

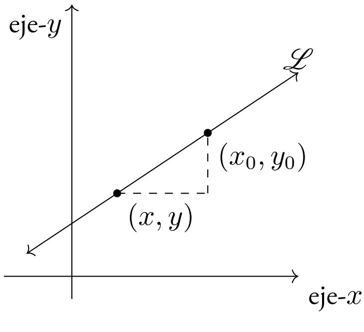
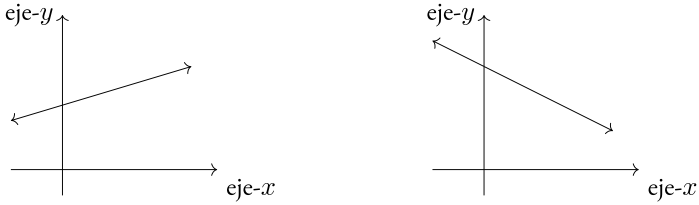


Figura 2.4

Ejemplo 2.9. La recta que pasa por el punto $(3, 2)$ con pendiente 2, tiene por ecuación punto-pendiente

$$y - 2 = 2(x - 3).$$

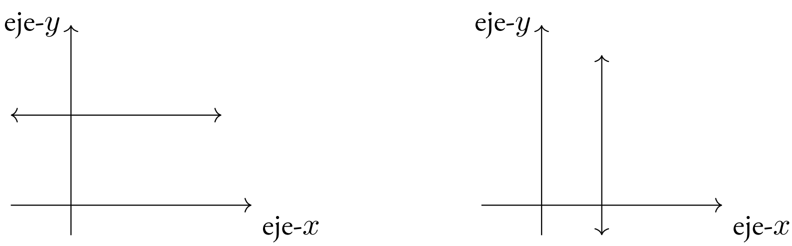
Debemos notar que la pendiente de una recta con ángulo de inclinación mayor que $0°$ pero menor que $90°$ es positiva. Si el ángulo es mayor que $90°$ entonces la pendiente es negativa. Esto se representa en la Figura 2.5.



(a) Pendiente positiva (b) Pendiente negativa

Figura 2.5

También notemos que si tenemos una recta con ángulo de inclinación $0°$, esta es paralela al eje-x, es decir es horizontal. Pero si el ángulo es $90°$, esta es paralela al eje-y, es decir es vertical, ver Figura 2.6.



(a) Recta horizontal (b) Recta vertical

Figura 2.6

Sea $\mathscr{L}$ una recta no vertical de pendiente m e y-intercepto b, como se muestran en la Figura 2.7. Si escribimos la ecuación punto-pendiente de $\mathscr{L}$ tomando como punto de paso

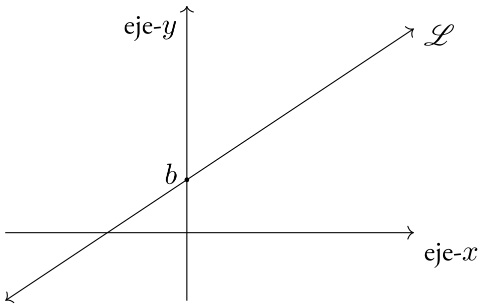


Figura 2.7

su punto de intersección con el eje de ordenadas se obtiene $y - b = mx$, de donde se deduce que

$$y = mx + b,$$

siendo esta última denominada la ecuación *pendiente-intercepto* de $\mathscr{L}$.

Ejemplo 2.10. La recta $\mathscr{L}$ del Ejemplo 2.9 tiene por ecuación pendiente-intercepto

$$y = 2x - 4,$$

de donde se deduce que su y-intercepto es -4.

Ejemplo 2.11. La recta de ecuación general $2x + y + 1 = 0$ tiene por ecuación pendiente-intercepto

$$y = -2x - 1,$$

de donde se desprende que el punto de intersección con el eje-y tiene coordenadas $(0, -1)$. Además, su pendiente es -2.

Ejemplo 2.12. Una ecuación general de la recta $\mathscr{L}$, con ecuación pendiente-intercepto $y = x + 1$, es

$$x - y + 1 = 0.$$

Es importante notar que los ejemplos previos nos muestran que no es complicado pasar de una ecuación de recta a otra.

Ángulo entre dos rectas

Dadas dos rectas secantes $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, como se muestra en la Figura 2.8.

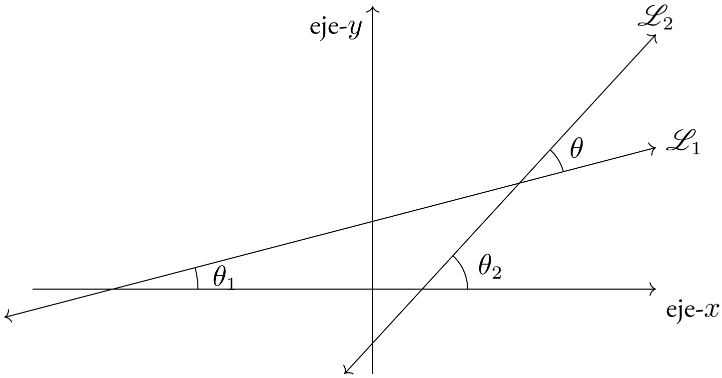


Figura 2.8

Se define el ángulo entre ellas como el ángulo tal que el mayor ángulo de inclinación es la suma de este con el otro ángulo de inclinación. Si consideramos los ángulos de inclinación θ_1 y θ_2 de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, respectivamente, tal que $\theta_2 > \theta_1$; entonces el ángulo entre ellas, θ, cumple que $\theta_2 = \theta_1 + \theta$.

Ejemplo 2.13. Sean las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de ecuaciones pendiente-interceptos

$$y = x + 1 \text{ e } y = \frac{4}{3}x - 1,$$

respectivamente. Es claro que $\mathscr{L}_1$ tiene ángulo de inclinación $45°$ y $\mathscr{L}_2$ tiene ángulo de inclinación $53°$. Luego, el ángulo entre ellas es $8°$.

Ejemplo 2.14. El ángulo entre los ejes coordenados es $90°$, debido a que el eje de ordenadas tiene ángulo de inclinación $90°$ y el eje de abscisas tiene ángulo de inclinación $0°$.

Ejemplo 2.15. No es difícil verificar que el ángulo entre la recta de ecuación $y = x$ con cualquiera de los ejes coordenados es $45°$.

Observe que el ángulo de inclinación de cualquier recta es justamente el ángulo entre dicha recta y el eje de abscisas.

Diremos que dos rectas son *perpendiculares* cuando el ángulo entre ambas es $90°$, ver Figura 2.9.

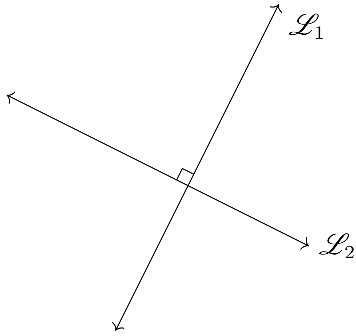


Figura 2.9

Teorema 2.2. *Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Se cumple que $\mathscr{L}_1$ es perpendicular a $\mathscr{L}_2$ si y solo si $m_1 m_2 = -1$.*

La prueba del teorema anterior es dejada como ejercicio para el lector interesado.

Veamos a continuación el siguiente ejemplo donde se ilustra la utilidad del teorema previo.

Ejemplo 2.16. Sea $\mathscr{L}$ la recta de ecuación $y = 2x + 1$. Por el Teorema 2.2, la recta perpendicular a $\mathscr{L}$ que pasa por el punto $(0, 1)$ tiene pendiente $-1/2$ y su ecuación es

$$y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Usaremos la notación $\perp$ para indicar perpendicularidad, es decir, se escribirá $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ para indicar que las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son perpendiculares.

Ejemplo 2.17. Del Ejemplo 2.14 se sigue que eje-$x \perp$ eje-y.

Ejemplo 2.18. Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen las siguientes ecuaciones intercepto-pendiente

$$y = x \ \text{ e } \ y = -x.$$

Del Teorema 2.2, se sigue que $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$.

Distancia entre un punto y una recta

Sea P un punto y $\mathscr{L}$ una recta en el plano cartesiano. La *distancia* de P a $\mathscr{L}$, $d(P, \mathscr{L})$, se define como la menor distancia entre P y los puntos sobre $\mathscr{L}$.

Note que si $P \in \mathscr{L}$, entonces $d(P, \mathscr{L}) = 0$. Mientras que cuando $P \notin \mathscr{L}$, geométricamente, para determinar esta distancia procedemos a determinar la ecuación de la recta perpendicular a $\mathscr{L}$, denotada por $\mathscr{L}^{\perp}$, que pasa por P. Luego, se determina el punto de intersección entre las rectas, es decir, $\mathscr{L} \cap \mathscr{L}^{\perp} = \{Q\}$. Note que cualquier otro punto diferente de Q en $\mathscr{L}$ forma con P y Q un triángulo rectángulo, donde $d(P, Q)$ es un cateto y por ende tiene longitud menor que la hipotenusa. Así, $d(P, \mathscr{L}) = d(P, Q)$, ver Figura 2.10.

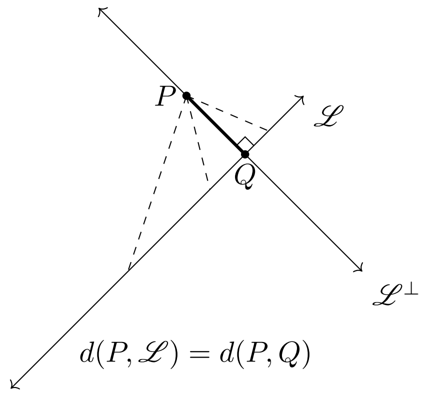


Figura 2.10

Veamos a continuación un ejemplo que nos ilustre el procedimiento anterior.

Ejemplo 2.19. Para calcular la distancia del punto $P = (4, 5)$ a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $4x - 6y - 12 = 0$, primero realizamos un gráfico, como el que se muestra en la Figura 2.11, en el plano cartesiano con los datos mencionados.

No es complicado darse cuenta de que la pendiente de $\mathscr{L}$ es $2/3$. Así, por el Teorema 2.2, se tiene que la pendiente de $\mathscr{L}^{\perp}$ es $-3/2$; luego la ecuación de $\mathscr{L}^{\perp}$ es:

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 4).$$

De donde, el punto de intersección entre $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}^{\perp}$ tiene coordenadas $(6, 2)$. Por lo tanto, $d(P, \mathscr{L}) = \sqrt{13}$.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1. De la Figura 2.12, determine el área de la región sombreada.

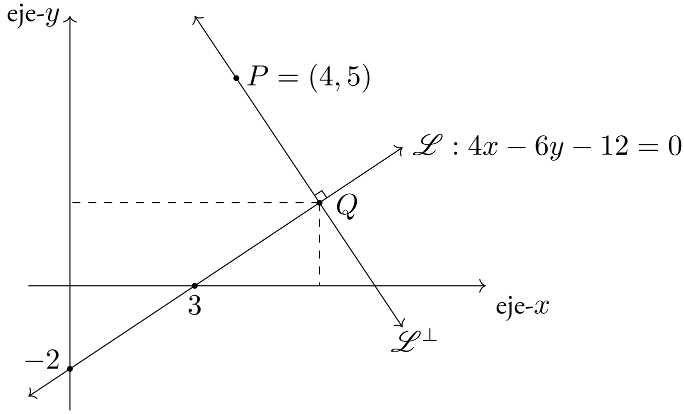


Figura 2.11

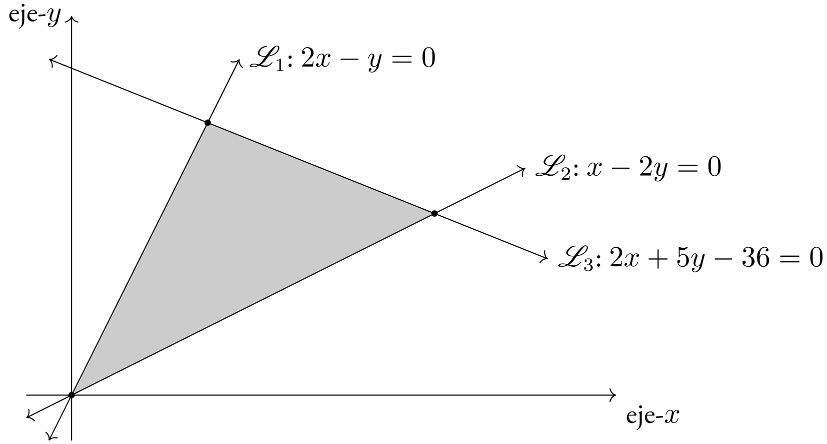


Figura 2.12

Solución. El punto de intersección entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es $(0,0)$. Luego, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = \{(3,6)\}$ y $\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = \{(8,4)\}$.

Para el cálculo del área pedida procedemos a formar un rectángulo como se muestra en la Figura 2.13, donde observamos que el área pedida se obtiene como

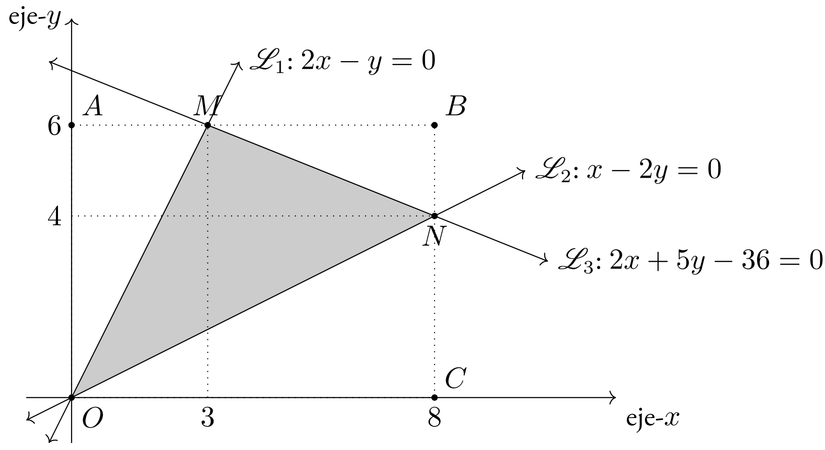


Figura 2.13

Área del rectángulo$(OABC)$ $-$ Áreas de los triángulos$(\triangle OAM, \triangle MBN, \triangle ONC)$.

Así, el área del triángulo es $48 - 16 - 5 - 9 = 18\ u^2$. □

Ejercicio 2.2. Determinar el punto de intersección entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de ecuaciones $3x - 2y + 7 = 0$ y $2x + 3y - 3 = 0$, respectivamente.

Solución. Procedemos primero a escribir las ecuaciones pendiente-interceptos de cada una de las rectas.

$$\mathscr{L}_1 : \ y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \ \text{ y } \ \mathscr{L}_2 : \ y = -\frac{2}{3}x + 1.$$

Luego, para determinar el punto de intersección procedemos a resolver la siguiente ecuación

$$\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} = -\frac{2}{3}x + 1$$

obteniéndose $x = -\dfrac{15}{13}$; luego al reemplazar en cualquiera de las ecuaciones de las rectas podemos obtener su respectiva ordenada. Por lo tanto, el punto de intersección es $(-15/13, 23/13)$. □

Ejercicio 2.3. Dadas las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de ecuaciones $x-2y-4=0$ y $2x-4y+3=0$, respectivamente. Determine los puntos de intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ con los ejes coordenados y calcule el perímetro del cuadrilátero que forman.

Solución. Los puntos de intersección de $\mathscr{L}_1$ con los ejes coordenados son: $(4,0)$ y $(0,-2)$.

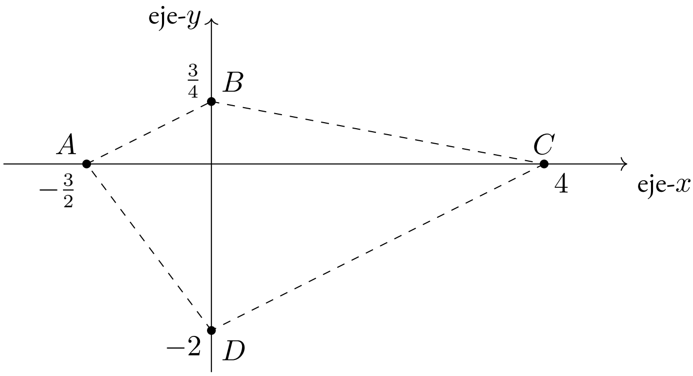


Figura 2.14

De igual manera, los puntos de intersección de $\mathscr{L}_2$ con los ejes coordenados son $(-3/2,0)$ y $(0,3/4)$. El cuadrilátero que resulta de unir dichos puntos se aprecia en la Figura 2.14. Luego, el perímetro es

$$d(A,B)+d(B,C)+d(C,D)+d(D,A),$$

es decir $\dfrac{3}{4}\sqrt{5}+\dfrac{1}{4}\sqrt{265}+2\sqrt{5}+\dfrac{5}{2}$ unidades. $\square$

Ejercicio 2.4. De la Figura 2.15 determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}$, si se sabe que M es punto medio del segmento de extremos A y B.

Solución. Desde que M es punto medio de A y B, se cumple que

$$M=\frac{A+B}{2}$$

que es lo mismo que $(-4,2)=(-8,-2)+B$. Por lo tanto, $B=(4,4)$.

Por otro lado, la pendiente de $\mathscr{L}$ coincide con la razón de cambio entre B y el origen. Entonces, la pendiente es $\mathrm{rc}(B,O)=1$. Así, la ecuación de $\mathscr{L}$ es

$$y=x.$$

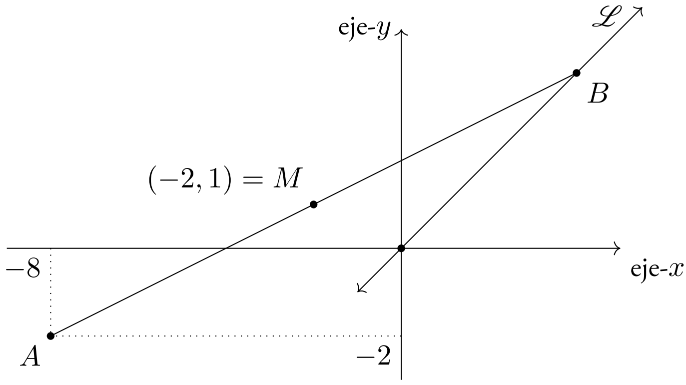


Figura 2.15

$\square$

Ejercicio 2.5. De la Figura 2.16, determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}$. Además, determine el área de la región sombreada.

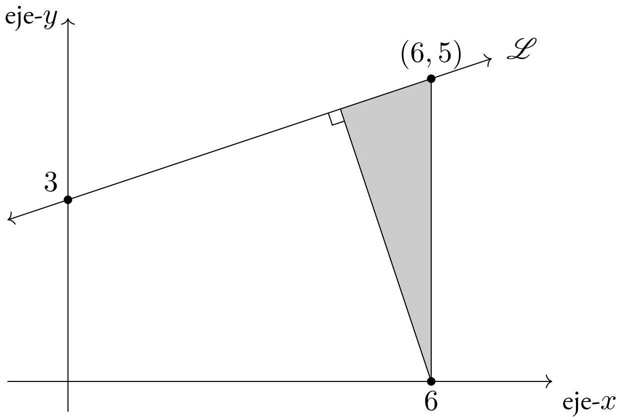


Figura 2.16

Solución. Como $\mathscr{L}$ pasa por $(0, 3)$ y $(6, 5)$, se deduce que la pendiente de ella es $\dfrac{1}{3}$. Así, la ecuación punto-pendiente de $\mathscr{L}$ es

$$y = \frac{1}{3}x + 3.$$

Luego, si denotamos por H al punto donde se encuentra el ángulo recto del triángulo sombreado. Debido a que $H \in \mathscr{L}$, entonces $H = (3a, a + 3)$. Así, por el teorema de rectas perpendiculares, se sigue que

$$\frac{a + 3 - 0}{3a - 6} = -3$$

de donde se obtiene que $a = 3/2$, lo cual a su vez implica $H = (9/2, 9/2)$. Por lo tanto, el área es $15/4\ u^2$.

$\square$

Ejercicio 2.6. En la Figura 2.17, M es punto medio del segmento de extremos A y B. Determine una ecuación de la recta perpendicular a la recta $\mathscr{L}$, que pasa por B.

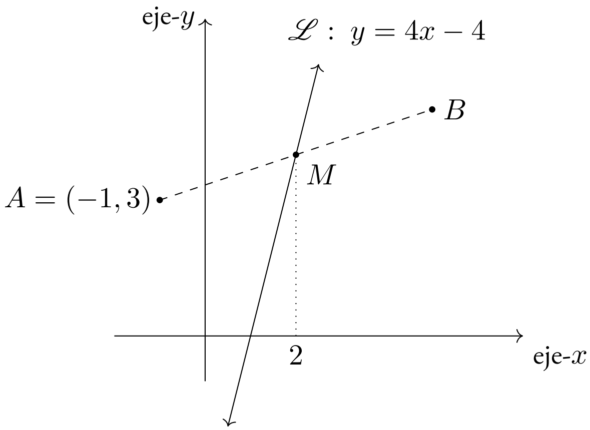


Figura 2.17

Solución. Desde que $M \in \mathscr{L}$ y su primera coordenada es 2, se tiene que $M = (2, 4)$. Como M es punto medio de A y B, es decir

$$M = \frac{A + B}{2},$$

se deduce que $B = (5, 5)$. Finalmente, como $\mathscr{L}$ tiene pendiente 4, se sigue que la ecuación de la recta perpendicular a $\mathscr{L}$ pasando por B es

$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 5).$$

$\square$

Ejercicio 2.7. Sean $A = (2, 3)$, $B = (3, 6)$ y $C = (5, 4)$ los vértices del triángulo ABC. Determine los puntos de intersección de la recta, que contiene a la altura relativa al vértice B, con los ejes coordenados.

Solución. La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y C es $\frac{1}{3}$. Así, la pendiente de la recta pedida es -3. Como dicha recta pasa por $B = (3, 6)$, su ecuación viene dada por

$$y - 6 = -3(x - 3).$$

Finalmente, sus puntos de intersección con los ejes coordenados son $(5, 0)$ y $(0, 15)$. $\square$

Ejercicio 2.8. Sea $m < 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $y = mx + b$ pasa por el punto $(3, 1)$. Determine m y b si se sabe que la distancia del punto $(-1, 1)$ a $\mathscr{L}$ es $2\sqrt{2}$.

Solución. Como se puede apreciar en la Figura 2.18, el triángulo sombreado es notable y por tanto $\theta = 45°$. Así, la pendiente de $\mathscr{L}^\perp$ es 1, y esto a su vez implica que la pendiente de $\mathscr{L}$ es -1, es decir $m = -1$.

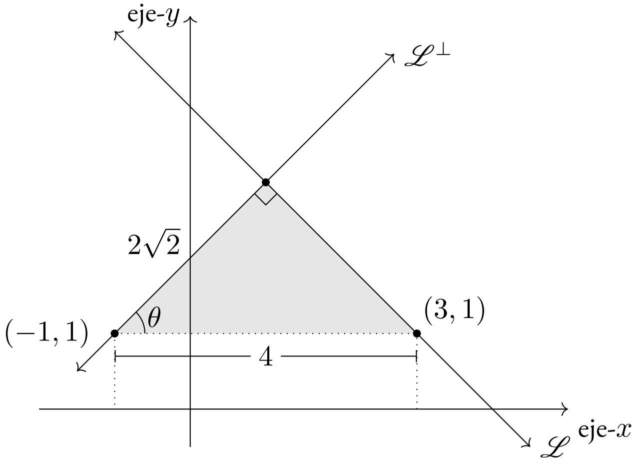


Figura 2.18

Por último, como $(3,1) \in \mathscr{L}$ se sigue que $b = 4$. $\square$

Ejercicio 2.9. En la Figura 2.19, "a" es el valor numérico del área de la región sombreada. Si $a \in [9, 18]$, determine los posibles valores de la pendiente de la recta $\mathscr{L}_2$.

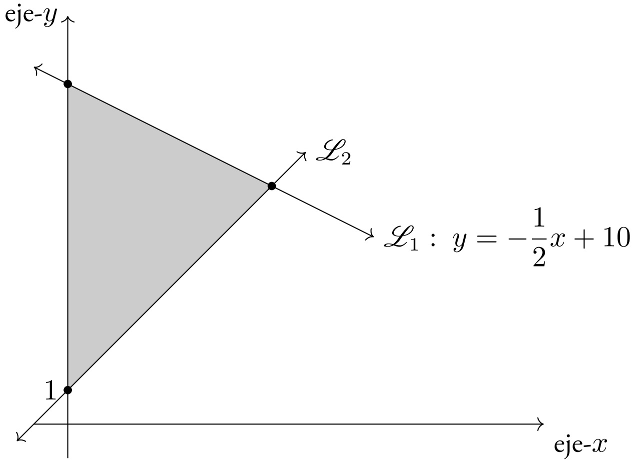


Figura 2.19

Solución. Primero, denotemos por m la pendiente de la recta $\mathscr{L}_2$. Así, esta tiene por ecuación intercepto-pendiente

$$y = mx + 1.$$

Por otro lado, es claro que el y-intercepto de $\mathscr{L}_1$ es 10. Luego, el x-intercepto del punto de intersección entre ambas rectas en términos de m es

$$\frac{18}{2m+1}.$$

Ubicando toda esta información en la figura anterior se obtiene la siguiente figura Así, el área del triángulo sombreado en términos de m es

$$a = \frac{81}{2m+1}.$$

Así, debemos resolver la siguiente inecuación

$$9 \leq \frac{81}{2m+1} \leq 18,$$

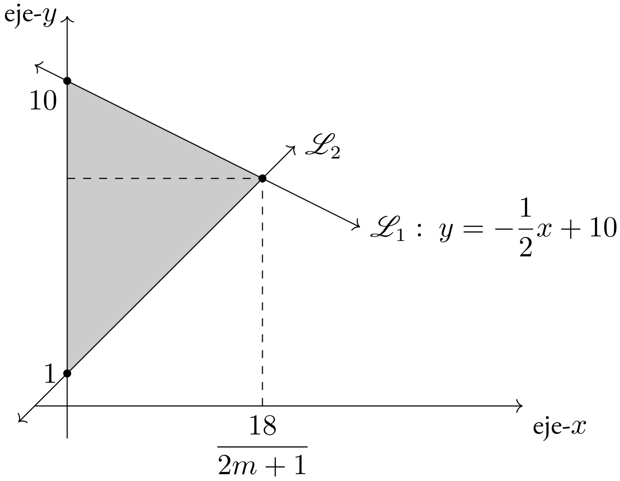


Figura 2.20

la que tiene como conjunto solución $[7/4, 4]$. $\square$

Ejercicio 2.10. En la Figura 2.21 se muestra la recta $\mathscr{L}$. Sea $\mathscr{L}^{\perp}$ la recta, perpendicular a $\mathscr{L}$, que pasa por el punto de intersección entre $\mathscr{L}$ y el eje de ordenadas, determine el x-intercepto de $\mathscr{L}^{\perp}$.

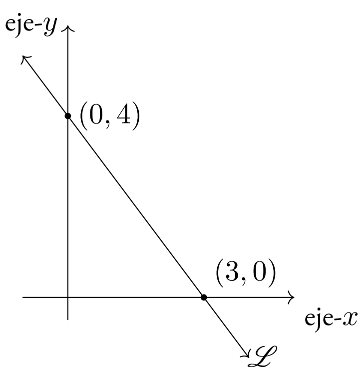


Figura 2.21

Solución. Como $\mathscr{L}$ tiene pendiente $-4/3$, se sigue por el Teorema 2.2 que la pendiente de $\mathscr{L}^{\perp}$ es $3/4$. Luego esta tiene por ecuación intercepto-pendiente

$$y = \frac{3}{4}x + 4.$$

Así, su x-intercepto es $-16/3$. $\square$

Ejercicio 2.11. Sean $A = (1, 1)$, $B = (-5, 10)$ y $C = (5, 4)$ los vértices de un triángulo, $\mathscr{L}_1$ es la recta paralela al segmento $\overline{AC}$ que pasa por el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y $\mathscr{L}_2$ es la recta paralela al segmento $\overline{BC}$ y que pasa por A. Determine la suma de las coordenadas del punto de intersección entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Solución. Primero, denotemos por M al punto medio del segmento de extremos B y C, cuyas coordenadas son $(0, 7)$. Segundo, establecemos un gráfico como en la Figura 2.22 con los datos y las coordenadas del punto en cuestión. Luego, se pide calcular la suma de coordenadas del punto N

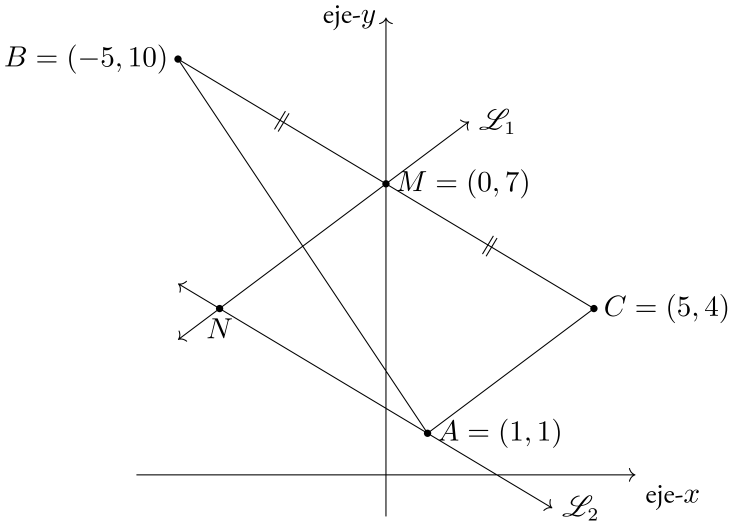


Figura 2.22

Se observa que $\text{rc}(B, C) = -\dfrac{3}{5}$ y $\text{rc}(A, C) = \dfrac{3}{4}$. Así, gracias al Teorema 2.1, las rectas

$\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen por ecuaciones:

$$y = \frac{3}{4}x + 7 \text{ y } y = -\frac{3}{5}x + \frac{8}{5},$$

respectivamente. Luego $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{(-4, 4)\}$. Por lo tanto, la suma de coordenadas del punto de intersección es 0. $\square$

Ejercicio 2.12. Sea $\mathscr{L}$ la recta de ecuación: $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $ab \neq 0$. Si el punto (x_0, y_0) pertenece a $\mathscr{L}$ y su abscisa aumenta en 3, ¿cuánto debe variar su ordenada para que el nuevo punto siga en la recta $\mathscr{L}$?

Solución. Desde $ab \neq 0$ se sigue que $\mathscr{L}$ tiene pendiente $-\dfrac{a}{b}$. Denotemos por P al punto (x_0, y_0) y sea $Q = (x_0 + 3, y_0 + \Delta y)$ el nuevo punto en $\mathscr{L}$. Luego, debe ocurrir que $\mathrm{rc}(P, Q) = -\dfrac{a}{b}$, es decir, $\dfrac{\Delta y}{3} = -\dfrac{a}{b}$, de donde $\Delta y = -\dfrac{3a}{b}$, esto es, la ordenada varía en $-3a/b$. $\square$

Ejercicio 2.13. Sean A, B, C y D los vértices de un rectángulo. Si $A = (3, 4), C = (9, 16)$ y $\mathrm{rc}(A, B) = 1$; determine la ecuación de la recta que pasa por B y D.

Solución. Notemos primero que debe ocurrir

$$\mathrm{rc}(A, B) = \mathrm{rc}(D, C) = 1 \text{ y } \mathrm{rc}(A, D).\mathrm{rc}(A, B) = -1.$$

Así, la recta que pasa por A y D tiene por ecuación

$$y - 4 = -1(x - 3).$$

A su vez, la recta que pasa por D y C tiene por ecuación

$$y - 16 = x - 9.$$

Dichas rectas se intersectan en D, de donde se deduce que $D = (0, 7)$. Luego, se establece un gráfico como en la Figura 2.23, ubicando el rectángulo en el plano e indicando la recta solicitada. Desde que las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio, ocurre que

$$A + C = B + D,$$

es decir, $(12, 20) = (0, 7) + B$. De donde $B = (12, 13)$. Por lo tanto, la recta $\mathscr{L}$ tiene por ecuación $y = \dfrac{1}{2}x + 7$. $\square$

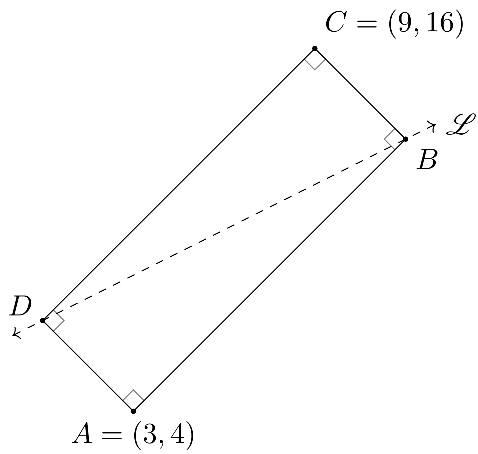


Figura 2.23

Ejercicio 2.14. De la Figura 2.24, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son rectas paralelas, y el área A_2 es cuatro veces el área A_1; determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$.

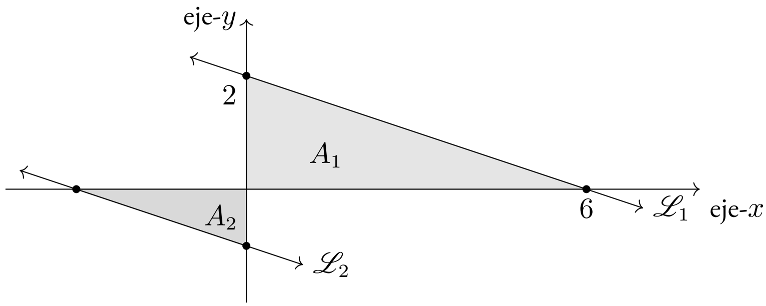


Figura 2.24

Solución. No es difícil notar que la recta $\mathscr{L}_1$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{3}$. Así, por el Teorema 2.1, $\mathscr{L}_2$ tiene pendiente $-\dfrac{1}{3}$. Denotemos por b al y-intercepto de $\mathscr{L}_2$. Luego, su ecuación intercepto-pendiente es

$$y = -\frac{1}{3}x + b,$$

deduciéndose que su x-intercepto es $3b$.

Por otro lado, $A_1 = 6$ y por ende $A_2 = \frac{3}{2}$. Como b es negativo, se tiene que $b = -1$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{L}_2$ es

$$y = -\frac{1}{3}x - 1.$$

$\square$

Ejercicio 2.15. Sean $A = (-2, -5)$ y $C = (4, 3)$ dos puntos, y $\mathscr{L}$ la recta de ecuación $3x + 4y - 19 = 0$. Determine el punto de intersección entre $\mathscr{L}$ y la recta que pasa por A y C. Además, grafique ambas rectas en un mismo plano.

Solución. Denotemos por $\mathscr{L}_{AC}$ a la recta que contiene a los puntos A y C, la que tiene por ecuación

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}.$$

Luego, el punto de intersección entre las rectas es $\mathscr{L}_{AC} \cap \mathscr{L} = \left\{\left(\frac{17}{5}, \frac{33}{15}\right)\right\}$. En la Figura 2.25 se esbozan las rectas y el punto de intersección.

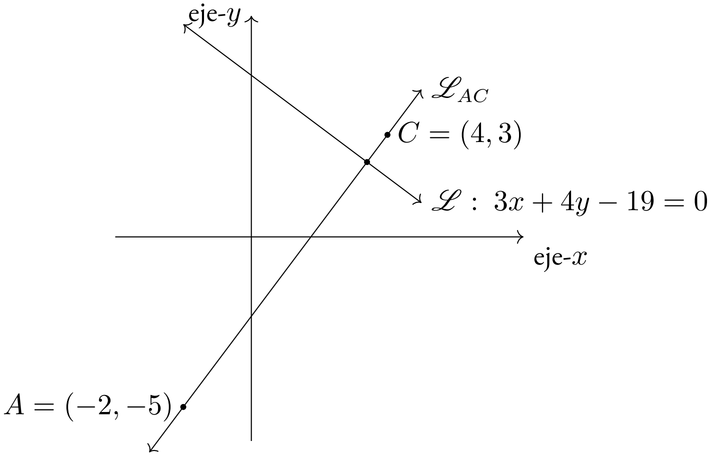


Figura 2.25

□

Ejercicio 2.16. En la Figura 2.26 el cuadrilátero $AOBC$ es un paralelogramo y M es el punto medio del segmento $\overline{OB}$. Determine las coordenadas de P.

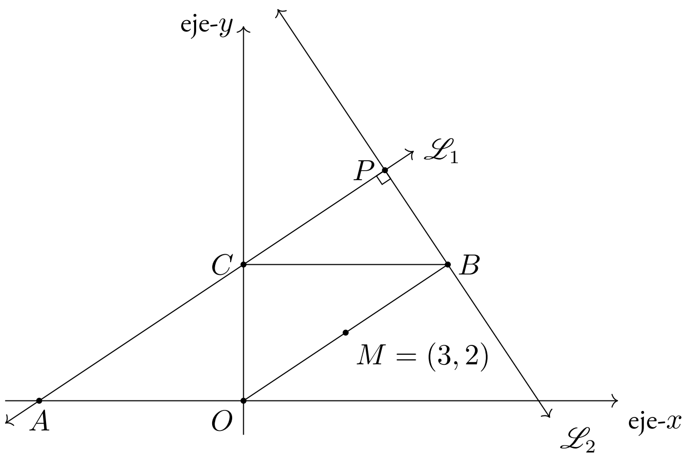


Figura 2.26

Solución. Por ser M punto medio entre el origen $O=(0,0)$ y B, se tiene que $B=(6,4)$. Como $AOBC$ es un paralelogramo, se sigue que $C=(0,4)$. Luego, nuevamente como $AOBC$ es un paralelogramo, se deduce que $\text{rc}(O,B)=\text{rc}(A,C)$; por consiguiente, la recta $\mathscr{L}_1$ tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y ecuación intercepto-pendiente

$$y=\frac{2}{3}x+4.$$

Por otro lado, como $\mathscr{L}_2$ es perpendicular a $\mathscr{L}_1$, se sigue por el Teorema 2.2 que la pendiente de $\mathscr{L}_2$ es $-\frac{3}{2}$ y su ecuación intercepto-pendiente es

$$y=-\frac{3}{2}x+13$$

Por lo tanto, $\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_2=\left\{\left(\frac{54}{13},\frac{88}{13}\right)\right\}$. □

Ejercicio 2.17. En la Figura 2.27, se sabe que los cuadriláteros $ABCD$ y $DEFG$ son cuadrados. Determine las coordenadas de los puntos F y C.

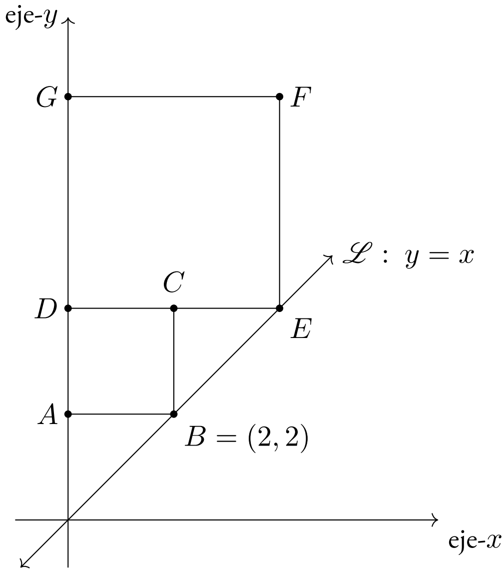


Figura 2.27

Solución. Del gráfico, la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ es 1; por consiguiente, el ángulo de inclinación es $45°$. Luego, los ángulos ABO y CBE son iguales a $45°$, por ángulos alternos internos. Desde que $B = (2, 2)$ se deduce que

$$AB = OA = 2,$$

así como también

$$BC = CE = 2.$$

Esto a su vez implica que $DE = 4$, es decir, el cuadrado $DEFG$ tiene lado de longitud 4, todo esto se aprecia en la Figura 2.28. Por lo tanto, $F = (4, 8)$ y $C = (2, 4)$.

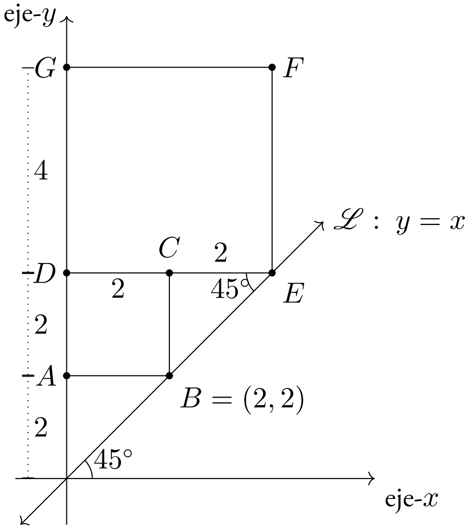


Figura 2.28

$\square$

Ejercicio 2.18. Determine el área del triángulo sombreado mostrado en la Figura 2.29.

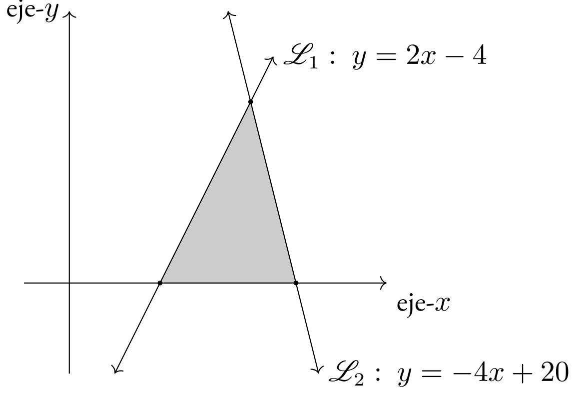


Figura 2.29

Solución. De la figura, se observa que los x-interceptos de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son 2 y 5 respectivamente. Por otro lado, el punto de intersección entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es $(4, 4)$. Luego, ubicamos esta información en la figura y obtenemos:

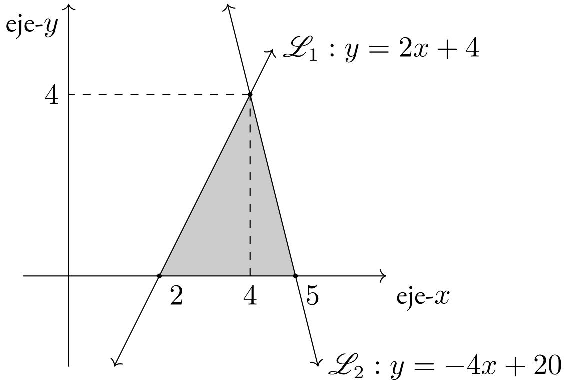


Figura 2.30

Por lo tanto, el área del triángulo sombreado es $6\ u^2$. □

Ejercicio 2.19. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(2, 2)$, sabiendo que el triángulo formado por dicha recta y el primer cuadrante tiene un área igual a $9\ u^2$.

Solución. En la Figura 2.31 se representa la recta $\mathscr{L}$ con pendiente denotada por m.

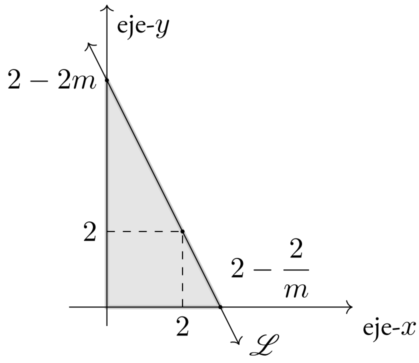


Figura 2.31

Luego, $\mathscr{L}$ tiene por ecuación punto-pendiente

$$y - 2 = m(x - 2).$$

Así, sus puntos de intersección con los ejes coordenados en términos de m son $(0, 2 - 2m)$ y $\left(2 - \dfrac{2}{m}, 0\right)$. Entonces, se debe cumplir

$$\frac{(2-2m)\left(2-\frac{2}{m}\right)}{2} = 9.$$

Lo que equivale a resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$2m^2 + 5m + 2 = 0$$

cuyas soluciones son $m = -2$ o $m = -\dfrac{1}{2}$. Por lo tanto , hay dos rectas cumpliendo las condiciones mencionadas y estas tienen como ecuación punto-pendiente:

$$y - 2 = -2(x - 2) \quad \text{y} \quad y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 2).$$

□

Ejercicio 2.20. Sean $P = (0, 0)$, $Q = (2a, 0)$, $R = (2b, 6) \in \mathbb{R}^2$ tres puntos con $0 < b < a$, $\mathscr{L}_1$ la recta que pasa por Q y el punto medio de P y R, $\mathscr{L}_2$ la recta que pasa por R y el punto medio de P y Q. Demuestre que la razón de cambio entre P y el punto de intersección entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ coincide con la razón de cambio entre P y el punto medio de Q y R.

Solución. De la Figura 2.32 se observa que $M_1 = (b, 3)$, $M_2 = (a, 0)$ y $M_3 = (a + b, 3)$. Además, las pendientes de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son $m_1 = -\dfrac{3}{2a - b}$ y $m_2 = \dfrac{6}{2b - a}$, respectivamente. Así,

$$\operatorname{rc}(P, M_3) = \frac{3}{a + b}$$

Por otro lado, las ecuaciones de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son:

$$y = -\frac{3}{2a - b}(x - 2b) \quad \text{y} \quad y = \frac{6}{2b - a}(x - 2a),$$

respectivamente. Al igual las ecuaciones se deduce que $I = \left(\dfrac{2}{3}(a + b), 2\right)$ y por lo tanto se tiene que $\operatorname{rc}(P, I) = \dfrac{3}{a + b}$. Mostrando que las razones de cambio son iguales. □

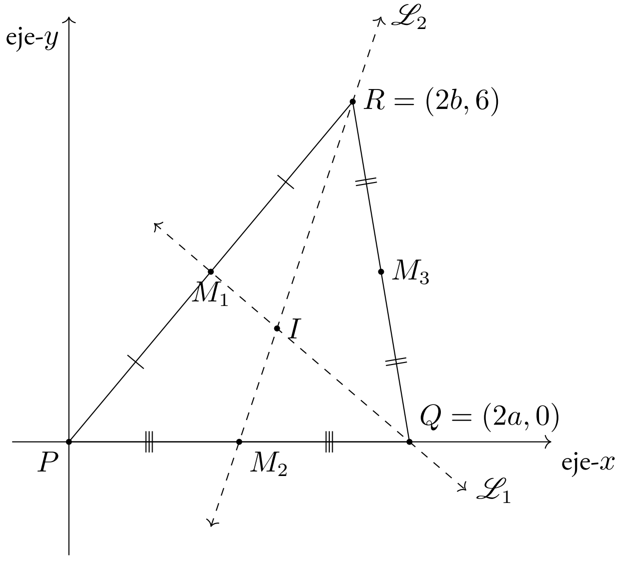


Figura 2.32

Ejercicio 2.21. En la Figura 2.33, se observan las gráficas de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

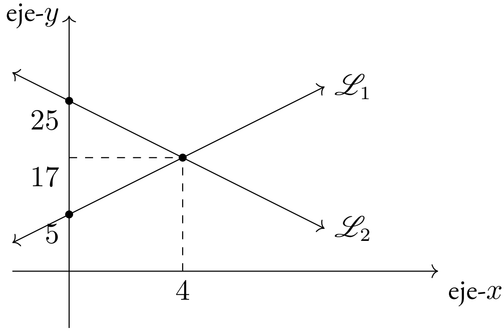


Figura 2.33

Determine las ecuaciones de las rectas.

Solución. Denotemos primero por $A = (0, 5)$ e $I = (4, 17)$ al punto de intersección entre las rectas. Luego, la pendiente de $\mathscr{L}_1$ es $m_1 = \mathrm{rc}(A, I) = 3$ y, por tanto, su ecuación intercepto-pendiente es

$$y = 3x + 5.$$

Por otro lado, la ecuación de la recta $\mathscr{L}_2$ es de la forma $y = m_2 x + 25$. Además, como $I \in \mathscr{L}_2$ se tiene que $17 = 25 + m_2(4)$, de donde $m_2 = -2$. Por ende, la ecuación intercepto-pendiente de $\mathscr{L}_2$:

$$y = -2x + 25.$$

$\square$

Ejercicio 2.22. De la Figura 2.34 determine la ecuación de la recta que pasa por A y C, si

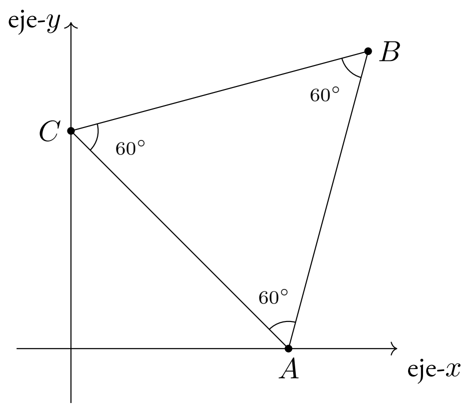


Figura 2.34

se sabe que $B = (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

Solución. Primero grafiquemos la recta en análisis y formamos el cuadraro de vértices O, D, B y E, como se aprecia en la Figura 2.35.

Los triángulos sombreados son congruentes, por el caso LLL, lo que implica que la hipotenusa del triángulo $\triangle ABD$ es $b\sqrt{2}$. Aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos

$$(2 + \sqrt{3})^2 + a^2 = 2b^2.$$

Además, $a + b = 2 + \sqrt{3}$, luego obtenemos la ecuación

$$(2 + \sqrt{3})^2 + a^2 = 2(2 + \sqrt{3} - a)^2$$

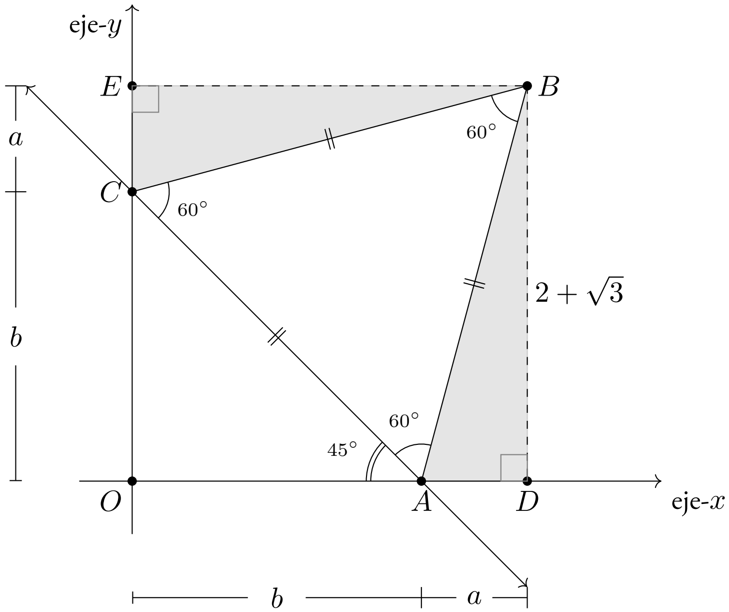


Figura 2.35

que se reduce a la siguiente ecuación cuadrática

$$0 = a^2 - 4a(2+\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})^2 = (a-1)(a-7-4\sqrt{3})$$

que al resolver se tiene que $a = 1$, pues es menor que $2+\sqrt{3}$, y $b = 1+\sqrt{3}$. Por lo tanto, la ecuación pendiente-intercepto de la recta es

$$y = -x + 1 + \sqrt{3}.$$

□

Ejercicio 2.23. De la Figura 2.36, determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos B y D, si se sabe que $E = (1+\sqrt{3}, 0)$ y las áreas de los triángulos equiláteros $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ están en la relación de 1 a 3.

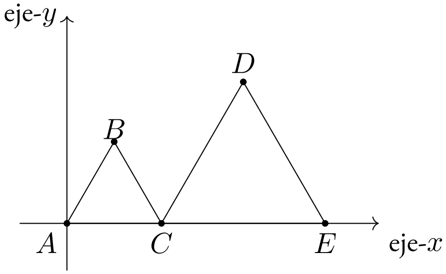


Figura 2.36

Solución. Tracemos la recta, $\mathscr{L}$, en cuestión en la figura y denotemos por a y b las longitudes de los lados de los triángulos ABC y CDE, respectivamente, como se aprecia en la Figura 2.37. Por dato del problema se tiene que

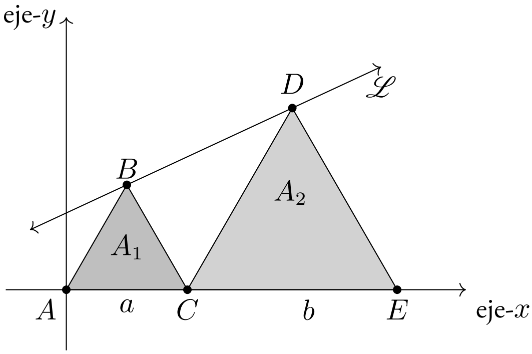


Figura 2.37

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{3} = \frac{a^2}{b^2}$$

de donde $b = \sqrt{3}a$. Por otro lado, es claro que $a + b = 1 + \sqrt{3}$. De estas dos igualdades se deduce que $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$. Ahora, usando el hecho de que los triángulos son equiláteros se tiene que

$$B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } D = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

La pendiente de $\mathscr{L}$ se calcula como:

$$\mathrm{rc}(B,D)=\frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}-3.$$

Por lo tanto, su ecuación punto-pendiente es

$$y-\frac{3}{2}=(2\sqrt{3}-3)(x-1-\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

$\square$

Ejercicio 2.24. De la Figura 2.38, determine B, si el trángulo ABC es equilátero.

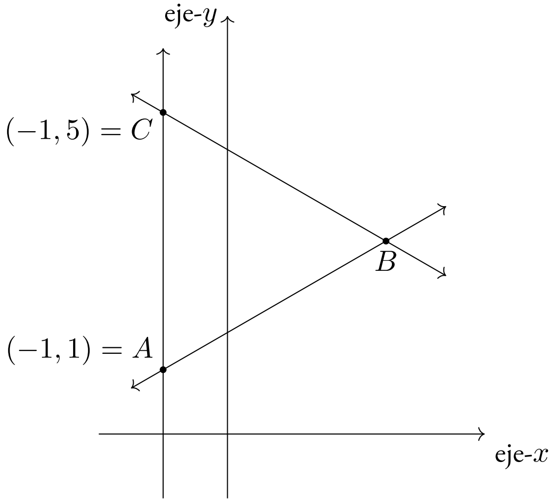


Figura 2.38

Solución. Primero notemos que $d(A,C)=4$. Luego, el hecho de que el triángulo $\triangle ABC$ sea equilátero implica que el ángulo de inclinación de la recta que pasa por A y B es $30°$ y que $d(A,B)=4$, como se aprecia en la Figura 2.39. Así, la pendiente de la recta que pasa por A y B es $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y por tanto su ecuación punto-pendiente es

$$y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1).$$

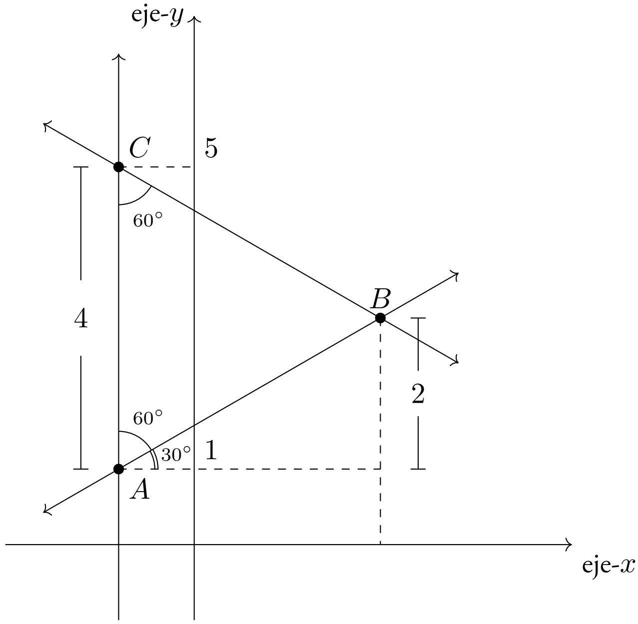


Figura 2.39

De manera similar, se puede mostrar que el ángulo de inclinación de la recta que pasa por B y C es $150°$, es decir, su pendiente es $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Por lo tanto, su ecuación punto pendiente es

$$y - 5 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + 1).$$

Ahora, las coordenadas del punto B se calculan como el punto de intersección entre las rectas mencionadas previamente. En este caso, tenemos que

$$B = \left(2\sqrt{3} - 1, 3\right).$$

$\square$

Ejercicio 2.25. Sean A, B, C y D los vértices de un paralelogramo tales que A y D se encuentran sobre el eje de abscisas y B sobre el eje de ordenadas. Si $C = (2, 1)$ y el origen de coordenadas es punto medio del segmento de extremos A y D, determine la ecuación de la recta que pasa por A y B.

Solución. Como se aprecia en la Figura 2.40, es claro que $B = (0, 1)$. Por otro lado, como $d(A, D) = d(B, C) = 2$, se sigue que $d(A, O) = d(D, O) = 1$. Deducimos que el

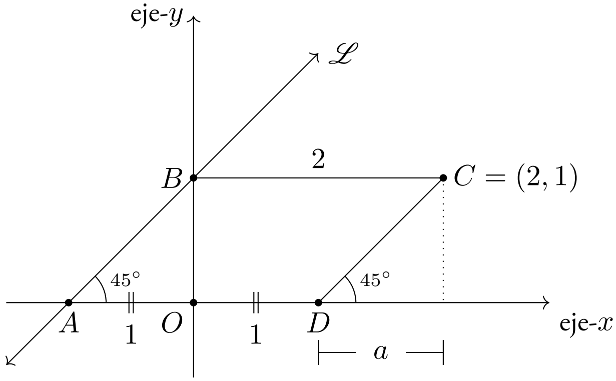


Figura 2.40

ángulo de inclinación de $\mathscr{L}$ es $45°$ y su y-intercepto es 1, se sigue que su ecuación intercepto-pendiente es:

$$y = x + 1.$$

$\square$

Ejercicios propuestos

1. En cada caso, determine los puntos de intersección con los ejes coordenados de la recta $\mathscr{L}$ de ecuación:

    a) $y + x + 1 = 0$

    b) $y - x - 1 = 0$

    c) $y = 2x - 6$

    d) $y - 20 = 5(x - 8)$

2. En cada caso, determine el punto de intersección entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$

    a) $\mathscr{L}_1 :\ y = 2x + 5$ y $\mathscr{L}_2 :\ x + y - 5 = 0$

    b) $\mathscr{L}_1 :\ y = x + 5$ y $\mathscr{L}_2 :\ x + y - 1 = 0$

    c) $\mathscr{L}_1 :\ y = 3x - 6$ y $\mathscr{L}_2 :\ -x + 2y - 4 = 0$

    d) $\mathscr{L}_1 :\ y = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$ y $\mathscr{L}_2 :\ y - 5 = -\sqrt{3}(x - 1)$

3. De la Figura 2.41, determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ si se sabe que los triángulos sombreados tienen áreas iguales.

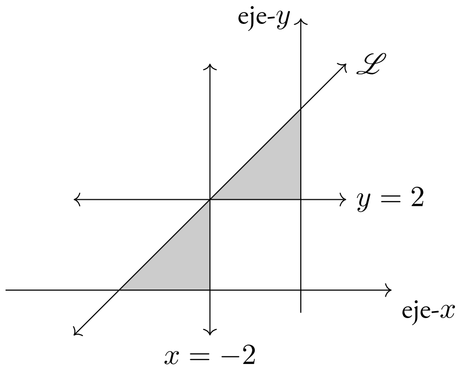


Figura 2.41

4. De la Figura 2.42, determine el área de la región sombreada.

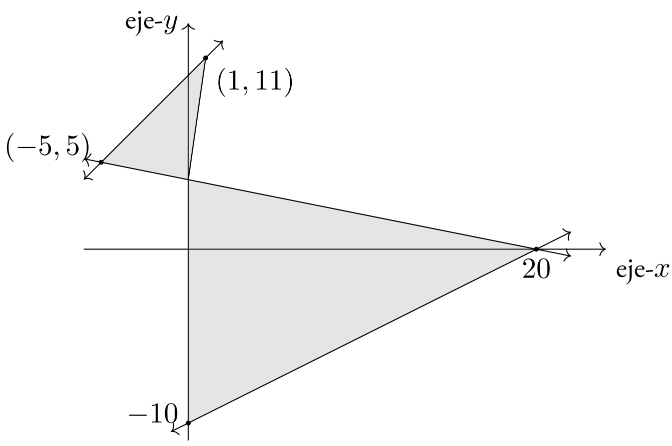


Figura 2.42

5. Verifique si el punto $(1, -2)$ pertenece a la recta que pasa por los puntos $(-5, 1)$ y $(7, -5)$.

6. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 3)$ y es paralela a la recta de ecuación $4x + 4y + 19 = 0$.

7. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y es perpendicular a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $2x - 3y - 6 = 0$.

8. En la Figura 2.43, $\mathscr{L}_1$ es paralela a $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_1$ es perpendicular a $\mathscr{L}_3$. Determine el punto medio entre A y B.

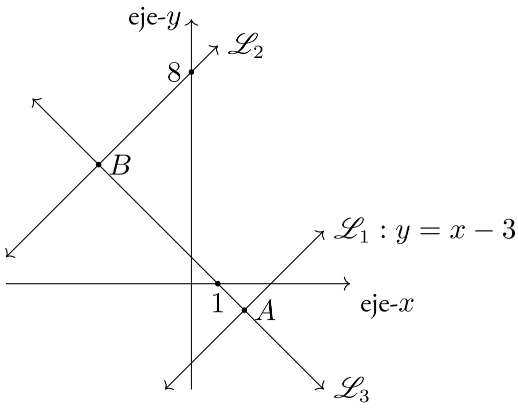


Figura 2.43

9. Determine el área de la región cuadrangular limitada por las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$, $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_4$ de ecuaciones:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},\ y = \frac{2}{3}(x - 5),\ 4x + 3y - 2 = 0 \text{ y } 3x + 4y - 15 = 0,$$

respectivamente.

10. Sea $\mathscr{L}_1$ la recta de ecuación $3x - 4y + 24 = 0$ y $\mathscr{L}_2$ la recta que pasa por $(1, 13)$ y es perpendicular a $\mathscr{L}_1$. Determine el área de la región formada por $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y el eje de ordenadas.

11. Determine la distancia del origen a la recta mediatriz del segmento de extremos $(4, -1)$ y $(6, 5)$.

12. Sean a y b dos números reales tales que los puntos (a,b), $(b,a+2)$ y $(a+4,b+1)$ son colineales. Calcule el valor de $\dfrac{5b-5a}{2}$.

13. Determine la ecuación general de la recta mediatriz del segmento determinado por la intersección de la recta $\mathscr{L}$, de ecuación $y = 2x+4$, con los ejes coordenados.

14. Determine el área de la región sombreada en la Figura 2.44.

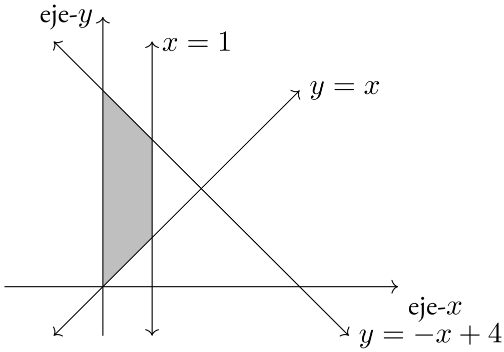


Figura 2.44

15. Determine el área de la región sombreada en la Figura 2.45, si las ecuaciones de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son $y = 0.5x + n$ e $y = 33 - rx$, respectivamente.

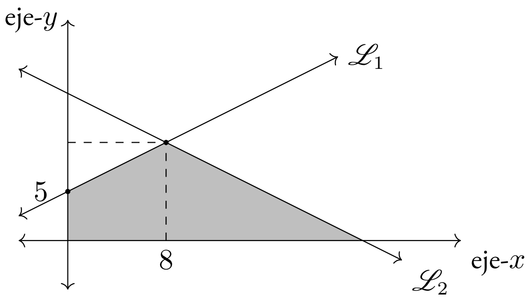


Figura 2.45

16. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas tales que $\mathscr{L}_1$ es paralela a la recta de ecuación $x+y+1=0$ y $\mathscr{L}_2$ es perpendicular a la recta de ecuación $3x-4y+5=0$. Determine el ángulo entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

17. En la Figura 2.46, $A=(-8,0)$, $d(A,C)=20$ y los $\triangle ABD$ y $\triangle BOC$ tienen áreas iguales. Determine la ecuación de $\mathscr{L}$.

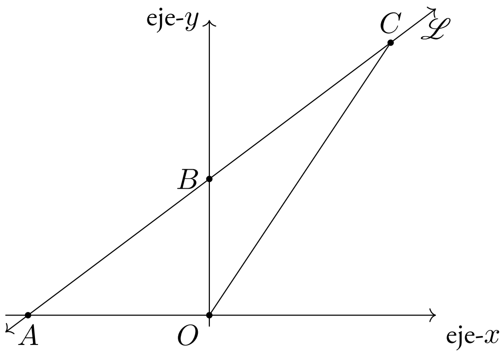


Figura 2.46

18. En la Figura 2.47, determine el ángulo entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

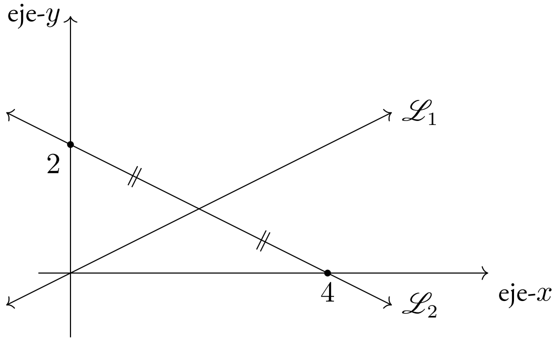


Figura 2.47

19. Si el área del triángulo sombreado, en la Figura 2.48, es $\dfrac{15}{2}u^2$,determine la suma de las pendientes de las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

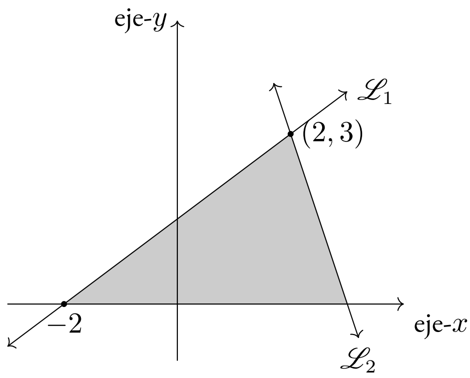


Figura 2.48

20. En la Figura 2.49 determine el y-intercepto de la recta $\mathscr{L}$ con pendiente -1. Además, determine el valor de a.

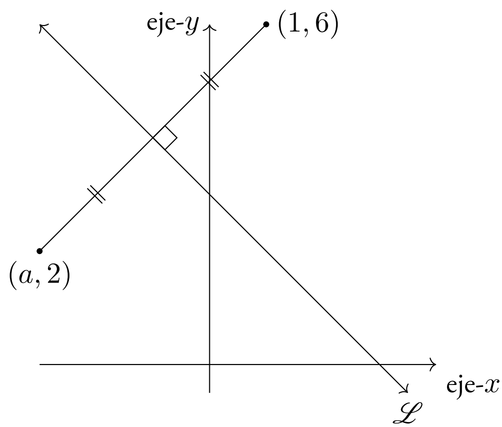


Figura 2.49

21. En la Figura 2.50 B es punto medio del segmento $\overline{AC}$. Si $d(B,O) = 5$ y la distancia de B al eje-x es 4, determine la ecuación punto-pendiente de la recta $\mathscr{L}$.

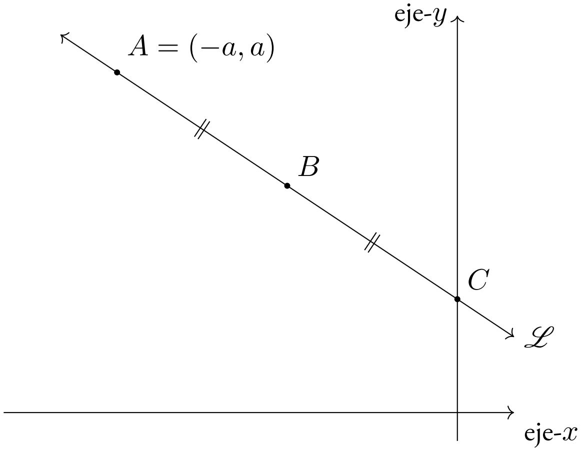


Figura 2.50

22. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas de ecuaciones:

$$y = \operatorname{sen}(\theta)x + 1 \ \text{ e } \ y = -\csc(\theta)x + 6,$$

respectivamente. Determine $\theta \in]0, \pi/2[$ tal que el área de la región formada por las rectas y el eje de ordenadas es $5\ u^2$.

23. Pruebe que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que los puntos de coordenadas

$$(2,3),\ (2+4a, 3-5a) \ \text{ y } \ (2+4b, 3-5b)$$

son colineales, es decir, se encuentran en una misma recta. Además, determine la ecuación de dicha recta.

24. Dado el triángulo de vértices $A = (-2,1)$, $B = (4,7)$ y $C = (6,-3)$, determine los vértices del triángulo que se forma por las rectas que pasan por A, B y C y son paralelas a los lados opuestos.

25. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas de ecuaciones

$$k^2x + (k+1)y + 2 = 0 \ \text{ y } \ 3x - 2y - 11 = 0,$$

respectivamente. Si las rectas son perpendiculares, determine el valor de k.

26. Determine los valores de a y b, tal que la recta de ecuación

$$ax - by + 4 = 0$$

pase por los puntos $(-3, 1)$ y $(1, 6)$.

27. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 \neq 0$. Muestre que la ecuación

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 - c^2 = 0$$

representa un par de rectas.

28. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, y $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas de ecuaciones

$$ax + by + 1 = 0 \ \text{ y } \ cx + dy + 2 = 0,$$

respectivamente. Muestre que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas si y solo si $ad - bc = 0$.

29. Determine la ecuación de la recta que pasa por el ortocentro y circuncentro del triángulo de vértices $(1, 1)$, $(9, 1)$ y $(3, 5)$.

30. Sea $\theta \in]0, \pi/4[$. Determine la ecuación de la recta mediatriz, en términos de θ, del segmento de extremos $A = (1, 0)$ y $B = (\cos(2\theta), \operatorname{sen}(2\theta))$.

31. Sea $\mathscr{L}$ una recta de ecuación general $ax + by + c = 0$ y P un punto de coordenadas (x_0, y_0). Pruebe que

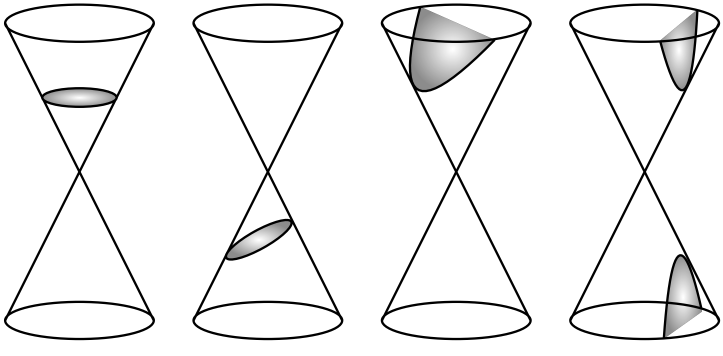
$$d(P, \mathscr{L}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

32. Demuestre el Teorema 2.1.

33. Demuestre el Teorema 2.2.

3
Cónicas

Se denomina *cónicas* a las curvas que se obtienen de las diferentes intersecciones entre un cono y un plano que no pasa por su vértice, como se aprecia en la Figura 3.1.



(a) Circunferencia (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbola

Figura 3.1

Las cónicas se clasifican en cuatro tipos: *circunferencia*, *elipse*, *parábola* e *hipérbola*. En este capítulo daremos sus definiciones como lugar geométrico, en virtud a una propiedad que cumplen sus puntos.

Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *centro* y dicha distancia común es denominada *radio*, ver Figura 3.2.

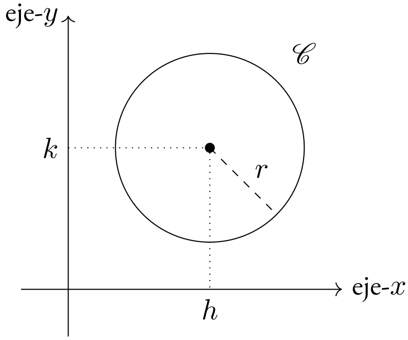


Figura 3.2

Es decir, la circunferencia $\mathscr{C}$ de centro C y radio $r > 0$ es el conjunto

$$\mathscr{C} = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \ d(Q, C) = r\}.$$

Equivalentemente si $C = (h, k)$, entonces

$$\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}.$$

En este caso, es usual decir que $\mathscr{C}$ tiene por ecuación estándar a la expresión:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.1. La ecuación

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$$

representa a una circunferencia. En efecto, para ello primero se debe completar cuadrados de donde se obtiene:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2.$$

Por lo tanto, el centro de esta circunferencia tiene coordenadas $(-1, 2)$ y su radio es 3.

Elipse

Una elipse es el conjunto de puntos del plano tal que la suma de distancias de dichos puntos a dos puntos fijos, llamado *focos*, es una constante positiva como se aprecia en la Figura 3.3.

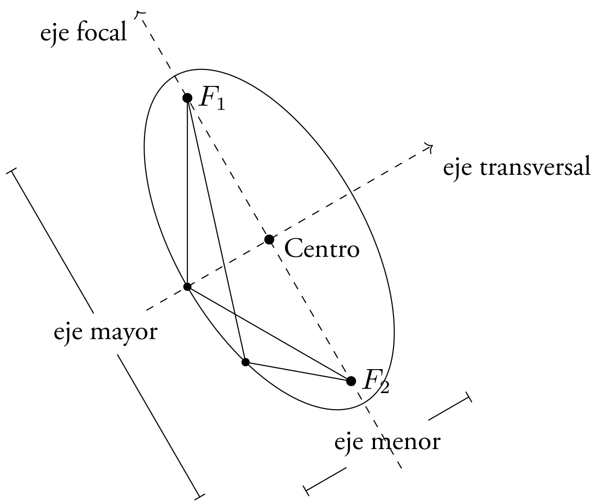


Figura 3.3

Es decir, la elipse $\mathscr{E}$ de focos F_1 y F_2 con parámetro p (donde $p > 0$) es el conjunto

$$\mathscr{E} = \{Q \in \mathbb{R}^2 :\ d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2p\}.$$

La recta que pasa por los focos se denomina *eje focal* , al segmento sobre el eje focal y limitado por la elipse se denomina *eje mayor*, el punto medio de los focos se denomina *centro* de la elipse. Finalmente, la recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal se llama *eje transversal* y al segmento determinado por el eje transversal y la elipse se le denomina *eje menor*.

Ejemplo 3.2. La elipse $\mathscr{E}$ de focos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ y con parámetro 2 es el conjunto de puntos $P = (x, y)$ que deben cumplir la siguiente ecuación

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4,$$

la cual se procede a simplificar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)^2+y^2} &= 4-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\\
(x+1)^2+y^2 &= 16+(x-1)^2+y^2-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}\\
4x &= 16-8\sqrt{(x-1)^2+y^2}\\
x &= 4-2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\\
2\sqrt{(x-1)^2+y^2} &= 4-x\\
4(x-1)^2+4y^2 &= x^2+16-8x\\
4x^2-8x+4+4y^2 &= x^2+16-8x\\
3x^4+4y^2 &= 12
\end{aligned}$$

que finalmente se simplifica a la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.$$

La Figura 3.4 representa la elipse $\mathscr{E}$

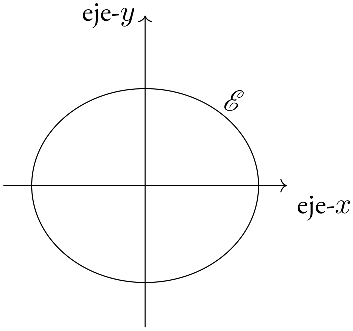


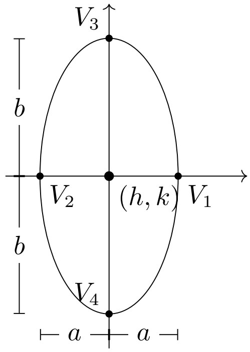
Figura 3.4

Cuando los ejes de la elipse son paralelos a los ejes coordenados esta tiene una ecuación simple. Este es el enunciado del siguiente resultado.

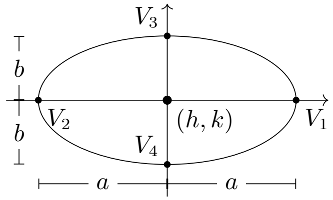
Teorema 3.1. *Sea $\mathscr{E}$ la elipse con focos sobre una recta vertical (o recta horizontal). Ocurre que*

$$\mathscr{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Con respecto al teorema previo a y b se denominan *radios* de la elipse. El centro de la elipse tiene por coordenadas $C = (h, k)$. Además, los puntos de intersección de sus ejes con la elipse son denominados *vértices* de ella. La Figura 3.5 representa geométricamente esta información.



(a) Eje mayor vertical



(b) Eje mayor horizontal

Figura 3.5

Se nota que cualquier elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados tiene a sus vértices ubicados en el eje paralelo al eje de abscisas, los que tienen por coordenadas

$$V_1 = (h + a, k) \text{ y } V_2 = (h - a, k).$$

De igual forma, sus vértices ubicados en el eje paralelo al eje de ordenadas tienen coordenadas

$$V_3 = (h, k + b) \text{ y } V_4 = (h, k - b).$$

Es importante mencionar que, a diferencia del presente texto, en otros libros las letras a y b son reservadas para los ejes mayor y menor, respectivamente.

Ejemplo 3.3. La elipse dada en el Ejemplo 3.2 tiene por centro al punto de coordenadas $(0, 0)$. Luego, los radios son $a = 2$ y $b = \sqrt{3}$. Así, las coordenadas de sus vértices son

$$V_1 = (2, 0),\ V_2 = (2, 0),\ V_3 = (0, \sqrt{3}) \text{ y } V_4 = (0, -\sqrt{3}).$$

De manera similar al caso de una circunferencia, se dirá que una recta es *tangente* a una elipse cuando la intersección entre ellas sea un conjunto unitario.

Ejemplo 3.4. No es complicado verificar que la recta de ecuación $y = 2$ es tangente a la elipse de ecuación $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Parábola

Una parábola es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado *foco*, y de una recta fija $\mathscr{L}$, llamada *directriz*. Esta definición es ilustrada en la Figura 3.6.

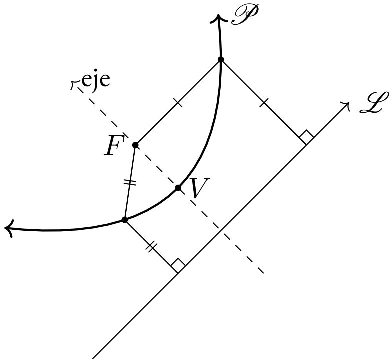


Figura 3.6

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se denomina *eje* de la parábola o *eje focal*. El punto de intersección entre la parábola y su eje (el punto V en la Figura 3.6) se denomina *vértice*.

En otras palabras, si F es el foco y $\mathscr{L}$ la recta directriz; entonces, la parábola $\mathscr{P}$ es el conjunto

$$\mathscr{P} = \{Q \in \mathbb{R}^2 :\ d(Q, F) = d(Q, \mathscr{L})\} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.5. En la Figura 3.7 se ilustra una parábola $\mathscr{P}$. La parábola $\mathscr{P}$ tiene como foco $F = (0, 1)$ y directriz $\mathscr{L}$. Desde que el eje de la parábola $\mathscr{P}$ es perpendicular a la recta directriz $\mathscr{L}$ y pasa por el foco, se deduce que el eje tiene por ecuación

$$y = x + 1.$$

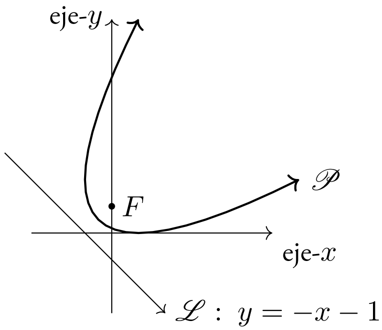


Figura 3.7

Además, su vértice tiene coordenadas $(-1/2, 1/2)$, por ser punto medio entre el foco y la recta directriz.

En adelante restringiremos nuestra atención a las parábolas con directriz paralela a uno de los ejes coordenados. En ese sentido, el siguiente resultado establece la forma canónica de la ecuación de una parábola cuando esta tiene directriz paralela al eje de abscisas, asimismo se obtendrá una ecuación canónica si su directriz es paralela al eje de las ordenadas.

Teorema 3.2. *Sea $\mathscr{P}$ una parábola con foco $F = (f_1, f_2)$ y directriz de ecuación $y = p$. Entonces*

$$\mathscr{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\; y = a(x-h)^2 + k\}$$

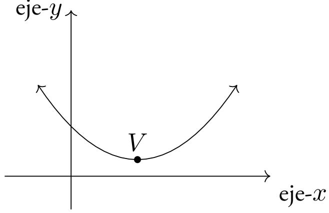
donde $h = f_1$, $k = \dfrac{f_2 + p}{2}$ *y* $a = \dfrac{1}{2(f_2 - p)}$.

Gracias al Teorema 3.2 rescatamos que toda parábola con eje vertical tiene como ecuación canónica:

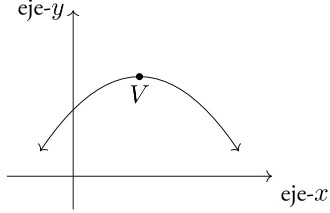
$$y = a(x-h)^2 + k.$$

Donde el vértice tiene coordenadas (h, k). Además, en este caso se dice que ella se abre hacia arriba si a es positivo. De igual forma, se dirá que se abre hacia abajo cuando el valor a es un número negativo, ver Figura 3.8.

Ejemplo 3.6. La Figura 3.9 muestra la parábola de ecuación $y = \dfrac{1}{4}(x-2)^2 - 1$ así como sus elementos.



(a) $a > 0$ (se abre hacia arriba)



(b) $a < 0$ (se abre hacia abajo)

Figura 3.8

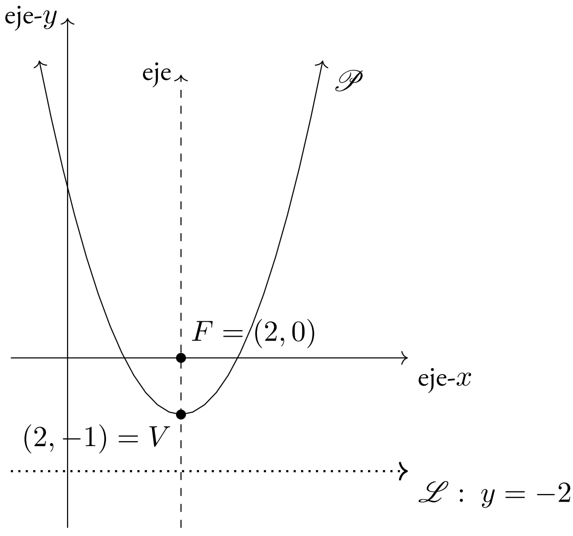


Figura 3.9

De manera similar al Teorema 3.2, el siguiente resultado establece que toda parábola bajo una directriz paralela al eje de ordenadas tiene una ecuación canónica.

Teorema 3.3. *Sea $\mathscr{P}$ una parábola con directriz paralela al eje-y, entonces*

$$\mathscr{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = a(y - k)^2 + h\}.$$

En este caso, el vértice de $\mathscr{P}$ también tiene coordenadas (h, k). Se dirá que $\mathscr{P}$ se abre hacia la derecha si $a > 0$ y que se abre hacia la izquierda cuando $a < 0$, ver Figura 3.10.

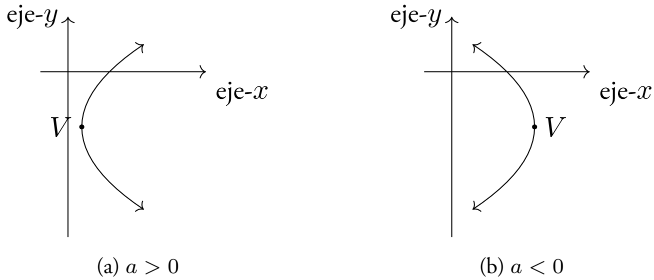


Figura 3.10

Ejemplo 3.7. La Figura 3.11 muestra la parábola de ecuación $x = -\frac{1}{2}(y+1)^2 + 2$, así como sus elementos.

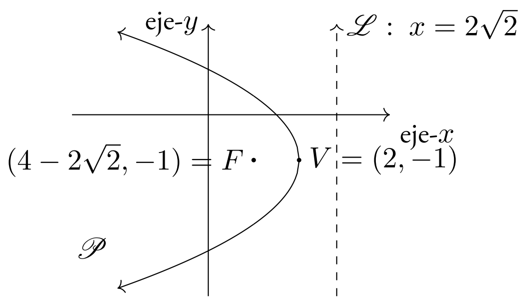


Figura 3.11

Dada una parábola $\mathscr{P}$ y una recta $\mathscr{L}$, se dirá que $\mathscr{L}$ es *tangente* a $\mathscr{P}$, si $\mathscr{L}$ no es eje focal de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{P} \cap \mathscr{L}$ es un conjunto unitario.

Ejemplo 3.8. No es difícil verificar que el eje de abscisas, cuya ecuación es $y = 0$, es tangente a la parábola de ecuación $y = x^2$.

Hipérbola

Una hipérbola $\mathscr{H}$ es el conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias de tales puntos a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados *focos*, es constante como se aprecia en la Figura 3.12. Es decir, $\mathscr{H}$ es el conjunto

$$\mathscr{H} = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \ |d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2p\},$$

donde p es una constante positiva.

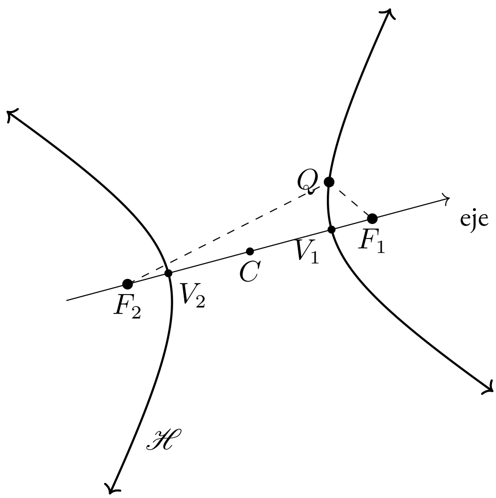


Figura 3.12

La recta que pasa por los focos se denomina *eje focal* o simplemente *eje*. El punto medio de los focos, el punto C en la Figura 3.12, se llama el *centro* de la hipérbola. Los puntos de intersección del eje con las hipérbolas, los puntos V_1 y V_2 de la Figura 3.12, reciben el nombre de *vértices* de la hipérbola.

Ejemplo 3.9. Consideremos la hipérbola $\mathscr{H}$ con focos $F_1 = (-9, -2)$ y $F_2 = (1, -2)$ tal que la diferencia de distancia de sus puntos hacia los focos es igual a 4, es decir,

$$\mathscr{H} = \{Q \in \mathbb{R}^2 : \ |d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 4\}.$$

Si $Q = (x, y)$ es un punto sobre $\mathscr{H}$, entonces de acuerdo a la definición de la hipérbola se cumple que

$$\left|\sqrt{(x+9)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\right|=4,$$

lo que implica

$$\sqrt{(x+9)^2+(y+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\pm 4$$

y que a su vez esto último implica

$$\sqrt{(x+9)^2+(y+2)^2}=\pm 4+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}.$$

Si elevamos al cuadrado la expresión anterior se obtiene

$$(x+9)^2+(y+2)^2=16+(x-1)^2+(y+2)^2\pm 8\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2},$$

la cual se reduce a

$$16+5x=\pm 2\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}.$$

Otra vez, se eleva al cuadrado la igualdad previa y obtenemos

$$(16+5x)^2=4((x-1)^2+(y+2)^2),$$

lo que a su vez se reduce a

$$21(x+4)^2-4(y+2)^2=84,$$

y esto último puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\frac{(x+4)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{21}=1.$$

De manera similar a las secciones precedentes, nos rentringiremos al estudio de las hipérbolas con ejes paralelos a los ejes coordenados.

Teorema 3.4. *Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola con eje focal horizontal. Se cumple que*

$$\mathscr{H}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\right\}.$$

donde a y b son dos números positivos.

Con respecto al resultado previo se tiene que el centro de la hipérbola $\mathscr{H}$ tiene coordenadas (h, k). En este caso los vértices tienen coordenadas

$$V_1 = (h - a, k) \text{ y } V_2 = (h + a, k).$$

Además, en este caso, las rectas de ecuaciones

$$\mathscr{L}_1 : \ y - k = \frac{b}{a}(x - h) \text{ y } \mathscr{L}_2 : \ y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

se denominan *asíntotas* de $\mathscr{H}$, ver Figura 3.13.

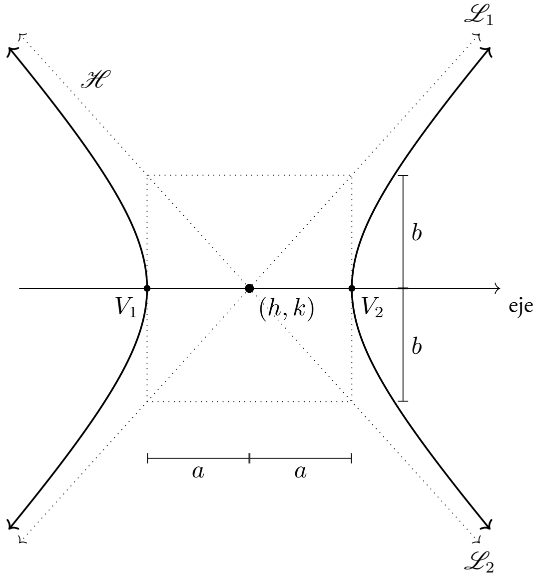


Figura 3.13

Análogamente al Teorema 3.4 se presenta el siguiente resultado.

Teorema 3.5. *Sea $\mathscr{H}$ una hipérbola con eje focal vertical. Se cumple que*

$$\mathscr{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 \right\}.$$

donde a y b son positivos.

Con respecto al resultado previo, el centro de la hipérbola $\mathscr{H}$ tiene coordenadas (h,k). En este caso, los vértices tienen coordenadas

$$V_1 = (h, k-b) \text{ y } V_2 = (h, k+b).$$

Además, en este caso, las rectas de ecuaciones

$$\mathscr{L}_1 : \; y - k = \frac{b}{a}(x-h) \text{ y } \mathscr{L}_2 : \; y - k = -\frac{b}{a}(x-h)$$

son sus asíntotas, ver Figura 3.14.

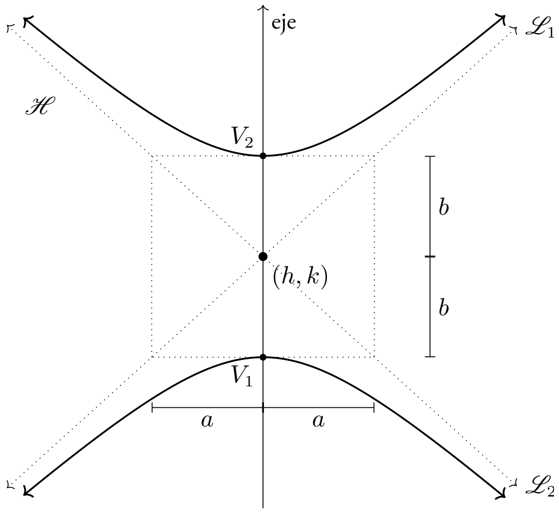


Figura 3.14

Es importante mencionar que:

1. Las demostraciones de los teoremas 3.4 y 3.5 siguen los mismos pasos del Ejemplo 3.9, por tal razón estas son dejadas como ejercicio para el lector interesado.

2. Las asíntotas de una hipérbola se intersecan en el centro de la hipérbola.

3. El centro de la hipérbola es el punto medio del segmento determinado por los vértices de la hipérbola.

Ejemplo 3.10. La hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

tiene por centro al punto $(1, 1)$. Además, los parámetros a y b son iguales a 2. Así, las asíntotas tienen por ecuaciones

$$y - 1 = x - 1 \text{ e } y - 1 = -(x - 1).$$

Dada una hipérbola $\mathscr{H}$ y una recta $\mathscr{L}$, se dice que $\mathscr{L}$ es *tangente* a $\mathscr{H}$ si $\mathscr{L}$ no es paralela a las asíntotas de $\mathscr{H}$ y el conjunto $\mathscr{H} \cap \mathscr{L}$ es unitario, ver Figura 3.15.

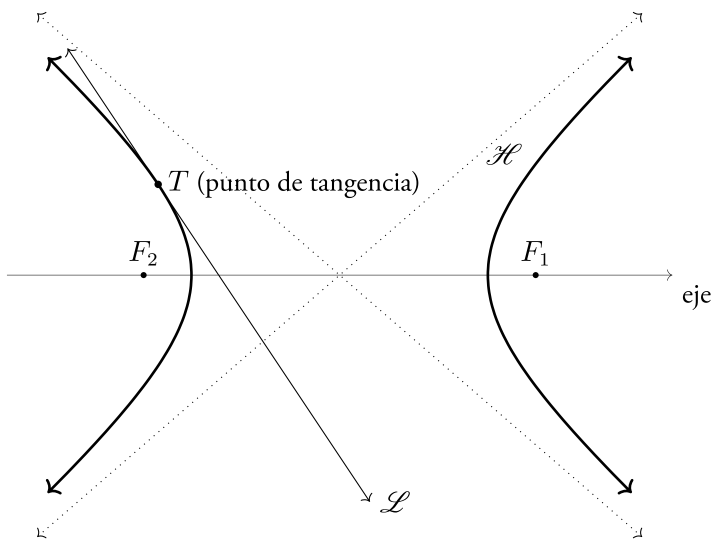


Figura 3.15

Ejemplo 3.11. La hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ tiene a las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 1$ como rectas tangentes.

Otro resultado importante es el que se enuncia a continuación

Teorema 3.6. *En cualquier hipérbola con eje paralelo a unos de los ejes coordenados ocurre que*

$$d(C, F)^2 = a^2 + b^2$$

donde F es uno de los focos y C es el centro.

La Figura 3.16 ilustra geométricamente el teorema anterior.

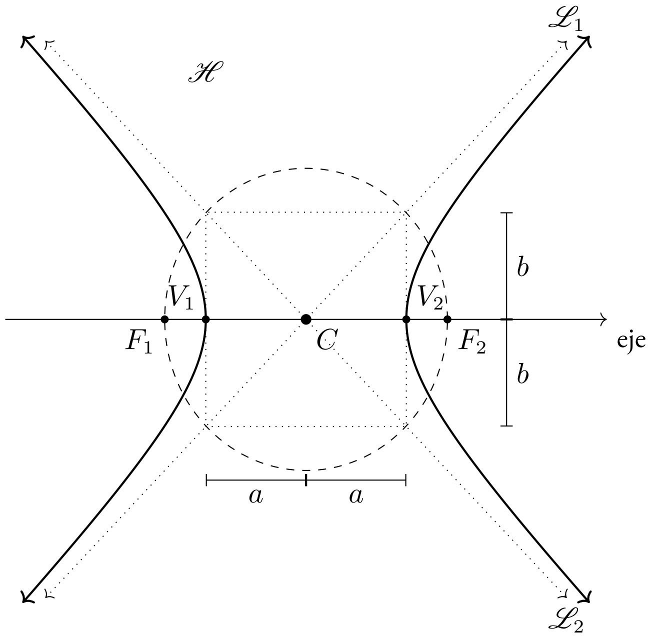


Figura 3.16

Es usual denotar por c a la distancia del centro a uno de los focos, es decir, $c = d(C, F)$. Así, se obtiene la siguiente relación pitagórica

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ejemplo 3.12. Sea $\mathscr{H}$ la hipérbola con centro en $(1, 2)$, eje focal vertical cuyos vértices están distanciados 8 unidades y cuya distancia del centro a uno de los focos es 5 unidades.

A partir de la distancia entre vértices de la hipérbola con eje focal vertical, se obtiene

$$2b = 8,$$

de donde se deduce que $b = 4$. Como $c = d(C, F) = 5$, por el Teorema 3.6, se tiene que $a = 3$. Así, la ecuación canónica de $\mathscr{H}$ es

$$\frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1.$$

Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1. En la Figura 3.17, se observan dos circunferencias tangentes $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, con punto de contacto en T, centradas en el origen de coordenadas y en $C = (20, 15)$, respectivamente. Si A es punto de tangencia, determine las coordenadas de T así como también el

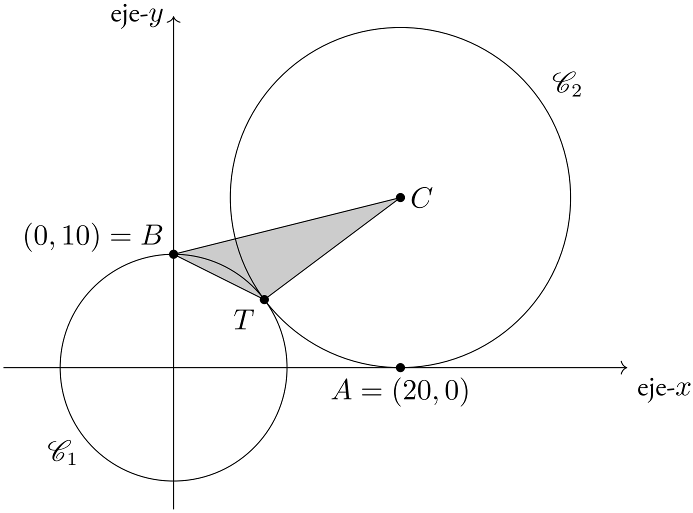


Figura 3.17

área de la región sombreada.

Solución. Se observa de la figura que los radios de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son 10 y 15, respectivamente. Ahora, desde que las circunferencias son tangentes se debe cumplir que el segmento que une sus centros pasa por el punto de tangencia. Así, podemos considerar estos tres puntos y formar la siguiente proporción en los triángulos semejantes mostrados a continuación en la Figura 3.18, de donde $a = 4$. Luego, $T = (8, 6)$. Además, $B = (0, 10)$, el área de la región sombreada se puede calcular usando la Figura 3.19 De donde el área pedida es la diferencia entre el área del rectángulo menos las áreas de los tres triángulos rectángulos, es decir

$$180 - 54 - 16 - 50 = 60.$$

Así, el área pedida es de $60\ u^2$. □

Ejercicio 3.2. Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en $(0, 10)$ y tangente a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $y = 3x$. Determine la ecuación de $\mathscr{C}$.

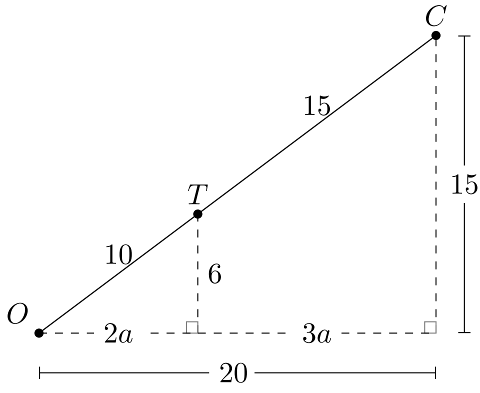


Figura 3.18

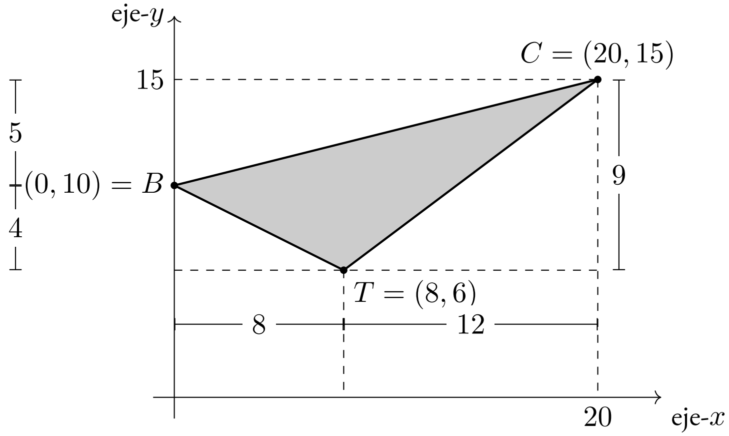


Figura 3.19

Solución. Denotemos por T al punto de tangencia entre $\mathscr{C}$ y la recta $\mathscr{L}$. Luego, la recta que pasa por el centro de $\mathscr{C}$ y el punto T es perpendicular a $\mathscr{L}$. Además, su ecuación es

$$y = -\frac{1}{3}x + 10.$$

Así, el punto de tangencia T resulta de la intersección entre ambas rectas y este tiene coordenadas $(3,9)$. Esto se aprecia en la Figura 3.20. De donde, se deduce que $r = d(C,T) =$

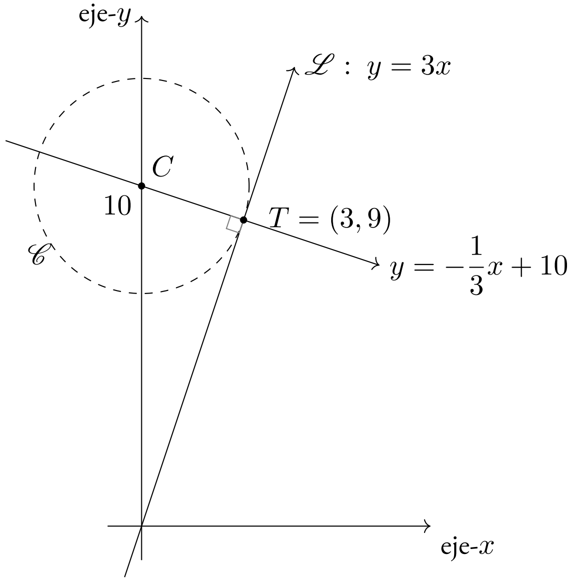


Figura 3.20

$\sqrt{10}$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{C}$ es

$$x^2 + (y - 10)^2 = 10.$$

$\square$

Ejercicio 3.3. Determine la ecuación de la circunferencia de centro $(3,5)$ tal que la recta de ecuación $y - 9 = 0$ es tangente a la misma.

Solución. Consideremos la Figura 3.21 con los datos establecidos.

Se observa que el radio es 4. Por lo tanto, su ecuación es : $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16$ $\square$

Ejercicio 3.4. Sean a, b y c tres números naturales tales que $c^2 = a^2 + b^2$. Esboce la circunferencia $\mathscr{C}$ de ecuación $x^2 + y^2 - 2ax + 2by = 0$. Indique también sus puntos de intersección con los ejes coordenados.

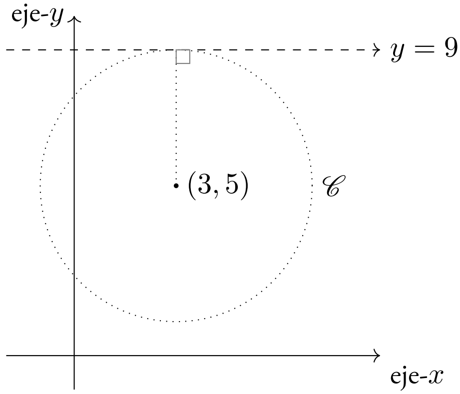


Figura 3.21

Solución. Primero debemos completar cuadrados para obtener la ecuación estándar $\mathscr{C}$, es decir

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2ax + 2by &= 0 \\ (x-a)^2 + (y+b)^2 &= a^2 + b^2 \\ (x-a)^2 + (y+b)^2 &= c^2, \end{aligned}$$

de donde $\mathscr{C}$ tiene como centro a $(a, -b)$ y radio c. A continuación esbozamos la circunferencia y obtenemos la Figura 3.22. Luego, los puntos de intersección son : $(0, 0)$, $(0, -2b)$ y $(2a, 0)$.

$\square$

Ejercicio 3.5. Si la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 2y + k = 0$ es tangente al eje de abscisas, determine el valor de k.

Solución. Primero completamos cuadrados y obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8x - 2y + k &= 0 \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 &= 17 - k. \end{aligned}$$

Así, el centro de la circunferencia es $(4, 1)$. La Figura 3.23 nos ayuda a visualizar a la circunferencia.

Así, $17 - k = 1$. Por lo tanto, $k = 16$.

$\square$

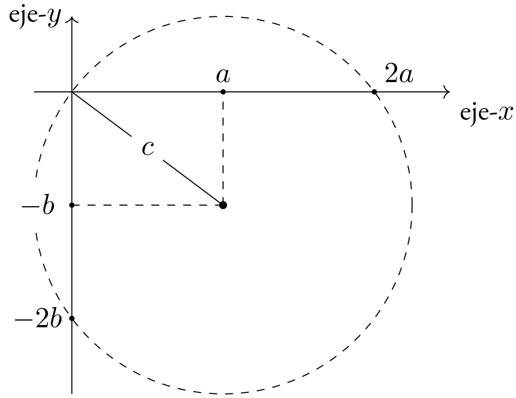


Figura 3.22

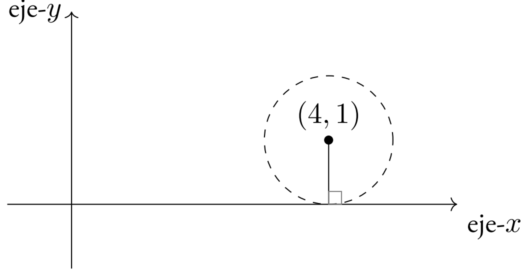


Figura 3.23

Ejercicio 3.6. La circunferencia de ecuación $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ se intercepta con la recta, que pasa por el punto $P = (9, 12)$ y el centro de la circunferencia, en dos puntos. Determine dichos puntos.

Solución. Primero completamos cuadrados y obtenemos que

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2.$$

Así, el centro tiene coordenadas $(3, 4)$ y por tanto la recta en cuestión tiene por ecuación $y = \frac{4}{3}x$. Se deduce que $(0, 0)$ es uno de los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia, como se aprecia en la Figura 3.24.

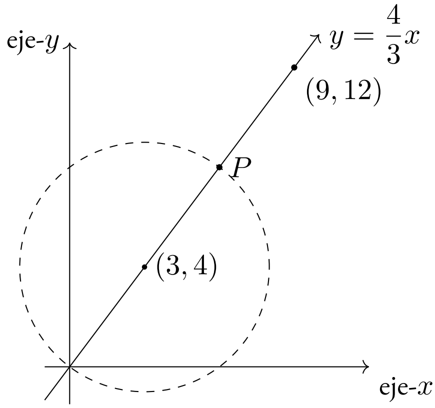


Figura 3.24

Desde que el centro es punto medio entre el origen y el punto P se deduce que $P = (6, 8)$. $\square$

Ejercicio 3.7. Determine una ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$, trazada desde el punto $P = (7, 1)$.

Solución. Es claro que el centro de la circunferencia tiene coordenadas $(0, 0)$ y su radio es 5. Luego, en la Figura 3.25 se establecen las rectas tangentes por determinar. Digamos que el punto de tangencia T_1 tiene coordenadas (a, b). Entonces, desde que $\mathscr{L}_1$ es perpendicular a la recta que pasa por T_1 y el centro de la circunferencia, se debe cumplir que

$$\frac{b}{a}\left(\frac{b-1}{a-7}\right) = -1. \tag{3.3}$$

Por otro lado, también se debe cumplir

$$a^2 + b^2 = 25. \tag{3.4}$$

Luego, usando (3.4) en (3.3) se deduce que $b = 25 - 7a$, y reemplazando esta última en (3.4) obtenemos la siguiente ecuación cuadrática

$$a^2 - 7a + 12 = 0,$$

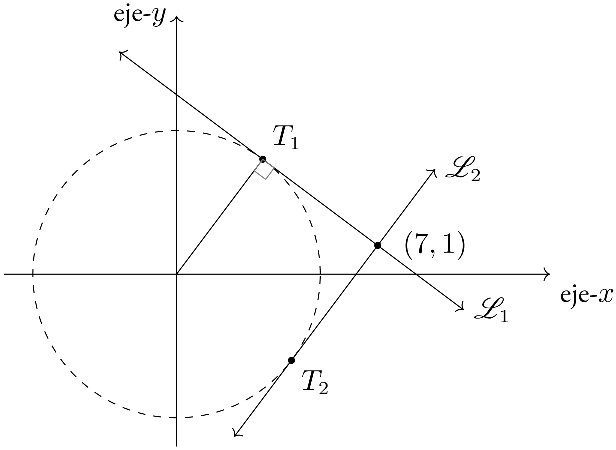


Figura 3.25

cuyas soluciones son $a = 3$ y $a = 4$. Así, $T_1 = (3,4)$ y $T_2 = (4,-3)$. Por lo tanto, las ecuaciones son :

$$\mathscr{L}_1 : y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3) \ \text{ y } \ \mathscr{L}_2 : y + 3 = \frac{4}{3}(x-4).$$

□

Ejercicio 3.8. De la Figura 3.26 determine el área del trapecio de la región sombreada. Siendo O_1, O_2 los centros y T_1, T_2 los puntos de tangencias con el eje de abscisas de las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente.

Solución. Luego de completar cuadrados en ambas ecuaciones se obtiene que la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}_1$ de centro O_1 es

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2,$$

de donde uno deduce que $O_1 = (2,2)$. De igual manera, la circunferencia $\mathscr{C}_2$ tiene como ecuación estándar

$$(x-6)^2 + (y-1)^2 = 1$$

y por ende $O_2 = (6,1)$. Así, el área pedida puede calcularse como la suma de áreas del rectángulo y del triángulo mostrado en la Figura 3.27.

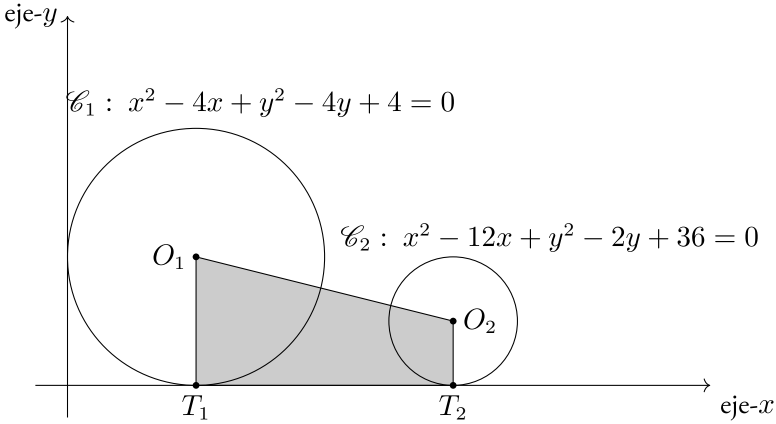


Figura 3.26

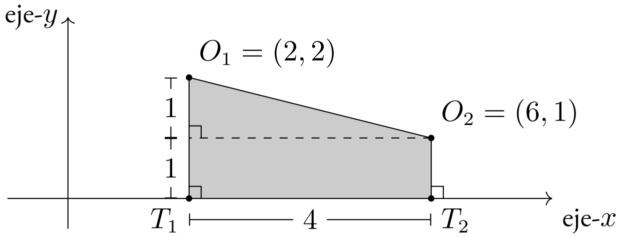


Figura 3.27

Por lo tanto, el área es $4 + 2 = 6\ u^2$. $\square$

Ejercicio 3.9. Desde un punto P en el plano se traza una recta $\mathscr{L}$ que tiene intersección con la circunferencia $\mathscr{C}$ en los puntos A y B, como se muestra en la Figura 3.28. Se define la potencia de P con respecto a la circunferencia $\mathscr{C}$ y a la recta $\mathscr{L}$ como el siguiente producto $d(P, A)d(P, B)$.

Determine la potencia del punto $P = (0, 0)$ con respecto a la circunferencia $\mathscr{C}$ de ecuación $x^2 - 8x + y^2 - 8y + 14 = 0$ y a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $y - x = 0$.

Solución. Para determinar los puntos A y B se igualan las ecuaciones de la circunferencia y de la recta, es decir, de la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ se obtiene $y = x$, que se reemplaza en la

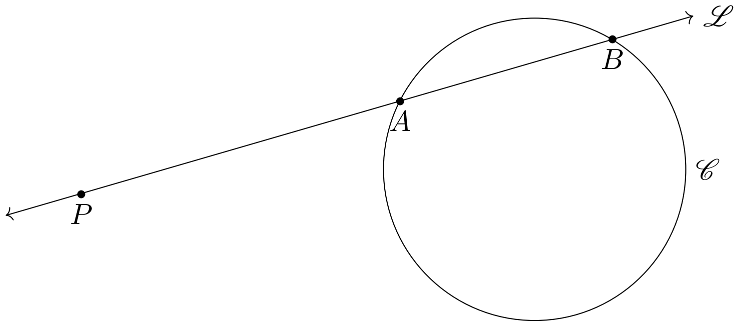


Figura 3.28

ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$ y se tiene la siguiente ecuación cuadrática

$$x^2 - 8x + 7 = 0,$$

cuyas soluciones son $x = 7$ o $x = 1$. Así, los puntos de intersección son $A = (1, 1)$ y $B = (7, 7)$. Por lo tanto, la potencia es

$$d(P, A)d(P, B) = (\sqrt{2})(7\sqrt{2}) = 14.$$

$\square$

Ejercicio 3.10. De la Figura 3.29, determine la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ tangente a las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ de ecuaciones $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y $x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$, respectivamente.

Solución. De la ecuación de $\mathscr{C}_1$ se deduce que su centro tiene coordenadas $(1, 0)$ y su radio es 1.

Por otro lado, luego de completar cuadrados en la ecuación asociada a $\mathscr{C}_2$ se obtiene

$$(x-4)^2 + y^2 = 4,$$

lo cual implica que el centro de $\mathscr{C}_2$ tiene coordenadas $(4, 0)$ y su radio es 2.

Ahora, como $\mathscr{L}$ es tangente a las circunferencias, se sigue que los segmentos que unen los puntos de tangencia con los centros son perpendiculares a ella, como se muestra en la Figura 3.30. En la figura, T_1 y T_2 son los puntos de tangencia; y O_1 y O_2, los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente. Como los triángulos $\triangle PT_1O_1$ y $\triangle PT_2O_2$ son semejantes, se deduce de

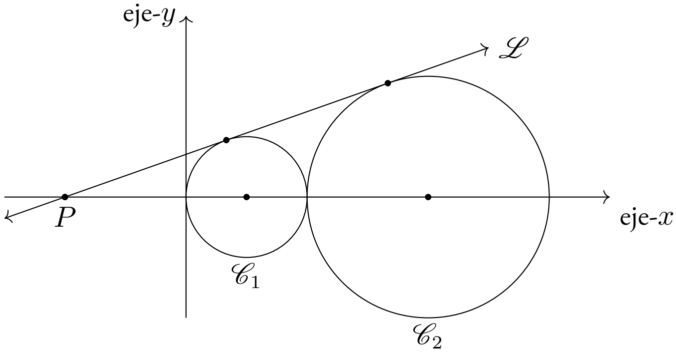


Figura 3.29

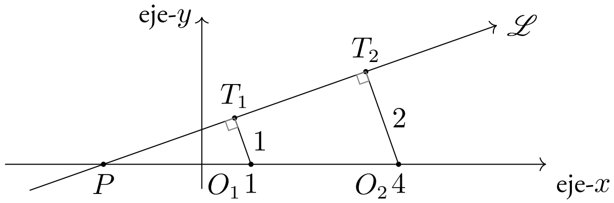


Figura 3.30

la figura que O_1 es punto medio del segmento de extremos P y O_2. Como $d(O_1, O_2) = 3$, se obtiene que $d(P, O_1) = 3$ y esto a su vez implica que $P = (-2, 0)$. Por el Teorema de Pitágoras en el triángulo de vértices P, T_1 y O_1, se sigue que $d(P, T_1) = 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta $\mathscr{L}$ es $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ y su ecuación es

$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}(x + 2).$$

$\square$

Ejercicio 3.11. Encuentre la ecuación estándar de la elipse con focos $(0, 1)$ y $(4, 1)$, y con eje mayor igual a 12.

Solución. No es difícil verificar que el centro C de la elipse tiene coordenadas $(2,1)$. Desde que su eje mayor es 12, se sigue que $a = 6$. Por lo tanto, sus vértices en el eje focal tienen coordenadas $V_1 = (-4,1)$ y $V_2 = (8,1)$, como se muestra en la Figura 3.31, donde además se ubica el vértice V_3. Asimismo, por definición de elipse se cumple

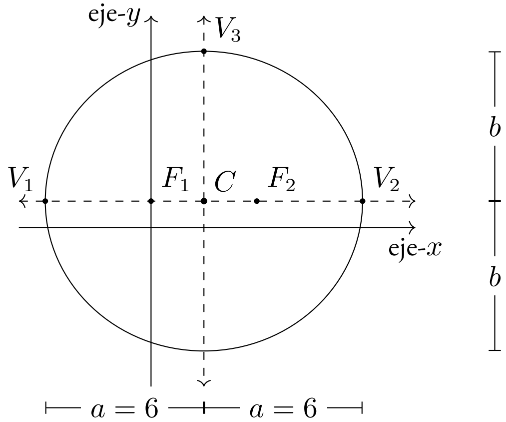


Figura 3.31

$$d(F_1, V_3) + d(F_2, V_3) = 12,$$

y como $d(F_1, V_3) = d(F_2, V_3)$, se deduce que $d(F_1, V_3) = 6$. Además, por Pitágoras en el triángulo rectángulo $\triangle V_3CF_2$, se tiene que

$$d(V_3, F_2)^2 = d(C, F_2)^2 + d(C, V_3)^2.$$

De esto último se deduce que $b = \sqrt{32}$. Luego, la ecuación estándar de la elipse es

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{32} = 1.$$

$\square$

Ejercicio 3.12. Determine el centro, los vértices y los focos de la elipse $\mathscr{E}$ de ecuación

$$x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0.$$

Además, bosqueje la gráfica de $\mathscr{E}$.

Solución. Primero completamos cuadrados para obtener la ecuación estándar de la elipse

$$\frac{(x+3)^2}{4} + (y-1)^2 = 1,$$

de donde el centro tiene coordenadas $(-3, 1)$. Como $a = 2$ y $b = 1$, se deduce primero que los vértices son

$$V_1 = (-5, 1),\ V_2 = (-1, 1),\ V_3 = (-3, 2)\ \text{ y }\ V_4 = (-3, 0),$$

segundo los focos tienen coordenadas $F_1 = (-3 - \sqrt{3}, 1)$ y $F_2 = (-3 + \sqrt{3}, 1)$. A continuación en la Figura 3.32 se muestra un bosquejo de su gráfica. □

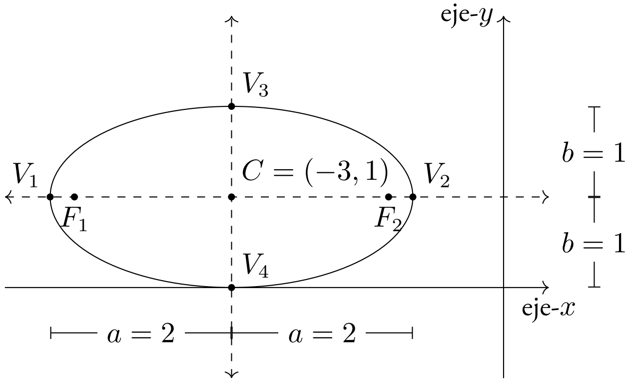


Figura 3.32

Ejercicio 3.13. Determine el área del cuadrado inscrito en la elipse $\mathscr{E}$ de ecuación

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Solución. No es difícil ver que la ecuación de $\mathscr{E}$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a > b$, lo cual implica que la gráfica de $\mathscr{E}$ tenga la siguiente forma.

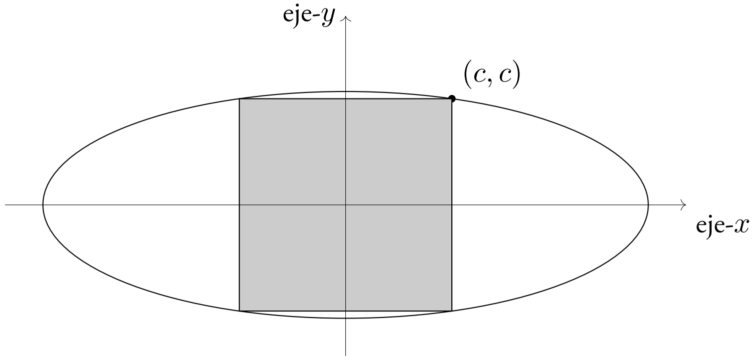


Figura 3.33

Ahora, según la figura, se debe cumplir que $(c, c) \in \mathscr{E}$, luego $c^2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)=1$, lo que a su vez implica

$$c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Área del cuadrado} = 4c^2 = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

$\square$

Ejercicio 3.14. Calcule la longitud del eje mayor de la elipse $\mathscr{E}$ que pasa por el punto $(1, 5)$ y cuyos focos tienen coordenadas $(5, 2)$ y $(-3, 2)$. Además, determine la ecuación y gráfica de $\mathscr{E}$.

Solución. Como el centro es el punto medio entre los focos, se tiene que el centro C tiene coordenadas $(1, 2)$. Luego, como el punto $P = (1, 5)$ pertenece a la elipse, se deduce que P es uno de sus vértices, y por tanto $b = 3$. Dado que $a = d(P, F_2)$, donde F_2 es el foco de coordenadas $(5, 2)$, se tiene por el teorema de Pitágoras que

$$a^2 = d(C, F_2)^2 + d(C, P)^2,$$

y se deduce que $a = 5$. Así, su ecuación es

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

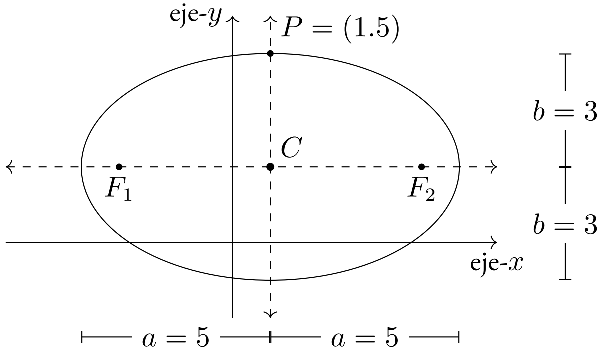


Figura 3.34

Además, el eje mayor es $2a = 10$. En la Figura 3.34 se representa la elipse, donde a su vez se muestran el centro, los focos y los lados o radios de $\mathscr{E}$. $\square$

Ejercicio 3.15. Determine la ecuación de la recta tangente de pendiente positiva a la elipse $\mathscr{E}$, de ecuación

$$4x^2 + 9y^2 = 72,$$

trazada desde el punto de coordenadas $(0, 4)$.

Solución. Denotemos por m a la pendiente de la recta tangente. Luego, su ecuación pendiente-intercepto es $y = mx + 4$. Reemplazando en la ecuación de $\mathscr{E}$ se obtiene

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9(mx + 4)^2 &= 72 \\ (4 + 9m^2)x^2 - 72mx + 72 &= 0 \end{aligned}$$

Como la recta es tangente, se tiene que la ecuación cuadrática anterior tiene solución única, lo que a su vez implica que el discriminante debe anularse, es decir,

$$(72m)^2 - (4)(72)(4 + 9m^2) = 0,$$

de donde $m = \frac{2}{3}$ o $m = -\frac{2}{3}$. Así, la ecuación de la recta tangente con pendiente positiva es

$$y = \frac{2}{3}x + 4.$$

$\square$

Ejercicio 3.16. En la elipse de ecuación

$$4x^2 + 9y^2 = 72$$

determine el punto más cercano y más lejano a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $2x - 3y + 25 = 0$.

Solución. La ecuación intercepto-pendiente de $\mathscr{L}$ se escribe como:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{25}{3}.$$

Por otro lado, denotaremos por (x_0, y_0) a uno de los dos puntos, entonces se debe cumplir que la recta que pasa por (x_0, y_0) es paralela a $\mathscr{L}$ y tangente a $\mathscr{E}$, como se aprecia en la Figura 3.35.

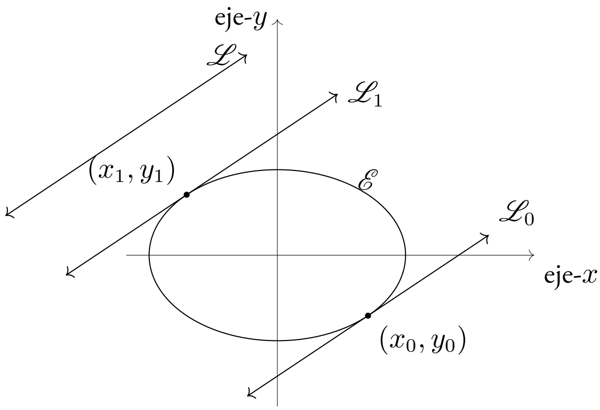


Figura 3.35

Observe que (x_1, y_1) es el punto más cercano a $\mathscr{L}$ y (x_0, y_0) es el punto más lejano sobre la elipse $\mathscr{E}$ a la recta $\mathscr{L}$.

Así, la ecuación punto-pendiente de $\mathscr{L}_0$ es

$$y - y_0 = \frac{2}{3}(x - x_0),$$

luego su ecuación intercepto-pendiente es

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x_0 + y_0.$$

Reemplazando en $\mathscr{E}$ obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^2 + 9\left(\frac{2}{3}x + y_0 - \frac{2}{3}x_0\right)^2 &= 72 \\ 8x^2 + 4(3y_0 - 2x_0)x + (3y_0 - 2x_0)^2 - 72 &= 0. \end{aligned}$$

Como la recta es tangente a $\mathscr{E}$ se sigue que la ecuación cuadrática tiene solución única, lo que a su vez implica que su discriminante se anula, es decir, debe ocurrir que

$$\begin{aligned} 16(3y_0 - 2x_0)^2 - 32((3y_0 - 2x_0)^2 - 72) &= 0 \\ (3y_0 - 2x_0)^2 &= 144 \\ 9y_0^2 + 4x_0^2 - 12x_0y_0 &= 144. \end{aligned}$$

Desde que $9y_0^2 + 4x_0^2 = 72$ se tiene que $y_0 = -\dfrac{6}{x_0}$. Así,

$$4x_0^2 + 9\left(\frac{36}{x_0^2}\right) = 72,$$

de donde se deduce que $x_0^2 = 9$. Por lo tanto, se tiene que $(x_0, y_0) = (3, -2)$ es el punto más lejano y $(x_1, y_1) = (-3, 2)$ es el punto más cercano. $\square$

Ejercicio 3.17. De la Figura 3.36 se tiene que C es el centro de la circunferencia $\mathscr{C}$ y A es el centro de la elipse $\mathscr{E}$. Determine las ecuaciones de la circunferencia y la elipse.

Solución. Se nota que C tiene coordenadas $(\sqrt{3}, 2)$ y el radio de $\mathscr{C}$ es 2. Así, la ecuación de la circunferencia $\mathscr{C}$ es

$$(x - \sqrt{3})^2 + (y - 2)^2 = 2^2.$$

Asimismo, de la figura se observa que $a = \sqrt{3}$ y $b = 2$ para la elipse $\mathscr{E}$ con centro $(\sqrt{3}, 4)$. Luego, la ecuación de $\mathscr{E}$ es

$$\frac{(x - \sqrt{3})^2}{3} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1.$$

$\square$

Ejercicio 3.18. Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia que se muestra a continuación en la Figura 3.37.

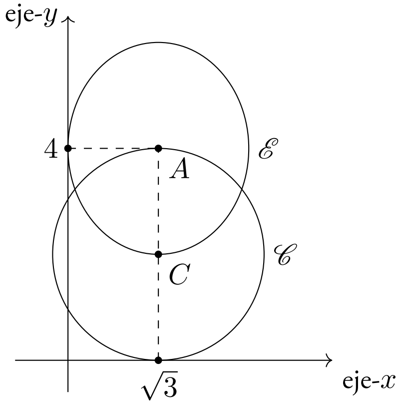


Figura 3.36

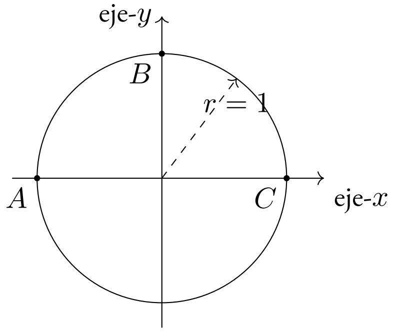


Figura 3.37

Determine la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$ con eje vertical que pasa por B con vértice en A. Además, determine las ecuaciones de las rectas que pasan por C y son tangentes a $\mathscr{P}$.

Solución. La forma general de la ecuación de la parabola $\mathscr{P}$ con eje vertical es

$$y = a(x - h)^2 + k,$$

donde el vértice A tiene coordenadas $(h, k) = (-1, 0)$, es decir, $h = -1$ y $k = 0$. Así, $\mathscr{P} : y = a(x + 1)^2$, pero desde que $B = (0, 1) \in \mathscr{P}$, se deduce que $a = 1$. Por lo tanto,

$\mathscr{P} : y = (x+1)^2$. Luego, la parábola en cuestión es mostrada en la Figura 3.38. Note que

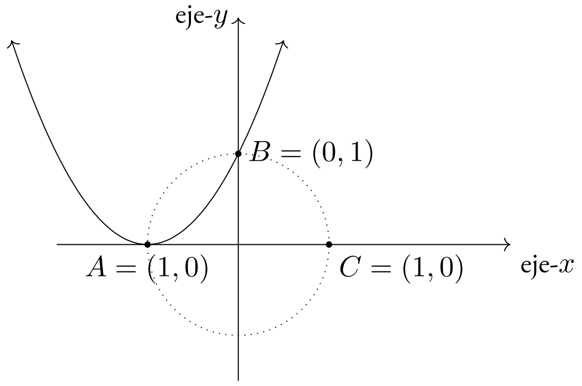


Figura 3.38

la recta tangente a $\mathscr{P}$ no puede ser vertical por definición de recta tangente a una parábola. Sea $\mathscr{L}$ la recta tangente a $\mathscr{P}$ trazada desde $C = (1, 0)$, cuya ecuación es

$$y = mx + b.$$

Como $C \in \mathscr{L}$, se sigue que $b = -m$ y la ecuación de $\mathscr{L}$ se reduce a $y = mx - m$.

Luego, por condición de tangencia $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = \{$ único punto $\}$, es decir, la ecuación cuadrática que se forma al igualar las ecuaciones tiene solución única. En ese sentido, la ecuación

$$(x+1)^2 = mx - m \;\leftrightarrow\; x^2 + (2-m)x + 1 + m = 0$$

tiene discriminante cero; esto significa que

$$(2-m)^2 - 4(1)(1+m) = 0,$$

de donde se deduce que $m = 0$ o $m = 8$. Por lo tanto, hay dos rectas tangentes a $\mathscr{P}$ que pasan por el punto C y tienen las siguientes ecuaciones

$$y = 0 \;\text{ e }\; y = 8(x-1).$$

$\square$

Ejercicio 3.19. Determine el cuadrante donde se encuentra el vértice de la parábola de ecuación

$$y = \tan(\alpha)x^2 - 2\sec(\alpha)x + \tan(\alpha),$$

con $\alpha \in \ ]0, \frac{\pi}{2}[$. Además, indique el número de puntos de intersección de la parábola $\mathscr{P}$ con el eje de abscisas.

Solución. Primero, notemos que es una parábola con eje vertical, por lo cual su ecuación se puede escribir como

$$y = \tan(\alpha)\left(x - \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}\right)^2 - \frac{1}{\tan(\alpha)}.$$

Luego, su vértice tiene coordenadas

$$V = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}, \frac{-1}{\tan(\alpha)}\right).$$

Como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, se deduce que V pertenece al cuarto cuadrante. Además, debido al hecho de que el coeficiente del término cuadrático es mayor a cero, la parábola se abre hacia arriba, y por tanto tendrá dos puntos de intersección con el eje de abscisas.

$\square$

Ejercicio 3.20. Dada la ecuación de la parábola $\mathscr{P} : 3x^2 - 30x + 24y + 43 = 0$, determine su vértice, foco y la ecuación de su recta directriz.

Solución. Para determinar el vértice de la parábola debemos completar cuadrados en la ecuación propuesta, es decir, $\mathscr{P} : y = -\frac{1}{8}(x-5)^2 + \frac{4}{3}$. Así, su vértice y foco tienen coordenadas $(5, \frac{4}{3})$ y $(5, \frac{127}{96})$, respectivamente. Además, su recta directriz tiene ecuación

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{32}.$$

$\square$

Ejercicio 3.21. Determine la ecuación de la parábola con eje horizontal que pasa por los puntos $A = (3,3)$, $B = (6,5)$ y $C = (6,-3)$.

Solución. Denotemos al vértice de la parábola por $V = (h,k)$; al ser una parábola con eje horizontal la ecuación de la parábola es de la forma

$$x = a(y-k)^2 + h,$$

entre los puntos dados, los puntos B y C tienen igual abscisa luego son puntos simétricos respecto al eje de la parábola de ecuación $y = k$. Así, $k = \frac{5-3}{2} = 1$. Por otro lado, para determinar los valores restantes reemplazamos en la ecuación de la parábola los puntos A y B, y se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
3 &= 4a + h \\
6 &= 16a + h.
\end{aligned}
$$

Al resolver tenemos que $a = \frac{1}{4}$ y $h = 2$. Así, la ecuación de la parábola es

$$x = \frac{1}{4}(y-1)^2 + 2.$$

$\square$

Ejercicio 3.22. Sean $\mathscr{P}$ la parábola y $\mathscr{L}$ la recta de ecuaciones

$$9y = x^2 \text{ y } 2x - 14y + 8 = 0,$$

respectivamente. Determine la ecuación intercepto-pendiente de la recta que pasa por el origen y el punto de intersección entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$, el que se encuentra en el primer cuadrante.

Solución. Para determinar los puntos de intersección entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$ debemos resolver la ecuación cuadrática que se obtiene de igualar ambas ecuaciones, es decir, primero igualamos las ecuaciones y obtenemos

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{x+4}{7}.$$

Esto genera la siguiente ecuación cuadrática

$$7x^2 - 9x - 36 = 0,$$

cuyas soluciones son $x = 3$ o $x = -\frac{12}{7}$. Como buscamos el punto de intersección en el primer cuadrante, nos quedamos con $x = 3$, lo que implica que el punto tiene coordenadas $(3, 1)$. Así, la ecuación de la recta que pasa por el origen y el punto de intersección tiene por ecuación

$$y = \frac{1}{3}x.$$

$\square$

Ejercicio 3.23. Determine la ecuación de la parábola con eje vertical que pasa por el origen de coordenadas y cuyo vértice es el punto de intersección entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de ecuaciones $x - y = 0$ y $x + y - 4 = 0$, respectivamente. Además, represente gráficamente la parábola y las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

Solución. Primero calculamos el punto de intersección entre ambas rectas resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

cuya solución es $(2, 2)$. Así, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$y = a(x-2)^2 + 2,$$

pero, como $(0, 0) \in \mathscr{P}$, se sigue que $a = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, su ecuación es

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x-2)^2.$$

La parábola y las rectas son representadas en la Figura 3.39. □

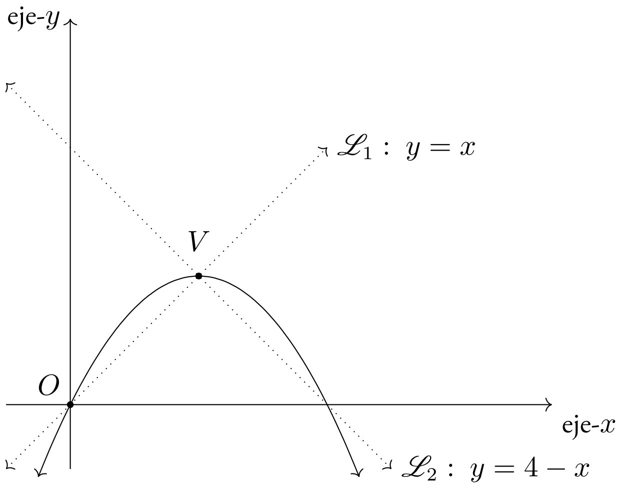


Figura 3.39

Ejercicio 3.24. Determine la ecuación de la parábola con eje vertical que se abre hacia arriba con vértice V y pasa por Q, donde V y Q son los puntos de intersección entre las circunferencias de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ y } x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Solución. Luego de completar cuadrados tenemos que las ecuaciones de las circunferencias son

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ y } (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Así, la Figura 3.40 nos muestra los puntos de intersección entre ellas y nuestra parábola. Es

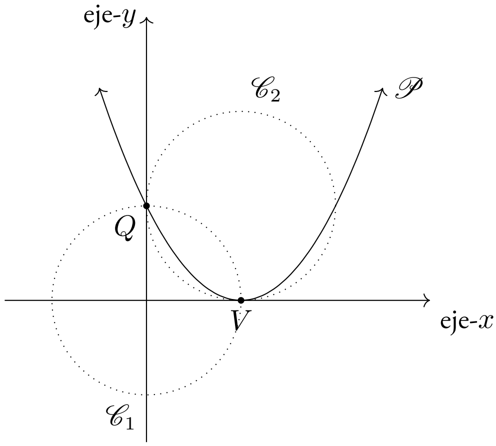


Figura 3.40

claro entonces que $V = (1, 0)$ y $Q = (0, 1)$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$y = (x-1)^2.$$

□

Ejercicio 3.25. Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ y $\mathscr{L}$ su recta tangente en $(4, 6)$. Determine la ecuación de la parábola que se abre hacia abajo con vértice ubicado en el y-intercepto de $\mathscr{L}$ y que pasa por el punto de intersección entre $\mathscr{L}$ y el eje de abscisas.

Solución. La ecuación de la circunferencia, luego de completar cuadrados, $\mathscr{C}$ es :

$$x^2 + (y-3)^2 = 5^2.$$

De donde se deduce que su centro tiene coordenadas $(0, 3)$ y su radio es 5. Así, en la Figura 3.41 se muestra $\mathscr{C}$, la recta tangente $\mathscr{L}$ y la recta que pasa por el centro y punto de tangencia, la cual es denotada por $\mathscr{L}_N$.

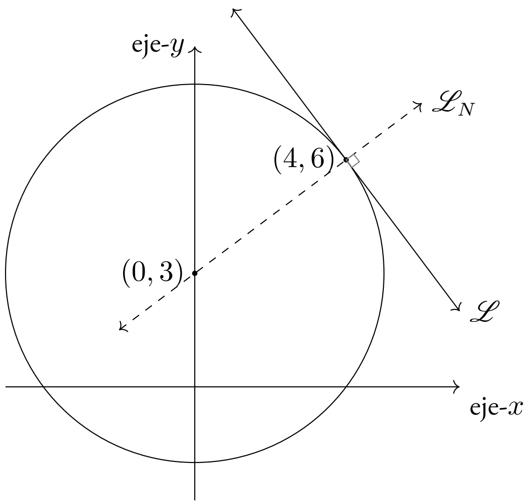


Figura 3.41

Como la pendiente de $\mathscr{L}_N$ es $\frac{3}{4}$ se sigue que la pendiente de $\mathscr{L}$ es $-\frac{4}{3}$, debido a que son perpendiculares. Así, la ecuación de $\mathscr{L}$ es

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 4).$$

De esto último, el y-intercepto de $\mathscr{L}$ es $\frac{34}{3}$; por ende, el vértice de la parábola en cuestión tiene coordenadas

$$V = \left(0, \frac{34}{3}\right).$$

La parábola $\mathscr{P}$ tiene por ecuación

$$y = a(x - 0)^2 + \frac{34}{3}$$

con $a < 0$. Ahora, como el punto de intersección de $\mathscr{L}$ con el eje de abscisas es $\left(\frac{17}{2}, 0\right)$, se deduce que $a = -\frac{8}{51}$. Por lo tanto, $\mathscr{P}$ tiene por ecuación

$$y = -\frac{8}{51}x^2 + \frac{34}{3}.$$

□

Ejercicio 3.26. Considere la parábola $\mathscr{P}$ con eje vertical, vértice en $(-1,-4)$ y que pasa por $(1,0)$. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1,0)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-3,0)$ y el punto de intersección de $\mathscr{P}$ con el eje de ordenadas.

Solución. Como el vértice es $(-1,-4)$, se sigue que la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$ es de la forma

$$y = a(x+1)^2 - 4$$

con $a > 0$. Desde que $(1,0) \in \mathscr{P}$, se deduce que $a = 1$. Así, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$y = (x+1)^2 - 4.$$

Luego, el punto de intersección de $\mathscr{P}$ con el eje-y tiene coordenadas $(0,-3)$ y sus puntos de intersección con el eje-x son $(-3,0)$ y $(1,0)$. En la Figura 3.42 se muestra la parábola $\mathscr{P}$, la recta pedida denotada por $\mathscr{L}$ y la recta paralela $\mathscr{L}_p$.

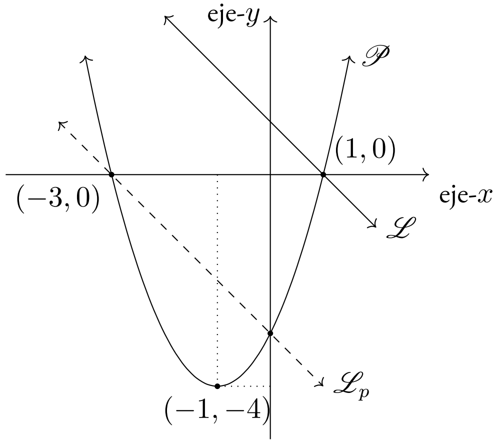


Figura 3.42

De la figura se nota que la pendiente de $\mathscr{L}_p$ es

$$\frac{0-(-3)}{-3-0} = -1.$$

Dado que $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_p$ son paralelas, se sigue que tienen la misma pendiente. Por esta razón, se tiene que la ecuación de $\mathscr{L}$ es

$$y = -x + 1.$$

□

Ejercicio 3.27. De la Figura 3.43 se sabe que C es el centro de la circunferencia. Determine las coordenadas de los puntos A, B, C y D. Además calcule el área de la región sombreada y el radio de la circunferencia.

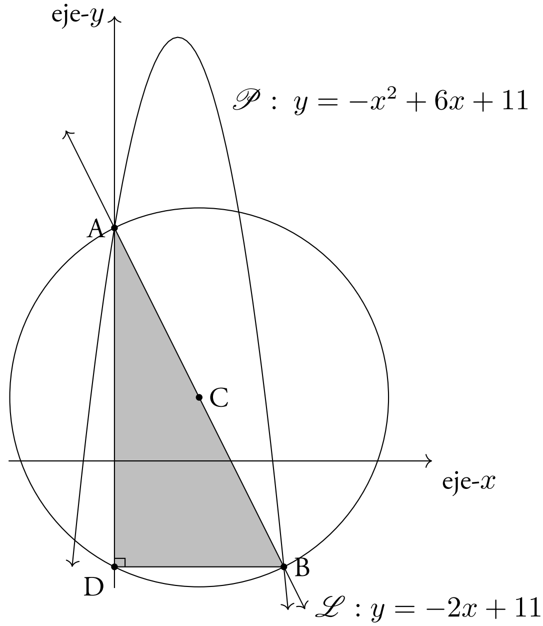


Figura 3.43

Solución. De la figura, para determinar las coordenadas de los puntos A y B, debemos primero resolver la ecuación cuadrática que se obtien de igualar las ecuaciones de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$, es decir,

$$y = -2x + 11 = -x^2 + 6x + 11,$$

lo cual genera la siguiente ecuación cuadrática

$$x^2 - 8x = 0$$

que tiene como soluciones $x = 0$ y $x = 8$. Así, $A = (0, 11)$ y $B = (8, -5)$. Luego, C es el punto medio del segmento de extremos A y B, por ende $C = (4, 3)$. Además, no es complicado ver que D tiene coordenadas $(0, -5)$. Por lo tanto, el área sombreada es 64 u^2 y el radio de la circunferencia es $4\sqrt{5}$. $\square$

Ejercicio 3.28. A continuación en la Figura 3.44 se muestra la gráfica de una parábola $\mathscr{P}$ y de una recta $\mathscr{L}$ tangente a ella en el punto de tangencia T. Determine el valor de la pendiente

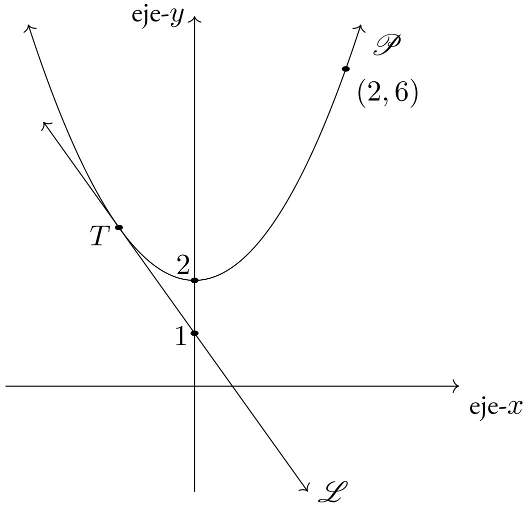


Figura 3.44

de $\mathscr{L}$ y las coordenadas del punto T.

Solución. De la figura se deduce que el vértice V de $\mathscr{P}$ tiene coordenadas $(0, 2)$. Así, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$y - 2 = ax^2$$

y, como $(2, 6) \in \mathscr{P}$, se deduce que $a = 1$. Luego, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$y = x^2 + 2.$$

Nuevamente, de la figura, se observa que la ecuación intercepto-pendiente de $\mathscr{L}$ es

$$y = mx + 1$$

con $m < 0$. Ahora, por condición de tangencia, la interseccion entre $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$ es un único punto, es decir, la ecuación cuadrática que se obtiene de igualar las ecuaciones

$$x^2 - mx + 1 = 0$$

debe tener solución única. Así, se debe cumplir que el discriminante de dicha cuadrática es cero, esto es,

$$\Delta = m^2 - 4 = 0,$$

lo cual implica que $m = -2$. Luego la solución de la ecuación cuadrática es el punto T de coordenadas $(-1, 3)$. $\square$

Ejercicio 3.29. De la Figura 3.45, la recta $\mathscr{L}$ es tangente a la parábola $\mathscr{P}$. Determine la ecuación de $\mathscr{P}$ e indique las coordenadas de su vértice, si se sabe que el área de la región sombreada es $40.5\ u^2$.

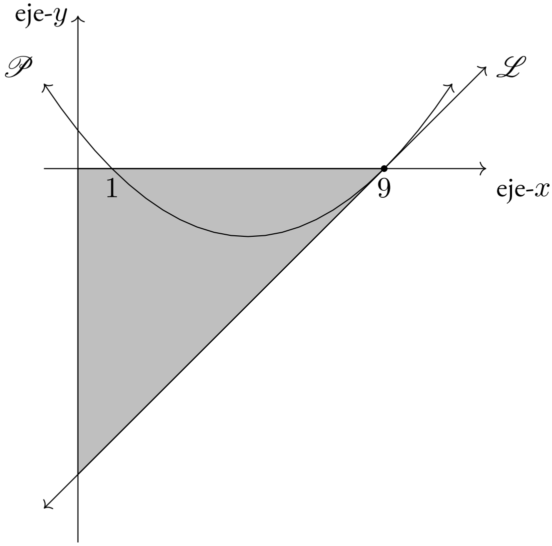


Figura 3.45

Solución. De la figura, si denotamos por $-h$ al y-intercepto de $\mathscr{L}$ se sigue que

$$\frac{9h}{2} = 40.5,$$

de donde se deduce que $h = 9$. Así, la pendiente de la recta es 1. Luego, su ecuación es

$$y = 1(x - 9) = x - 9.$$

Por otro lado, nuevamente de la figura, se observa que el vértice de la parábola tiene coordenadas $(5, k)$, por ende su ecuación es

$$y = a(x-5)^2 + k.$$

Además, como $(1,0) \in \mathscr{P}$, se tiene que $k = -16a$.

Ahora, desde que la intersección entre $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$ es un único punto, se sigue que la ecuación cuadrática que se obtiene de igualar ambas ecuaciones, es decir,

$$x - 9 = a(x-5)^2 - 16a \;\leftrightarrow\; ax^2 - (10a+1)x + 9a + 9 = 0,$$

debe poseer solución única. Esto implica que el discriminante debe ser cero, esto es,

$$(10a+1)^2 - 4(a)(9a+9) = 0.$$

Luego de resolver se deduce que $a = \frac{1}{8}$ y por consecuencia $k = -2$. Finalmente, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$y = \frac{1}{8}\left(x-5\right)^2 - 2.$$

$\square$

Ejercicio 3.30. Consideremos la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $y = -x + 3$. Determine:

- El vértice de la parábola.
- Los dos puntos de intersección entre la parábola y la recta.
- El área del triángulo cuyos vértices son los determinados en los items anteriores.

Solución.

- Al completar cuadrados en la ecuación de la parábola se obtiene

  $$y = (x-1)^2,$$

  de donde se deduce que su vértice tiene coordenadas $(1,0)$.

- Los puntos de intersección entre la parábola $\mathscr{P}$ y la recta $\mathscr{L}$ son $(-1,4)$ y $(2,1)$. Estos son mostrados en la Figura 3.46.

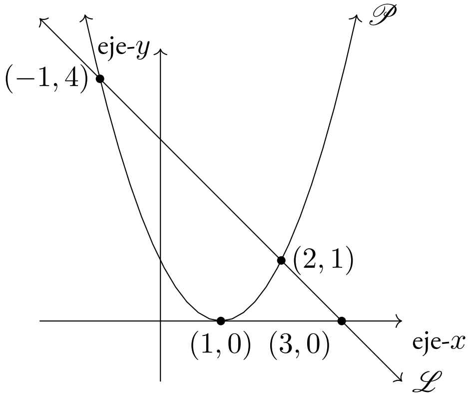


Figura 3.46

- Finalmente, el área formada por los puntos $(-1,4)$, $(1,0)$ y $(2,1)$ se puede calcular como la resta de áreas entre el rectángulo de líneas punteadas en la Figura 3.47 y los triángulos rectángulos que se forman.

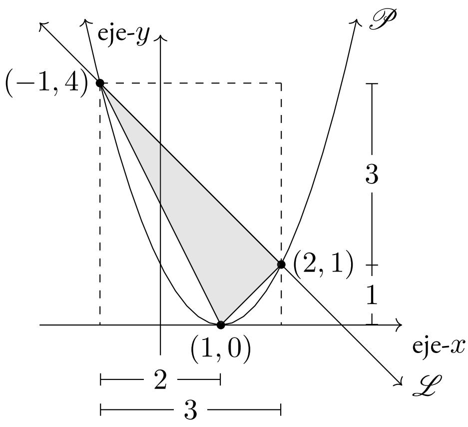


Figura 3.47

Así, si denotamos por A al área por determinar se tiene que

$$A = 12 - 4 - \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = 3\,u^2.$$

$\square$

Ejercicio 3.31. Dada la Figura 3.48 determine la ecuación de la recta tangente a la parábola $\mathscr{P}$.

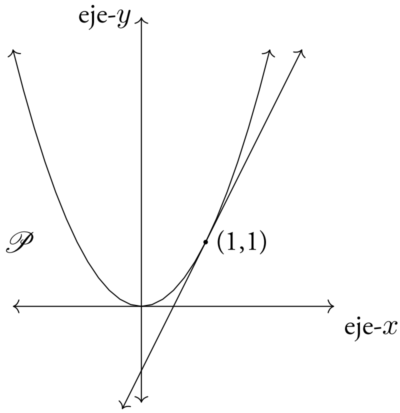


Figura 3.48

Solución. De la figura se observa que el vértice de $\mathscr{P}$ tiene coordenadas $(0,0)$, y desde que pasa por $(1,1)$ se deduce que su ecuación es

$$y = x^2.$$

Ahora, denotemos por m a la pendiente de la recta tangente. Así, su ecuación punto-pendiente es

$$y - 1 = m(x-1)$$

con $m > 0$. Luego por condición de punto de tangencia se debe cumplir que la ecuación cuadrática, que se obtiene de igualar las ecuaciones de la parábola y la recta, debe tener solución única. En ese sentido,

$$y = x^2 = mx - m \;\leftrightarrow\; x^2 - mx + m = 0$$

la cuadrática tiene discriminante cero, es decir,

$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0,$$

de donde se deduce que $m = 2$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y = 2x - 1.$$

$\square$

Ejercicio 3.32. Si el punto de tangencia de la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación $y = kx^2$ y la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $y = 2x - k$ pertenece al tercer cuadrante, determine el valor de k.

Solución. La Figura 3.49 muestra un bosquejo de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$. Luego, el punto de tangencia se

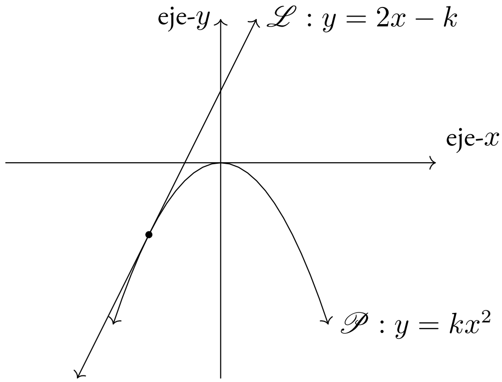


Figura 3.49

obtiene de igualar las ecuaciones de $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$:

$$y = kx^2 = 2x - k,$$

de donde se forma la ecuación cuadrática

$$kx^2 - 2x + k = 0,$$

la cual debe tener discriminante cero, es decir,

$$\Delta = 4 - 4k^2 = 0,$$

de donde se deduce que $k = 1$ $k = -1$. Pero, de las condiciones del problema, se tiene que $k = -1$. $\square$

Ejercicio 3.33. En la Figura 3.50 se muestra la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 1.$$

Así como también las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tangentes a $\mathscr{P}$ en los puntos T_1 y T_2, respectivamente. Determine el área de la región sombreada.

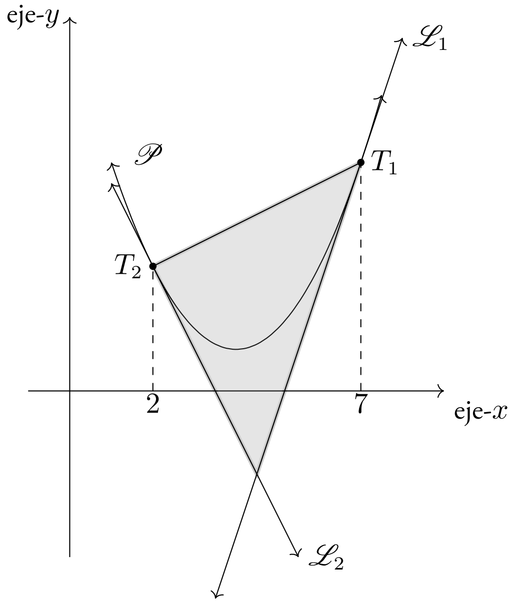


Figura 3.50

Solución. Desde que la abscisa de T_1 es 7 y $T_1 \in \mathscr{P}$, se deduce que $T_1 = (7, \frac{11}{2})$. De igual manera, se deduce que $T_2 = (2, 3)$.

Denotemos por m_1 y m_2 a las pendientes de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, respectivamente. Luego, las ecuaciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son

$$y - \frac{11}{2} = m_1(x-7) \;\text{ e }\; y - 3 = m_2(x-2),$$

respectivamente.

Ahora, para determinar los valores de m_1 y m_2, primero debemos igualar las ecuaciones de las rectas con la parábola. Procedamos con m_1, es decir,

$$\frac{1}{2}(x-4)^2 + 1 = m_1 x - 7m + \frac{11}{2},$$

lo cual se transforma en la siguiente ecuación cuadrática

$$x^2 - (8 + 2m_1)x + 7 + 14m_1 = 0,$$

la cual tiene discriminante cero, esto es,

$$\Delta = (8 + 2m_1)^2 - 4(7 + 14m_1) = 0,$$

de donde se obtiene que $m_1 = 3$.

De manera similar se procede para m_2, de donde se desprende que $m_2 = -2$.

Así, el punto de intersección entre las rectas se obtiene de resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 6x - 2y &= 31 \\ 2x + y &= 7, \end{aligned}$$

cuya solución es $(\frac{9}{2}, -5)$.

Finalmente, el área solicitada se puede calcular como la resta de áreas entre el rectángulo de lados punteados y los triángulos rectángulos que se muestran en la Figura 3.51. Así, el

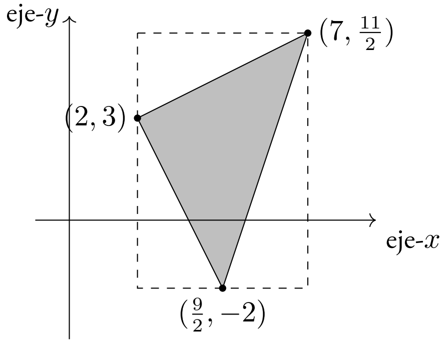


Figura 3.51

área es

$$\frac{75}{2} - \frac{25}{4} - \frac{75}{4} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}\ u^2.$$

□

Ejercicio 3.34. Sea $\mathscr{P}_1$ una parábola de ecuación

$$y = \frac{1}{8}(x-4)^2 + 2.$$

Determine la ecuación de la parábola $\mathscr{P}_2$ con vértice ubicado en el foco de $\mathscr{P}_1$ y cuyo eje focal es paralelo al eje de abscisas, si además se sabe que $\mathscr{P}_2$ se abre hacia la derecha y pasa por el punto de coordenadas $(6, 8)$.

Solución. Es claro que el vértice de $\mathscr{P}_1$ es $V_1 = (4, 2)$, así como también por su ecuación ella se abre hacia arriba. Además, por Teorema 3.3, se deduce que el foco de $\mathscr{P}_1$ es $F_1 = (4, 4)$, el cual es el véctice de $\mathscr{P}_2$. Ahora, como $\mathscr{P}_1$ tiene eje focal horizontal y se abre hacia la derecha, su ecuación es

$$x = a(y-4)^2 + 4$$

con $a > 0$. Como $\mathscr{P}_1$ pasa por el punto $(6, 8)$, se deduce que $a = \dfrac{1}{8}$. Por lo cual su ecuación es

$$x = \frac{1}{8}(y-4)^2 + 4.$$

La Figura 3.52 nos muestra la gráfica de ambas parábolas.

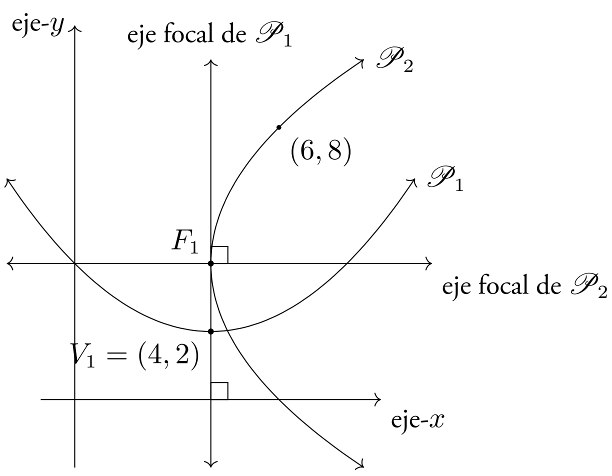


Figura 3.52

□

Ejercicio 3.35. En la Figura 3.53 se muestra a la circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en C, además los puntos L y S trisecan al segmento de extremos A y B. Si C es el foco de la parábola $\mathscr{P}$, determine la ecuación de $\mathscr{P}$.

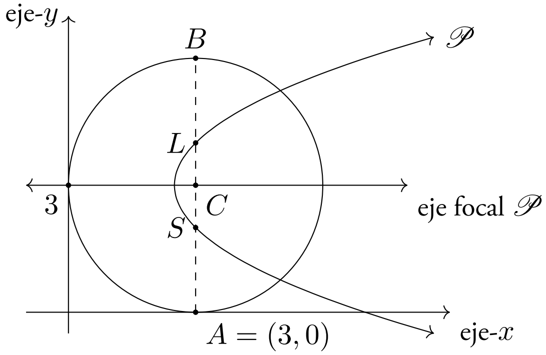


Figura 3.53

Solución. Desde que L y S trisecan al segmento de extremos A y B, y dicho segmento es diámetro de $\mathscr{C}$, se deduce que $d(A,S)=d(S,L)=d(L,B)=2$.

Luego, no es difícil verificar que $S=(3,2)$ y el centro de $\mathscr{C}$ es $C=(3,3)$, el cual es el foco de $\mathscr{P}$. Además, si denotamos por $\mathscr{L}$ a la recta directriz de $\mathscr{P}$, se debe cumplir que $d(S,C)=d(S,\mathscr{L})=1$. Por lo que $\mathscr{L}$ tiene ecuación $x=2$, ver Figura 3.54.

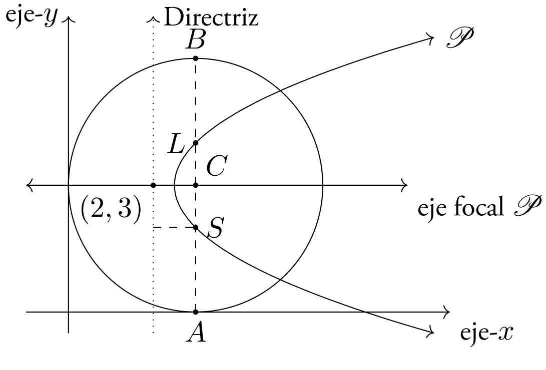


Figura 3.54

Esto nos permite decir que el vértice de $\mathscr{P}$ es $V = (5/2, 3)$. Así, su ecuación es

$$x = a\,(y-3)^2 + \frac{5}{2}$$

y, como $\mathscr{P}$ pasa por S, se tiene que $a = \dfrac{1}{2}$. Por lo tanto, su ecuación es

$$x = \frac{1}{2}(y-3)^2 + \frac{5}{2}.$$

□

Ejercicio 3.36. De la Figura 3.55, V es el vértice de la parábola $\mathscr{P}$ y es el centro del rectángulo $OABC$. Si el área de la región rectangular sombreada es $8u^2$, determine la ecuación de $\mathscr{P}$ si se sabe también que el eje-y es su directriz.

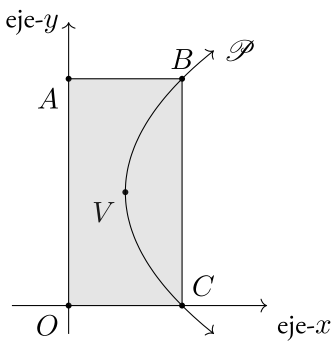


Figura 3.55

Solución. Si C y A tienen coordenadas $(c, 0)$ y $(0, a)$, respectivamente; se deduce que B tiene coordenadas (c, a). Luego, V tiene coordenadas

$$\left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right).$$

Así, la ecuación de $\mathscr{P}$ se puede escribir como

$$x = d\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{c}{2},$$

donde d debe ser un número positivo, pues $\mathscr{P}$ se abre hacia la derecha.

Ahora, desde que el eje de ordenadas es directriz de $\mathscr{P}$, se deduce que el foco tiene coordenadas $F = (c, a/2)$, es decir, el punto medio del segmento de extremos B y C. Luego, se debe cumplir

$$d(F, C) = d(F, \text{eje-}y),$$

esto es,

$$\frac{a}{2} = c.$$

Recordemos que el área es $8\ u^2$, lo cual implica que $ac = 8$. Por ende, tenemos que $c = 2$ y $a = 4$. Además, como $\mathscr{P}$ pasa por B y C, se tiene que

$$\frac{c}{2} = d\left(\frac{a^2}{4}\right) \quad \text{y}$$

de donde se tiene que $d = 1/4$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{P}$ es

$$x = \frac{1}{4}\,(y-2)^2 + 1.$$

□

Ejercicio 3.37. Se tiene la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación $y^2 - 16x = 0$ y la recta de ecuación $x + y - 5 = 0$. Determine los puntos de intersección entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$.

Solución. En la Figura 3.56 se muestran a $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$, así como también a sus puntos de inter-

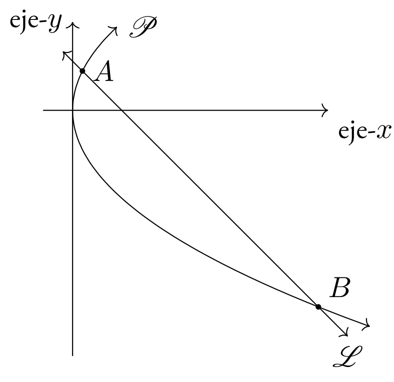


Figura 3.56

sección denotados por A y B.

Para hallar los puntos de intersección entre $\mathscr{P}$ y $\mathscr{L}$ debemos igualar sus ecuación:

$$x = \frac{1}{16}y^2 = 5 - y$$

formando la siguiente ecuación cuadrática

$$y^2 + 16y - 80 = 0,$$

cuyas soluciones son $y_1 = 4$ y $y_2 = -20$. Por lo tanto, $A = (1, 4)$ y $B = (25, -20)$. $\square$

Ejercicio 3.38. Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación $y^2 + 8y + 20x - 84 = 0$. Calcule la suma de coordenadas de su foco, también determine la ecuación de su recta directriz y haga un esbozo de la gráfica de $\mathscr{P}$.

Solución. Primero procedemos a completar cuadrados en la ecuación de $\mathscr{P}$ y obtenemos

$$x = -\frac{1}{20}(y + 4)^2 + 5.$$

Así, su vértice es $V = (5, -4)$. De donde se deduce también que su eje focal tiene por ecuación $y = -4$.

La Figura 3.57 presenta un esbozo de la parábola e indica su eje focal y su directriz; así como también las coordenadas de sus puntos de intersección con el eje de ordenadas.

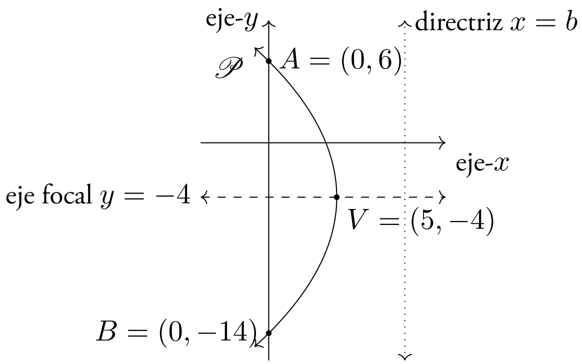


Figura 3.57

Denotemos por F al foco de $\mathscr{P}$, el cual debe tener coordenadas $(a, -4)$. Luego, se debe cumplir

$$d(F, A) = d(A, \text{directriz}),$$

es decir,. $\sqrt{a^2 + 10^2} = b$, lo cual implica que

$$(b + a)(b - a) = 100. \tag{3.5}$$

Por otro lado, también se debe cumplir que

$$d(F, V) = d(V, \text{directriz}),$$

de donde se deduce que $a + b = 10$. Reemplazando esto en (3.5) se obtiene que $b - a = 10$, por ende $a = 0$ y $b = 10$. Por lo tanto, la suma de coordenadas del foco es -4 y la ecuación de la directriz es $x = 10$. □

Ejercicio 3.39. En una parábola $\mathscr{P}$, el eje-y es la directriz y su vértice se ubica en el semieje negativo de las abscisas. Si la distancia de un punto Q, en $\mathscr{P}$, al vértice V y al foco F es 6, determine las coordenadas del baricentro del triángulo con vértices en V, Q y F.

Solución. Si F tiene coordenadas $(-2a, 0)$, se deduce que $V = (-a, 0)$, donde a es un número positivo. Por dato tenemos que

$$d(Q, F) = d(Q, V) = 6,$$

y como $d(Q, F) = d(Q, \text{directriz})$, se tiene que $d(Q, \text{directriz}) = 6$. De la Figura 3.58

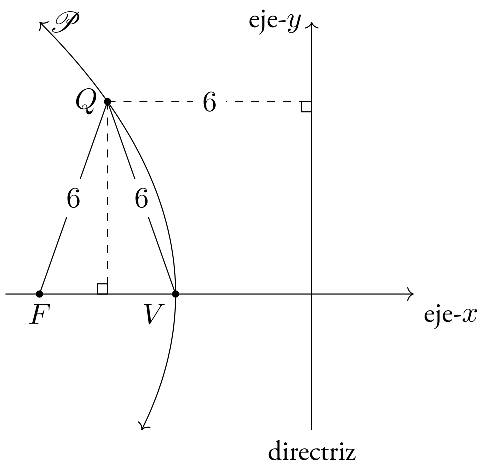


Figura 3.58

se tiene que el punto medio entre F y V tiene coordenadas $(-6, 0) = (-3a/2, 0)$, por consiguiente $a = 4$. Así, $F = (-8, 0)$, $V = (-4, 0)$ y $= (-6, 6)$. Por lo tanto, el baricentro del triángulo FQV tiene coordenadas $(-6, 2)$. □

Ejercicio 3.40. Establezca la ecuación de la parábola cuyo vértice V esta en $(-3, 4)$ y cuyo foco F tiene coordenadas $(-5, 4)$.

Solución. Como las segundas componentes del vértice y del foco permanecen constantes, se trata de una parábola con eje focal horizontal. Desde que $d(V, F) = d(V, \text{directriz})$ se deduce que la directriz es paralela al eje de ordenadas y tiene ecuación $x = -1$, como se aprecia en la Figura 3.59.

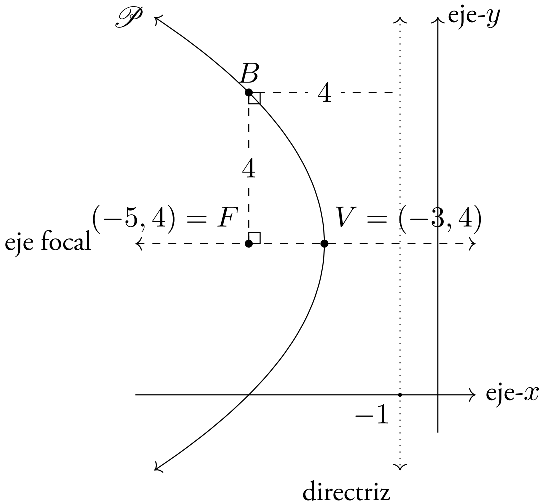


Figura 3.59

Ahora, la ecuación de $\mathscr{P}$ tiene la forma

$$x = a(y - 4)^2 - 3.$$

También se observa de la figura que el punto B, en $\mathscr{P}$, tiene coordenadas $(-5, 8)$. Así, el valor de a es $-1/8$. Por lo tanto, la ecuación es

$$x = -\frac{1}{8}(y - 4)^2 - 3.$$

□

Ejercicio 3.41. Determine la ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}$ cuyos focos tienen coordenadas $(4,0)$ y $(-4,0)$ si la pendiente de una de sus asíntotas es 3.

Solución. Por el Teorema 3.6

$$4^2 = a^2 + b^2,$$

pero como una asíntota tiene pendiente 3, se tiene que

$$\frac{b}{a} = 3,$$

de donde $a = \dfrac{2}{5}\sqrt{10}$ y $b = \dfrac{6}{5}\sqrt{10}$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{H}$ es

$$\frac{x^2}{8/5} - \frac{y^2}{72/5} = 1.$$

Además, la gráfica de $\mathscr{H}$ se muestra en la Figura 3.60.

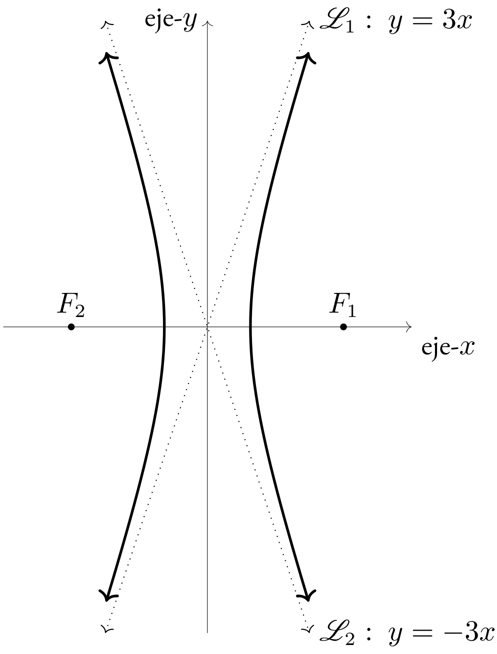


Figura 3.60

$\square$

Ejercicio 3.42. Determine la ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}$ con vértices $(3,-5)$ y $(3,1)$ y cuyas asíntotas tienen ecuaciones

$$y = 2x - 8 \ \text{ e } \ y = -2x + 4.$$

Solución. El punto de intersección de las asíntotas es el centro de la hipérbola; en este caso es $(3,-2)$. Luego, como unas de las asíntotas tiene pendiente 2, se debe cumplir que

$$\frac{b}{a} = 2 \tag{α}$$

Además como es una hipérbola con eje vertical de la Figura 3.61

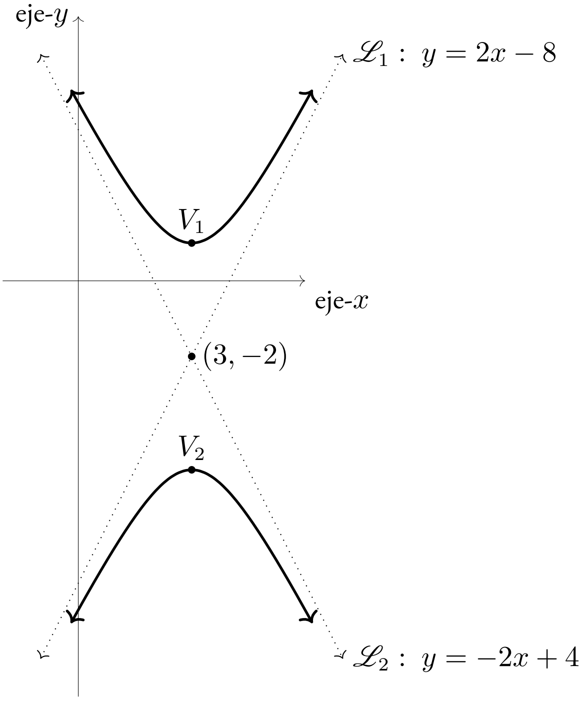


Figura 3.61

se sigue que $b = 3$ y por (α), $a = \dfrac{3}{2}$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{H}$ es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{9/4} = 1.$$

$\square$

Ejercicio 3.43. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la hipérbola $\mathscr{H}$, de ecuación

$$3x^2 - y^2 = 30,$$

trazadas desde el punto de coordenadas $(1, -3)$.

Solución. Sea m la pendiente de una de las rectas tangentes. Luego, la ecuación pendiente-intercepto es

$$y = mx - m - 3.$$

Reemplazando esto en la ecuación de $\mathscr{H}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 3x^2 - (mx - (m+3))^2 &= 30 \\ (3 - m^2)x^2 + 2m(m+3)x - ((m+3)^2 + 30) &= 0. \end{aligned}$$

Como la ecuación cuadrática debe tener solución única, se deduce que

$$(2m(m+3))^2 + 4(3 - m^2)((m+3)^2 + 30) = 0.$$

Para simplificar las cuentas, usemos las siguientes notaciones $a = m^2$ y $b = (m+3)^2$. Así, la ecuación anterior se escribe como

$$4ab + 4(3 - a)(b + 30) = 0,$$

de lo cual se deduce que

$$b + 30 - 10a = 0,$$

lo que a su vez implica la siguiente ecuación cuadrática en términos de la pendiente

$$9m^2 - 6m - 13 = 0$$

que tiene como soluciones a $m = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{10}}{3}$. Así, las ecuaciones punto-pendiente de las rectas tangentes son

$$y + 3 = \frac{1 + 2\sqrt{10}}{3}(x - 1) \text{ e } y + 3 = \frac{1 - 2\sqrt{10}}{3}(x - 1).$$

$\square$

Ejercicio 3.44. Encuentre en la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$9x^2 - 12y^2 = 216$$

el punto más cercano a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $3x + 2y + 1 = 0$.

Solución. La ecuación estándar de $\mathscr{H}$ es

$$\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1,$$

de donde $a = \sqrt{24}$ y $b = \sqrt{18}$. Es claro también que su centro es $(0,0)$. Así, sus asíntotas tienen las siguientes ecuaciones

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x \text{ e } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Luego, la Figura 3.62 muestra la gráfica de $\mathscr{H}$ así como sus asíntotas.

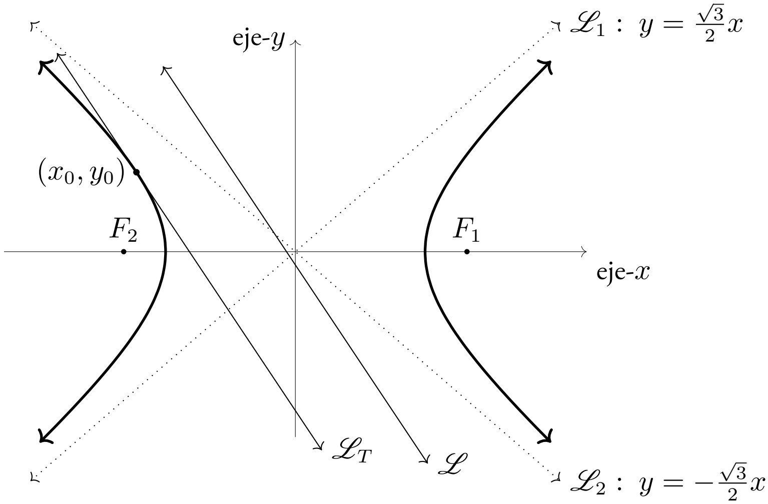


Figura 3.62

Ahora, denotemos por (x_0, y_0) al punto en cuestión y desde que la pendiente de $\mathscr{L}$ es $-\dfrac{3}{2}$ se sigue que la recta que pasa por (x_0, y_0) y es paralela a $\mathscr{L}$ tiene por ecuación

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x_0 + y_0$$

y esta resulta ser tangente a $\mathscr{H}$.

Reemplazando esta información en la ecuación inicial de la hipérbola obtenemos

$$\begin{aligned}9x^2 - 3(-3x + 3x_0 + 2y_0)^2 &= 216\\ 3x^2 - (3x - (3x_0 + 2y_0))^2 &= 72\\ 3x^2 - (9x^2 + (3x_0 + 2y_0)^2 - 6x(3x_0 + 2y_0)) &= 72\\ 6x^2 - 6(3x_0 + 2y_0)x + (3x_0 + 2y_0)^2 + 72 &= 0,\end{aligned}$$

donde esta última ecuación cuadrática tiene solución única, es decir, debe ocurrir que su discriminante se anule.

$$(6(3x_0 + 2y_0))^2 - 4(6)((3x_0 + 2y_0)^2 + 72) = 0,$$

de donde $3x_0 + 2y_0 = \pm 12$. Según la figura debemos tomar $3x_0 + 2y_0 = -12$. Luego, debe darse la siguiente igualdad

$$9x_0^2 - 12y_0^2 = 216$$

de la que se deduce la siguiente ecuación cuadrática

$$y_0^2 - 6y_0 + 9 = 0$$

que tiene como solución $y_0 = 3$, y por ende $x_0 = -6$. Así, el punto más cercano es $(-6, 3)$. $\square$

Ejercicio 3.45. De la Figura 3.63, determine la ecuación de la hipérbola $\mathscr{H}$, si se sabe que el producto de las pendientes de sus asíntotas es -4.

Solución. Desde que el producto de pendientes es -4, se deduce que una pendiente es 2 y la otra es -2. Denotando por C al centro de la hipérbola con coordenadas $(1, k)$. De la figura se nota que la asíntota de pendiente 2 pasa por el origen, de donde se deduce que su ecuación es $y = 2x$, así, $k = 2$. Luego, la distancia del centro al vértice $(1, 6)$ implica que $b = 4$ y como $2 = \frac{b}{a}$ deducimos que $a = 2$. Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y-2)^2}{4^2} - \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1.$$

$\square$

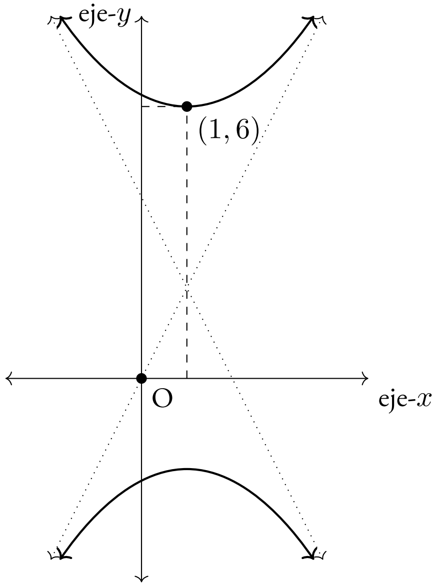


Figura 3.63

Ejercicios propuestos

1. Determine el centro y radio de las siguientes circunferencias:

   a) $x^2 + y^2 - 2y = 0$

   b) $2x^2 + 2(y-1)^2 - 3 = 15$

   c) $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$

   d) $x^2 - 2x + y^2 - y = 0$

   e) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

   f) $2(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 - y^2$

2. Determine la ecuación de la circunferencia de radio 5 y que es tangente a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto $(4, 1)$.

3. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo centro se encuentra sobre el eje de abscisas y pasa por los puntos $A = (1, 3)$ y $B = (4, 6)$.

4. Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro (h, k) en el primer cuadrante, radio r y área $144\pi\ u^2$. Si $h,\ k$ y r son tres términos consecutivos de una progresión geométrica con suma igual a 21, determine la ecuación de $\mathscr{C}$.

5. En la Figura 3.64 los puntos T_1, T_2 y T_3 son tangentes la circunferencia $\mathscr{C}$: determine

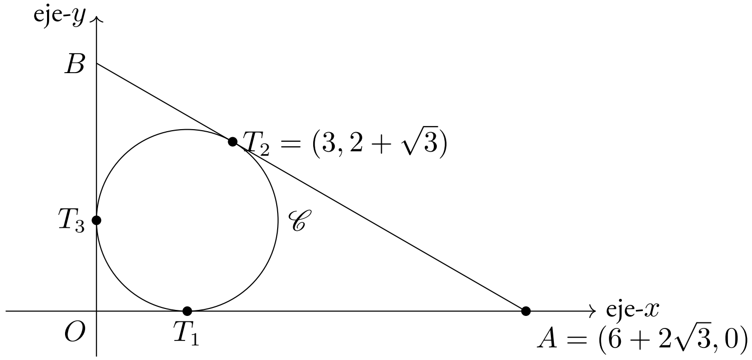


Figura 3.64

la ecuación de $\mathscr{C}$.

6. En la circunferencia $\mathscr{C}$ de ecuación $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 2^2$, indique el punto más cercano y el punto más lejano a la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $y + x - 5 = 0$.

7. Demuestre que para cualquier elección del número b, la ecuación

$$x^2 + y^2 - 2by = 1$$

es la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. ¿Donde está el centro de esta circunferencia?

8. Determine la ecuación de la circunferencia de radio 4, cuyo centro se ubica sobre la recta de ecuación

$$2x + 3y + 6 = 0$$

y es tangente a la recta de ecuación

$$3x + 4y + 12 = 0.$$

9. Sean $\mathscr{C}$ la circunferencia de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, y $\mathscr{L}$ la recta de la ecuación $y = 3x + a$, donde $a \in \mathbb{R}$. Resuelva cada una de las siguientes interrogantes:

   a) ¿Para qué valores de a, $\mathscr{L}$ es tangente a $\mathscr{C}$?

   b) ¿Cuándo $\mathscr{L}$ es secante a $\mathscr{C}$?

   c) ¿Para qué valores de a, el conjunto $\mathscr{L} \cap \mathscr{C}$ es vacío ?

10. Determine la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro tiene como extremos a los puntos de coordenadas $(3, -1)$ y $(-2, -4)$.

11. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes, a la circunferencia de centro $(3, 0)$ y radio 3, trazadas desde el punto de coordenadas $(-3, 0)$.

12. Sean $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ dos circunferencias de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4 \ \text{ y } \ x^2 + y^2 - 8x - 20 = 0,$$

   respectivamente. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección entre las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.

13. En cada caso, determine la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos dados

   a) $(1, 6)$, $(-3, 0)$ y $(2, 5)$.

   b) $(5, 1)$, $(4, 2)$ y $(-2, -6)$.

14. Sean $A = (2, 1)$ y $B = (5, -2)$ dos puntos en el plano cartesiano, determine la ecuación de la circunferencia que pasa por A y B, tiene radio 15 y su centro se encuentra en el primer cuadrante.

15. Sean $\mathscr{C}$ una circunferencia y $\mathscr{L}$ una recta, de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 20 \ \text{ y } \ 10 - 3x - 3y = 0,$$

   respectivamente. Si A y B son los puntos de intersección entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{L}$, demuestre que para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$ se cumple que la siguiente ecuación

$$x^2 + y^2 - 20 + a(10 - 3x - 3y) = 0$$

   representa una circunferencia que pasa por A y B.

16. Indique si las siguientes ecuaciones corresponden a elipses; en caso afirmativo, determine su centro, sus vértices, sus focos y brinde un esbozo de su gráfica.

a) $5x^2 + 4y^2 - 30x - 4y + 46 = 0$

b) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

c) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$

17. En los siguientes ejercicios determine la ecuación, en la forma canónica, para la elipse que satisfaga las condiciones dadas:

    a) Focos $(\pm 2, 0)$, longitud del eje mayor es 10.

    b) Los vértices son $(\pm 4, 0)$ y $(0, \pm 5)$

    c) Dos vértices tienen coordenadas $(0, \pm 6)$ y longitud del eje menor es 8.

    d) Dos vértices tienen coordenadas $(1, -4)$ y $(1, 8)$, y la longitud del eje menor 8.

    e) Los focos son $(1, -4)$ y $(5, -4)$, los vértices asociados al eje mayor son $(0, -4)$ y $(6, -4)$.

    f) Los vértices asociados al eje mayor son $(3, -7)$ y $(3, 3)$, y la longitud del eje menor es 6.

18. Determine la ecuación de la elipse $\mathscr{E}$ tal que para todo $P \in \mathscr{E}$ se tiene que

$$d(P, (3, 0)) + d(P, (-3, 0)) = 16.$$

19. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas tangentes a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

en los puntos $(3, 3.2)$ y $(-3, 3.2)$. Calcule el punto de intersección entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$.

20. Encuentre dos puntos en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

tales que las rectas tangentes en ellos sean paralelas a la recta de ecuación $y = 2x$.

21. Dada la elipse de ecuación $x^2 + 5y^2 = 1$, determine sus focos.

22. Calcule el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse de ecuación $9x^2 + 5y^2 = 1$ y los otros coinciden con los extremos de su eje menor.

23. Halle la ecuación de la elipse con radio mayor 13 y sus focos son $(-10, 0)$ y $(14, 0)$.

24. Indique los puntos de intersección entre la recta de ecuación $x + 2y - 7 = 0$ y la elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 = 25$.

25. Sea $\mathscr{E}$ la elipse de ecuación
$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$
Determine los valores de m, de forma que la recta de ecuación $y = -x + m$

- corta a $\mathscr{E}$,
- es tangente a $\mathscr{E}$,
- no corta a $\mathscr{E}$.

26. Dada la elipse $\mathscr{E}$ y la recta $\mathscr{L}$ de ecuaciones
$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 5 \text{ y } 3x + 2y + 7 = 0,$$
respectivamente; determine la ecuación de la recta tangente a $\mathscr{E}$ y paralela a $\mathscr{L}$ con y-intercepto positivo.

27. Sean m y n dos números reales diferentes y positivos. Las elipses $\mathscr{E}_1$ y $\mathscr{E}_2$ de ecuaciones
$$n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2 = 0 \text{ y } m^2x^2 + n^2y^2 - m^2n^2 = 0$$
se cortan en cuatro puntos situados en una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, determine el radio de esta circunferencia en términos de m y n.

28. Grafique y calcule el vértice de cada una de las siguientes parábolas cuyas ecuaciones son:

    a) $y = 4x^2 + 12x + 9$
    b) $y = -x^2 + 4x - 5$
    c) $y = 2x^2 - 4x + 3$
    d) $y = -3x^2 + 6x - 5$

29. Con respecto al ítem anterior, determine los puntos de intersección de las parábolas con los ejes coordenados.

30. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación
$$y = x^2 - 4x + 5,$$
determine la ecuación de la recta tangente a $\mathscr{P}$ en el punto $(0, 5)$.

31. Sea $\mathscr{P}$ la parábola de ecuación

$$y = (x-1)^2 + b$$

tal que la recta de ecuación $y = -2x + 4$ es tangente a ella en el punto $(0, 4)$. Encuentre el valor de b.

32. En la Figura 3.65 se muestra la gráfica de la parábola $\mathscr{P}$, donde el punto F y el eje-y son su foco y su recta directriz, respectivamente. Determine el área de la región sombreada en términos de a.

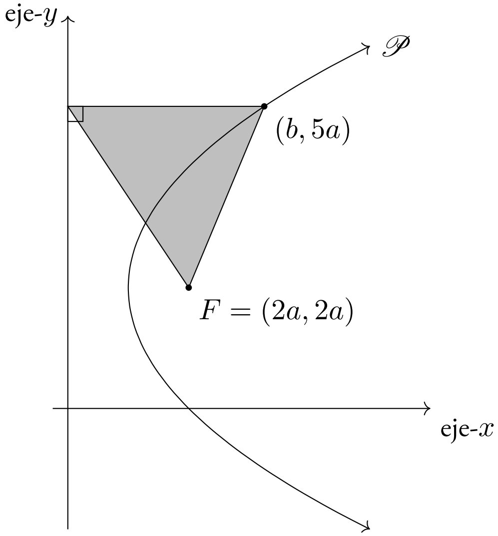


Figura 3.65

33. Una parábola $\mathscr{P}$ tiene su vértice V en el semieje negativo del eje de abscisas. Además, $\mathscr{P}$ pasa por los puntos $A = (0, -3)$ y $B = (0, 3)$. Determine la ecuación de $\mathscr{P}$ si $d(V, A) = 5$.

34. De la Figura 3.66, la ecuación de la parábola $\mathscr{P}$ es $y^2 - 9x = 0$ y la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ es $2 + x - y = 0$. Calcule el ángulo α.

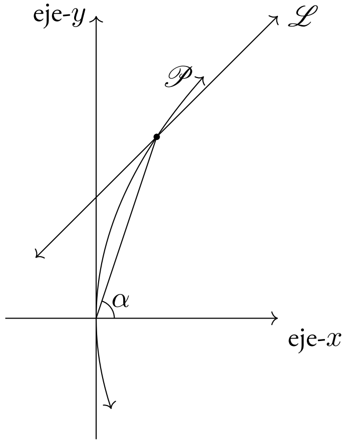


Figura 3.66

35. Según la Figura 3.67, el eje-y, la recta $\mathscr{L}$, F y V son la directriz, el eje focal, el foco y el vértice de la parábola $\mathscr{P}$, respectivamente. Si $d(A,B) = 1/2$, $d(A,F) = 1$ y $d(F,E) = 3$; determine la ecuación de $\mathscr{P}$.

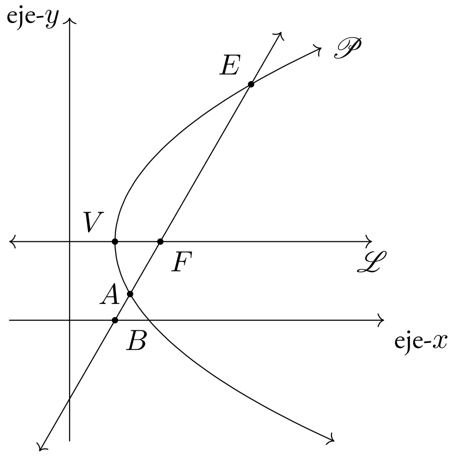


Figura 3.67

36. Determine la ecuación y los elementos de la elipse que tiene como vértice y un foco en común con la parábola de ecuación $y^2 + 4x = 32$ y que tiene su otro foco en el origen.

37. Calcule el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 6x$ con las rectas bisectrices de los cuadrantes .

38. Encuentre los puntos que equidistan de $A = (-3, -2)$ y $B = (7, 4)$, y pertenecen a la parábola de ecuación $x = y^2 - 5y + 6$.

39. Determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2 - 5x + 5$ en los puntos cuya abscisa es igual a la ordenada.

40. Dada la parábola de ecuación $x^2 = 4y$ y la recta de ecuación $3x - 4y + 4 = 0$, determine el ángulo que forman las rectas tangentes a la parábola en sus intersecciones con la recta dada.

41. Determine la ecuación de la circunferencia con centro ubicado en el foco de la parábola de ecuación
$$y^2 - 8x = 0,$$
si se sabe que la circunferencia es tangente a la recta directriz de dicha parábola.

42. Dados el foco $(-3, -4)$ y la recta directriz $\mathscr{L}$, de ecuación $x + 1 = 0$, de la parábola $\mathscr{P}$; determine sus puntos de intersección con los ejes coordenados.

43. Sea $\mathscr{P}$ la parábola con foco en $(0, 1/4)$, cuya recta directriz es paralela al eje de abscisas y pasa por el punto $(0, -1/4)$; determine la ecuación de $\mathscr{P}$.

44. Calcule la distancia entre los dos puntos de intersección entre la recta y parábola de ecuaciones
$$x = 2y - 3 \text{ y } 4x = y^2,$$
respectivamente.

45. Determine la ecuación de la parábola con eje focal horizontal y que pasa por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

46. Calcule el valor de a tal que el punto de coordenadas $(4, a)$ pertenece a la parábola $\mathscr{P}$, si se sabe que $\mathscr{P}$ tiene eje vertical, pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(5, 1)$, y la recta de ecuación $y + 8 = 0$ tiene un único punto de intersección con ella.

47. Dada la parábola de ecuación

$$3y^2 - 8x - 6y - 29 = 0,$$

determine la ecuación de su recta directriz.

48. Sean $\mathscr{P}$ una parábola, $\mathscr{L}$ una recta de ecuación $3x+7y+1=0$ y $F=(2,1)$. Si $\mathscr{P}$ tiene foco en F, vértice sobre $\mathscr{L}$ y recta directriz paralela al eje de abscisas, determine su ecuación.

49. Para cada una de las siguientes hipérbolas determine las coordenadas del centro:

   a) $\mathscr{H}_1: \ 3x^2 - 2y^2 - 4y - 26 = 0$
   b) $\mathscr{H}_2: \ 9x^2 - 4y^2 + 36x - 16y - 16 = 0$
   c) $\mathscr{H}_3: \ 49y^2 - 4x^2 + 98y - 48x - 291 = 0$
   d) $\mathscr{H}_4: \ 9x^2 - 4y^2 + 90x + 189 = 0$
   e) $\mathscr{H}_5: \ x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$
   f) $\mathscr{H}_6: \ 4y^2 - 9x^2 + 8y - 54x - 81 = 0$

50. Con respecto al ítem anterior, determine las coordenadas de los vértices.

51. Como continuación del ejercicio anterior, determine las ecuaciones de las asíntotas.

52. Muestre que toda recta paralela, pero diferente, a una de las asíntotas de una hipérbola, con eje horizontal o vertical, corta a la hipérbola en un solo punto. Además, muestre que por el centro de una hipérbola no pasa una recta tangente a ella.

53. Determine el conjunto de puntos (x,y) cuya distancia al punto $(0,4)$ es igual a $\frac{4}{3}$ de la correspondiente a la recta de ecuación $4x - 9 = 0$.

54. Dada la hipérbola de ecuación

$$9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$$

determine las coordenadas de sus focos.

55. Sean $A = (-2,1)$ y $B = (4,5)$; determine el conjunto de puntos $P = (x,y)$ tales que

$$\mathrm{rc}(P,A)\mathrm{rc}(P,B) = 3.$$

56. Calcule los puntos de intersección entre las hipérbolas $\mathscr{H}_1$ y $\mathscr{H}_2$ de ecuaciones

$$x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0 \text{ y } 3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0 \,,$$

respectivamente.

57. Sea $\mathscr{E}$ la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Encuentre la ecuación de la hipérbola cuyos vértices y focos se encuentran en los focos y vértices de $\mathscr{E}$, respectivamente.

58. Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas, un vértice en el punto $(6, 0)$ y una asíntota de ecuación $4x - 3y = 0$.

59. Clasifique las siguientes cónicas:

    a) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$
    b) $x^2 + 3y^2 + 2x + 6y + 2 = 0$
    c) $y^2 + 2y - 4x - 7 = 0$
    d) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$
    e) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$
    f) $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$
    g) $x^2 + 4(y^2 - x) + 8(y - 1) = 0$
    h) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$
    i) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$

60. Demuestre el Teorema 3.6.

4
Transformaciones de coordenadas

En este capítulo consideraremos las siguientes transformaciones de coordenadas: *traslación*, *rotación* y *re-escalamiento*. Dada una figura en el plano cartesiano asumiremos que este no se moverá mediante una de estas transformaciones, sino que sus coordenadas en el sistema XY cambiarán con respecto a los nuevos ejes coordenados $X'Y'$.

Traslación

Una *traslación* T es una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que lleva el sistema de coordenadas XY a otro $X'Y'$ de forma que las abscisas y ordenadas de ambos sistemas son paralelos, coloquialmente hablando, graficaremos un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ cuyo centro será dado por un punto en el sistema de coordenadas XY, ver Figura 4.1. Esto implica que un punto $P = (x, y)$ en el sistema XY tendrá otras coordenadas, digamos (x', y') en el sistema $X'Y'$. Así, si O$'$ tiene coordenadas (h, k) en el sistema XY, entonces tenemos que las nuevas coordenadas son:

$$x' = x - h \text{ y } y' = y - k. \tag{4.1}$$

Denotaremos por $T_{(h,k)}$ a la traslación del sistema XY al punto de coordenadas (h, k) y escribiremos:

$$T_{(h,k)}(x, y) = (x', y').$$

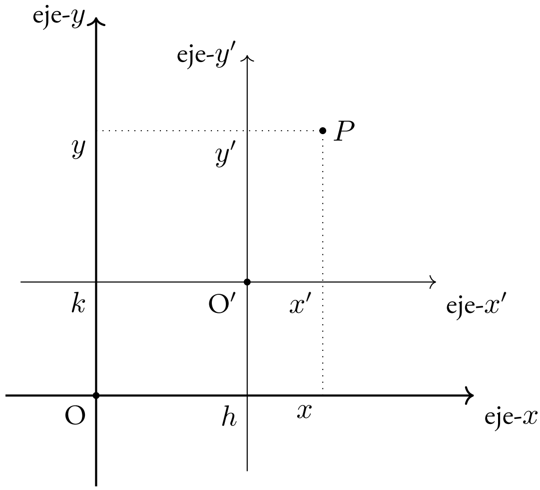


Figura 4.1

El siguiente ejemplo nos muestra cómo usar las ecuaciones (4.1) para calcular las nuevas coordenadas de un punto dado.

Ejemplo 4.1. El punto P tiene coordenadas $(5, 5)$ en el sistema XY, pero en el sistema trasladado, al punto O′ de coordenadas $(-1, 1)$ en el sistema XY, sus coordenadas vienen dadas por

$$T_{(-1,1)}(5, 5) = (5 - (-1), 5 - 1) = (6, 4).$$

El siguiente ejemplo nos muestra como usar las ecuaciones (4.1) para calcular el punto donde se trasladó el nuevo sistema.

Ejemplo 4.2. El punto P tiene coordenadas $(4, 7)$ en el sistema XY, pero en el sistema trasladado tiene coordenadas $(3, 3)$. Así, se debe cumplir que

$$T_{(h,k)}(4, 7) = (4 - h, 7 - k) = (3, 3),$$

de donde O′ tiene coordenadas $(1, 4)$ en el sistema XY.

Rotación

La *rotación* es una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que consiste en rotar los ejes coordenados un ángulo en sentido antihorario, ver Figura 4.2. Esto implica que un punto $P = (x, y)$ en el sistema XY debe tener otras coordenadas, digamos (x', y') en el nuevo sistema $X'Y'$. Así, si el ángulo de rotación es θ, entonces se obtiene que

$$x' = x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \text{ e } y' = -x\sin(\theta) + y\cos(\theta). \tag{4.2}$$

Se deja como ejercicio para el lector interesado mostrar las igualdades anteriores. Luego, se denota por Rot_θ a la rotación de ángulo θ y se escribe la transformación como sigue:

$$Rot_\theta(x, y) = (x', y').$$

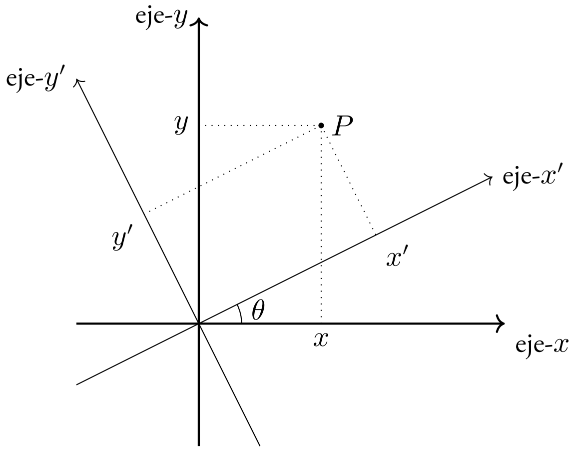


Figura 4.2

El siguiente ejemplo nos muestra cómo usar las ecuaciones (4.2) para determinar las nuevas coordenadas de un punto dado.

Ejemplo 4.3. Si el sistema XY es rotado $30°$ en sentido antihorario, entonces el punto de coordenadas $(6, 4)$ en el sistema XY tiene las siguientes coordenadas en el nuevo sistema:

$$\begin{aligned} Rot_{30°}(6, 4) &= (6\cos(30°) + 4\sin(30°), -6\sin(30°) + 4\cos(30°)) \\ &= (2\sqrt{3} + 2, 2\sqrt{3} - 3). \end{aligned}$$

Re-escalamiento

Sean h y k dos números positivos, se define el *re-escalamiento* como una función de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ denotado por $E_{(h,k)}$ tal que

$$E_{(h,k)}(x,y) = (x', y'), \tag{4.3}$$

donde $x' = x/h$ e $y' = y/k$.

Los siguientes dos casos nos ayudarán a entender mejor esta transformación. Primero, para $k = 1$, se tiene que el eje de ordenadas es el mismo para ambos sistemas. En este caso, si $h = 2$, un número mayor que uno, entonces un punto $P = (2,2)$ al aplicarle la transformación $E_{(2,1)}$ se obtiene el punto $P' = (1,2)$, ver Figura 4.3.

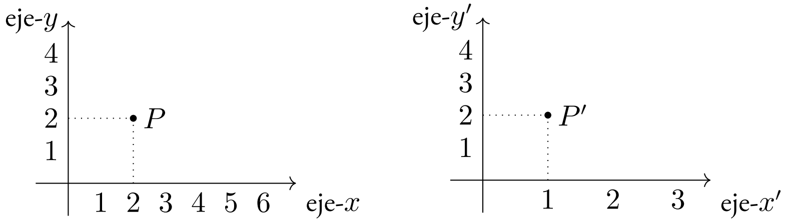


Figura 4.3

Análogamente, si $h = 1/2$, un número menor que uno, entonces el punto $P = (2,2)$ al aplicarle la transformación $E_{(1/2,1)}$ se obtiene el punto $P' = (4,2)$, ver Figura 4.4.

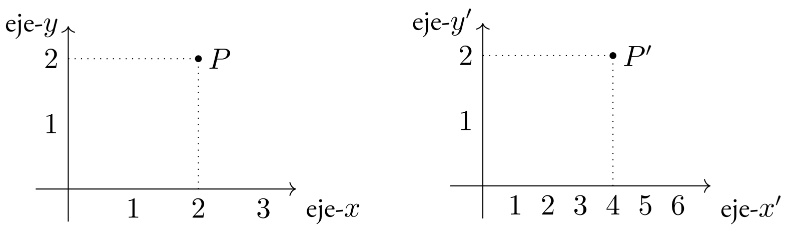


Figura 4.4

Este caso es denominado *re-escalamiento horizontal*. Cuando $h > 1$, la interpretación geométrica es que el eje-x se expande. De manera similar, cuando $h < 1$ el eje-x se contrae.

Asimismo, para $h = 1$, se tiene que las abscisas en ambos sistemas son iguales. En este caso, si $k > 1$, por ejemplo $k = 2$, entonces un punto cualquiera, digamos $P = (3, 4)$ al aplicar la transformación $E_{(1,2)}$ se obtiene el punto $P' = (3, 2)$, ver Figura 4.5.

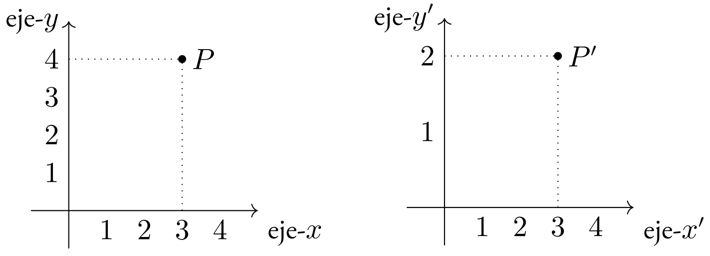


Figura 4.5

Si $k < 1$, se obtiene la situación inversa.

Este segundo caso es denominado *re-escalamiento vertical* y cuando k es mayor que uno, el eje-y se expande y cuando k es menor que uno, el eje-y se reduce.

Veamos a continuación un ejemplo.

Ejemplo 4.4. El punto de coordenadas $(4, 12)$ re-escalado con $h = 2$ y $k = 3$ tiene coordenadas, en el nuevo sistema $X'Y'$, $E_{(2,3)}(4, 12) = (2, 4)$.

Ejercicios resueltos

1. Determine la traslación $T_{(h,k)}$ para que el punto de coordenadas $(5, 8)$ en el sistema XY tenga por coordenadas $(7, 11)$ en el nuevo sistema de coordenadas.

   Solución. Piden determinar los valores de h y k tales que

   $$(7, 11) = T_{(h,k)}(5, 8),$$

   es decir, las soluciones de las ecuaciones

   $$7 = 5 - h \text{ y } 11 = 8 - k,$$

   de donde se deduce que $h = -2$ y $k = -3$. Por lo tanto, la transformación de coordenadas es la traslación al punto $(-2, -3)$, es decir,

   $$T_{(h,k)}(x, y) = (x + 2, y + 3).$$

   □

2. Determine las nuevas coordenadas del punto $(3,5)$ luego de aplicar las siguientes transformaciones $T_{(1,1)}$, Rot_{45° y $E_{(\sqrt{2},\sqrt{2})}$; esto es,

$$E_{(\sqrt{2},\sqrt{2})}(Rot_{45^\circ}(T_{(1,1)}(3,5))).$$

A esto último se les denomina composición de transformaciones, y en este caso es denotado por $E_{(\sqrt{2},\sqrt{2})} \circ Rot_{45^\circ} \circ T_{(1,1)}$.

Solución. Primero, es claro que $T_{(1,1)}(3,5) = (2,4)$. Así,

$$Rot_{45^\circ}(T_{(1,1)}(3,5)) = Rot_{45^\circ}(2,4) = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Finalmente,

$$E_{(\sqrt{2},\sqrt{2})}(Rot_{45^\circ}(T_{(1,1)}(3,5))) = E_{(\sqrt{2},\sqrt{2})}(3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (3,1).$$

□

3. Sea $\theta \in [0, 2\pi]$, demuestre que para cualesquiera dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$d(P,Q) = d(Rot_\theta(P), Rot_\theta(Q)).$$

Es decir, la distancia entre puntos se mantiene a pesar de que el sistema de coordenadas cambie al aplicar la transformación de rotación.

Solución. Consideremos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Luego, sus coordenadas en el sistema rotado son

$$\begin{aligned} Rot_\theta(P) &= (x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta) \\ Rot_\theta(Q) &= (x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta). \end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que

$$d(Rot_\theta(P), Rot_\theta(Q)) = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2},$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta x' &= (x_1 - x_2)\cos\theta + (y_1 - y_2)\sin\theta, \\ \Delta y' &= (y_1 - y_2)\cos\theta + (x_2 - x_1)\sin\theta. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}(\Delta x')^2+(\Delta y')^2 =&((x_1-x_2)\cos\theta+(y_1-y_2)\sin\theta)^2+\\ &((y_1-y_2)\cos\theta+(x_2-x_1)\sin\theta)^2\\ =&(x_1-x_2)^2\cos^2\theta+(y_1-y_2)^2\sin^2\theta+\\ &2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\sin\theta\cos\theta+\\ &(y_1-y_2)^2\cos^2\theta+(x_2-x_1)^2\sin^2\theta+\\ &2(y_1-y_2)(x_2-x_1)\sin\theta\cos\theta\\ =&((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)\cos^2\theta+\\ &((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)\sin^2\theta\\ =&(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\ =&(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que $d(Rot_\theta(P), Rot_\theta(Q)) = d(P,Q)$. □

4. Sean $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ dos rectas de ecuaciones

$$y-2x-7=0 \text{ y } 2x+4y+12=0,$$

respectivamente. Determine sus ecuaciones en el sistema trasladado al punto de intersección entre dichas rectas.

Solución. Igualando ambas ecuaciones obtenemos el punto de intersección entre las rectas, el que tiene coordenadas $(-4,-1)$. Luego, la traslación del sistema a dicho punto implica que

$$T_{(-4,-1)}(x,y) = (x+4, y+1),$$

de donde se obtiene que

$$x = x'-4 \text{ e } y = y'-1.$$

Por lo tanto, reemplazando esta información en las ecuaciones de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, respectivamente, se obtiene que

$$(y'-1)-2(x'-4)-7=0 \text{ y } 2(x'-4)+4(y'-1)+12=0,$$

al simplicar se reduce a

$$y'-2x'=0 \text{ y } 2x'+4y'=0.$$

La Figura 4.6 representa geométricamente las rectas en ambos sistemas. □

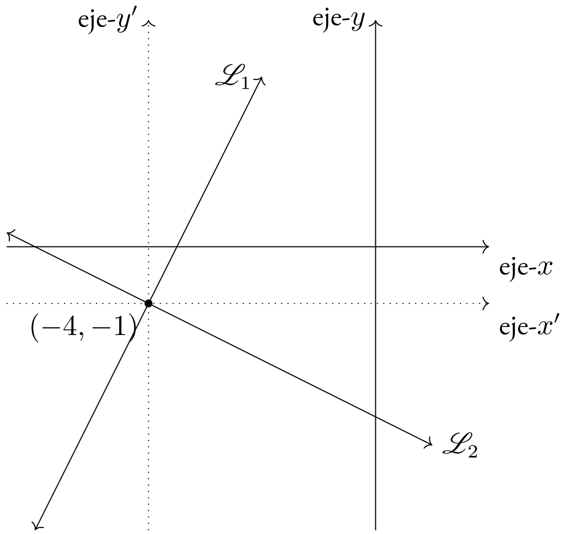


Figura 4.6

5. Demuestre que la pendiente de una recta es invariante por traslación, es decir, dada la recta $\mathscr{L}$ con pendiente m y $T_{(h,k)}$ una traslación del sistema de coordenadas, se tiene que $T_{(h,k)}(\mathscr{L})$ es una recta de pendiente m.

   Solución. Consideremos la recta $\mathscr{L}$ con ecuación punto-pendiente

$$y = mx + b,$$

   donde b es su y-intercepto. Ahora, desde que

$$(x', y') = T_{(h,k)}(x, y) = (x - h, y - k),$$

   se tiene que $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Luego, reemplazando en la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ se obtiene

$$y' + k = m(x' + h) + b,$$

   que luego de simplificar resulta ser equivalente a

$$y' = mx' + (b + mh - k).$$

   Esto muestra que $T_{(h,k)}(\mathscr{L})$ sigue siendo una recta de pendiente m. $\square$

6. Dada la circunferencia $\mathscr{C}$ de ecuación

$$x^2 + y^2 = 16,$$

determine su ecuación luego de aplicar el re-escalamiento $E_{(4,4)}$.

Solución. Notemos primero que

$$(x', y') = E_{(4,4)}(x, y) = \left(\frac{x}{4}, \frac{y}{4}\right).$$

Por otro lado, la ecuación de $\mathscr{C}$ puede escribirse como

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

esto implica que ella se puede escribir como $(x')^2 + (y')^2 = 1$ en el nuevo sistema. La Figura 4.7 nos muestra las gráficas de ambas circunferencias $\square$

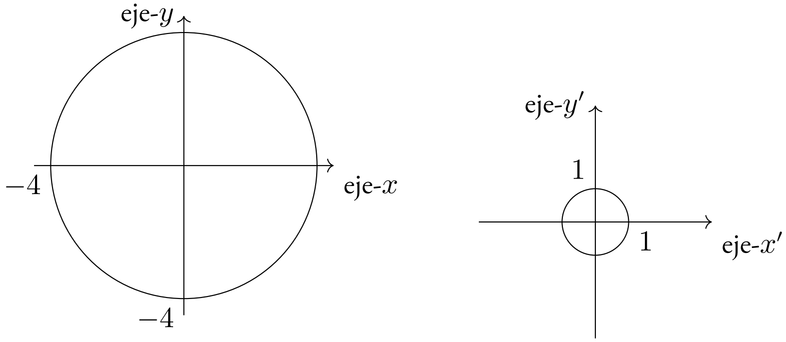


Figura 4.7

7. Considere la circunferencia $\mathscr{C}$ de ecuación $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 2$. Determine la ecuación de $\mathscr{C}$ en el sistema trasladado al punto $(-1, 1)$. Además, grafique $\mathscr{C}$ en ambos sistemas.

Solución. Primero completamos cuadrados y obtenemos que $\mathscr{C}$ tiene por ecuación estándar

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2, \tag{4.4}$$

de donde se observa que su centro tiene coordenadas $(-1, 1)$ y su radio es 2. Ahora, trasladamos el sistema al punto $(-1, 1)$, esto significa que

$$(x', y') = T_{(-1,1)}(x, y)$$

o equivalentemente

$$x' = x + 1 \text{ e } y' = y - 1,$$

de donde la ecuación (4.4) se reduce a

$$(x')^2 + (y')^2 = 2^2,$$

que es la ecuación de $\mathscr{C}$ en el sistema trasladado. Finalmente, la Figura 4.8 representa la gráfica de $\mathscr{C}$ en ambos sistemas. $\square$

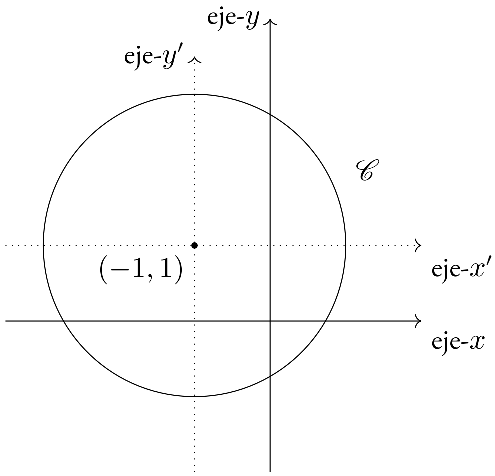


Figura 4.8

8. Dada la circunferencia $\mathscr{C}$ de ecuación:

$$x^2 + y^2 = 225,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto de intersección entre las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tangentes a $\mathscr{C}$, que pasan por $(9, 12)$ y $(9, -12)$, respectivamente.

Solución. Es claro que dichos puntos pertenecen a la circunferencia. Desde que el centro tiene coordenadas $(0,0)$ se sigue que las pendientes de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son $-\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{3}{4}$, respectivamente. Así, ellas tienen por ecuación:

$$\mathscr{L}_1 : y - 12 = -\frac{3}{4}(x-9) \text{ y}$$
$$\mathscr{L}_2 : y + 12 = \frac{3}{4}(x-9)$$

Luego, el punto de intersección entre las rectas tangentes tiene coordenadas $(25,0)$, de donde

$$(x', y') = T_{(25,0)}(x,y) = (x-25, y),$$

es decir que $x = x' + 25$ e $y = y'$. Ahora, reemplazamos esta información en la ecuación de la circunferencia y obtenemos

$$(x'+25)^2 + (y')^2 = 225.$$

La Figura 4.9 representa la circunferencia en ambos sistemas. $\square$

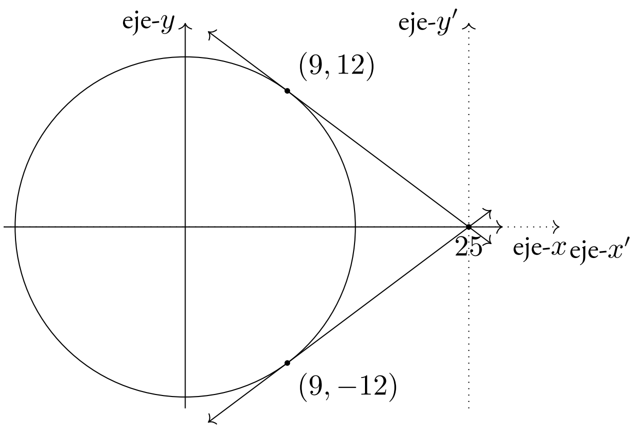


Figura 4.9

9. Dada la elipse $\mathscr{E}$ de ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, determine la ecuación de $\mathscr{E}$ en el sistema trasladado al punto $(1,1)$. Además, grafique $\mathscr{E}$ en ambos sistemas.

Solución. La ecuación estándar de $\mathscr{E}$ es

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1. \tag{4.5}$$

De la traslación del sistema al punto $(1, 1)$ se tiene que

$$(x', y') = T_{(1,1)}(x, y) = (x - 1, y - 1),$$

de donde

$$x = x' + 1 \ \text{ e } \ y = y' + 1.$$

Por lo tanto, la ecuación (4.5) se reduce a

$$\frac{(x' + 1)^2}{3^2} + \frac{(y' + 1)^2}{2^2} = 1,$$

siendo esta la ecuación de $\mathscr{E}$ en el sistema trasladado. Finalmente, la Figura 4.10 muestra la gráfica de $\mathscr{E}$ en ambos sistemas. $\square$

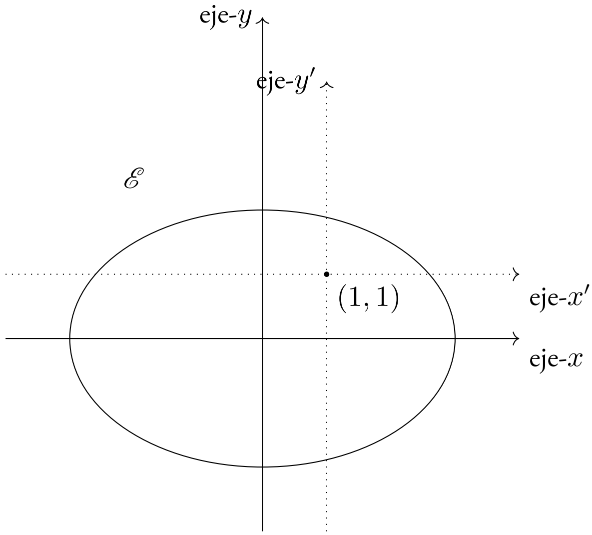


Figura 4.10

10. Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

determine su ecuación luego de aplicar el re-escalamiento $E_{(3,2)}$.

Solución. Desde que

$$(x', y') = E_{(3,2)}(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\right)$$

se sigue que la ecuación de la elipse luego del re-escalamiento se escribe como

$$(x')^2 + (y')^2 = 1,$$

la cual representa una circunferencia con centro en el origen y radio 1. La Figura 4.11 muestra la elipse en el sistema inicial y luego en el sistema re-escalado. $\square$

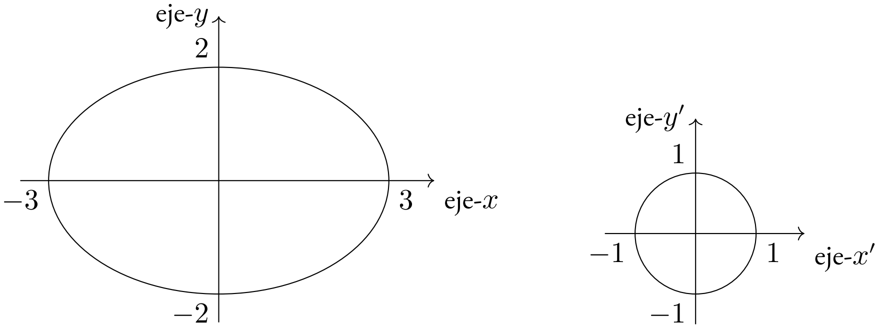


Figura 4.11

11. Dada la elipse de ecuación
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$
determine su ecuación al rotar el sistema $90°$.

Solución. Notemos primero que

$$(x', y') = Rot_{90°}(x, y) = (y, -x),$$

de donde $x = -y'$ e $y = x'$. Reemplazando en la ecuación de la elipse obtenemos

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1.$$

La Figura 4.12 representa la elipse en ambos sistemas. $\square$

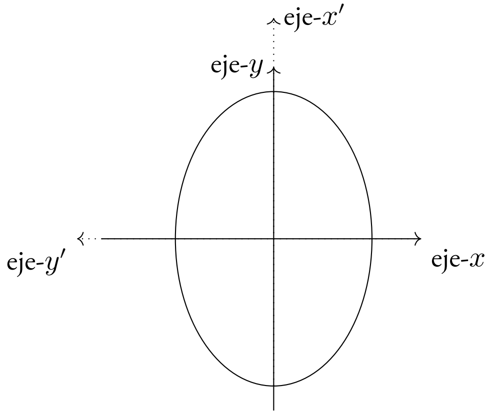


Figura 4.12

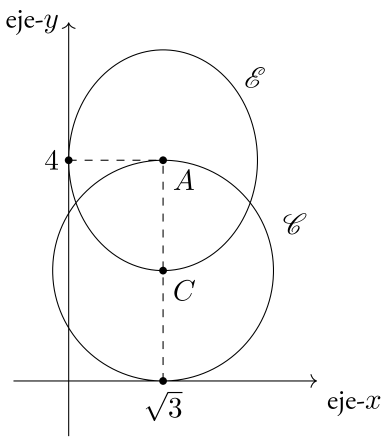


Figura 4.13

12. De la Figura 4.13 se tiene que C es el centro de la circunferencia ($\mathscr{C}$) y A es el centro de la elipse ($\mathscr{E}$). Calcule las transformaciones S y P tales que $S(\mathscr{C}) = \mathscr{E}$ y $P(\mathscr{E}) = \mathscr{C}$.

Solución. Por un ejercicio del capítulo precedente $\mathscr{C}$ y $\mathscr{E}$ tienen ecuaciones:

$$(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2=2^4 \text{ y } \frac{(x-\sqrt{3})^2}{3}+\frac{(y-4)^2}{4}=1,$$

respectivamente.

Ahora, si queremos $S(\mathscr{C})=\mathscr{E}$ entonces primero notemos que

$$\mathscr{E}: \frac{(x'-\sqrt{3})^2}{3}+\frac{(y'-4)^2}{4}=1 \leftrightarrow \left(\frac{x'-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{y'-4}{2}\right)^2=1.$$

Luego,

$$\mathscr{C}: (x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2=2^2 \leftrightarrow \left(\frac{x-\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{y-2}{2}\right)^2=1.$$

Por lo cual exigimos que ocurra lo siguiente:

$$\frac{x-\sqrt{3}}{2}=\frac{x'-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ y } \frac{y-2}{2}=\frac{y'-4}{2},$$

de donde

$$x'=\frac{x-\sqrt{3}+2}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \text{ e } y'=y+2,$$

es decir, primero se hizo una traslación del sistema al punto $(\sqrt{3}-2,-2)$ y luego el re-escalamiento $E_{(2/\sqrt{3},1)}$.

De manera similar se procede para $P(\mathscr{E})=\mathscr{C}$ y obtenemos

$$x'=\frac{x-2\sqrt{3}+3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ e } y'=y-2.$$

$\square$

13. Dada la parábola de ecuación $y=x^2+2x$, determine su ecuación en el sistema trasladado al punto $(-1,2)$. Grafique la parábola en ambos sistemas.

    Solución. Primero notemos que luego de completar cuadrados, la parábola tiene por ecuación estándar

$$y=(x+1)^2-1.$$

Ahora, el sistema trasladado tiene coordenadas dadas por la siguiente expresión:

$$(x', y') = T_{(-1,2)}(x, y) = (x + 1, y - 2),$$

de donde $x = x' - 1$ e $y = y' + 2$. Luego, reemplazamos esta información en la ecuación de la parábola y obtenemos

$$y' = (x')^2 - 3.$$

La Figura 4.14 nos muestra la gráfica de la parábola en ambos sistemas. $\square$

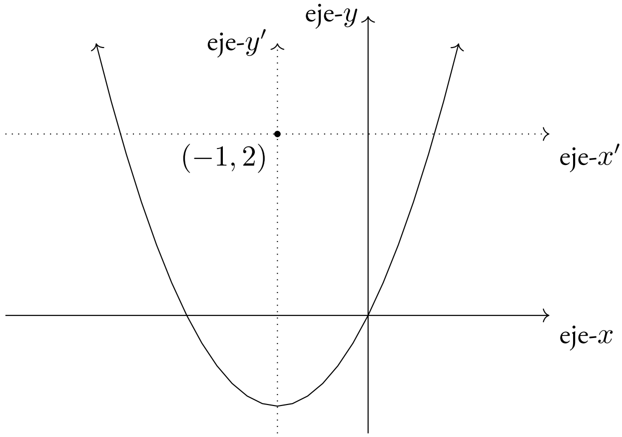


Figura 4.14

14. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación $x = y^2$, determine su ecuación al rotar el sistema $180°$ en sentido antihorario.

    Solución. Es claro que

    $$(x', y') = Rot_{180°}(x, y) = (-x, -y),$$

    de donde $x = -x'$ e $y = -y'$. Luego, se reemplaza esta información en la ecuación de $\mathscr{P}$ y se obtiene que

    $$x' = -(y')^2.$$

    La Figura 4.15 representa $\mathscr{P}$ en ambos sistemas. $\square$

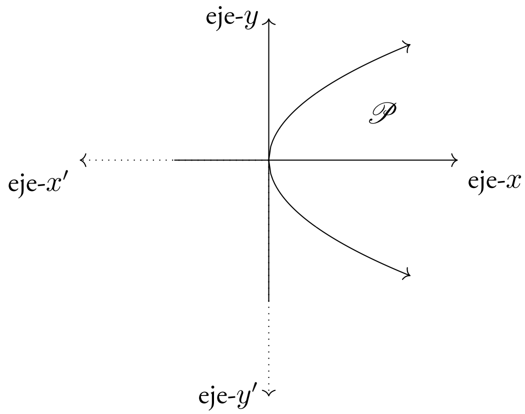


Figura 4.15

15. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$4y = x^2 - 6x + 17,$$

determine su ecuación en el nuevo sistema que se obtiene primero de trasladar el sistema a $(3, 2)$ y luego de aplicar el re-escalamiento $E_{(2,1)}$.

Solución. Notemos que, luego de completar cuadrados, la ecuación de $\mathscr{P}$ se escribe como

$$y = \frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2.$$

Ahora, la ecuación de $\mathscr{P}$ en el sistema trasladado se obtiene del siguiente hecho:

$$T_{(3,2)}(x, y) = (x - 3, y - 2).$$

Así, la ecuación es

$$y' = \frac{1}{4}(x')^2.$$

A continuación, el re-escalamiento implica que las nuevas coordenadas son

$$E_{(2,1)}(x', y') = \left(\frac{x'}{2}, y'\right).$$

De lo anterior, la ecuación de $\mathscr{P}$ se escribe como

$$y'' = (x'')^2.$$

La Figura 4.16 nos ayuda a ilustrar geométricamente este proceso. □

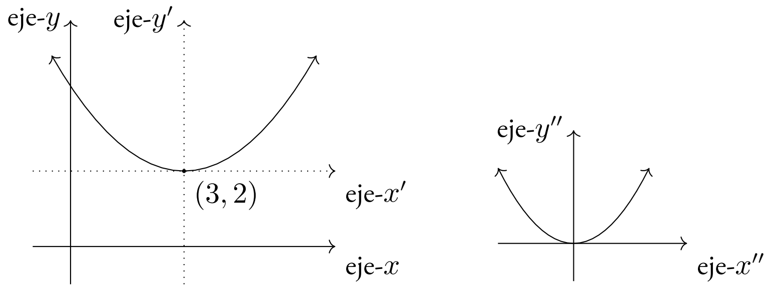


Figura 4.16

16. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$x = y^2 + 2,$$

determine su ecuación en el sistema rotado por $45°$.

Solución. Primero debemos notar que

$$(x', y') = Rot_{45°}(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \right),$$

de donde se tiene que

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Luego, la ecuación se escribe como

$$(x')^2 + (y')^2 + 2x'y' - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' + 4 = 0.$$

La Figura 4.17 representa la parábola en ambos sistemas. □

17. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$y = x^2 - 2x + 3,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto de intersección entre $\mathscr{P}$ y el eje-y.

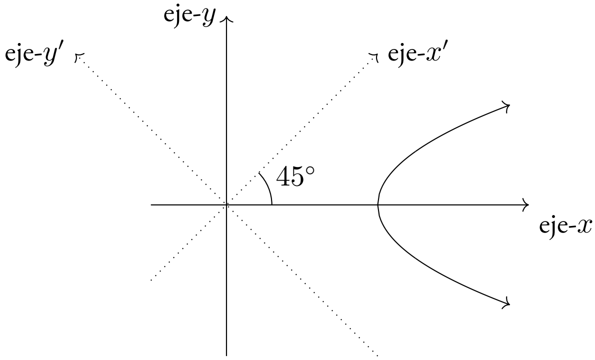


Figura 4.17

Solución. El punto de intersección de $\mathscr{P}$ con el eje-y se obtiene de reemplazar $x = 0$ en su ecuación. Luego dicho punto de intersección tiene coordenadas $(0, 3)$.

Ahora, como

$$T_{(0,3)}(x, y) = (x, y - 3),$$

se deduce que $x = x'$ e $y = y' + 3$. Por lo tanto, la ecuación de $\mathscr{P}$ en el nuevo sistema es

$$y' = (x')^2 - 2x' = (x' - 1)^2 - 1.$$

En la Figura 4.18 se muestra la gráfica de $\mathscr{P}$ en ambos sistemas. □

18. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$y^2 - x^2 = 1,$$

determine su ecuación al rotar el sistema $45°$ en sentido antihorario.

Solución. Desde que

$$(x', y') = Rot_{45^\circ}(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x)\right),$$

y la ecuación de $\mathscr{H}$ se puede escribir como

$$(y - x)(y + x) = 1,$$

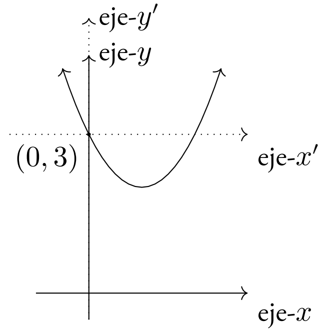


Figura 4.18

se sigue que la ecuación de la hipérbola, luego de aplicar la rotación, sería

$$2x'y' = 1.$$

La Figura 4.19 nos muestra la gráfica de $\mathscr{H}$ en ambos sistemas. $\square$

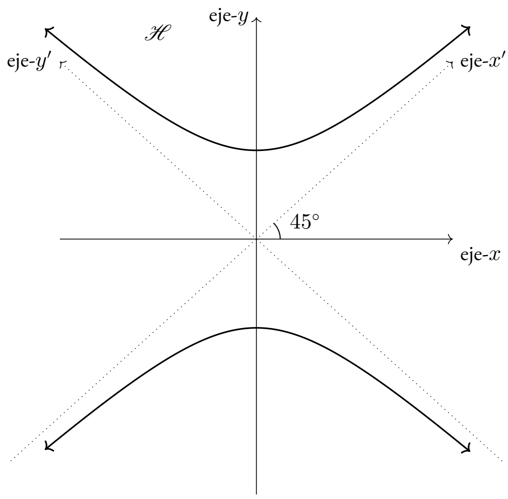


Figura 4.19

19. Dada la hipérbola de ecuación

$$x^2 - y^2 = 1,$$

determine su ecuación luego de rotar el sistema $90°$.

Solución. En este caso, es claro que

$$Rot_{90°}(x, y) = (y, -x),$$

de donde $x = -y'$ e $y = x'$. Esto nos dice que la ecuación de la hipérbola en el nuevo sistema es

$$(y')^2 - (x')^2 = 1.$$

La gráfica de la hipérbola se representa en la Figura 4.20. $\square$

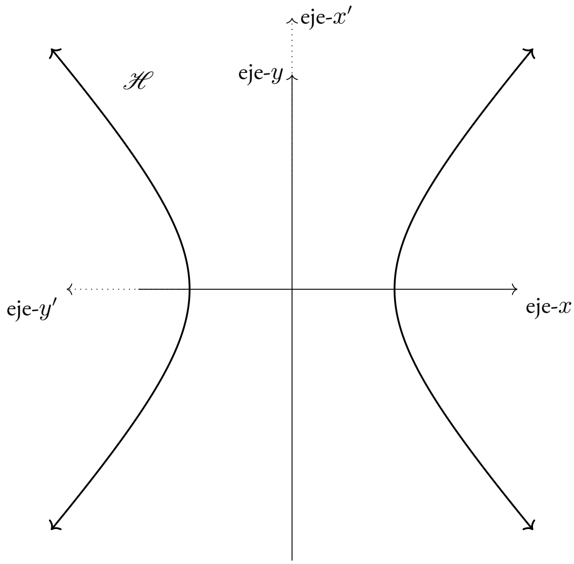


Figura 4.20

20. Dada la hipérbola de ecuación $9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y = 43$, determine su ecuación en el sistema trasladado al punto $(1, 2)$.

Solución. Completando cuadrados en la ecuación de la hipérbola, se obtiene

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Luego, el sistema trasladado al punto $(1,2)$ implica

$$(x',y') = T_{(1,2)}(x,y) = (x-1,y-2),$$

de donde la ecuación de la hipérbola se reduce a

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1.$$

□

21. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

determine su ecuación en el nuevo sistema después de aplicar primero $T_{(1,1)}$, luego el re-escalamiento $E_{(2,3)}$, y por último la rotación Rot_{45°.

Solución. Primero la traslación del sistema implica

$$T_{(1,1)}(x,y) = (x-1,y-1),$$

de donde la ecuación de $\mathscr{H}$ se escribe como

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{9} = 1. \tag{4.6}$$

Luego, el re-escalamiento implica

$$E_{(2,3)}(x,',y') = \left(\frac{x'}{2},\frac{y'}{3}\right),$$

lo que a su vez nos permite re-escribir la ecuación (4.6) de la siguiente manera:

$$(x'')^2 + (y'')^2 = 1. \tag{4.7}$$

Finalmente, el sistema rotado nos dice que las nuevas coordenadas deben cumplir

$$Rot_{45^\circ}(x'',y'') = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x''+y''),\frac{\sqrt{2}}{2}(y''-x'')\right),$$

de donde se obtiene que

$$x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'''-y''') \text{ e } y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'''+y''').$$

Al reemplazar esta información en la ecuación (4.7) se deduce que

$$(x''')^2 + (y''')^2 = 1.$$

□

Ejercicios propuestos

1. Dada la recta $\mathscr{L}$ de ecuación $x - 2y + 1 = 0$, determine su ecuación en el sistema referido a los ejes de coordenadas con origen $O' = (-3, 2)$.

2. Muestre que las ecuaciones de la rotación de $90°$ en sentido antihorario son:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

3. Una rotación transforma el punto $(3, 4)$ en el punto $(4, 3)$. Determine el ángulo de rotación.

4. Muestre que la transformación de las coordenadas (x, y) en

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 5 \end{aligned}$$

proviene de una rotación de $60°$en sentido antihorario y una traslación al punto $(-1, 5)$.

5. Sean T_1 y T_2 dos traslaciones. Muestre que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple $T_1(T_2(x, y)) = T_2(T_1(x, y))$.

6. Dar un ejemplo de una traslación T y una rotación R tal que para algún punto (x_0, y_0) se tiene que $T(R(x_0, y_0)) \neq R(T(x_0, 0))$.

7. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación:

$$x^2 - 4x + 8y - 20 = 0,$$

determine su ecuación luego de rotar un ángulo de $53°$ el sistema.

8. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$y^2 - 10y - 4x + 17 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto de intersección entre $\mathscr{P}$ y el eje-x.

9. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$(y-5)^2 = 4(x-1),$$

determine su ecuación luego de rotar un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ el sistema.

10. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$y^2 - 8y + 16x + 3 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al vértice de $\mathscr{P}$.

11. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$x^2 - 4x + 20y + 10 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al foco de $\mathscr{P}$.

12. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$y^2 - 2y - 6x - 2 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto medio entre el foco y el vértice de $\mathscr{P}$.

13. Dada la parábola $\mathscr{P}$ de ecuación

$$x^2 - 200x + 9600 - y = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto medio entre el origen de coordenadas y el vértice de $\mathscr{P}$.

14. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al foco con mayor ordenada.

15. Dada la cónica de ecuación

$$15x^2 - 60x - y^2 + 6y + 36 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto $(2, 3)$.

16. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto $(-1, 2)$.

17. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$9x^2 - 36x - 16y^2 - 96y - 252 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema después de aplicar la traslación $T_{(6,-3)}$, luego el re-escalamiento $E_{(2,3)}$, y por último la rotación Rot_{90°.

18. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$\frac{(y+1)^2}{4} - (x+2)^2 = 1,$$

determine su ecuación en el sistema después de aplicar la traslación $T_{(3,-2)}$ y luego el re-escalamiento $E_{(2,1)}$.

19. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{16} = 1,$$

determine su ecuación en el sistema después de aplicar la traslación $T_{(2,4)}$, luego el re-escalamiento $E_{(1,2)}$, y por último la rotación Rot_{30°.

20. Dada la hipérbola $\mathscr{H}$ de ecuación

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{8} = 1,$$

determine su ecuación en el sistema después de aplicar la traslación $T_{(2,-3)}$, luego el re-escalamiento $E_{(1,3)}$, y por último la rotación Rot_{90°.

21. Dada la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0,$$

determine su ecuación en el sistema trasladado al punto $(-1, 2)$.

22. Sean a y b dos números reales diferentes y $\mathscr{C}$ la circunferencia de ecuación
$$(a-b)(x^2+y^2)-2abx=0.$$
Determine la ecuación de $\mathscr{C}$ luego de aplicar una traslación al punto $\left(\dfrac{ab}{a-b},0\right)$.

23. Dada la circunferencia de ecuación
$$x^2-8x+y^2+14y+25=0,$$
determine su ecuación luego de aplicar primero una traslación al punto $(4,-7)$ y luego el re-escalamiento $E_{(2,3)}$.

24. Dada la elipse de ecuación
$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-6)^2}{9}=1,$$
determine su ecuación luego de aplicar el re-escalamiento $E_{(1/2,1/3)}$.

25. Considere la cónica de ecuación
$$5x^2+3xy+y^2=44.$$
Luego de aplicar la rotación Rot_θ, donde θ es un ángulo tal que $\cot(2\theta)=\frac{4}{3}$, identifique el tipo de cónica.

5
Respuestas de los ejercicios propuestos

Capítulo 1

1. Acá se tiene que

   a) II C
   b) II C
   c) IV C
   d) II C

2. II C
3. $10\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$
4. $y = -2$ o $y = 8$
5. $9\,u^2$
6. $P = (1, 5)$ o $P = (2, 4)$
7. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{13}$
8. Sug. Aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo $\triangle AOB$.
9. $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
10. $P = (3, 3)$
11. $P = (1, 1)$
12. $P = (-6, 4)$
13. $C = (6, 8)$
14. $20\,u^2$
15. $4\,u^2$
16. 2

17. 3

18. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

19. $B=(\sqrt{3},1)$

20. $\dfrac{417}{17}$

21. $21\,u^2$

22. Sug. Use el hecho de que para todo $a \geq 0$ y $b \geq 0$ se cumple $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

23. Sug. Utilice el ejercicio previo.

24. Sug. Aplicar la desigualdad triángular y mostrar que
$$d(M, M+N) = d(O, N)$$
para cualesquiera $M, N \in \mathbb{R}^2$.

Capítulo 2

1. Se tienen los siguientes puntos
   a) $(0,-1)$ y $(-1,0)$
   b) $(0,1)$ y $(-1,0)$
   c) $(0,-6)$ y $(3,0)$
   d) $(0,-20)$ y $(4,0)$
2. Los puntos de intersección son
   a) $(0,5)$
   b) $(-2,3)$
   c) $\left(\dfrac{16}{5},\dfrac{18}{5}\right)$
   d) $\left(5(\sqrt{3}-\sqrt{2}), 5\sqrt{6}+\sqrt{3}-10\right)$
3. $y-x-4=0$ o $y=x+4$
4. $\dfrac{315}{2}\,u^2$
5. Sí pertenece.
6. $x+y-6=0$ o $y-3=-1(x-3)$
7. $3x+2y=0$
8. $\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{7}{2}\right)$
9. $19\,u^2$
10. $\dfrac{50}{3}\,u^2$
11. $\dfrac{11\sqrt{10}}{10}$
12. 4
13. $x+2y-3=0$
14. $3\,u^2$
15. $\dfrac{139}{2}\,u^2$
16. 8°
17. $3x-4y+24=0$
18. 37°
19. $-\dfrac{9}{4}$

20. 3
21. $y - 2 = -\dfrac{2}{3}x$
22. 30°
23. Sug. Muestre que la pendiente entre dos puntos cualesquiera es constante.
24. Son $(-4, 11)$, $(12, 3)$ y $(0, -9)$.
25. $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$
26. $a = \dfrac{28}{17}$ y $b = -1$.
27. Sug. Complete cuadrados y luego factorice como diferencia de cuadrados.
28. Sug.: Analice tres situaciones, cuando una recta es horizontal, cuando es vertical, y cuando tiene pendiente real diferente de cero.
29. $y - 4 = -\dfrac{5}{4}(x - 3)$
30. $y = \tan(\theta)x$
31. Sug. Sin pérdida de generalidad, suponga que $P \notin \mathscr{L}$. Primero, determine en términos de a, b y c la ecuación de la recta perpendicular a $\mathscr{L}$. Segundo, determine el punto de intersección entre ambas rectas. Finalmente, calcule la distancia como distancia entre el punto P y el punto de intersección.
32. Sug. Use el hecho de que para todo $\alpha, \beta \in [0, \pi[\setminus\{\pi/2\}$ se tiene que $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ si y solo si $\tan(\alpha) = -\cot(\beta)$.
33. Sug. Si asume que son paralelas, entonces utilice ángulos alternos internos y opuestos por el vértice para concluir que son iguales. Para el recíproco proceda por contradicción, es decir, suponga que las rectas tienen al menos un punto de intersección y, por tanto, el ángulo entre ellas es cero, concluyendo que son iguales.

Capítulo 3

1. Los centros y radios son:
   - $C = (0, 1)$ y $r = 1$.
   - $C = (0, 1)$ y $r = 3$.
   - $C = (-1, 1)$ y $r = \sqrt{2}$.
   - $C = (1, 1/2)$ y $r = \sqrt{5}/2$.
   - $C = (-2, 3)$ y $r = 5$.
   - $C = (1, 1/2)$ y $r = \sqrt{7}/2$.
2. Hay dos, la primera es
   $$(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$$
   y la segunda es
   $$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5^5.$$
3. $(x - 7)^2 + y^2 = 45$
4. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 12^2$
5. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

6. El más cercano es $(3-\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$ y el más lejano es $(3+\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$.

7. Sug. Evalúe en los puntos dados y para el centro complete cuadrados.

8. Hay dos circunferencias, la primera tiene ecuación

$$(x-48)^2+(y+34)^2=4^2$$

y la segunda es

$$(x+72)^2+(y-46)^2=4^2.$$

9. Se tiene lo siguiente:

   - T: $a=\pm\sqrt{40}$
   - S: $a\in]-\sqrt{40},\sqrt{40}[$.
   - E: $a\in]-\infty,-\sqrt{40}[\cup]\sqrt{40},\infty[$.

10. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{25}{4}\right)^2=\dfrac{17}{2}$

11. La primera es

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$$

y la segunda es

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}.$$

12. $y=-x$

13. Las ecuaciones son

   - $(x+1)^2+(y-3)^2=13$
   - $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

14. $(x-14)^2+(y-10)^2=15^2$

15. Sug. Complete cuadrados.

16. Solo c) representa la ecuación de una elipse.

17. Se tienen

   a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$

   b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

   c) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$

   d) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{36}=1$

   e) $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+4)^2}{5}=1$

   f) $\dfrac{(x-3)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{25}=1$

18. $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{55}=1$

19. $(0,5)$

20. $\left(-\dfrac{9}{\sqrt{10}},\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$ y $\left(\dfrac{9}{\sqrt{10}},\sqrt{-\dfrac{2}{5}}\right)$

21. $(2\sqrt{6}/5,0)$ y $(-2\sqrt{6}/5,0)$

22. $4\sqrt{14}/405\ u^2$

23. $\dfrac{(x-2)^2}{13^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$

24. $(3,-2)$ y $(4,-3/2)$

25. Los valores son

   - C: $]-5,5[$
   - T: 5
   - NC: $]-\infty,-5[\cup]5,+\infty[$.

26. $y=-\dfrac{3}{2}x+\sqrt{\dfrac{275}{2}}$

27. $\dfrac{2m^2n^2}{m^2+n^2}$

28. Los vértices son

    a) $(-3/2, 0)$
    b) $(2, -2)$
    c) $(1, 1)$
    d) $(1, -2)$

29. Los puntos de intersección son

    a) $(-3/2, 0)$ y $(0, 9)$
    b) $(0, -5)$
    c) $(0, 3)$
    d) $(0, -5)$

30. $4x + y - 5 = 0$

31. 3

32. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + a\right)\dfrac{3a}{2}$

33. $y = -\dfrac{3}{16}(x+4)^2$

34. $\dfrac{143}{2}^{\circ}$

35. $y = 3\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{27}{8}$

36. $\dfrac{(x-\frac{7}{3})^2}{64} + \dfrac{y^2}{15} = 1$

37. $35\ u^2$

38. $\left(\dfrac{14}{25}, \dfrac{17}{5}\right)$ y $(2, 1)$

39. La primera es
$$y - 5 = 5(x - 5)$$
y la segunda es
$$y - 1 = -3(x - 1).$$

40. 90°

41. $x^2 + (y-2)^2 = 16$

42. $(-6, 0)$

43. $y = x^2$

44. $4\sqrt{5}$

45. $y^2 + \dfrac{y}{3} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$

46. -4

47. $x = -\dfrac{131}{32}$

48. $y = 8(x-2)^2 - 1$

49. Las coordenadas de los centros son

    a) $(0, -1)$
    b) $(-2, -2)$
    c) $(-6, -1)$
    d) $(-5, 0)$
    e) $(-3, 1)$
    f) $(-3, -1)$

50. Las coordenadas de los vértices son

    a) $(-2\sqrt{2}, -1)$ y $(2\sqrt{2}, -1)$
    b) $(-4, -2)$ y $(0, -2)$
    c) $(-6, -3)$ y $(-6, -1)$
    d) $(-7, 0)$ y $(-3, 0)$
    e) $(-3-\sqrt{2}, 1)$ y $(-3+\sqrt{2}, 1)$
    f) $(-3, -2)$ y $(-3, 0)$

51. Las ecuaciones de las asíntotas son

a) $y = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}x - 1$

b) La primera es
$$y = \frac{3}{2}x + 1$$
y la segunda es
$$y = -\frac{3}{2}x - 5.$$

c) La primera es
$$y = -\frac{2}{7}x - \frac{19}{7}$$
y la segunda es
$$y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}.$$

d) La primera es
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$$
y la segunda es
$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{15}{2}.$$

e) La primera es
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1$$
y la segunda es
$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1.$$

f) La primera es
$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$$
y la segunda es
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}.$$

52. Sug. Muestre que la ecuación cuadrática que resulta de igualar las ecuaciones de la recta e hipérbola tiene discriminante positivo.

53. Es una hipérbola de ecuación
$$\frac{\left(x - \dfrac{36}{7}\right)^2}{\dfrac{729}{49}} - \frac{(y-4)^2}{\dfrac{81}{7}} = 1.$$

54. $(-4, -2)$ y $(6, -2)$

55. Es una hipérbola de ecuación
$$\frac{(x-1)^2}{\dfrac{13}{3}} - \frac{(y-3)^2}{13} = 1.$$

56. $(-2, 1), (-2, 3)$, $(1, 1)$ y $(1, 3)$

57. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

58. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

59. Se tiene que

a) Son dos rectas.

b) Es una elipse.

c) Es una parábola.

d) Una circunferencia.

e) vacío.

f) Una elipse.

g) Una hipérbola.

h) Una hipérbola.

i) Una hipérbola.

60. Sug. Sin pérdida de generalidad, suponga que el centro de la hipérbola es $C = (0, 0)$. Muestre que el punto de coordenadas $(\sqrt{2}a, b)$ pertenece a dicha hipérbola. Luego, aplique la definición de hipérbola, es decir, calcule las distancia a los focos, y efectúe la diferencia entre el mayor y el menor.

Capítulo 4

1. $x' - 2y' - 6 = 0$
2. Sug. Reemplace los valores de $\cos(90°)$ y $\operatorname{sen}(90°)$.
3. $16°$ o $\cos(\theta) = \dfrac{24}{25}$
4. Sug. Evalúe la rotación de $60°$ y luego traslade el sistema rotado al punto $(-1, 5)$.
5. Sug. Aplique directamente las definiciones de la transformación traslación.
6. Sug. Verifique que $T_{(1,1)}$, $R_{\pi/4}$ y $(0, 0)$ satisfacen las condiciones del problema.
7. $\dfrac{9}{25}(x')^2 + 4x' + \dfrac{16}{25}(y')^2 + 8y' - \dfrac{24}{25}x'y' - 20 = 0$
8. $(y')^2 - 10y' - 4x' = 0$
9. $(x')^2 - 2x'y' + (y')^2 - 6\sqrt{2}x' - 14\sqrt{2}y' + 50 = 0$
10. $x' = -\dfrac{1}{6}(y')^2$
11. $(x')^2 = -2x(y' - 5)$
12. $x' + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{6}(y')^2$
13. $(x')^2 - 100x' - y' + 2300 = 0$
14. $\dfrac{(y' - \sqrt{13})^2}{9} - \dfrac{(x')^2}{4} = 1$
15. $(x')^2 - \dfrac{(y')^2}{25} = 1$
16. $\dfrac{(x')^2}{16} + \dfrac{(y')^2}{25} = 1$
17. $\dfrac{(x' + 2)^2}{3} + \dfrac{(y' + 2)^2}{16} = 1$
18. $\dfrac{(y' - 1)^2}{4} - \dfrac{(x' + \frac{5}{2})^2}{\frac{1}{4}} = 1$
19. $\dfrac{(\sqrt{3}x' - y' + 8)^2}{16} - \dfrac{(x' + \sqrt{3}y')^2}{16} = 1$
20. $\dfrac{(y' + 1)^2}{16} - \dfrac{(x - \frac{5}{3})^2}{\frac{8}{9}} = 1$
21. $x^2 + y^2 = 4$
22. $x^2 + y^2 = \left(\dfrac{ab}{a - b}\right)^2$
23. $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{\frac{40}{3}} = 1$
24. $\dfrac{(x - 4)^2}{16} + \dfrac{(y - 18)^2}{81} = 1$
25. Es una elipse.

6
Apéndice

En esta sección supondremos conocidas las nociones básicas de punto, ángulo, recta y plano, a partir de las que se enuncian a continuación los *postulados de Euclides* :

1. Dos puntos diferentes cualesquiera determinan un segmento de recta.

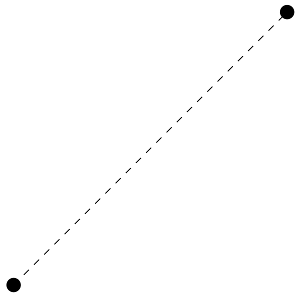
2. Todo segmento de recta se puede prolongar indefinidamente.

3. Con un centro y un radio, solo se puede trazar una única circunferencia.

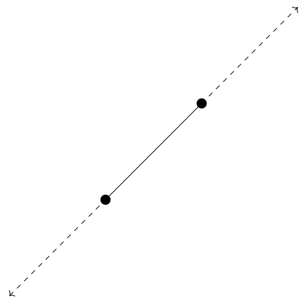
4. Todos los ángulos rectos son iguales.

5. Si una recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

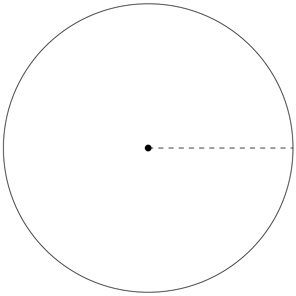
Tales postulados logran describir las propiedades fundamentales del plano, a partir de los que se puede demostrar propiedades con mayor complejidad por medio de un razonamiento lógico. Geométricamente se puede visualizar cada postulado en la Figura 6.1.



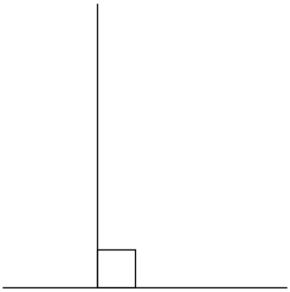
(a) Postulado 1



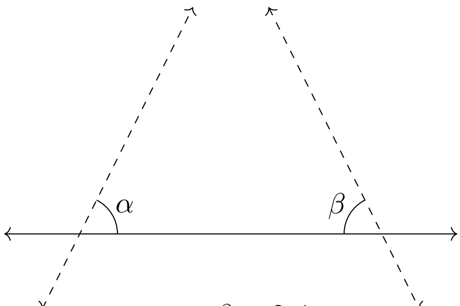
(b) Postulado 2



(c) Postulado 3



(d) Postulado 4



$$\alpha + \beta < 2 \perp$$

(e) Postulado 5

Figura 6.1

Recordemos que dos rectas diferentes son paralelas si ellas no tienen ningún punto de intersección; en ese sentido, el postulado 5 es frecuentemente utilizado en su forma equivalente, enunciada a continuación.

5'. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única recta paralela a ella.

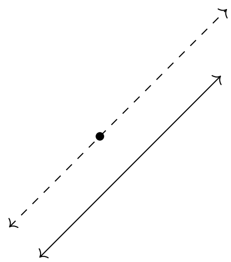


Figura 6.2

Ángulos alternos

Dadas dos rectas paralelas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, y una tercera $\mathscr{L}_3$ secante a ellas, como se muestra en la Figura 6.3.

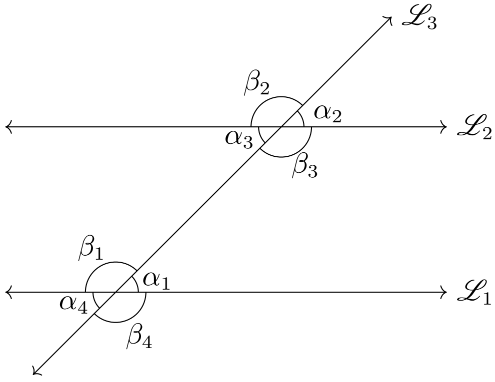


Figura 6.3

Las rectas determinan los siguientes ángulos:

Los ángulos α_1 y α_4, así como los ángulos α_2 y α_3, se denominan *opuestos por el vértice* y se cumple que $\alpha_1 = \alpha_4$, así como también $\alpha_2 = \alpha_3$.

Los ángulos α_1 y α_3 se denominan ángulos *alternos internos* y ellos deben ser iguales. En el caso de los ángulos α_2 y α_4 se denominan ángulos *alternos externos* y también deben ser iguales.

Análogamente, podemos decir que β_1 y β_3 son alternos internos. De igual modo, podemos decir que los ángulos β_2 y β_4 son opuestos por el vértice. Por último, los ángulos β_2 y β_4 son alternos externos.

Por otro lado, es importante mencionar que $\alpha_i + \beta_i = 180°$, para cualquier valor de $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. A tales ángulos se les denomina *suplementarios*

Ejemplo 6.1. De la Figura 6.4, determine el valor de x, si se sabe que las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas y las rectas $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_4$ también lo son.

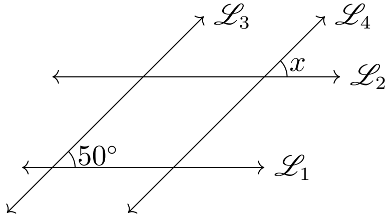


Figura 6.4

Primero, por ángulos alternos internos, considerando $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$, se tiene que el ángulo alterno interno entre $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_2$ es $50°$, como se aprecia en la Figura 6.5.

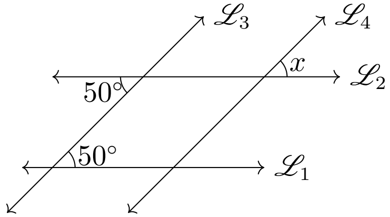


Figura 6.5

Luego, por ángulos alternos externos, considerando $\mathscr{L}_3$, $\mathscr{L}_4$ y $\mathscr{L}_2$, se deduce que $x = 50°$.

Triángulos

En el triángulo mostrado en la Figura 6.6, los puntos A, B y C se denominan *vértices*; los ángulos α, β y γ son los correspondientes a los vértices A, B y C, respectivamente; y a, b y c son las *longitudes* de los segmentos determinados por los vértices como se muestra en la Figura 6.6.

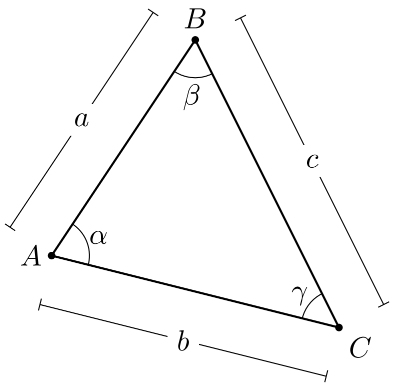


Figura 6.6

Los ángulos del triángulo cumplen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

En general, dados dos puntos A y B en el plano, el segmento que une los puntos A y B se denota por $\overline{AB}$. De igual forma cuando nos refiramos a la longitud de dicho segmento podemos escribir simplemente AB. Así, podemos referirnos a los lados del triángulo como los segmentos que unen sus vértices, en nuestro caso $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Por lo cual, se tiene que $AB = a$, $AC = b$ y $BC = c$.

Además, se suele decir que el vértice A es relativo al segmento $\overline{BC}$, de manera similar para los vértices B y C. También es usual usar la siguiente notación $\triangle ABC$ para representar al triángulo de vértices A, B y C.

Asimismo, se debe cumplir que la suma de las longitudes de dos de los lados es mayor que el tercero, es decir,

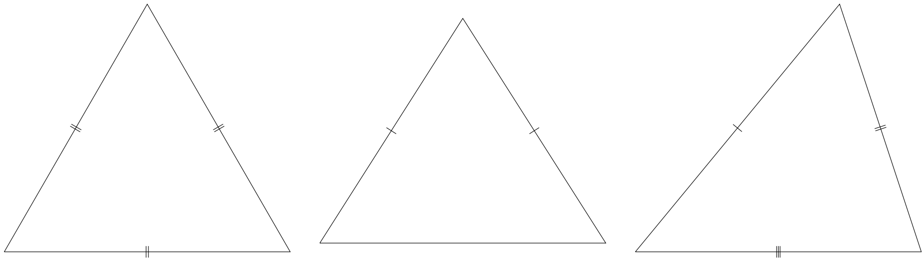
$$a + b > c \quad \text{y} \quad a + c > b \quad \text{y} \quad b + c > a.$$

La propiedad anterior indica que es imposible obtener un triángulo cuyos lados tengan longitudes consecutivas, como por ejemplo 1, 2 y 3.

Clasificación de los triángulos

A continuación podemos clasificar los triángulos, de acuerdo a sus lados en:

1. *Equiláteros* si sus lados tienen igual longitud.
2. *Isósceles* si tienen dos lados de igual longitud.
3. *Escaleno* si sus tres lados tienen diferentes longitudes.



(a) T. equilátero (b) T. isósceles (c) T. escaleno

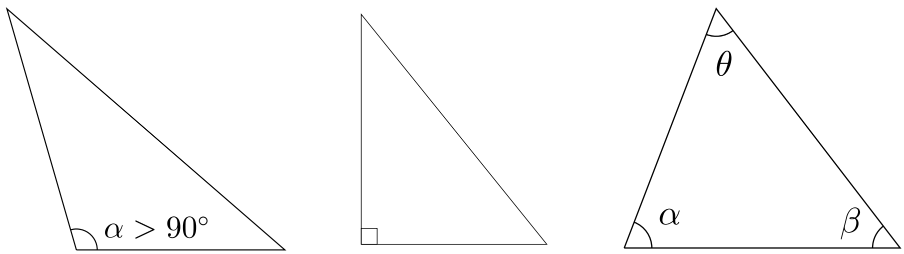
Figura 6.7
Clasificación de acuerdo a sus lados

Debemos notar que todo triángulo equilátero es isósceles, pero el recíproco no es cierto en general. Además, es importante notar que en un triángulo debe ocurrir que a lados iguales le corresponden ángulos iguales. Así, en todo triángulo equilátero, sus ángulos miden $60°$.

Diremos que un ángulo es *agudo* si es menor al ángulo recto; y si es mayor al ángulo recto, se denomina ángulo *obtuso*. Así, todo triángulo equilátero tiene ángulos agudos. También es importante notar que cualquier triángulo puede tener a lo más un ángulo obtuso.

Ahora, la clasificación de los triángulos de acuerdo a sus ángulos son:

1. *Obtusángulos* cuando tiene un ángulo mayor a un ángulo recto.
2. *Rectángulos* si uno de sus ángulos es recto.
3. *Acutángulo* si sus ángulos son agudos.



(a) T. obtusángulo (b) T. rectángulo (c) T. acutángulo

Figura 6.8

Notemos que todo triángulo equilátero es acutángulo necesariamente. Sin embargo, un triángulo acutángulo puede ser equilátero o isósceles o escaleno. El único triángulo rectángulo isósceles es el que tiene sus ángulos agudos iguales a $45°$.

Ejemplo 6.2. En la Figura 6.9, $\triangle ABC$ es isósceles con $AB = BC$ y $\triangle ABD$ es equilátero, determine el ángulo x.

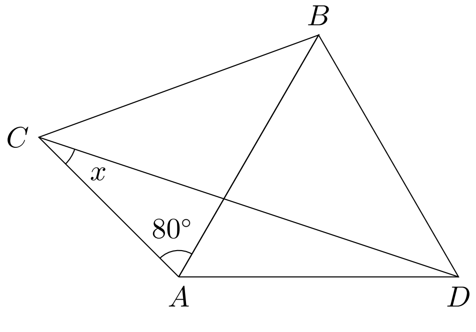


Figura 6.9

Para determinar el valor de x, primero denotemos por m a la longitud del segmento $\overline{AB}$. Desde que $\triangle ABD$ es equilatero se tiene

$$BD = m,$$

de manera similar, como $\triangle ABC$ es isósceles se tiene que

$$BC = m.$$

Así, podemos deducir que el $\triangle CBD$ es isósceles y que su ángulo asociado al vértice B es 80°, como se muestra en la Figura 6.10.

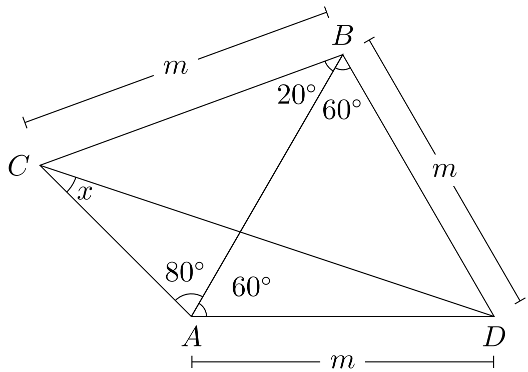


Figura 6.10

Esto implica que el ángulo asociado al vértice C es 50° en $\triangle CBD$. Pero como el ángulo asociado al vértice C, en $\triangle ABC$, es 80° por ser isósceles, podemos deducir que

$$x + 50^\circ = 80^\circ$$

de donde $x = 30^\circ$.

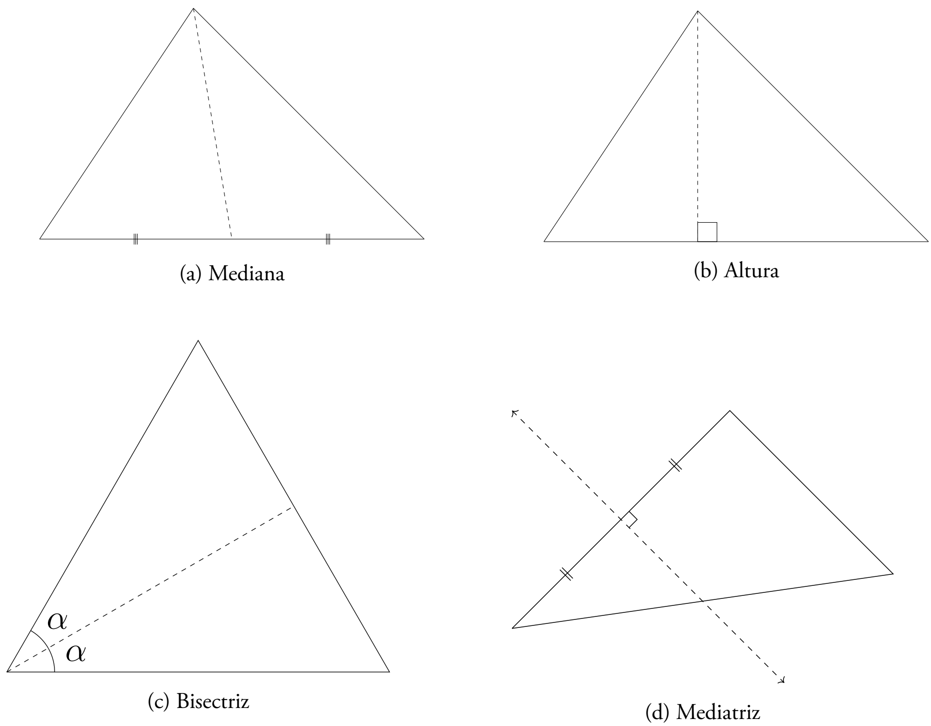
Líneas y puntos notables en un triángulo

Consideramos a continuación algunas *líneas notables* en el triángulo, ver Figura 6.11.

1. La *mediana* es un segmento que une un vértice con el punto medio del lado al cual es relativo.

2. La *altura* es un segmento perpendicular a un lado y pasa por el vértice al cual es relativo.

3. La *bisectriz* de un ángulo es una recta que atraviesa su vértice y que lo divide en dos partes iguales.



(a) Mediana (b) Altura

(c) Bisectriz (d) Mediatriz

Figura 6.11

4. La *mediatriz* de un segmento es una recta perpendicular a dicho segmento que pasa por su punto medio.

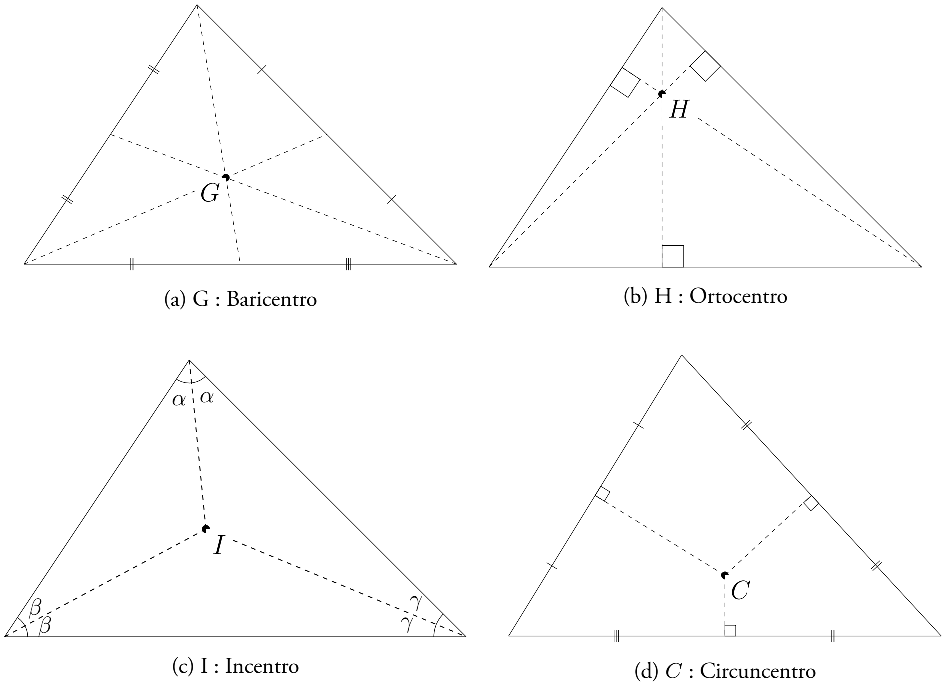
Por otro lado, es evidente que en cada triángulo siempre es posible trazar tres medianas, tres alturas, tres bisectrices y tres mediatrices. Así, si consideramos tres líneas del mismo tipo, ellas son concurrentes, es decir, se intersecan en un solo punto. Esto da origen a los muy conocidos *puntos notables*, ver Figura 6.12.

1. El *baricentro* es el punto de intersección de las tres medianas de un triángulo.

2. El *ortocentro* es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.

3. El *incentro* es la intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo.

4. El *circuncentro* es la intersección de las tres mediatrices de un triángulo.



(a) G : Baricentro

(b) H : Ortocentro

(c) I : Incentro

(d) C : Circuncentro

Figura 6.12

Un resultado importante debido a Euler establece que en todo triángulo el ortocentro, baricentro y circuncentro están contenidos en una misma recta. Esto significa que en todo triángulo escaleno estos tres puntos notables son colineales. Esto es fácil de observar cuando el triángulo es equilátero, pues los tres puntos coinciden, inclusive el incentro. De igual forma se observa en un triángulo isósceles. En el caso de un triángulo rectángulo debemos notar que el ortocentro es el vértice con ángulo recto. Además, el circuncentro se encuentra en el punto medio del mayor lado del triángulo. Así, también podemos observar que el ortocentro, baricentro y circuncentro son colineales.

Por otro lado, el incentro y el baricentro siempre se encuentran "dentro" del triángulo. Cuando el triángulo es rectángulo, el circuncentro se encuentra en uno de los lados. Pero en general estos tres puntos notables se encuentran no fuera del triángulo. Sin embargo, el ortocentro puede estar fuera del triángulo y esto se evidencia en los triángulo obtusángulos.

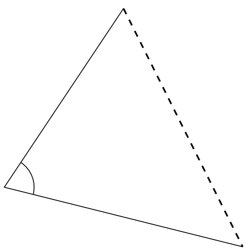
Congruencia de triángulos

Dos triángulos se denominan *congruentes* cuando tienen los mismos ángulos y los lados relativos a un mismo ángulo tienen longitudes iguales. A continuación presentamos tres criterios para que dos triángulos sean congruentes.

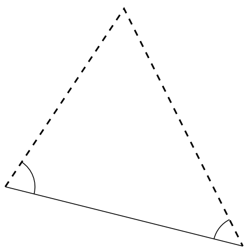
1. Lado-Ángulo-Lado, dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo que forman iguales, respectivamente.

2. Ángulo-Lado-Ángulo, dos triángulos son congruentes cuando un lado y sus ángulos contiguos son iguales, respectivamente.

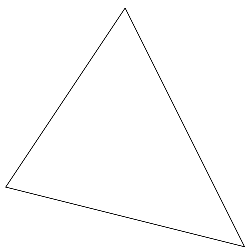
3. Lado-Lado-Lado, dos triángulos son iguales si tienen los tres lados iguales, respectivamente.



(a) Lado-Ángulo-Lado



(b) Ángulo-Lado-Ángulo



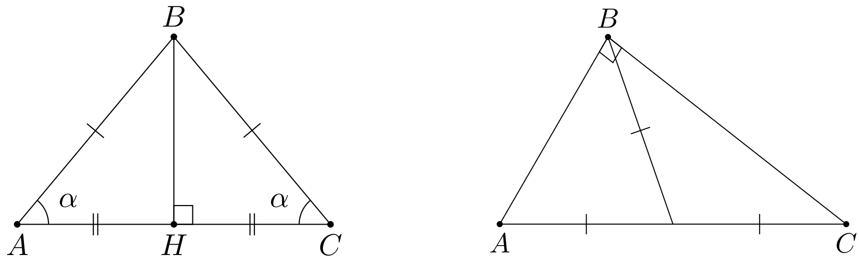
(c) Lado-Lado-Lado

Figura 6.13

Teorema 6.1. *Dado el triángulo de vértices A, B y C. Ocurren las siguientes:*

1. *Si $\triangle ABC$ es isósceles y $AB = BC$, entonces la altura trazada desde B corta al segmento $\overline{AC}$ en su punto medio (H) y se cumple que $\triangle ABH$ es congruente con $\triangle BHC$. Ver Figura 6.14a.*

2. *Si $\triangle ABC$ es recto en B, entonces la longitud de la mediana trazada desde B es la mitad de AC. Ver Figura 6.14b.*



(a) (b)

Figura 6.14

Veamos a continuación un ejemplo

Ejemplo 6.3. En la Figura 6.15 se desea determinar el ángulo x.

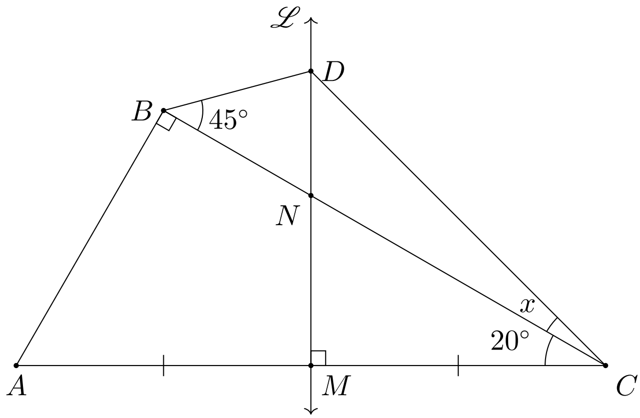


Figura 6.15

Por un lado, notemos que en el triángulo rectángulo $\triangle NMC$ se tiene que el ángulo asociado al vértice N es 70°. Luego, por opuestos por el vértice, tenemos que en el $\triangle BND$

el ángulo N es $70°$. Como los ángulos de un triángulo siempre suman $180°$, deducimos que el ángulo D en $\triangle BDN$ es $65°$.

Por otro lado, notemos que por la segunda parte del Teorema 6.1, tenemos que la mediana $\overline{BM}$ de $\triangle ABC$ es la mitad de AC, es decir,

$$BM = AM = MC.$$

Esto a su vez implica que el $\triangle BMC$ es isósceles y por tanto el ángulo asociado al vértice B es $20°$. Así, el $\triangle BMD$ es isósceles, como se aprecia en la Figura 6.16. Ahora, de la figura

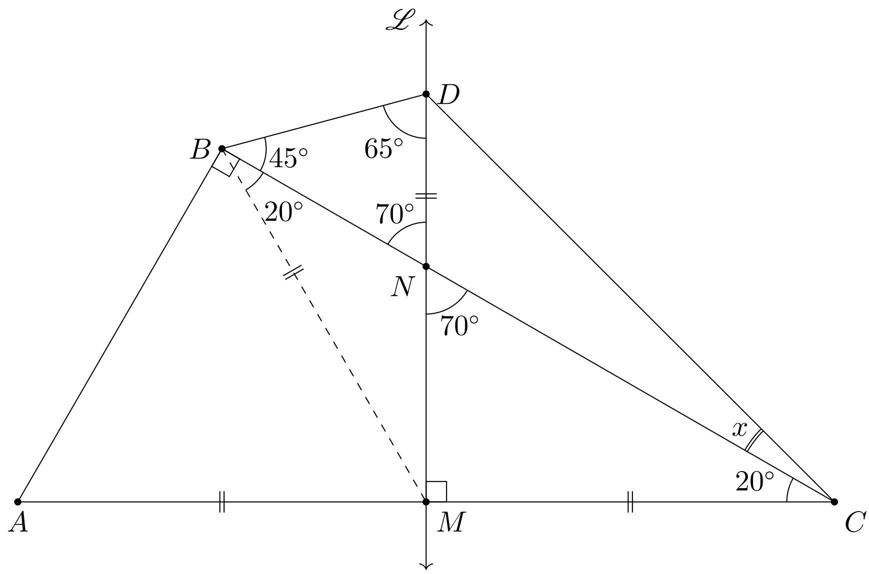


Figura 6.16

anterior deducimos que el triángulo rectángulo de vértices D, M y C es isósceles, lo cual implica que

$$x + 20° = 45°,$$

de donde se tiene que $x = 25°$.

Una observación importante con respecto al ejemplo anterior es el uso de la segunda parte y no la primera del Teorema 6.1. Sin embargo, existen ejercicios donde se utiliza la primera parte y no la segunda del mismo teorema. Así como también hay ejercicios donde se deban usar ambas partes.

Se define el *perímetro* (p) de un triángulo como la suma de longitudes de sus tres lados, según la Figura 6.6 se debe cumplir que

$$p = a + b + c.$$

El siguiente resultado es conocido como el teorema de la base media, ver Figura 6.17.

Teorema 6.2. *Dado el triángulo de vértices A, B y C. Si por el punto medio M del segmento $\overline{AB}$ se traza una recta paralela al lado $\overline{AC}$, entonces dicha recta corta al segmento $\overline{BC}$ en su punto medio (N) y se cumple que*

$$MN = \frac{AC}{2}.$$

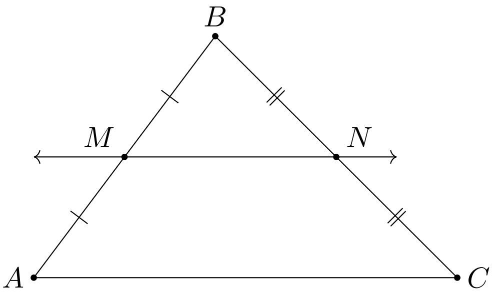


Figura 6.17

Ejemplo 6.4. Si el triángulo de vértices A, B y C tiene perímetro $24\ u$, entonces gracias al Teorema 6.2 el triángulo que resulta de unir los puntos medios de los lados de $\triangle ABC$ tiene perímetro $12\ u$.

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son llamados *semejantes* si tienen los mismos ángulos, ver Figura 6.18. Un criterio para determinar cuándo dos triángulos son semejantes es el siguiente:

- Dos triángulos son semejantes cuando dos ángulos de uno son iguales a dos ángulos del otro.

Un resultado importante en geometría es el Teorema de Thales, el cual es enunciado a continuación.

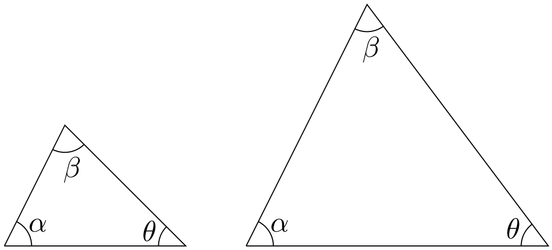


Figura 6.18

Teorema 6.3. *Si dos rectas son cortadas por tres o más rectas paralelas, los segmentos determinados sobre una de las rectas son proporcionales a los segmentos determinados sobre la otra.*

Según la siguiente Figura 6.19, el Teorema de Thales nos dice que si $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \parallel \mathscr{L}_3$, el símbolo $\parallel$ denota paralelismo de ahora en adelante, entonces $\dfrac{x}{x'} = \dfrac{y}{y'}$.

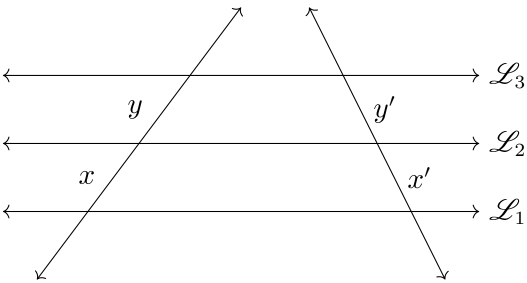


Figura 6.19

Como una aplicación directa del Teorema de Thales veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.5. De la Figura 6.20 se quiere determinar el valor de x, si se sabe que $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son paralelas.

Se sigue del Teorema 6.3 que

$$\frac{20}{15} = \frac{x}{12},$$

de donde se deduce que $x = 16$.

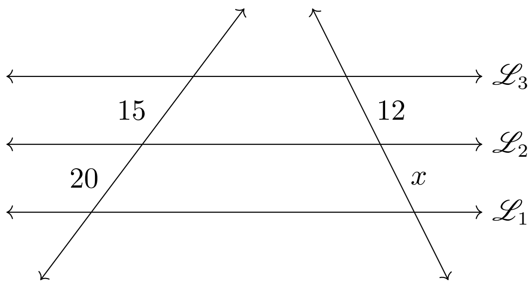


Figura 6.20

En el caso de los triángulos rectángulos, el lado de mayor longitud es llamado *hipotenusa* y los otros dos son llamados *catetos*. Este tipo de triángulos fue estudiado por Pitágoras y sus discípulos, razón por la que también se les denomina *triángulos pitagóricos*.

Teorema 6.4 (Teorema de Pitágoras)**.** *Un triángulo es rectángulo si y solo si el cuadrado del mayor es la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ver Figura 6.21.*

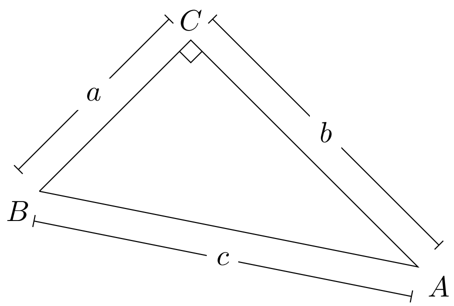
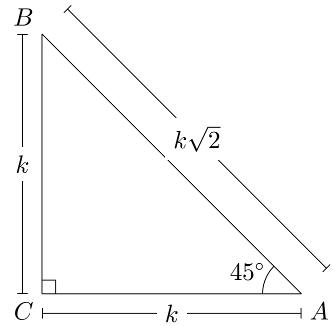
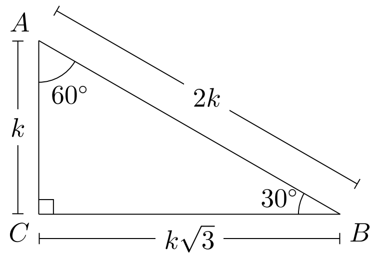


Figura 6.21

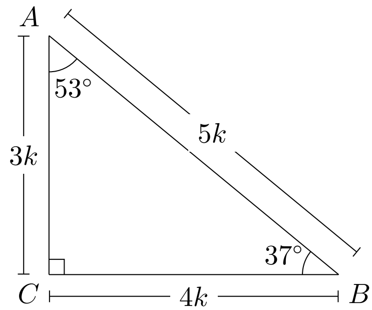
A continuación, se muestran algunos triángulos rectángulos notables.



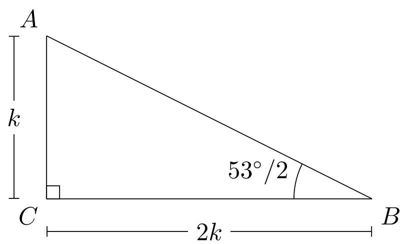
(a) $45° - 45°$



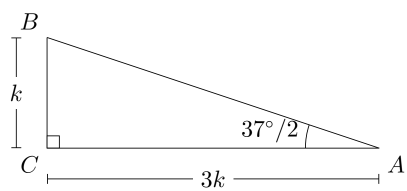
(b) $30° - 60°$



(c) $37° - 53°$



(d) $53°/2$



(e) $37°/2$

Figura 6.22

Existen otros ángulos notables como $15°$, $75°$, $36°$ y $54°$ que no son considerados en el presente texto. Sin embargo, no es complicado deducir el triángulo asociado de 15° y 75° a partir del triángulo de 30° y 60°, lo cual se deja como ejercicio para el lector interesado. De manera similar, se deducen los triángulos de ángulos de $37^\circ/2$ y $53^\circ/2$.

Es importante mencionar que los ángulos asociados al triángulo rectángulo cuyos lados son proporcionales a los números 3, 4 y 5 no son exactamente 37° y 53°. Sin embargo, para efectos prácticos en este trabajo se considera la igualdad.

Veamos a continuación un ejemplo donde se utilicen los ángulos de 37° y 53°.

Ejemplo 6.6. De la Figura 6.23 se desea determinar el ángulo x.

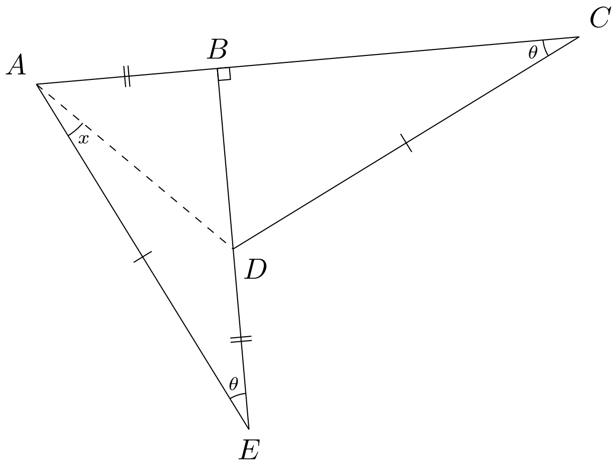


Figura 6.23

Debemos notar que los triángulos rectángulos $\triangle ABE$ y $\triangle DBC$ son congruentes, por el caso ángulo-lado-ángulo. Así, si denotamos por a a la longitud del segmento $\overline{AB}$, se deduce que

$$BE = BC = 2a.$$

Además, el triángulo $\triangle ABD$ es isósceles, como se muestra en la Figura 6.24. Luego, el $\triangle CBD$ es notable y por lo tanto $\theta = 53^\circ/2$. Así, $x = 37^\circ/2$.

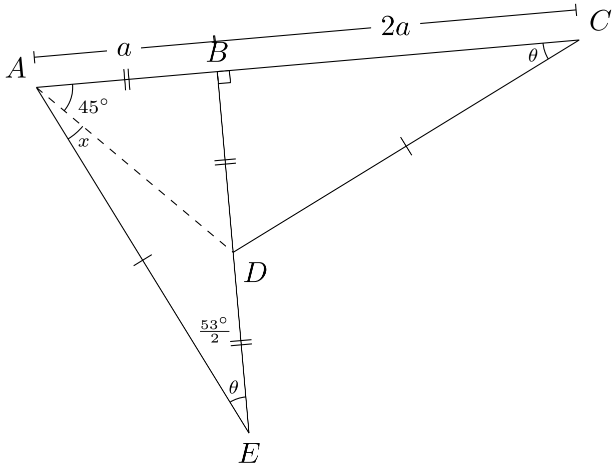
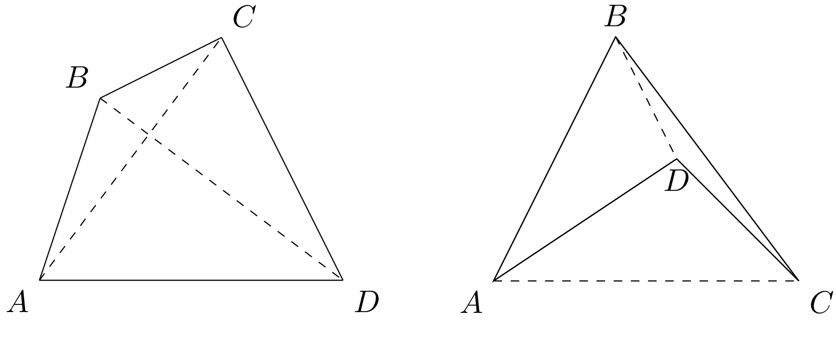


Figura 6.24

Cuadriláteros



(a) Cuadrilátero convexo

(b) Cuadrilátero cóncavo

Figura 6.25

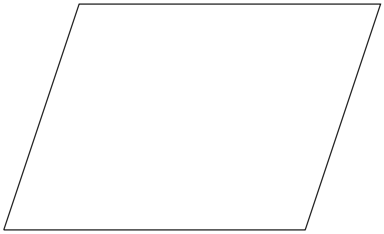
Debemos entender por *cuadrilátero* a aquella figura geométrica en el plano que resulta de unir cuatro puntos no colineales, mediante segmentos tales que no se intersectan salvo en los puntos considerados iniciales (denominados vértices del cuadrilátero).

A los segmentos que se obtienen de unir dos vértices no consecutivos se les denomina *diagonales* del cuadrilátero. En ese sentido, podemos clasificar los cuadriláteros en dos familias, ver Figura 6.25:

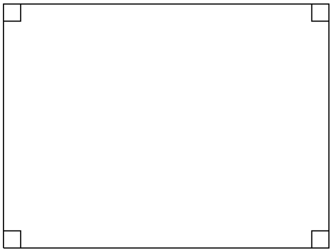
1. Un cuadrilátero se llama *convexo* cuando sus diagonales se intersectan.

2. Un cuadrilátero se llama *cóncavo* cuando no es convexo, es decir, cuando sus diagonales no se intersectan.

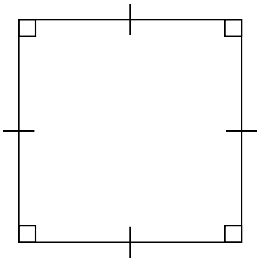
Dentro de los cuadriláteros convexos existen varios tipos conocidos, los cuales son mencionados a continuación ver Figura **??**.



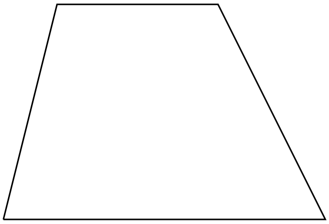
(a) Paralelogramo



(b) Rectángulo



(c) Cuadrado



(d) Trapecio

Figura 6.26

1. Un *paralelogramo* es un cuadrilátero de forma que sus lados opuestos son paralelos.

2. Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos.

3. Un *cuadrado* es un rectángulo con lados de igual longitud.

4. Un *trapecio* es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos.

A continuación presentamos algunas observaciones que deben ser tomadas en cuenta:

- Es claro que todo cuadrado es en particular un paralelogramo. Una pregunta natural es ¿Todo paralelogramo con lados iguales es un cuadrado? La respuesta es negativa, en este caso dicho cuadrilátero se denomina *rombo*.
- Por congruencia de triángulos se muestra que en los cuadriláteros anteriores, con excepción del trapecio, sus diagonales se cortan en el punto medio de ellas. Dicho punto en el caso del rectángulo y cuadrado es denominado centro del cuadrilátero.
- Tanto el cuadrado como el rombo tienen como propiedad que sus diagonales son perpendiculares.

Ahora vemos un ejemplo sobre cuadriláteros.

Ejemplo 6.7. En la Figura 6.27, se tiene el paralelogramo de vértices A, B, C y D. Si se sabe que $AB = AC/2$, se quiere determinar el ángulo x.

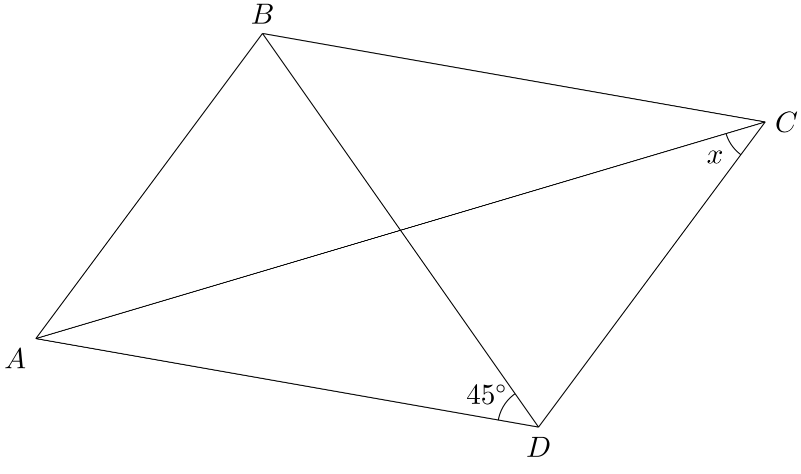


Figura 6.27

Como el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo es el punto medio de ambos segmentos se sigue que el triángulo sombreado, en la Figura 6.28, es isósceles. De

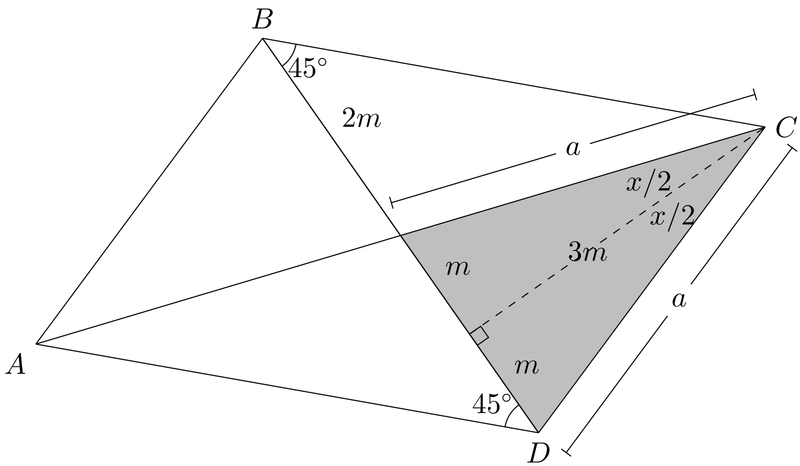


Figura 6.28

la figura se observa el triángulo notable de $37^\circ/2$, de donde se deduce que

$$x = 37^\circ.$$

A continuación otro ejemplo.

Ejemplo 6.8. Se pide determinar el ángulo x en la Figura 6.29.

Tracemos las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$ de los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$, respectivamente. Es claro que $\overline{DF}$ es perpendicular a $\overline{BG}$. Además, los ángulos BDE y CDF son iguales a $45^\circ - x$. Así, el ángulo BDF es $90^\circ - x$, y por ende el ángulo DBG es x. Así, los triángulos rectángulos $\triangle DEC$ y $\triangle BOD$ son semejantes, donde O es el centro del cuadrado $DEFG$.

Si denotamos por a y m a los lados de los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$, respectivamente, se tiene que $BD = \sqrt{2}a$ y $DO = \frac{2}{2}m$. Luego, por semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{EC}{CD} = \frac{DO}{BD} \leftrightarrow \frac{EC}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}m}{a\sqrt{2}}.$$

Por tanto $EC = m/2$, como se aprecia en la Figura 6.30.

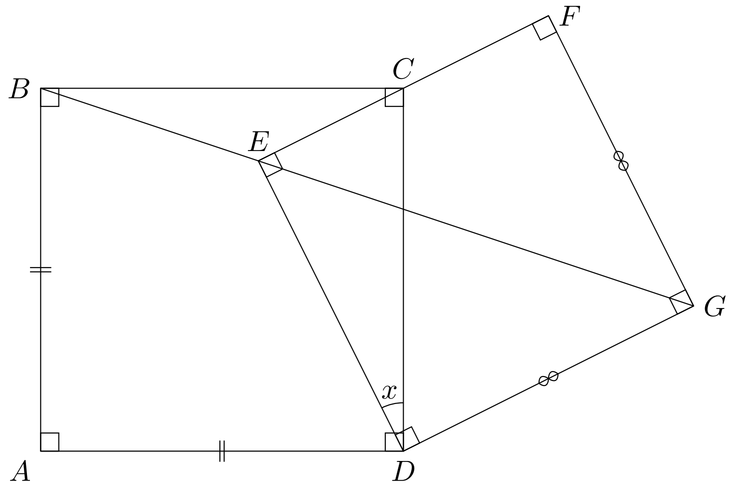


Figura 6.29

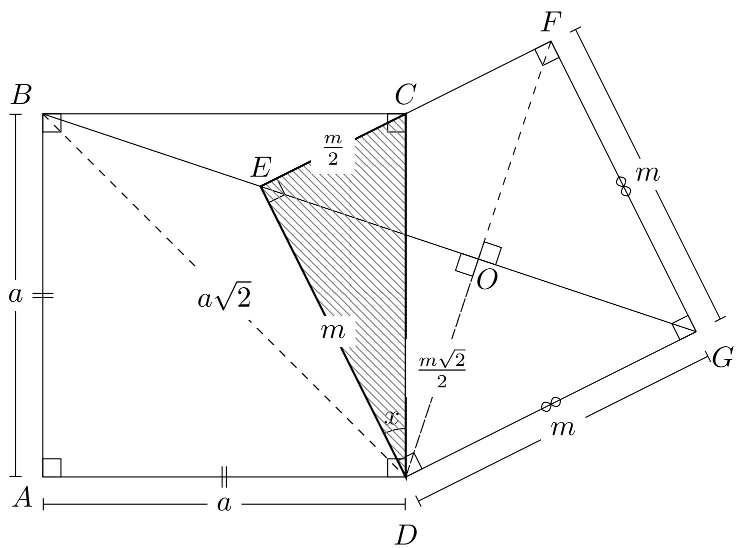


Figura 6.30

El triángulo sombreado en la Figura 6.30 es notable y por tanto $x = 53°/2$.

Circunferencia

Se denomina circunferencia al conjunto de puntos del plano que están igualmente distanciados, una distancia fija denominada *radio* de la circunferencia, de un punto fijo llamado *centro de la circunferencia*.

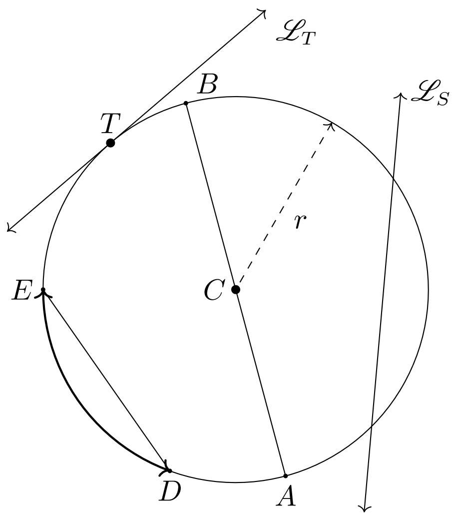
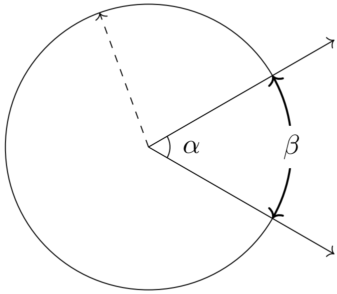


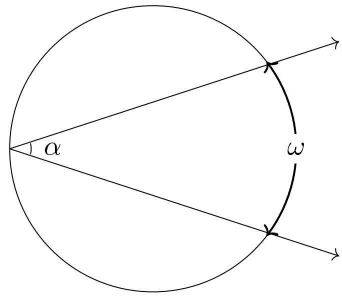
Figura 6.31

En la Figura 6.31 se aprecian algunos elementos asociados a una circunferencia, una *cuerda* es un segmento que une dos puntos de la circunferencia, por ejemplo, el segmento $\overline{DE}$. Una cuerda que pasa por el centro se denomina *diámetro*, es decir, este es la cuerda de mayor longitud, como ocurre con el segmento $\overline{AB}$, cuya longitud AB es el doble del radio. Se dice que una recta es *tangente* a la circunferencia si solo tiene un punto en común con ella, por ejemplo, la recta $\mathscr{L}_T$, donde T es llamado *punto de tangencia*. En caso una recta corte a la circunferencia en dos puntos esta se denomina *secante*, en este caso, la recta $\mathscr{L}_S$. Un *arco* de circunferencia es una porción continua de la circunferencia, por ejemplo, el arco de extremos D y E.

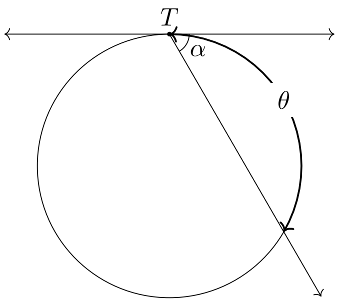
Arcos y ángulos en la circunferencia



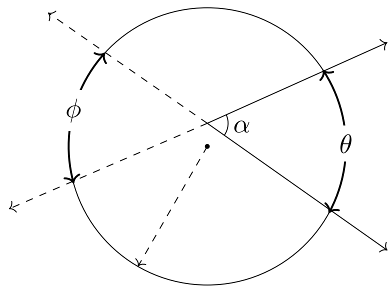
(a) Ángulo central $\alpha = \beta$



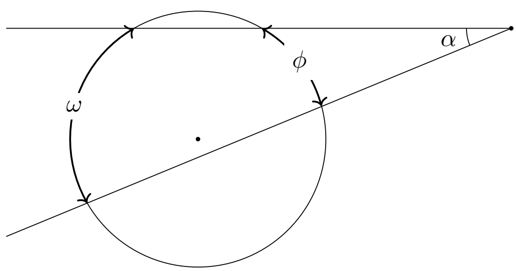
(b) Ángulo inscrito $\alpha = \dfrac{\omega}{2}$



(c) Ángulo tangencial $\alpha = \dfrac{\theta}{2}$



(d) Ángulo interior $\alpha = \dfrac{\theta + \phi}{2}$



(e) Ángulo exterior $\alpha = \dfrac{\omega - \phi}{2}$

Figura 6.32

Propiedad de tangencia a la circunferencia

Asimismo, toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a la recta que pasa por el centro y el punto de tangencia, como se aprecia en la Figura 6.33.

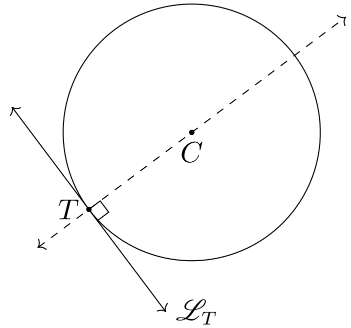


Figura 6.33

Áreas de triángulos

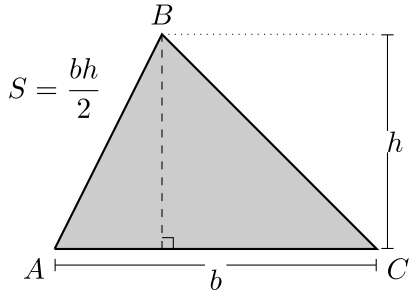


Figura 6.34

En un tríangulo donde se conocen las longitudes de uno de sus lados (b) y su respectiva altura relativa (h), ver la Figura 6.34, el valor numérico del *área* (S) se calcula como $\dfrac{bh}{2}$.

Observemos algunos casos particulares. Si el triángulo es obtusángulo, entonces la altura puede ser exterior al triángulo como se muestra en la Figura 6.35.

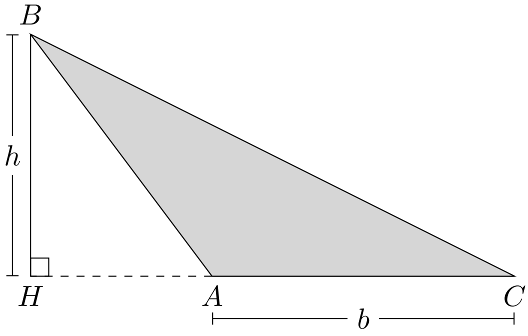


Figura 6.35

En el segundo caso asociado al triángulo rectángulo, el área se calcula como el semi producto de los catetos, como se aprecia en la Figura 6.36.

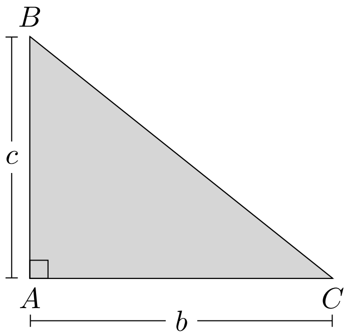


Figura 6.36

Finalmente, podemos calcular el área de un triángulo si conocemos dos lados de este y el ángulo entre dichos lados, como se observa en la siguiente figura.

Por otro lado, si dos triángulos son congruentes, entonces no es difícil ver que tienen áreas iguales. Sin embargo, si dos triángulos son semejantes, sus áreas y los cuadrados de sus lados

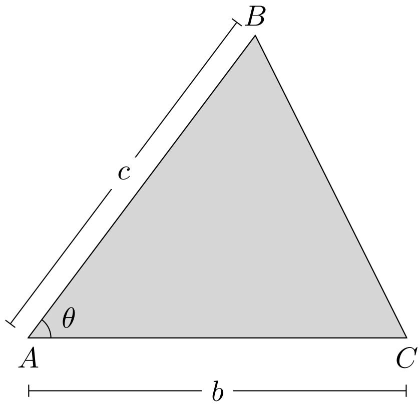


Figura 6.37

Fórmula trigonométrica: $S = \dfrac{bc\,\text{sen}(\theta)}{2}$

semejantes forman una proporción. Esto es, consideremos dos triángulos semejantes como se aprecia en la siguiente figura.

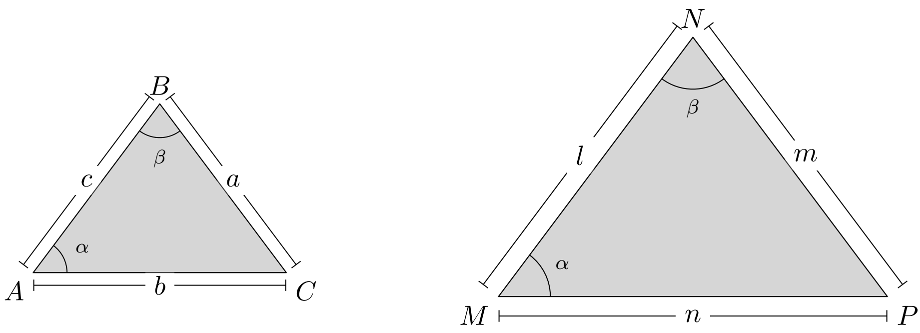


Figura 6.38

Se cumple que

$$\frac{\text{Área } \triangle ABC}{\text{Área } \triangle MNP} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{a^2}{m^2} = \frac{c^2}{l^2}.$$

Ejemplo 6.9. De la Figura 6.39, se quiere calcular el área de la región sombreada.

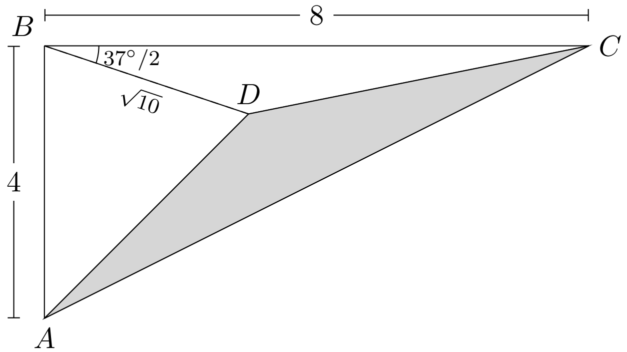


Figura 6.39

Es claro que el área pedida se puede calcular como

$$\text{Área}(\triangle ADC) = \text{Área}(\triangle ABC) - \text{Área}(\triangle ADB) - \text{Área}(\triangle BDC).$$

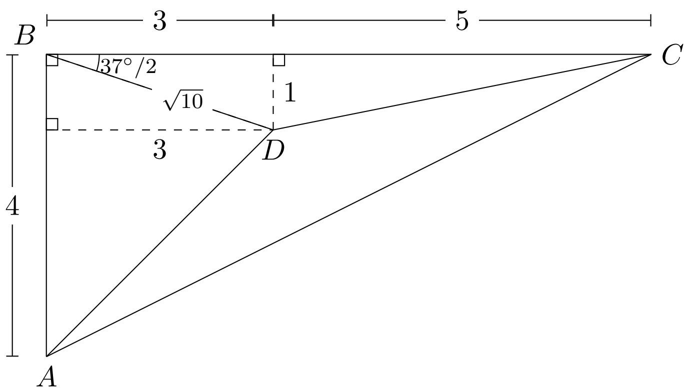


Figura 6.40

En ese sentido trazamos las alturas de los triángulos $\triangle ADB$ y $\triangle BDC$. Como el ángulo de $37°/2$ es notable, se deducen los valores de dichas alturas como se aprecia en la Figura 6.40.

Así, se sigue que Área$(\triangle ADC) = 16 - 6 - 4 = 6\ u^2$.

Áreas de cuadriláteros

En general, el valor numérico del área (S) de un cuadrilátero convexo se calcula como el producto de sus diagonales por el seno del ángulo que ellas forman, ver la siguiente figura.

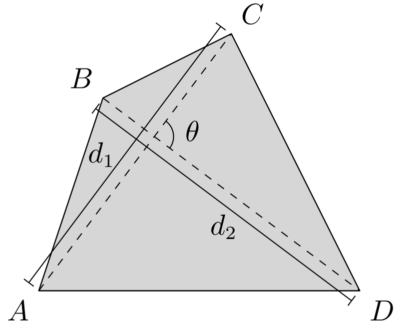
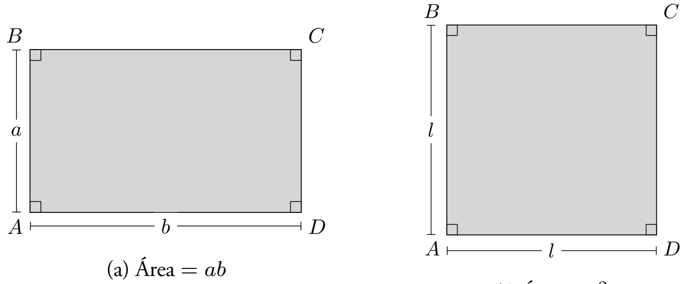


Figura 6.41

Fórmula trigonométrica del área de un cuadrilátero: $S = \dfrac{d_1 d_2 \operatorname{sen}(\theta)}{2}$

En particular el rectángulo tiene por área el producto de sus lados; y, como el cuadrado es un caso particular del rectángulo, su área es el cuadrado de su lado, esto se aprecia en la siguiente figura.



(a) Área $= ab$

(b) Área $= l^2$

Figura 6.42

En el caso del paralelogramo, su área se calcula como producto de la base por la altura. A su vez, en el trapecio su área se calcula como el producto de la altura con la semi suma de las bases. Estos casos se aprecian en la siguiente figura.

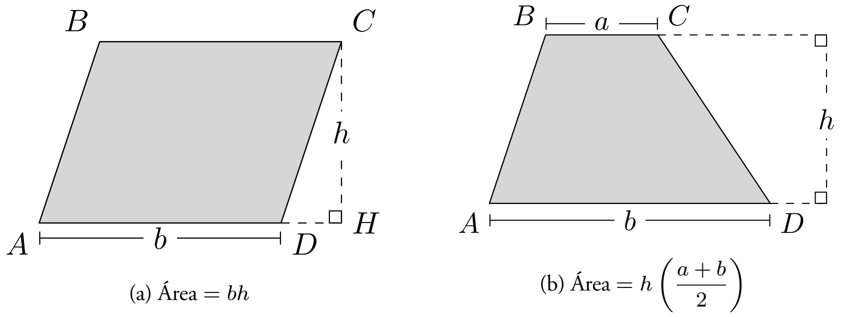


Figura 6.43

En el caso del trapecio, el valor de la semi suma de bases es conocido como la *longitud de la base media*.

Área de la circunferencia

Finalmente, debemos recordar que el valor numérico del área (S) de una circunferencia es proporcional al cuadrado de su radio (r), ver Figura 6.44.

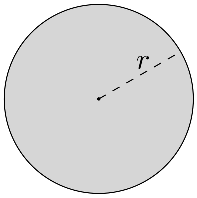


Figura 6.44
Área de la circunferencia: $S = \pi r^2$

Referencias

Arya, J., & Lardner, R. (2008). *Matemáticas aplicadas para la administración y economía* (5.ª ed.). Pearson.

Cotrina, J. (2015). *Fundamentos de matemáticas*. Universidad del Pacífico.

Descamps, S. (2004). *Geometría*. Universitat Politecnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politecnica.

Flores Espíritu, S., & Gutiérrez Cárdenas, A. (2017). *Geometría*. Lumbreras Editores.

Haeussler, E., Paul, R., & Wood, R. (2008). *Matemáticas para la administración y economía* (12.ª ed.). Pearson.

La Serna Studzinski, K., & Serván Lozano, S. (2016). *Ejercicios de microeconomía: un enfoque didático para un curso introductorio*. Universidad del Pacífico.

Moise, E., & Downs, F. (1991). *Geometry*. Addison-Wesley.

Reyes Perez, L., Reyes Perez, W., Revatta Navarro, J., & Casio Romero, A. (2013). *Geometría y Trigonometría*. Lumbreras Editores.

Siu Koochoy, R., & Andaluz Zúñiga, C. (2013). *Geometría analítica en dos dimensiones*. Universidad del Pacífico.

Siu Koochoy, R., & Andaluz Zúñiga, C. (2015). *Trigonometría plana*. Universidad del Pacífico.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2011). *Precalculus: Mathematics for Calculus* (6.ª ed.). Cengage Learning.

Sydsaeter, K., Hammond, P. J., & Carvajal, A. (2012). *Matemáticas para el Análisis Económico* (2.ª ed.). Pearson.

Varian, H. (2010). *Microeconomía intermedia, un enfoque actual* (8.ª ed.). Publicado por Antoni Bosch.

Zúñiga, J. (2013). *Precálculo*. Universidad del Pacífico.