

José Luis Bonifaz  
Diego Winkelried

44

APUNTES DE ESTUDIO

**Matemáticas para la economía dinámica**  
Primera edición corregida

apuntes  
*estudios*

$$T = (110, 18/6) = 0,0453335$$
$$25 \times 1,018 + 2,345/9$$

mática

UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN

UMA-PERO

## Matemáticas para la economía dinámica

José Luis Bonifaz  
Diego Winkelried

**Matemáticas para la economía dinámica**  
Primera edición corregida



UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN

© Universidad del Pacífico  
Centro de Investigación  
Avenida Salaverry 2020  
Lima 11, Perú

**Matemáticas para la economía dinámica**

José Luis Bonifaz

Diego Winkelried

1ª edición: diciembre 2001

1ª edición corregida: octubre 2003

Diseño de la carátula: Ícono Comunicadores

ISBN: 9972-57-033-9

Hecho el depósito legal: 1501052003-4153

**BUP – CENDI**

**Bonifaz, José Luis**

Matemáticas para la economía dinámica / José Luis Bonifaz y Diego Winkelried.-- 1ª ed. corregida -- Lima: Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico, 2003.-- (Apuntes de Estudio; 44)

/MATEMÁTICAS APLICADAS / ECONOMÍA /

51:33 (CDU)

Miembro de la Asociación Peruana de Editoriales Universitarias y de Escuelas Superiores (APESU) y miembro de la Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y el Caribe (EULAC).

El Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico no se solidariza necesariamente con el contenido de los trabajos que publica. Prohibida la reproducción total o parcial de este texto por cualquier medio sin permiso de la Universidad del Pacífico.

Derechos reservados conforme a Ley.

# Índice

<b>I.</b>	<b>Secuencias infinitas .....</b>	<b>17</b>
1.1	Generalidades .....	17
1.2	Límite de una secuencia: convergencia y divergencia .....	20
1.3	Secuencias monótonas .....	22
1.4	Convergencia y crecimiento económico: una breve reseña .....	25
	Ejercicios .....	30
	Apéndice. Algunas propiedades de límites de secuencias infinitas ....	34
<b>II.</b>	<b>Series infinitas .....</b>	<b>35</b>
2.1	Generalidades .....	35
2.2	Propiedades algebraicas de series infinitas .....	36
2.3	La serie geométrica .....	37
	2.3.1 Aplicación: multiplicadores en la economía .....	38
	2.3.2 Aplicación: valor actual neto .....	42
2.4	Criterios o pruebas de convergencia .....	44
	2.4.1 Criterio de la integral .....	45
	2.4.2 Criterios de comparación .....	48
	2.4.3 Últimas pruebas: criterios de la raíz y de la ratio .....	51
2.5	Series alternadas .....	52
2.6	Convergencia absoluta y condicional .....	54
2.7	Síntesis .....	55
	Ejercicios .....	57

# Índice de figuras

<b>I. Secuencias infinitas</b>	
1.1 Representación de secuencias .....	19
1.2 Límite de una secuencia .....	21
1.3 Convergencia económica .....	28
<b>II. Series infinitas</b>	
2.1 Base monetaria, liquidez en moneda nacional y multiplicador bancario .....	42
2.2 Convergencia: criterio de la integral .....	46
2.3 Convergencia de series alternadas .....	53
<b>III. Series de potencias y de Taylor</b>	
3.1 Convergencia de una serie de potencias .....	65
3.2 Duración y convexidad de un bono .....	77
3.3 Aproximación lineal de una función .....	78
3.4 Aproximación de $e^x$ .....	81
3.5 Aproximación de $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ .....	85
3.6 Curva de Lorenz .....	97
3.7 Curva de Lorenz y polinomios de Taylor .....	99
3.8 Función de producción Cobb – Douglas y aproximaciones ....	103
<b>IV. Ecuaciones diferenciales I</b>	
4.1 Población mundial .....	120
4.2 Ejemplos de trayectorias .....	123

<b>III. Series de potencias y de Taylor .....</b>	<b>64</b>
3.1 Generalidades .....	64
3.2 Manipulando series de potencias .....	68
3.2.1 Aplicación: medidas de riesgo de un bono .....	73
3.3 Desarrollo de series de potencias: la serie de Taylor .....	78
3.3.1 El polinomio de Taylor .....	78
3.3.2 La serie de Taylor .....	84
3.3.3 El teorema de Taylor .....	88
3.3.4 Técnicas comunes en la obtención de aproximaciones de Taylor .....	99
3.3.5 Polinomios de Taylor de funciones multivariadas .....	101
Ejercicios .....	104
Apéndice. El teorema del valor medio .....	108
<b>IV. Ecuaciones diferenciales I .....</b>	<b>109</b>
4.1 Introducción .....	109
4.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden .....	114
4.2.1 Aplicación: crecimiento exponencial .....	117
4.2.2 Convergencia y estabilidad .....	121
4.2.3 Resolución de un caso especial .....	128
4.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden .....	134
4.3.1 Independencia lineal y la ecuación homogénea .....	135
4.3.2 Método de los coeficientes indeterminados .....	146
4.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior .....	150
4.4.1 Aplicación: una nota breve sobre ciclos .....	155
4.5 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales .....	159
4.5.1 Sistemas lineales de primer orden: solución general .....	160
4.5.2 Análisis gráfico y estabilidad .....	164
4.5.3 Estabilidad: aspectos analíticos .....	171
4.5.4 Consideraciones finales .....	174
Ejercicios .....	179
Apéndice A. El método de variación de parámetros .....	188
Apéndice B. Nota sobre sistemas de EDO lineales .....	189
<b>V. Ecuaciones diferenciales II .....</b>	<b>191</b>
5.1 Introducción .....	191
5.2 Enfoque cualitativo .....	191
5.2.1 Caso unidimensional .....	192
5.2.2 Caso bidimensional .....	198
5.3 Métodos de series de potencias .....	215

5.4	Métodos numéricos .....	222
5.4.1	Motivación .....	223
5.4.2	Método de series de Taylor .....	226
5.4.3	El método de Euler modificado .....	231
5.4.4	El método Runge Kutta de segundo orden .....	234
5.4.5	El método Runge Kutta de cuarto orden .....	238
5.4.6	Una evaluación de los métodos numéricos .....	241
5.4.7	EDO de orden superior y sistemas .....	243
	Ejercicios .....	248
	Apéndice. ¿Cómo usar los métodos numéricos? .....	254
A.	Métodos numéricos en MATLAB® .....	254
B.	Métodos numéricos en MS Excel .....	257
<b>VI.</b>	<b>Ecuaciones en diferencias .....</b>	<b>262</b>
6.1	Introducción .....	262
6.2	Ecuaciones en diferencias ordinarias lineales de primer orden ...	265
6.2.1	Convergencia y estabilidad .....	268
6.2.2	Resolución de un caso especial .....	272
6.2.3	Aplicación: modelo de la telaraña .....	275
6.3	Ecuaciones en diferencias ordinarias de segundo orden .....	278
6.3.1	La solución homogénea .....	279
6.3.2	La solución particular .....	284
6.4	Ecuaciones en diferencias ordinarias lineales de orden superior .....	290
6.4.1	Aplicación: ciclo de inventarios .....	295
6.5	Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales .....	298
6.5.1	Sistemas lineales de primer orden .....	299
6.5.2	Sistemas lineales de orden superior .....	308
6.6	Ecuaciones en diferencias no lineales .....	311
6.6.1	Enfoque numérico .....	311
6.6.2	Enfoque cualitativo .....	315
6.7	El operador de rezago .....	320
6.7.1	Ecuaciones en diferencias de primer orden .....	321
6.7.2	Ecuaciones en diferencias de segundo orden .....	326
	Ejercicios .....	330
	Apéndice A: Soluciones hacia atrás y hacia adelante .....	337
	Apéndice B: Paralelo entre EDO y EED .....	338
<b>VII.</b>	<b>Apéndice. Números complejos .....</b>	<b>340</b>
7.1	Definición .....	340



7.2 Operaciones con números complejos .....	342
7.3 Números complejos conjugados .....	342
7.4 Módulo de los números complejos .....	343
7.5 Forma polar de un número complejo .....	344
7.6 Interpretación geométrica de la multiplicación y la división ..	345
7.7 La fórmula de De Moivre .....	346
7.8 Raíces $n$ -ésimas de los números complejos .....	346

<b>Bibliografía .....</b>	<b>348</b>
---------------------------	------------

# Índice de cuadros

<b>I. Secuencias infinitas</b>	
1.1 Terminología de secuencias monótonas .....	22
<b>II. Series infinitas</b>	
2.1 Criterios de convergencia .....	55
<b>III. Series de potencias y de Taylor</b>	
3.1 Aproximación de $\ln(1+x)$ .....	72
3.2 Aproximación de la probabilidad de una función gaussiana .....	88
3.3 Distribución del ingreso por quintiles .....	96
<b>IV. Ecuaciones diferenciales I</b>	
4.1 Resolución de una EDO lineal de primer orden .....	115
4.2 Planteamientos y soluciones de EDO lineales de primer orden .....	116
4.3 Algunos ejemplos de EDO de primer orden .....	123
4.4 Soluciones de la ecuación complementaria .....	143
4.5 Método de los coeficientes indeterminados .....	149
4.6 Equilibrios en sistemas de EDO .....	172
<b>V. Ecuaciones diferenciales II</b>	
5.1 Equilibrios en sistemas de EDO .....	200
5.2 Evaluación cualitativa de los métodos numéricos .....	241

## **VI. Ecuaciones en diferencias**

6.1 Planteamientos y soluciones de EED lineales de primer orden .....	267
6.2 Dinámica de una EED de primer orden.....	270
6.3 Soluciones de la ecuación complementaria .....	283
6.4 Método de los coeficientes indeterminados .....	287

4.3	Nivel de precios e inflación bajo condiciones de convergencia .....	126
4.4	Convergencia de precio y cantidades en un modelo de mercado .....	128
4.5	La curva de aprendizaje .....	132
4.6	El modelo de Haavelmo .....	134
4.7	Raíces reales en una EDO de segundo orden .....	139
4.8	Raíces complejas conjugadas en una EDO de segundo orden .....	141
4.9	El modelo de deuda de Domar .....	146
4.10	Un ejemplo de EDO de orden superior .....	154
4.11	Elementos básicos de un ciclo .....	156
4.12	Amplitud móvil .....	157
4.13	PBI real y oscilaciones traslapadas .....	158
4.14	Diagramas de fase .....	165
4.15	Raíces reales y distintas: nodos impropios .....	166
4.16	Raíces reales y distintas: punto de ensilladura .....	167
4.17	Raíces reales e iguales: nodos impropios .....	169
4.18	Raíces reales e iguales: nodos propios .....	170
4.19	Raíces complejas: focos y vórtices .....	171
4.20	Equilibrios en sistemas de EDO .....	173

## V. Ecuaciones diferenciales II

5.1	Movimiento en el plano $yy'$ .....	192
5.2	Diagramas de fase y estabilidad .....	193
5.3	Estabilidad y multiplicidad de equilibrios .....	194
5.4	Crecimiento logístico .....	197
5.5	Diferencia de funciones .....	198
5.6	Movimiento en el plano $xy$ .....	203
5.7	Producción y polución .....	204
5.8	Extracción de peces .....	206
5.9	Modelo depredador - presa .....	209
5.10	Modelo IS-LM: enfoque keynesiano (casos extremos) .....	212
5.11	Modelo IS-LM: enfoque monetarista .....	213
5.12	Ratio $q$ de Tobin .....	215
5.13	Precisión del método de Euler .....	229
5.14	Euler vs. Euler modificado .....	234
5.15	Geometría de los métodos numéricos .....	235
5.16	Crecimiento logístico con depredación .....	239
5.17	Trayectorias numéricas de la población .....	240
5.18	Evaluación de métodos numéricos .....	243

5.19 Producción y polución .....	246
5.20 La ecuación de van der Pol .....	247

## **VI. Ecuaciones en diferencias**

6.1 Dinámica de una EED de primer orden .....	271
6.2 El <i>modelo de la telaraña</i> .....	277
6.3 Convergencia de $tr^t$ .....	281
6.4 Un ejemplo de EED de orden superior .....	295
6.5 Solución numérica de la ecuación logística .....	313
6.6 Solución del modelo depredador-presa .....	315
6.7 Movimiento en el plano $x_t, x_{t+1}$ .....	316
6.8 Diagramas de fase discretos .....	316
6.9 Otro ejemplo de crecimiento logístico .....	318

# Prólogo

*Matemáticas para la economía dinámica* es un Apuntes de Estudio que ha sido escrito sobre la base de la experiencia de los autores en el dictado del curso Matemáticas para Economistas de la Facultad de Economía de la Universidad del Pacífico. Dicho curso tiene una primera parte dedicada al Álgebra Lineal y una segunda parte que cubre los tópicos de matemáticas aplicadas a la economía dinámica. Este trabajo se enfocó precisamente en esta segunda parte.

La presente obra incluye las herramientas matemáticas más importantes para introducirse en el mundo de la dinámica económica: sucesiones y series numéricas, series de potencias y de Taylor, ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias. Sin embargo, la diferencia entre nuestro texto y los textos clásicos de matemáticas radica en la inclusión de aplicaciones económicas reales, como convergencia y crecimiento económico; multiplicadores de la economía; base monetaria, liquidez y multiplicador bancario; medidas de riesgo de un bono; medida absoluta de aversión al riesgo; distribución del ingreso; estabilidad en economía; ciclos económicos; dinámica de la producción per cápita; modelo IS-LM; la “q” de Tobin; modelo de la telaraña; ciclo de inventarios; y muchos otros más. Ese es el valor agregado que se ha querido brindar a los estudiantes de economía.

Un tema que vale la pena destacar es el de Métodos Numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Este tópico se desarrolla en el capítulo 5 y cuenta con ejemplos resueltos en hoja de cálculo mediante los métodos de Euler

y Runge Kutta. Probablemente, en algunos años, un curso estándar de ecuaciones diferenciales esté enfocado en los métodos que esta sección desarrolla.

Este Apuntes de Estudio requiere que el lector tenga conocimientos básicos sobre el cálculo diferencial y es la base matemática para acceder a temas de optimización dinámica. En este sentido, *Matemática para la economía dinámica* es el texto indicado para enfrentar con éxito el Apuntes de Estudio *Optimización dinámica y teoría económica*, de los autores José Luis Bonifaz y Ruy Lama, también editado por la Universidad del Pacífico.

Queremos agradecer especialmente al Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico (CIUP) por su apoyo al proyecto interno que estuvo a nuestro cargo durante el año 2000. Asimismo, deseamos agradecer y homenajear a dos personas muy importantes en el desarrollo de las matemáticas en la Universidad del Pacífico: Fernando "Chicho" Bonifaz Stagnaro y Jorge Cortez Cumpa. Ellos han sido los verdaderos inspiradores de este Apuntes de Estudio no solo por la labor que desarrollaron como docentes, sino también porque constituyen grandes ejemplos de una vida dedicada a sus alumnos.

# I

## Secuencias infinitas

### 1.1 Generalidades

En el lenguaje común el término “secuencia” sugiere la sucesión de un conjunto de objetos, eventos o acciones en algún orden específico o particular. Por ejemplo, una película cinematográfica puede ser vista como una secuencia de imágenes que guardan cierta relación entre sí. Un baile puede entenderse como una secuencia de movimientos y pasos organizados. También una frase es una secuencia de palabras que respeta cierto orden establecido por reglas lingüísticas.

Matemáticamente, puede pensarse que el término “secuencia” describe la sucesión de cantidades o números (tales como  $1, 2, 3, 4, \dots$  ó  $2, 4, 6, 8, \dots$  ó  $1, -1, 1, -1, \dots$ ) denominados **términos**. De este modo, una secuencia cuenta con un primer término  $a_1$ , un segundo término  $a_2$ , un tercer término  $a_3$  y así sucesivamente. Si el último término de la secuencia existe, se dice que esta es **finita**; por el contrario, si no existe y la secuencia se desarrolla de manera indefinida, esta es **infinita**. A continuación, estudiaremos los principales aspectos de secuencias infinitas.

Una sucesión<sup>1</sup> es definida o establecida si y solo si existe una regla dada que determina el término  $n$ ésimo correspondiente a un valor  $n$  entero positivo; esta

---

<sup>1</sup> En adelante, los términos “secuencia” y “sucesión” serán tratados, indistintamente, como sinónimos.



regla puede estar dada por la fórmula del término enésimo. Por ejemplo, todos los números enteros positivos, en su orden natural, forman una sucesión infinita definida por la fórmula  $a_n = n$ ; en la secuencia 1, 3, 5, 7, ... (los números impares positivos) cada término resulta ser el doble de su posición respectiva menos uno de modo que el enésimo término de esta secuencia viene dado por  $2n - 1$ . De manera compacta, para el último caso, se tiene la siguiente **fórmula explícita**:

$$\{2n - 1\}_{n=1}^{+\infty}$$

Esta fórmula sugiere que la secuencia puede ser generada sustituyendo los valores enteros  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  en la fórmula  $2n - 1$ . Este tipo de representación es denominado **notación de llaves**.

Todo lo anterior nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.1** Formalmente, una **secuencia infinita** (o, simplemente, secuencia o sucesión) es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros mayores o iguales a un entero arbitrario (usualmente 0 ó 1) y cuyo rango viene dado por un subconjunto de los números reales. Además, la representación de llaves  $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$  es notación alternativa a  $f(n) = a_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  es decir, podemos pensar en una secuencia como la lista de valores de  $f$ ,  $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$

En muchas ocasiones las secuencias son determinadas mediante la especificación de uno o más términos iniciales y de una fórmula que relaciona cada término con aquellos que lo preceden. Por ejemplo, la secuencia 1, 2, 4, 8, 16, ... puede ser definida mediante la fórmula explícita  $a_n = 2^n$ ; alternatively, puede expresarse como  $a_n = 2a_{n-1}$ . Así, la sucesión ha sido definida de manera **recursiva** y la relación  $a_n = \varphi(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots)$  es denominada **fórmula de recursión**. A modo de ejemplo, consideremos la sucesión asociada a la fórmula de recursión [ $a_{n+1} = 0.5(a_n + 3/a_n)$ ]. Esta sucesión es utilizada para hallar la solución de  $x^2 - 3 = 0$  y es generada, imponiendo  $a_1 = 1$ , de la siguiente manera:

$$a_2 = 0.5(a_1 + 3/a_1) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$$

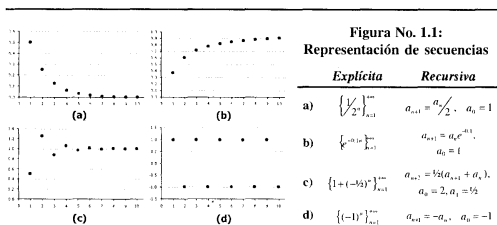
$$a_3 = 0.5(a_2 + 3/a_2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2}) = \frac{7}{4}$$

$$a_4 = 0.5(a_3 + 3/a_3) = \frac{1}{2}(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}) = \frac{97}{56}$$

$$a_5 = 0.5(a_4 + 3/a_4) = \frac{1}{2}(\frac{97}{56} + \frac{168}{97}) = \frac{1351}{780}$$

$$a_6 = 0.5(a_5 + 3/a_5) = \frac{1}{2}(\frac{1351}{780} + \frac{2340}{1351}) = \frac{1351}{780}$$

Se aprecia que a partir del quinto término los valores de la secuencia son iguales a  $1351/780$ , valor coincidente con  $(3)^{1/2}$  que es la solución a la ecuación planteada.



Una secuencia puede ser definida de manera explícita o de forma recursiva. Dado que una secuencia es una función cuyo dominio es, generalmente, el conjunto de números naturales (enteros positivos), su representación gráfica viene dada por puntos discretos en un plano cartesiano, como se aprecia en la figura.

Finalmente, entre los tipos más importantes (y populares) de sucesiones se encuentran las sucesiones aritméticas (también conocidas como progresiones aritméticas), en las que la diferencia entre dos términos sucesivos es constante, y las sucesiones geométricas (también conocidas como progresiones geométricas), en las que el cociente entre dos términos sucesivos es constante. Algebraicamente, la progresión aritmética es definida como  $a_{n+1} = a_n + \rho$  mientras que la geométrica responde a  $a_{n+1} = \rho a_n$  donde  $\rho$  es la razón de la sucesión<sup>2</sup>.

2 Las representaciones explícitas son iguales a  $\{a + \rho n\}$  y  $\{a \rho^n\}$ , para las sucesiones aritmética y geométrica, respectivamente.

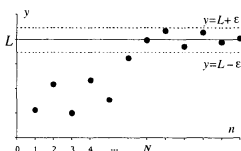
Una aplicación inmediata de sucesiones se encuentra al calcular los intereses que reditúa cierto capital. Si el dinero se invierte en el régimen de interés simple, a una tasa del 10% anual, entonces en  $n$  años la cantidad de dinero inicial  $A$  ha generado un monto  $a_n = A(1 + 0.10n)$ . El mismo producto  $(0.10)A$  se añade cada año, por lo que las cantidades  $a_n$  forman una clara progresión aritmética. Si el interés es compuesto<sup>3</sup>, las cantidades ahorradas forman una progresión geométrica,  $g_n = A(1+0.10)^n$ . En ambos casos, a medida que  $n$  crece, está claro que  $a_n$  y  $g_n$  llegarán a ser mayores que cualquier número entero imaginable<sup>4</sup>.

## 1.2 Límite de una secuencia: convergencia y divergencia

Una vez conocida la definición de secuencia cabe preguntarse cómo se comporta cierta sucesión a medida que  $n$  se incrementa. En el panel (a) de la Figura No. 1.1 se tiene una secuencia que se aproxima sistemáticamente a cero si es evaluada en mayores valores de  $n$ ; el panel (b) de la misma figura muestra un patrón distinto ya que, al parecer, la sucesión tiende a uno al incrementarse el número de términos; por su parte, las progresiones aritméticas y geométricas utilizadas a modo de ejemplo en la sección anterior crecen de manera indefinida. Por ello, resulta indispensable introducir el concepto de **límite** de una secuencia. Para tales efectos, consideremos la Figura No. 1.2 que nos brinda una idea básica al respecto: una secuencia  $y = \{a_n\}$  **converge** al límite  $L$  si para cualquier valor positivo “ $\epsilon$ ” existe un punto  $N$  en la secuencia de modo que los términos posteriores se encuentren entre las líneas  $y = L + \epsilon$  e  $y = L - \epsilon$ ; es decir, estos términos distan, como máximo,  $\epsilon$  unidades de  $L$ . Dicho de otra manera, una secuencia  $\{a_n\}$  converge al límite  $L$  si sus términos *eventualmente* se encuentran cercanos a  $L$  de manera arbitraria.

3 Una discusión sobre las diferencias y usos del interés simple y compuesto puede hallarse en Richard A. Brealey y Stewart c. Myers, *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill Inc., 1991 y Arlette Beltrán y Hanny Cueva, *Evaluación privada de proyectos*, Biblioteca Universitaria, CIUP, Lima, 1999.

4 Si nuestros antepasados hubieran depositado hace 100 años una cantidad de US\$ 100 en el régimen de interés compuesto a una tasa de 10% anual, el día de hoy dispondríamos nada menos que de US\$ 1'378,061.23



**Figura No. 1.2:**  
**Límite de una sucesión**

Si “y” es una sucesión convergente, a partir de cierto punto “N” sus términos distarán de su límite “L” como máximo en “ε” unidades. Así, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $a_n = L$ . Por su parte, si L no existe, la sucesión es divergente.

**Definición 1.2** Se dice que una sucesión  $\{a_n\}$  **converge** al límite L si para cualquier valor  $\varepsilon > 0$  existe un número entero positivo N tal que  $|a_n - L| < \varepsilon$  para  $n \geq N$ . En este caso,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$$

Además, se dice que una sucesión **diverge** si no converge a un límite finito<sup>5,6</sup>.

Consideremos dos ejemplos que aclaren los conceptos de convergencia:

El primero de ellos se refiere a la **sucesión de Fibonacci** definida recursivamente como  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ,  $a_1 = a_2 = 1$ . Claramente, esta sucesión es divergente porque responde al patrón 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... que crece de manera indefinida y sin límite. No obstante, dada la sucesión, puede demostrarse que a partir de cierto valor de n,  $a_n$  se incrementa a una tasa constante. De hecho, se trata de hallar  $a_{n+1}/a_n$  en el límite. De este modo se tiene que:

5 Una extensión de esta definición es la siguiente: “una sucesión  $\{a_n\}$  converge al límite L si y solo si las sucesiones compuestas por los términos pares e impares de  $\{a_n\}$  convergen a L”. La sucesión  $1/2, 1/5, 1/4, 1/25, 1/8, 1/125, \dots$  es convergente al límite cero ya que tanto  $1/2, 1/4, 1/8, \dots$  como  $1/5, 1/25, 1/125, \dots$  convergen al valor nulo; por el contrario,  $1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, \dots$  diverge, ya que los términos impares convergen a uno mientras que los pares convergen a cero.

6 Si la sucesión es convergente, L es único. **Demostración:** utilizamos la reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión admitiese dos límites distintos L y H, siendo  $|L - H| > 2\varepsilon > 0$ . Bajo estas condiciones, en los intervalos, de amplitud  $2\varepsilon$ , de L y H tenderemos propiedades contradictorias: (a) por un lado, no pueden tener puntos comunes, y (b) cada uno contiene todos los términos de la sucesión menos un número finito de ellos. Así pues, deberá ser que  $H = L$  y el límite será único. ♦

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803399$$

Una buena aproximación a esta tasa es obtenida a partir del décimo quinto término de la secuencia (el valor "exacto" puede ser hallado con ayuda de una computadora a partir de  $n = 39$ ).

Como segundo ejemplo, supóngase que se desea conocer el perímetro  $p$  de un polígono regular de lado  $\lambda$  inscrito en un círculo de radio  $r$ . Si el polígono evaluado es un triángulo equilátero, se tiene un perímetro  $p_3 = 3\lambda = 3r(3)^{1/2} = 3[2r\text{sen}(60^\circ)]$ ; si consideramos un cuadrado, se obtiene un perímetro igual a  $p_4 = 4\lambda = 4r(2)^{1/2} = 4[2r\text{sen}(45^\circ)]$  y si evaluamos un hexágono,  $p_6 = 6\lambda = 4r = 6[2r\text{sen}(30^\circ)]$ . En general, si el polígono cuenta con  $n$  lados iguales, su perímetro es definido como  $p_n = 2rn\text{sen}(\pi/n)$ .

Un resultado de geometría elemental nos dice que si  $n \rightarrow \infty$ , el polígono tiende a ser el círculo donde está inscrito de manera que su perímetro es el límite de la secuencia  $\{p_n\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2r \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{sen}(\pi/n) = 2r \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\pi n)}{n} = 2\pi r$$

valor equivalente al largo de la circunferencia del círculo.

### 1.3 Secuencias monótonas

**Cuadro No. 1.1:**  
Terminología de secuencias monótonas

$\{a_n\}$ es...	...si cumple...	...que verifica	y, si $\{a_n\} > 0$	En términos diferenciales,
Creciente	$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$	$a_{n+1} - a_n > 0$	$a_{n+1} / a_n > 1$	$f'(n) > 0$
No decreciente	$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$	$a_{n+1} - a_n \geq 0$	$a_{n+1} / a_n \geq 1$	$f'(n) \geq 0$
Decreciente	$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$	$a_{n+1} - a_n < 0$	$a_{n+1} / a_n < 1$	$f'(n) < 0$
No creciente	$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$	$a_{n+1} - a_n \leq 0$	$a_{n+1} / a_n \leq 1$	$f'(n) \leq 0$

Si una secuencia es no decreciente o no creciente es llamada **monótona** y si una secuencia es creciente o decreciente es nombrada estrictamente monótona. Nótese que una sucesión **estrictamente monótona** es monótona pero no se da lo inverso.

A partir de la terminología anterior puede extenderse la discusión incorporando el concepto de **eventualidad**. Una secuencia es **eventualmente monótona** si existe un entero  $N$  de modo que la secuencia es monótona para  $n > N$ .

Consideremos dos secuencias:  $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$  y  $\left\{ \frac{10^n}{n!} \right\}$

Es fácil demostrar, mediante la información proporcionada en el Cuadro No. 1, que la primera secuencia es estrictamente monótona ya que es creciente. Dado que:

$$a_n = \frac{n}{n-1} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

se verifica que:  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0, \forall n \geq 1$

$$\text{y} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1, \forall n \geq 1$$

Por su parte, la segunda secuencia resulta ser eventualmente decreciente. Se tiene que:

$$a_n = \frac{10^n}{n!} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

de manera que  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{n+1}$  que es menor a 1 si y solo si  $n > 10$

A diferencia de lo visto hasta el momento, muchas veces solo nos interesa saber si la secuencia es convergente o no, sin dar mayor importancia a su posible límite. Para poder analizar la convergencia de una secuencia monótona (o eventualmente monótona), resulta indispensable introducir dos teoremas<sup>7</sup>:

<sup>7</sup> La demostración de los teoremas es inmediata.

**Teorema 1.1** Si  $\{a_n\}$  es una secuencia no decreciente, entonces se tienen dos posibilidades:

- (a) Existe una constante  $M$ , denominada **cota superior**, de manera que  $a_n \leq M$  para todo  $n$ . En este caso, la secuencia **converge** al límite  $L$  que satisface  $L \geq M$ .
- (b) No existe cota superior por lo que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ . Claramente, la secuencia **diverge**.

**Teorema 1.2** Si  $\{a_n\}$  es una secuencia no creciente, entonces se tienen dos posibilidades:

- (a) Existe una constante  $M$ , denominada **cota inferior**, de manera que  $a_n \geq M$  para todo  $n$ . En este caso la secuencia **converge** al límite  $L$  que satisface  $L \geq M$ .
- (b) No existe cota inferior por lo que  $\lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = -\infty$ . Claramente, la secuencia **diverge**.

Evidentemente, los teoremas presentados son válidos también para secuencias eventualmente no decrecientes y eventualmente no crecientes así como para sucesiones estrictamente monótonas. Combinando ambos teoremas puede llegarse a la siguiente proposición: una secuencia  $\{a_n\}$  es **acotada** si existen dos números  $P$  y  $Q$  de modo que  $P \leq a_n \leq Q$ , para todos los valores de  $n^8$ . Una secuencia acotada es, necesariamente, convergente<sup>9</sup> mientras que una secuencia no acotada (no existen  $P$  y  $Q$ ) **diverge**<sup>10</sup>.

De manera informal, puede sostenerse que la convergencia o divergencia de una secuencia no depende del comportamiento o patrón de sus “términos iniciales” pero sí del comportamiento de los “términos finales” (cuando  $n$  tiende a infinito). Así, para que una secuencia converja al límite  $L$  realmente no interesa si los términos iniciales son muy lejanos a  $L$ , sino que aquellos términos de la secuen-

8 Si  $P$  no existe, la secuencia es **acotada superiormente**. Si la secuencia es no decreciente, se cumple el Teorema 1.1. Por su parte, si  $Q$  no existe, la secuencia es **acotada inferiormente**. Si la secuencia es no creciente, se cumple el Teorema 1.2.

9 El lector puede demostrar lo inverso: toda secuencia convergente es acotada.

10 **Demostración:** Utilizaremos la reducción al absurdo. Supongamos que  $\{a_n\}$  es convergente. Dado un número positivo  $\epsilon$ , existirá un entero positivo  $N$  de manera que a partir de él y  $\forall n \geq N$ ,  $|a_n - L| < \epsilon$ . Luego, en este intervalo estarán todos los términos de la sucesión menos un número finito de ellos, con lo cual dicha sucesión deberá ser acotada. Como este hecho es contrario a la hipótesis, la sucesión será divergente. ♦

cia que se encuentran sistemática y arbitrariamente cerca de este límite. Si este fuera el caso, uno podría agregar, borrar o alterar de manera *finita* muchos términos de la secuencia sin afectar su convergencia, divergencia o su límite (si existe). Por ejemplo, se quiere hallar el límite de la siguiente secuencia:

$$\left\{ \frac{10^n}{n!} \right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Anteriormente se mostró que se trata de una sucesión eventualmente decreciente. Dado que todos los términos de la secuencia son positivos, está acotada inferiormente por  $M = 0$  y, por ende, el Teorema 1.2 garantiza que converge a un valor  $L \geq 0$ . Lamentablemente, el límite de la secuencia no es evidente, por lo que procederemos a calcularlo. La secuencia puede ser representada de manera recursiva:

$$a_{n+1} = \frac{10}{n+1} a_n$$

Al tomar límites a la expresión anterior y sabiendo que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$  se tiene que:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{10}{n+1} a_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n+1} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \cdot L = 0$$

con lo que se concluye que el límite de la secuencia es, en este caso, su cota inferior. ♦

#### 1.4 Convergencia y crecimiento económico: una breve reseña

Anteriormente hemos introducido y analizado el concepto de convergencia desde un punto de vista matemático, y concluimos que una secuencia es convergente si su límite existe (ver Definición 1.2). A continuación veremos a la luz de la discusión de las secciones anteriores cómo la teoría económica ha adoptado el término “convergencia”.

En 1961, Nicholas Kaldor observó el comportamiento de ciertas variables centrales en el análisis de crecimiento de países industrializados<sup>11</sup>. Como fruto de

11 Ver N. Kaldor, “Capital Accumulation and Economic Growth”, 1961, en: F.A. Lutz, y D.C. Hague, *The Theory of Capital*, St. Martin's Press.



su investigación, describe cinco patrones conocidos en la literatura económica como los **hechos estilizados de Kaldor**: a saber, contempló que tanto (1) la ratio de capital por trabajador como (2) la renta por trabajador crecían a una tasa constante en estos países; adicionalmente, (3) la ratio capital – producto y (4) las remuneraciones a los factores capital y trabajo se mantenían constantes y, por último, observó que (5) los niveles de renta per cápita diferían sustancialmente entre los países. La **teoría neoclásica del crecimiento económico**<sup>12</sup> ha provisto de respuestas a los cuatro primeros hechos mediante diversos modelos de acumulación de capital conocidos como **modelos de crecimiento exógeno**<sup>13</sup>. Lamentablemente, el quinto hecho no es capturado por este tipo de modelos de manera satisfactoria y ha encontrado una explicación parcial en **modelos de crecimiento endógeno**<sup>14</sup>.

Según cifras del Banco Mundial<sup>15</sup> a final de 1998, el PBI per cápita anual de Japón ascendía a US\$ 32,350, el de los Estados Unidos a US\$ 29,440, el del Perú a US\$ 2,440 y el de la India era tan solo de US\$ 440. Es decir, si consideramos al PBI per cápita un buen indicador de bienestar, un ciudadano estadounidense tiene un nivel de vida 12 veces mayor que el de un peruano promedio; de igual modo, cuando un hindú promedio esté en la capacidad de comprar un auto, un japonés promedio podrá comprar 74 autos. Evidentemente, esta desigual distribución de la renta a escala mundial así como el dispar desempeño de sus economías han sido temas prioritarios para muchos teóricos y analistas. Como afirmó Robert E. Lucas: “las consecuencias que este tipo de cuestiones implica para el bienestar humano son simplemente estremecedoras: una vez que uno empieza a pensar en ellas es difícil pensar en cualquier otra cosa”<sup>16</sup>. Así, cabe preguntarse

---

12 Se recomienda la lectura de Robert Barro y Xavier Sala-I-Martin, *Economic Growth* (McGraw – Hill, 1995), que discute de manera completa las principales teorías y modelos de crecimiento.

13 Entre los principales modelos de esta corriente se encuentran los propuestos por Swam – Solow y por Ramsey – Cass – Koopmans. Nos encargaremos de ellos en capítulos posteriores.

14 A diferencia de la tradición neoclásica, estos nuevos modelos se basan en la acumulación sin límite de capital humano que implica la presencia de externalidades y rendimientos crecientes a escala. Los principales representantes de esta “rama” de la “teoría del crecimiento económico” son Paul M. Romer, (ver “Increasing Returns and Long Run Growth”, *Journal of Political Economy*, vol. 94, No. 5, 1986), Robert E. Lucas (ver “On the Mechanics of Economic Development Planning”, *Journal of Monetary Economics*, No. 22, 1988) y Sergio Rebelo (ver “Long Run Policy Analysis and Long Run Growth”, *Journal of Political Economy*, vol. 99, No. 3, 1991).

15 Cifras disponibles en <http://www.worldbank.org/data/countrydata/countrydata.html>

16 Traducción de Robert E Lucas, *op. cit.*, p. 5.

si los países pobres podrán “alcanzar” a los países ricos. Si la respuesta es afirmativa, diremos que los países pobres **convergen** hacia el nivel de vida de los países ricos.

Desde un punto de vista neoclásico de acumulación de capital, se afirma que las economías con un relativamente bajo *stock* de capital por persona crecerán a una tasa per cápita superior que las de aquellas con *stocks* de capital elevados. Dado que la tasa de crecimiento del ingreso per cápita es proporcional a la tasa de crecimiento del capital por persona, se espera que la renta per cápita presente un comportamiento similar al del capital per cápita. Esta relación negativa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento es conocida como **hipótesis de convergencia económica**.

Intuitivamente, en un contexto de economía abierta, puede justificarse la convergencia si se considera que la tasa de rendimiento del capital es inferior en países con mayores dotaciones de capital, por lo que se crean incentivos al flujo de capital de países ricos a pobres y se acelera el crecimiento de los últimos. Por otro lado, en la medida en que los diferenciales de ingreso son el resultado de brechas tecnológicas, puede esperarse que la difusión de conocimientos (*know-how*) en países con baja acumulación cause un impacto mayor que en regiones ricas. Nótese que estas explicaciones, así como la hipótesis de convergencia, son válidas si la única diferencia entre países es su dotación de capital. Si no se cuestionan otras características de los países, como su tasa de ahorro, tasas de depreciación del capital o tasas de crecimiento poblacional, se habla de **convergencia absoluta**.

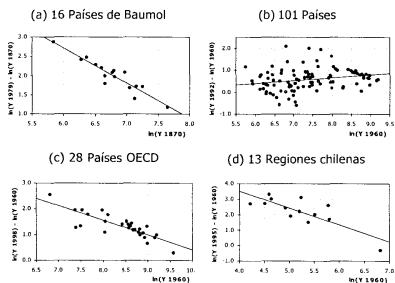
No obstante, en la práctica se observan países pobres que crecen a tasas menores que países ricos. Es claro que en estos casos se aprecia una diferencia permanente en los niveles de ingreso de las distintas economías y, por ende, la convergencia absoluta no se cumple. Las fuerzas de la convergencia solo actúan cuando las instituciones políticas, legales, sociales y económicas de los países pobres son favorables para el influjo de capitales. De este modo, surge el concepto de **convergencia condicional** que sostiene, simplemente, que una economía crecerá más rápido cuanto más alejada se encuentre de su nivel de largo plazo.

La evidencia empírica sobre convergencia económica no es concluyente. Una forma, la más común, de contrastar esta hipótesis es planteando la siguiente ecuación:

$$\ln(y_t) - \ln(y_0) = \alpha + \beta \ln(y_0) + \mu$$

**Figura No. 1.3:**  
**Convergencia económica**

*Dispersión entre tasas de crecimiento promedio del PBI per cápita y logaritmo de niveles iniciales*



*Fuentes:*

- (a) Datos tomados de J. Bradford De Long, "Productivity Growth, Convergence and Welfare: Comment", *American Economic Review*, Vol. 78, No. 5, 1988.
- (b) Datos ajustados por Poder de Paridad de Compra (PPC) en dólares de 1985, Summers, Heston, Bettina y Nuxoll, *The Penn World Table (Mark 5.6a)*, University of Pennsylvania, 1995.
- (c) Datos ajustados por PPC en dólares de 1985, National Accounts of OECD countries, *Main aggregates*, Vol. 1, 1998. México ha sido excluido.
- (d) Datos en miles de Pesos de 1986, Felipe G. Morandé, Raimundo Soto y Pablo Pincheira, "Achilles, the Tortoise and Regional Growth in Chile", ILADES - Georgetown University, 1996.

donde  $y_0$  representa la renta per cápita inicial;  $y_T$ , la renta per cápita "final" y  $\mu$  es un error estadístico (su explicación escapa al alcance de este libro). La ecuación sostiene que la tasa de crecimiento de la renta per cápita en el intervalo  $[0, T]$  es proporcional al nivel inicial,  $y_0$ , a través del parámetro  $\beta$ : Si  $\beta > 0$ , entonces las

economías con altos niveles de renta iniciales tendrán una mayor tasa de crecimiento y existirá una divergencia en los niveles de rentas de regiones pobres y ricas; por el contrario, si  $\beta < 0$ , se cumple la convergencia<sup>17</sup>.

Bajo esta lógica, William Baumol<sup>18</sup> estudió el comportamiento de 16 países que eran industrializados en 1979, con niveles iniciales de 1870. El Panel (a) de la Figura No. 1.3 muestra un **diagrama de dispersión** entre las tasa de crecimiento (1870 – 1979) y niveles de 1870 de los PBI per cápita de estos 16 países. La pendiente de la línea que cruza los puntos<sup>19</sup> implica una clara relación negativa entre estas dos variables, lo que llevó a Baumol a concluir que la convergencia predicha por los modelos neoclásicos se contrastaba empíricamente. La explicación que el autor dio a este resultado es que los esfuerzos de industrialización de un país son compartidos, a la larga, por los demás países en un mundo donde las comunicaciones son cada vez más rápidas y eficientes.

Estos resultados fueron duramente criticados<sup>20</sup> porque Baumol utilizó una muestra sesgada de países con éxito en su desarrollo. De hecho, una manera de lidiar con este problema es analizar un mayor número de países. En el Panel (b) de la Figura No. 1.3 se presenta la relación entre tasas de crecimiento de 101 países en el período 1960 – 1992 y niveles de renta iniciales correspondientes a 1960. A diferencia del caso anterior, se aprecia que no existe una relación bien definida, por lo que se duda de la hipótesis de convergencia. De hecho, las sustanciales y variadas diferencias entre la estructura y fundamentos económicos de los países invalidan la convergencia absoluta<sup>21</sup>. La evidencia empírica muestra, sin embargo, que si se trata de explicar la tasa de crecimiento de un gran número de países con variables adicionales como el nivel educativo de la población o

---

17 Formas alternativas de contrastar empíricamente la hipótesis de convergencia se encuentran en: Robert Barro, y X. Sala-i-Martin, "Convergence", *Journal of Political Economy*, Vol. 100, No. 2, 1992.

18 Ver William Baumol, "Productivity Growth, Convergence and Welfare: What the Long Run Data Show?", *American Economic Review*, vol. 76, No. 5, 1986.

19 Esta "línea" es conocida en econometría como *línea de regresión*. Para el caso planteado, su pendiente es el valor de  $\beta$ . Por ello, si la pendiente es negativa,  $\beta < 0$ , se da la convergencia.

20 Ver cita (a) de la Figura No. 1.3.

21 Ver Robert Barro, y X. Sala-i-Martin, "Convergence Across States and Regions", *Brooking Papers on Economic Activity*, No. 1, 1991. En este estudio los autores encuentran fuerte evidencia de convergencia en países europeos y en los Estados Unidos; no obstante, la evidencia es casi nula en muestras amplias de países desarrollados y subdesarrollados.

algunos aspectos tecnológicos, la convergencia es un hecho; de este modo, la convergencia condicional parece ser menos cuestionada<sup>22</sup>.

Como se mencionó anteriormente, la convergencia solo puede ser explicada en economías de similares características (estrictamente, donde la única diferencia entre ellas sea su nivel de capital por persona). Así, si se analiza un grupo de países “homogéneos”, la hipótesis puede ser aceptada. Por ejemplo, el Panel (c) de la Figura No. 1.3 muestra la relación explicada para países de la OECD<sup>23</sup> en el intervalo 1960 – 1998, claramente negativa. Si se consideran economías “aún más homogéneas”, como las distintas regiones de un país “no centralizado” se debería esperar que la convergencia se dé (el Panel (d) muestra el caso chileno para el período 1960 – 1995)<sup>24</sup>.

Sin lugar a dudas, el cumplimiento de la hipótesis de convergencia económica bajo un contexto macroeconómico estable resulta dar a las economías pobres un claro incentivo para canalizar sus esfuerzos y orientar sus políticas hacia la estabilidad y orden institucional, con el fin de alcanzar niveles de vida de países desarrollados.

## Ejercicios

Evalúe las siguientes secuencias y diga si son monótonas o eventualmente monótonas. Además, determine si las secuencias son convergentes y, en caso afirmativo, halle su límite (considerar que  $\{a_n\} \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ):

---

22 Ver Gregory N. Mankiw, David Romer y David N. Weil, “A Contribution to the Empirics of Economic Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, 1992.

23 De las siglas en inglés *organization for economic cooperation and development*.

24 Existe una amplia literatura sobre convergencia a escala regional. Para el caso norteamericano, véase Barro y Sala-I-Martin, *op. cit.*. El caso japonés es abordado por E. Shioji en “Regional Growth in Japan”, 1994, citado en Sala-I-Martin. *Apuntes de crecimiento económico*. Antoni Bosch (ed.), 1994. El caso español es estudiado por J. Doldado, M. González – Páramo y M. Roldán, “Convergencia Económica entre las provincias españolas”, *Moneda y crédito*, No. 198, 1994; el caso chileno es citado en la nota (d) de la Figura No. 1.3.

1.  $\left\{ \frac{n}{n+3} \right\}$     2.  $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}$     3.  $\{(n+2)^{1/n}\}$     4.  $\left\{ \frac{n^2}{2n+1} \right\}$
5.  $\left\{ \frac{\ln(n+2)}{n+2} \right\}$     6.  $\left\{ \frac{n!}{10^n} \right\}$     7.  $\left\{ \frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}} \right\}$     8.  $\left\{ \frac{1-(0.5)^n}{(0.5)^n} \right\}$
9.  $\{\sqrt{n^2-3n}-n\}$     10.  $\left\{ 1-\frac{1}{n} \right\}$     11.  $\left\{ \frac{1}{n+\ln(n)} \right\}$     12.  $\left\{ \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^n \right\}$
13.  $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$     14.  $\left\{ \frac{n}{e^n} \right\}$     15.  $\left\{ \frac{\pi^n}{4^n} \right\}$     16.  $\{\cos(n\pi)\}$
17.  $\left\{ \left( 1-\frac{2}{n} \right)^n \right\}$     18.  $\left\{ \frac{5^{n+1}}{4^{2n-1}} \right\}$     19.  $\left\{ \frac{\text{sen}(n)}{\sqrt{n}} \right\}$     20.  $\left\{ \frac{e^n - e^{-n}}{\text{sen}(n)} \right\}$

Expresar cada secuencia en la notación de llaves y analizar su límite

$$21. \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots \quad 22. 0, \frac{1}{2^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{3}{4^2}, \dots$$

$$23. \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\dots$$

$$24. (\sqrt{2}-\sqrt{3}), (\sqrt{4}-\sqrt{3}), (\sqrt{4}-\sqrt{5}), (\sqrt{6}-\sqrt{5}), \dots$$

Encontrar los primeros 8 términos de las siguientes secuencias expresadas de manera recursiva. Analizar si se trata de sucesiones crecientes o decrecientes. Evaluar su convergencia (considerar que  $a_1 = 1$ , salvo que se indique lo contrario):

$$25. a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \quad 26. a_{n+1} = a_n + 2 \quad 27. a_{n+1} = 3a_n - 2n + 1$$

$$28. a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)} \quad 29. a_{n+1} = 0.5(a_n + 1) \quad 30. a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, a_1 = \sqrt{6}$$

**Nota.** Se recomienda resolver los siguientes ejercicios con ayuda de una calculadora o una hoja de cálculo (por ejemplo, MS Excel):

31. Un investigador estudia la tasa de crecimiento anual del PBI real. Para tales efectos recoge datos mensuales y descubre que esta tasa, que llamaremos  $a_n$ , se comporta según el siguiente patrón:

$$a_{n+6} = -3.80a_{n+5} - 6.98a_{n+4} - 7.86a_{n+3} - 5.66a_{n+2} - 2.47a_{n+1} - 0.51a_n$$

Si  $a_1 = -0.19$ ,  $a_2 = 1.51$ ,  $a_3 = -0.93$ ,  $a_4 = -0.49$ ,  $a_5 = -0.01$  y  $a_6 = 1.41$ , determine y grafique los 15 primeros términos de  $\{a_n\}$ . ¿Se trata de una secuencia decreciente? ¿Es convergente? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite?

32. En una economía cerrada y sin gobierno las variaciones del “producto”, por el lado de la demanda, se deben exclusivamente a variaciones del consumo y de la inversión. El gabinete de asesores del Ministerio de Economía de este país ha determinado que las variaciones del consumo,  $\{c_n\}$ , son muy estables mientras que la inversión resulta ser un componente de volatilidad en la economía ya que sus variaciones,  $\{i_n\}$ , son fluctuantes. Así, han concluido que ambas variaciones son muy bien aproximadas por las siguientes sucesiones:

$$c_n = \frac{5n}{4n-1} \quad i_n = \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n)}{n}$$

- Grafique los 24 primeros términos de cada secuencia y explique por qué se afirma que la inversión es más volátil que el consumo.
- ¿Se tratan de secuencias crecientes o se trata de ecuaciones convergentes? ¿Cuáles serán las variaciones del consumo e inversión en el largo plazo según estas estimaciones?
- Si las variaciones del PBI son  $y_n = 0.7c_n + 0.3i_n$ , ¿es esta una secuencia convergente? ¿A qué valor?

33. Tras una política exitosa de estabilización y control de la inflación el Banco Central ha llegado a influir sobre el “índice de precios al consumidor”,  $\{p_n\}$ , de modo que este se comporta de este modo:

$$p_n = \frac{50(n+1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}$$

La inflación, objetivo del Banco Central, es definida como

$$\pi_{n+1} = 100(p_{n+1}/p_n - 1)\%$$

- a) Elabore un gráfico de la evolución del “índice de precios al consumidor” y uno de la inflación. ¿Qué observa? ¿Puede afirmar que existe convergencia?
- b) Determine la inflación de largo plazo, si se continúa con la política mencionada.

**34. Convergencia económica (basado en 1.4).** Ud. quiere realizar una investigación sobre la posible existencia de convergencia económica. Para tales efectos, recopila datos de ingreso per cápita de 18 países, 9 de ellos pertenecientes a la Región A (industrializada, altos ingresos per cápita) y los restantes pertenecientes a la Región B (países en desarrollo, pobre). Los datos son los siguientes:

Región A			Región B		
País	$y_0$	$y_T$	País	$y_0$	$y_T$
I	898	7332	I	362	3368
II	880	7044	II	309	620
III	781	25848	III	136	610
IV	742	6701	IV	134	2916
V	679	6634	V	105	1786
VI	584	6974	VI	31	302
VII	534	5943	VII	21	354
VIII	344	6063	VIII	21	1204
XIX	330	6003	XIX	20	251
<b>Promedio:</b>			<b>Promedio:</b>		
<b>641 8727</b>			<b>127 1268</b>		

Con la ayuda de diagramas de dispersión, responda a las siguientes preguntas. ¿Puede hablarse de convergencia económica en la región A? ¿Puede hablarse de ella en la región B? ¿Puede hablarse de convergencia en ambas regiones a la vez? Justifique sus respuestas a la luz de la discusión de la sección 1.4.



**Apéndice. Algunas propiedades conocidas de límites de secuencias infinitas**

Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos secuencias infinitas. Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$  se verifica lo siguiente:

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (ka_n) = ka, \quad \forall k \in R$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

De a) y b) se desprende que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k_1 a_n \pm k_2 b_n) = k_1 a \pm k_2 b, \quad \forall k_1, k_2 \in R$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = ab$

d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n / b_n) = a / b$  siempre y cuando  $b_n \neq 0, \forall n$  y  $b \neq 0$

e) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$  y  $a_n \neq 0, \forall n$  entonces se cumple que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/a_n = 0$

# II

## Series infinitas

### 2.1 Generalidades

Si bien es posible sumar dos, tres, cien o incluso un millón de números, resulta imposible, a primera vista, sumar infinitos números. El estudio de series infinitas aborda directamente este problema. De manera general, una serie infinita es una expresión de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

En ella, los valores  $a_1, a_2, a_3, \dots$  son llamados **términos de la serie**.

Consideremos una secuencia infinita  $\{a_n\}$  y definamos al  $n$ -ésimo término de la secuencia  $\{s_n\}$  como  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . De este modo, podemos observar que los términos de la secuencia  $\{s_n\}$ ,  $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  constituyen **sumas parciales** de los términos de  $\{a_n\}$ . Conforme aumenta  $n$ , la suma parcial  $s_n$  incluye más términos de  $\{a_n\}$ . Es así como se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

resulta ser una serie infinita. Podemos decir, luego, que  $\{s_n\}$  es la secuencia de sumas parciales asociada con la serie  $\sum a_n$ <sup>1</sup>. De este modo, si  $s_n$  tiende a un límite  $S$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , es razonable pensar que  $S$  sea igual a la suma de **todos** los términos de la serie.

**Definición 2.1** Sea  $\{s_n\}$  la secuencia de sumas parciales de la serie  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Si esta secuencia converge al límite  $S$ , entonces se dice que la serie **converge** y  $S$  es el valor denominado **suma** de la serie:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Por su parte, si  $\{s_n\}$  diverge, la serie diverge. Una serie divergente no tiene una suma definida.

Consideremos por un momento la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Argumentando que los términos positivos se cancelan con los negativos, resulta tentador concluir que la suma de esta serie es cero. No obstante, esta conclusión no es correcta. El problema radica en que las operaciones algebraicas válidas para sumas finitas no son, necesariamente, válidas para series infinitas. Si definimos  $\{s_n\}$  como la secuencia de sumas parciales, obtenemos que  $\{s_n\}$  responde a 1, 0, 1, 0, 1, ... y es, sin lugar a dudas, divergente. Por ello, la suma de la serie no está definida. Debido a ello, resulta importante conocer las siguientes propiedades:

## 2.2 Propiedades algebraicas de series infinitas

Sean  $\sum a_n = L$  y  $\sum b_n = M$  dos series convergentes y  $k$  un valor real cualquiera, luego

- a)  $\sum (a_n \pm b_n)$  es convergente ya que  $\sum (a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n = L \pm M$
- b) Si  $\sum a_n$  es convergente ( $L$  existe),  $\sum ka_n$  es convergente ya que  $\sum ka_n = k \sum a_n = kL$

<sup>1</sup> En adelante, se denominará  $\sum a_n$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , salvo que se indique lo contrario.

- c) Si  $\sum a_n$  es divergente ( $L$  no existe),  $\sum ka_n$  es divergente  $\forall k \neq 0$ .
- d) Dado que  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_n$ . Si  $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$  converge,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge para todo entero  $m$ .
- e) Una serie convergente (divergente) sigue siendo convergente (divergente) si se cambia el orden de uno o de todos sus  $m$  primeros términos.
- f) La suma de una serie convergente es única.

**Nota.** La demostración de estas seis propiedades se centra en definir dos secuencias,  $s_n$  y  $t_n$ , como las sumas parciales de  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  y aplicar las propiedades de secuencias infinitas vistas en el capítulo anterior.

**Teorema 2.1 (Prueba de divergencia)**

- (a) Si la serie  $\sum a_n$  es convergente, entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .
- (b) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ , la serie  $\sum a_n$  diverge.
- (c) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , no puede concluirse si  $\sum a_n$  converge o diverge.

**Demostración (a).** La suma de la serie es  $L$  que existe por hipótesis (la serie es convergente). Definimos  $s_n$  como la  $n$ -ésima suma parcial de la serie. Así, se verifica que  $a_n = s_n - s_{n-1}$  y que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = L - L = 0$$

**Demostración (b).** Por contradicción a la Demostración (a).

**Demostración (c).** Basta con encontrar una serie convergente y una divergente cuyo límite sea nulo. Luego contaremos con las herramientas necesarias para hacerlo.

### 2.3 La serie geométrica

En el capítulo anterior se dio a conocer la secuencia o progresión geométrica. Los  $n$  primeros términos de esta sucesión son  $a, ar, ar^2, \dots, ar^{n-1}$ . Como mencio-

namos, cada uno de los términos se obtiene al multiplicar su precedente por una constante  $r$ , llamada razón geométrica. La suma de estos  $n$  primeros términos se conoce como **serie geométrica finita** de razón  $r$ :

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \dots(1)$$

Con el fin de hallar la suma de la serie, se multiplican ambos miembros de (1) por  $r$ :

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad \dots(2)$$

Restando (2) de (1) y con ayuda de álgebra básica se obtiene que

$$s_n = a \frac{1-r^n}{1-r} \quad \dots(3)$$

Obviamente, (3) se define para valores de  $|r| \neq 1$ : si  $r = 1$ ,  $s_n = an$ ; por su parte, si  $r = -1$ ,  $s_n = a$  si  $n$  es impar y  $s_n = 0$  si  $n$  es par.

Si se quiere analizar una **serie geométrica infinita** cabe preguntarse qué ocurre cuando  $n$  tiende a infinito. Claramente, si  $|r| \geq 1$ , la suma no es definida; por el contrario, si  $|r| < 1$ , el límite de  $s_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  es  $a/(1-r)$ .

### Teorema 2.2 (Convergencia de la serie geométrica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

converge si  $|r| < 1$  y diverge si  $|r| \geq 1$ . Si la serie es convergente, su suma viene a ser

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

## 2.3.1 Aplicación: multiplicadores en la economía (algunos ejemplos)

### 2.3.1.a Multiplicador keynesiano

Centrémonos un instante en un contexto macroeconómico elemental. Se sabe que el análisis y primeros postulados keynesianos asumen un mundo de precios

rígidos e inexistencia de “ilusión monetaria”. De esta manera, la demanda agregada ( $Y = C + I + G$ , en una economía cerrada) es la que determina el nivel de producción de la economía a través del equilibrio macroeconómico.

Keynes puso especial énfasis en el poder de la política fiscal. De hecho, sostenía que un alza en el gasto fiscal llevaría a un incremento en la demanda agregada de mayor magnitud que la expansión del gasto. ¿Cómo? De acuerdo con la función de consumo keynesiana<sup>2</sup> un aumento de la renta provocado por la expansión del gasto eleva el consumo privado; el aumento en el consumo incrementa la demanda agregada que, a su vez, vuelve a incrementar el consumo, y así sucesivamente. No obstante, este efecto tiene un fin, ya que un aumento de la renta trae consigo un aumento del consumo en una menor medida (en la proporción denominada “propensión marginal al consumo” que teórica y empíricamente es un valor menor a la unidad). Esta espiral iterativa originada por la expansión del gasto es conocida como **efecto multiplicador** del gasto.

Sea  $\beta$  la propensión marginal por consumir. Un aumento del gasto de  $\Delta G$  se traduce, en primera instancia, en un aumento de la renta  $\Delta Y = \Delta G$ ; este aumento de la renta eleva el consumo en  $\beta \Delta G$ . El incremento del consumo privado induce un incremento adicional en la renta en ese momento que eleva nuevamente el consumo en  $\beta^2 \Delta G$ , lo que eleva de nuevo la renta y trae un nuevo incremento en el consumo... Así, el aumento total de la renta se obtiene del siguiente modo:

$$\Delta Y = (1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots) \Delta G$$

Claramente, la variación de la renta es igual a la variación del gasto multiplicada por la suma de una serie geométrica infinita de razón  $\beta$ . Dado que  $\beta < 1$  (la serie es convergente), se obtiene el **multiplicador keynesiano** del gasto, término impuesto por Kahn en los años 30, del siguiente modo:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta G} = \frac{1}{1 - \beta} > 1$$

---

2 La representación más simple de esta función es  $C = a + bY$  cuya aceptación en la literatura fue de gran magnitud hasta inicios de los 50. No obstante, fue cuestionada, sobre todo, a partir de la evidencia y críticas encontradas en Simon Kuznets, “National Income: a Summary of Findings”, NBER, 1946.

En términos diferenciales se llega a una expresión similar. Al diferenciar  $Y = C + I + G$  y considerando que  $C = C(Y, \dots)$  es diferenciable e  $I$  es constante, se obtiene, tras reacomodar términos, lo siguiente:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - \partial C / \partial Y}$$

donde  $\frac{\partial C}{\partial Y}$  corresponde a la propensión marginal por consumir.

Cabe mencionar que la validez de la existencia de efectos multiplicadores ha sido seriamente puesta en duda, sobre todo por teóricos enfocados en el análisis del consumo intertemporal<sup>3</sup> y por representantes de la corriente denominada “Nueva Macroeconomía Clásica” quienes introducen las nociones de expectativas racionales e ineffectividad de la política económica<sup>4</sup>. No obstante, dada su sencillez, el análisis de multiplicadores keynesianos resulta recomendable en la medida que permite resumir, en la escala básica, ciertas relaciones y mecanismos de transmisión fundamentales en el análisis macroeconómico<sup>5</sup>. ♦

### 2.3.1.b El proceso de oferta monetaria

La mayoría de países cuenta con una institución oficial con la autoridad legal de emitir dinero usualmente denominada **Banco Central**. Si bien es cierto que la creación directa del dinero queda a cargo de esta institución, los bancos comerciales tienen la facultad de crear dinero de manera indirecta. Consideremos el siguiente ejemplo<sup>6</sup>: supongamos que el público deposita todas sus tenencias de dinero en las cuentas corrientes de la banca comercial, los pagos se realizan con cheques que no son convertidos en efectivo y existe una tasa de encaje

3 Encabezados por el premio nobel de economía de 1986, Franco Modigliani, “Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations”, *American Economic Review*, Vol. 76, 1986.

4 Sin duda alguna, véase la “Crítica de Lucas” (Robert E. Lucas, “Econometric Policy Evaluation: A Critique”, en: Robert Lucas, *Studies in Business Cycles Theory*, MIT Press, 1981). En ella, Lucas sostiene que cuando cambian las políticas del gobierno de manera anticipada, pueden variar los parámetros de los modelos utilizados en la evaluación de la política (como nuestro multiplicador).

5 Se recomienda la lectura del segundo capítulo del libro de Thomas Sargent, *Macroeconomic Theory* (Academic Press, 1979), donde se realiza un análisis matricial del modelo keynesiano.

6 Versión resumida tomada de Jorge Fernández-Baca, *Dinero, precios y tipo de cambio*, Biblioteca Universitaria, CIUP, 2da. ed., 1997, pp. 182 – 185.

legal de 10%. En un primer momento, el Banco Central emite 100, dinero que es destinado al Banco A, el que, por motivos simplificadores, no debe cumplir sus requerimientos de encaje. Luego, el Señor X solicita un préstamo de 100 al Banco A y los deposita en el Banco B. A continuación, el Banco B guarda el 10% de estos depósitos (encaje) y presta 90 al Señor Y quien cancela una deuda al depositar en el Banco C dicho monto. Acto seguido, el Banco C mantiene 9 como reservas (10% de 90) y presta al Señor Z la suma de 81. Estos 81 serán gastados y terminarán siendo depositados en otro banco, Banco D, que podrá prestar un monto de 72.9 (8.1 de reservas legales) y así sucesivamente.

Se aprecia que una emisión original de 100 constituye  $100 + 90 + 81 + 72.9 = 343.9$  en la práctica, si se considera que el proceso de expansión (o "creación") del dinero<sup>7</sup> se detiene en el Banco D. No obstante, puede considerarse que el proceso continúa de manera indefinida de modo que se llega a una oferta de dinero igual a  $10/(1 - 0.9) = 1000$ , a través de la intermediación financiera de los bancos.

Si  $B$  es la **base monetaria** creada por el Banco Central,  $\xi$  es la tasa de encaje y  $M$  es la **oferta monetaria**, puede resumirse el proceso multiplicador expuesto líneas arriba mediante una serie geométrica de razón  $(1 - \xi)$ . A saber,

$$M = (1 + (1 - \xi) + (1 - \xi)^2 + (1 - \xi)^3 + \dots)B = \frac{1}{\xi} B = mB$$

donde  $m$  es el valor conocido como el **multiplicador bancario** o **multiplicador del dinero**. Dado que la base monetaria,  $B$ , produce un efecto multiplicador en la oferta de dinero, es denominada **dinero de alto poder**<sup>8</sup>.

El multiplicador bancario presentado es irrealmente simple. En la práctica, el proceso de creación secundario de dinero es mucho más complejo. Por ello, en el quehacer diario de la política monetaria<sup>9</sup> se consideran versiones más complejas del mismo. Por ejemplo,

$$m = \frac{c + 1}{c + \xi(1 + \delta)}$$

7 Ver James Tobin, "Commercial Banks as Creators of Money", en: Dean Carson (ed.), *Banking and Monetary Studies*, Illinois, Irwin, 1984.

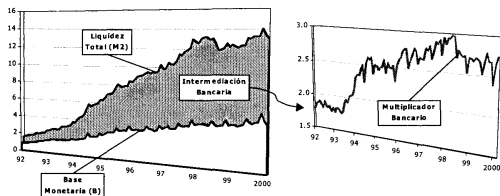
8 Para una discusión sobre este y otros conceptos, véase Eammon Butler, *Milton Friedman: su pensamiento económico*, México, Limusa, 1989.

9 Para el caso peruano ver Banco Central de Reserva del Perú (BCRP), "La política monetaria del Banco Central de Reserva del Perú", *Notas de estudio No. 6*, 1999. En este informe se explican los instrumentos de política que maneja el BCRP así como objetivos y metas.



donde  $c$  es el cociente entre circulante y depósitos del sistema bancario, conocido como la ratio de *preferencia por circulante*,  $\xi$  es la tasa de encaje y  $\delta$  es la ratio de *preferencia por cuasidinero*<sup>10</sup>. ♦

Figura No. 2.1:  
Base monetaria, liquidez en moneda nacional  
y multiplicador bancario, Perú (enero 1992 – febrero 2000)



El panel izquierdo muestra la evolución de la emisión primaria y liquidez en moneda nacional, M2, en miles de millones de nuevos soles. El área sombreada nos da una aproximación de la intermediación financiera en el país, al igual que el panel derecho donde se presenta el multiplicador bancario.

Fuente: Banco Central de Reserva del Perú – Gerencia de Estudios Económicos

### 2.3.2 Aplicación: valor actual neto

Las finanzas se construyen sobre el siguiente principio: “una moneda hoy tiene un valor mayor, en ausencia de deflación, que la misma moneda mañana”. Uno podría aceptar esta proposición si piensa, por ejemplo, en inflación como un fenómeno macroeconómico que degenera en una **pérdida de poder adquisitivo** del dinero. Así, si la inflación en cierto período es de 5%, el producto que en este instante cuesta 100 costará 105, de modo que 100 hoy equivalen a 105 a fines de período ya que esas cantidades compran el mismo producto<sup>11</sup>. Dejando de lado

<sup>10</sup> Ver Fernández-Baca, *op cit*, p. 196.

<sup>11</sup> Un análisis detallado de los costos de la inflación puede hallarse en el capítulo 18 de Robert Hall y John Taylor, *Macroeconomía*, Antoni Bosch, 1991.

la inflación, las finanzas sostienen que es mejor tener los 100 hoy ya que pueden ser **invertidos** y reeditar cierto interés. Existe un valor del dinero en el tiempo que se manifiesta en el deseo de las personas de pagar un interés por utilizarlo. El uso del dinero es un bien valioso. Si la tasa de interés es de 10% anual, los 100 de hoy invertidos con ese rendimiento serán equivalentes a  $(1.1)100 = 110$  en un año, a  $(1.1)^2 100 = 121$  en dos años y así sucesivamente. Análogamente, puede afirmarse que 110 dentro un año equivaldrán a 100 hoy ya que  $110/(1.1) = 100$  y que 121 dentro de dos años, equivaldrán a 100 actuales ya que  $121/(1.1)^2 = 100$ . Así, se dice que 100 es el **valor actual** (o **valor presente**) de 110 en un año y de 121 en dos años.

Supongamos que hemos contraído una deuda que será pagada en  $n$  períodos. En el período  $i$  pagaremos el monto  $a_i$ . Para tener  $a_i$  dentro de un año, debemos depositar en un banco, a una tasa  $r$ , la cantidad  $a_i/(1+r)$ ; para tener  $a_2$  dentro de dos años se debe depositar hoy  $a_2/(1+r)^2$  y así sucesivamente. La cantidad total  $A_n$  que debemos depositar hoy para poder cubrir los  $n$  pagos es, por tanto, la siguiente:

$$A_n = \frac{a_1}{(1+r)} + \frac{a_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{a_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(1+r)^i}$$

Así, el valor actual de los  $n$  pagos que debemos cumplir en intervalos de un año es  $A_n$ . Si se da el caso en que los pagos son iguales,  $a_i = a$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), tendremos que el valor actual de esos pagos,  $A_n$ , será una serie geométrica finita de  $n$  términos cuyo primer término es  $a/(1+r)$  y cuya razón es  $1/(1+r)$ :

$$A_n = \frac{a}{(1+r)} + \frac{a}{(1+r)^2} + \dots + \frac{a}{(1+r)^n} = \frac{a}{r} \left[ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

Este tipo de análisis es fundamental en la **evaluación de proyectos** de inversión. La idea es que una inversión inicial hoy día generará beneficios futuros para el inversionista. Uno de los principales indicadores de rentabilidad del proyecto es su **valor actual neto** (VAN), definido como

$$VAN = -I + \sum_{t=1}^n \frac{F_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^n \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

donde  $I$  es la inversión inicial del proyecto,  $F_t$  son los beneficios que arroja el proyecto en el instante  $t$ ,  $r \in [0,1]$  es la tasa de descuento (llamada **costo de oportunidad del capital**) y  $n$  es la vida del proyecto. Se dice que un proyecto se

realiza si  $VAN > 0$  y que mejor es el proyecto que mayor VAN presente<sup>12</sup>. Es decir, los flujos que el proyecto genere deben superar, en el valor monetario de hoy, la inversión que se está realizando para su ejecución.

Finalmente, evaluemos una versión sencilla de cómo valorizar un bono<sup>13,14</sup>. Un **bono perpetuo** es un instrumento financiero que promete pagar periódicamente cierta cantidad de dinero en un intervalo definido. Esta cantidad de dinero es denominado **cupón**. El precio de un bono está dado por el valor presente del flujo de ingresos que este representa. Si se trata de un bono de muy largo plazo y paga  $c$  en cada período comenzando en el próximo período, su precio se establece del siguiente modo:

$$P_B = \frac{c}{(1+r)} + \frac{c}{(1+r)^2} + \frac{c}{(1+r)^3} + \dots$$

Puede apreciarse que el precio del instrumento es una serie geométrica infinita cuya razón es menor a uno de modo que converge a la siguiente ecuación:

$$P_B = \frac{c}{r}$$

Este análisis lleva a concluir a los analistas que el precio del bono guarda una relación inversa con la tasa de interés. Este hecho también es válido con bonos de corto plazo<sup>15</sup>.

## 2.4 Criterios o pruebas de convergencia

En el Teorema 2.1 se analizó la **prueba de divergencia** que resulta ser una primera aproximación al comportamiento de una serie infinita en lo referente a su convergencia. No obstante, esta prueba en muchos casos no brinda información concluyente sobre la serie cuando  $n \rightarrow \infty$ . Afortunadamente, existen diversos criterios de evaluación conocidos como **pruebas de convergencia**. A continuación, analizaremos algunos de ellos.

12 Ver el sexto capítulo de Arlette Beltrán y Hanny Cueva, *op cit*.

13 Una mayor discusión al respecto se encuentra en Robert Kolb, *Inversiones*, Limusa, 1993.

14 El caso de instrumentos de renta variable, como acciones, se especifica el Ejercicio 109.

15 Los conceptos y teoría relacionada con instrumentos financieros de renta fija y variable son adecuadamente analizados en Frank Fabozzi, Franco Modigliani y Michael Ferri, *Mercado e instituciones financieras*, Prentice – Hall, 1996.

### 2.4.1 Criterio de la integral

Recordemos que una serie puede entenderse como una secuencia de sumas parciales (ver Definición 2.1). Considerando algunas propiedades revisadas en el capítulo anterior, podemos formalizar la siguiente proposición: si se tiene una serie  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  cuyos términos son no negativos ( $a_i \geq 0$ ), luego la secuencia de sumas parciales es no decreciente. Así, la secuencia de sumas parciales converge a un límite  $S$  si y solo si tiene una cota superior  $M$  que cumpla con  $S \leq M$ . Si no existe tal cota, la secuencia de sumas parciales diverge (Teorema 1.1). Dado que la convergencia de esta secuencia de sumas parciales corresponde a la convergencia de la serie, puede concluirse que una serie de términos no negativos converge a la suma  $S$  si  $S \leq M$  y diverge si  $M$  no existe. El criterio de la integral se construye sobre estas bases.

#### Teorema 2.3 (Criterio de la integral)

Si  $\sum a_n$  es una serie de términos positivos y si  $f(x)$  es una función positiva, continua y decreciente para todo  $x \geq 1$ , de manera que  $f(i) = a_i$ , se cumple que:

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge (diverge) si y solo si la integral impropia  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  existe (no existe).

**Demostración.** Supóngase que  $f(x)$  satisface la hipótesis planteada en el Teorema 2.3, es decir, que

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

y los valores  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  pueden ser interpretados como las áreas de los rectángulos mostrados en la Figura No. 2.2. Observando esta figura pueden concluirse las siguientes desigualdades al comparar el área bajo la curva  $y=f(x)$  con las áreas de dichos rectángulos:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n \quad (\text{Figura No. 2.2 (a)})$$

$$s_n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n < \int_1^n f(x) dx \quad (\text{Figura No. 2.2 (b)})$$

Al combinar ambas expresiones, se obtiene lo siguiente:

$$\int_1^{n+1} f(x) dx < s_n < a_1 + \int_1^n f(x) dx \quad \dots(*)$$

Si la integral  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  es convergente hacia un valor finito  $L$ , luego, de (\*) se tiene que:

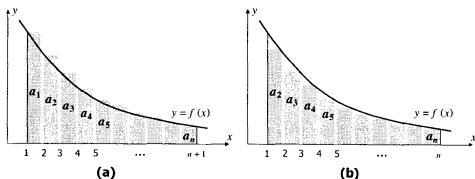
$$s_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{\infty} f(x)dx = a_1 + L$$

y se demuestra así la convergencia de la serie. Por otro lado, si  $\int_1^{n+1} f(x)dx$  diverge, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = \infty$$

de modo que de (\*) puede afirmarse que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ . Esto implica que la serie también diverge.

**Figura No. 2.2:**  
**Convergencia: criterio de la integral**



#### 2.4.1.a La serie "p"

Una vez conocido el criterio de la integral, resulta conveniente analizar una serie muy utilizada (sobre todo en física) llamada **serie hiperarmónica** o **serie "p"** que es definida como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad (p > 0)$$

Con el fin de evaluar su convergencia aplicamos la prueba de la integral (Teorema 2.3):

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right]$$

Si  $p > 1$ , entonces  $1-p < 0$  por lo que  $b^{1-p} \rightarrow 0$  conforme  $b \rightarrow \infty$ . De esta forma, la integral converge al valor  $-1 / (1-p)$  y, consecuentemente, la serie también converge. En el caso donde  $0 < p < 1$  se observa que  $1-p > 0$  por lo que  $b^{1-p} \rightarrow \infty$  cuando  $b \rightarrow \infty$  de forma que tanto la integral como la serie divergen. Cuando  $p = 1$ , la serie "p" es conocida como **serie armónica**<sup>16</sup>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Aplicando el criterio de la integral se concluye la divergencia de esta serie:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln(b) - \ln(1)] = \infty$$

#### Teorema 2.4 (Convergencia de la serie "p")

La serie "p" converge si  $p > 1$  y diverge si  $p \leq 1$  ( $p > 0$ ).

Dado que conocemos a la serie "p" puede demostrarse fácilmente el postulado (c) de la **prueba de divergencia** (Teorema 2.1). Supóngase una serie "p" con  $p = 2$  que es convergente; supóngase ahora una serie armónica que es divergente. Sin duda alguna ambas series satisfacen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

lo que demuestra el Teorema 2.1 (c).

---

<sup>16</sup> El nombre se debe a que la serie es muy utilizada en el modelado de vibraciones de cuerdas musicales.

## 2.4.2 Criterios de comparación

### 2.4.2.a Criterio de comparación directa

Este criterio es de gran utilidad ya que representa una herramienta fundamental en los resultados de criterios posteriores. La idea central de esta prueba se resume en el Teorema 2.5:

#### **Teorema 2.5 (Criterio de comparación directa)**

Sean  $\Sigma a_n$  y  $\Sigma b_n$  dos series de términos no negativos y supóngase que

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, \dots, a_n \leq b_n, \dots \quad 17$$

- (a) Si la “serie mayor”  $\Sigma b_n$  converge, luego la “serie menor”  $\Sigma a_n$  también converge.  
 (b) Si la “serie menor”  $\Sigma a_n$  diverge, luego la “serie mayor”  $\Sigma b_n$  también diverge<sup>18</sup>.

**Demostración (a).** Suponga que  $\Sigma b_n$  converge y su suma es igual a  $B$ . Así, para todo  $n$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq \sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$$

Por hipótesis se deduce que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq B$$

Esto es, cada suma parcial de la serie  $\Sigma a_n$  es menor o igual a  $B$ . dado que los términos de  $\Sigma a_n$  son no negativos, su secuencia de sumas parciales asociada es no decreciente y acotada superiormente por  $B$ . Con lo discutido hasta el momento puede concluirse, sin perder generalidad, que  $\Sigma a_n$  converge.

<sup>17</sup> Esta condición no tiene porqué cumplirse de manera estricta. De hecho, las conclusiones del Teorema 2.5 son igualmente válidas si la condición se cumple de manera eventual (en otras palabras, a partir de cierto valor de  $n$ ).

<sup>18</sup> La parte (a) del Teorema es a veces conocida como *criterio de la serie mayorante*; por su parte, la parte (b) es conocida como *criterio de la serie minorante*.

**Demostración (b)** Esta demostración es inmediata si se consideran los pasos seguidos en (a). Si  $\sum a_n$  es divergente,  $\sum b_n$  debe diverger ya que la convergencia de  $\sum b_n$  implica la convergencia de  $\sum a_n$ , hecho que contradice la hipótesis.

#### 2.4.2.b Criterio de comparación en el límite

Basado en una idea similar a la de la prueba anterior, este criterio consiste en evaluar la ratio entre el término general de la serie en cuestión y una serie cuyas propiedades de convergencia son conocidas.

#### **Teorema 2.6 (Criterio de comparación en el límite)**

Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  dos series de términos no negativos y supóngase que

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Si  $\rho$  es finito y positivo, ambas series convergen o divergen.

**Demostración.** Solamente demostraremos que  $\sum b_n$  converge si  $\sum a_n$  converge y que  $\sum b_n$  diverge si  $\sum a_n$  diverge, ya que el resto de casos resultan ser implicaciones lógicas de esta prueba<sup>19</sup>. La idea de la demostración se centra en aplicar la **prueba de comparación directa** a  $\sum a_n$  y a múltiplos de  $\sum b_n$ . Para ello, considere que  $\varepsilon$  es un número positivo; dado que

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

se sabe que eventualmente los términos de la secuencia  $\{a_n / b_n\}$  deben distar de  $\rho$  como máximo en  $\varepsilon$  unidades (ver Definición 1.2); esto es, existe un número entero positivo  $N$  tal que para  $n \geq N$  se tiene que:

$$\rho - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \rho + \varepsilon$$

En particular, si  $\varepsilon = \rho / 2$ , luego para  $n \geq N$  se tiene que

$$\frac{1}{2}\rho < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\rho$$

<sup>19</sup> Una extensión a este teorema puede encontrarse en el Ejercicio 55 del presente capítulo.



Así, por la prueba de comparación directa se concluye que

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2} \rho b_n \text{ converge si } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ converge y}$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3}{2} \rho b_n \text{ diverge si } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

No obstante, la convergencia o divergencia de una serie no es afectada al eliminar de manera finita algunos términos o por multiplicar el término general de la serie por una constante distinta de cero (ver sección 2.2). De esta forma se llega a demostrar la hipótesis  $\sum b_n$  converge si  $\sum a_n$  converge y  $\sum b_n$  diverge si  $\sum a_n$  diverge.

#### 2.4.2.c Dos principios informales (y muy útiles)

Si bien las pruebas de comparación pueden ser útiles en la evaluación de la convergencia de una serie, su aplicación muchas veces es complicada ya que es necesario contar como insumo con una serie cuyo comportamiento sea conocido. A continuación se presentan dos principios que ayudarán a facilitar este proceso. Cabe subrayar que se trata de "principios informales" y distan de ser teoremas. De hecho, **no** se garantiza que **siempre** funcionen; no obstante, son lo suficientemente útiles como para facilitar la ejecución de algún criterio de comparación.

- a) Usualmente, pueden eliminarse términos constantes sin alterar la convergencia o divergencia de la serie. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n + 1} \text{ se comporta como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n-0.5}} \text{ se comporta como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$$

- b) Si un polinomio en  $n$  es parte del denominador o numerador del término general de una serie, todas las potencias de  $n$  exceptuando la más alta, pueden ser eliminadas sin alterar la convergencia o divergencia de la serie. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n}} \text{ se comporta como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4 - n^3}{n^5 + n} \text{ se comporta como } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^4}{n^5} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$$

### 2.4.3 Últimas pruebas: criterios de la raíz y de la razón

El crecimiento relativo de los términos sucesivos de una serie geométrica  $\sum a_n = \sum r^n$  puede presentarse de dos maneras:

$$(a_n)^{1/n} = r \quad \text{y} \quad a_{n+1}/a_n = r$$

Si bien es cierto que solo la serie geométrica exhibe este tipo de comportamiento, existen muchas series que, para grandes valores de  $n$ , son "aproximadamente geométricas". Esta generalización del crecimiento geométrico es la base de los criterios en los Teoremas 2.7 y 2.8.

#### Teorema 2.7 (Criterio de la raíz)

Si  $\sum a_n$  es una serie términos positivos y

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n}$$

- (a) Si  $\rho < 1$ , la serie converge.
- (b) Si  $\rho > 1$  o  $\rho = \infty$ , la serie diverge.
- (c) Si  $\rho = 1$ , el criterio no es concluyente: la serie puede converger o diverger.

**Demostración (a).** Escogemos un número real  $\mu$  de modo que  $0 < \rho < \mu < 1$ . Así,  $\lim (a_n)^{1/n}$  es menor que  $\mu$  por lo que  $a_n < \mu^n$  si  $n \rightarrow \infty$ . Dado que  $\sum \mu^n$  es una serie geométrica convergente (ya que su razón,  $\mu$ , es, por construcción, menor a la unidad, ver Teorema 2.2), por el criterio de comparación directa (Teorema 2.5) se deduce que  $\sum a_n$  converge.

**Demostración (b).** Esta vez seleccionamos un real  $\mu$  que satisfaga  $\rho > \mu > 1$ . Se tiene, entonces, que  $a_n > \mu^n$  si  $n \rightarrow \infty$ . Esto demuestra la divergencia de  $\sum a_n$  ya que es mayor a una serie geométrica divergente.

**Demostración (c).** Basta con hallar una serie convergente y una divergente que satisfaga (c): La divergente serie armónica y la convergente serie “p” con  $p = 2$  son consistentes con  $\rho = 1$  lo que demuestra que el criterio falla en este caso.

**Teorema 2.8 (Criterio de la ratio o del cociente)**

Si  $\sum a_n$  es una serie términos positivos y

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- (a) Si  $\rho < 1$ , la serie converge.
- (b) Si  $\rho > 1$  o  $\rho = \infty$  la serie diverge.
- (c) Si  $\rho = 1$ , el criterio no es concluyente: la serie puede converger o divergir.

La demostración de este teorema es esencialmente similar a la del Teorema 2.7 por lo que queda a cargo del lector<sup>1</sup>.

## 2.5 Series alternadas

Hasta el momento hemos asumido que las series evaluadas tenían solo términos no negativos y, sobre esa base, hemos discutido algunas pruebas de convergencia. No obstante, existen series que violan directamente este supuesto. Una serie cuyos términos son negativos se puede considerar como opuesta a una de términos positivos por lo que el análisis anterior no se ve afectado. A continuación, revisaremos lo referente a **series alternadas**. Este tipo de series se caracteriza por mostrar términos consecutivos cuyos signos son opuestos. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

**Teorema 2.9 (Prueba de la serie alternada o teorema de Leibniz)**

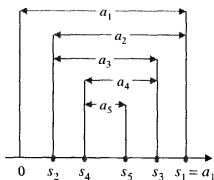
Si  $\{a_n\}$  es una secuencia decreciente,  $\sum (-1)^n a_n$  (o  $\sum (-1)^{n+1} a_n$ ) converge si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

<sup>20</sup> A pesar de lo que la intuición pueda dictar, los criterios de la **raíz** y de la **ratio** no son equivalentes (ver Ejercicio 81).

**Demostración.** Considerando  $\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ , se trata de probar que, dadas las condiciones del Teorema, las secuencias de términos pares e impares de sumas parciales convergen hacia un límite común  $S$  (ver nota 6 del Capítulo I).

**Figura No. 2.3:**  
Convergencia de series alternadas



Si  $a_{n+1} < a_n$  ( $\forall n$ ) y  $a_n = 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , la serie alternada es convergente.

La Figura No. 2.3 muestra cómo se comportan las sucesivas sumas parciales. Las sumas parciales pares  $s_2, s_4, s_6, \dots, s_{2n}, \dots$  forman una secuencia creciente acotada superiormente por  $a_1$  mientras que las sumas parciales impares  $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n-1}, \dots$  constituyen una secuencia decreciente acotada inferiormente por cero. Así, las sumas parciales pares e impares convergen a los límites  $S_1$  y  $S_2$ , respectivamente (ver Teorema 1 y 2). El teorema será válido si  $S_1 = S_2 = S$ .

El  $2n$ -simo término de la serie es  $-a_{2n}$  de manera que  $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n}$  que puede reescribirse como  $s_{2n-1} = s_{2n} + a_{2n}$ . Así,

$$S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} + a_{2n}) = S_1 + 0 = S_1$$

De manera que  $S_1 = S_2 = S$ . Lo que completa la demostración.

Cabe resaltar que la validez del Teorema 2.9 se mantiene si  $\{a_n\}$  es eventualmente decreciente. No obstante, si esta secuencia no es (eventualmente) decreciente dicho teorema no es concluyente. Adicionalmente, si  $a_n \neq 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  la serie es divergente (ver Teorema 2.1).

**Teorema 2.10 (Aproximación de la suma de una serie alternada)**

Si una serie cumple con la prueba de la serie alternada y si la suma  $S$  se aproxima por la  $n$ -ésima suma parcial,  $s_n$ , se incurre en el error

$$|S - s_n| < |s_{n+1} - s_n| < |a_{n+1}|.$$

Asimismo, el signo de dicho error es el mismo del coeficiente de  $a_{n+1}$  en la serie.

La demostración del Teorema 2.10 queda a cargo del lector.

**2.6 Convergencia absoluta y condicional<sup>21</sup>**

Series como  $1 - \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^4 - (\frac{1}{2})^5 - (\frac{1}{2})^6 + \dots$  no se acomodan a las categorías estudiadas hasta esta sección ya que presentan signos negativos y positivos pero no de forma alternada. Surge así el concepto de **convergencia absoluta**.

**Definición 2.2** Una serie  $\sum_n a_n$  converge de manera absoluta si la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

es convergente.

Nótese que la definición anterior implica evaluar una serie de términos positivos, hecho que permite aplicar sin mayor complicación los criterios de convergencia estudiados en este capítulo. El concepto de convergencia absoluta es importante debido al siguiente teorema:

**Teorema 2.11** Si  $\sum |a_n|$  converge,  $\sum a_n$  converge. Es decir, si una serie converge de manera absoluta, entonces converge.

<sup>21</sup> En esta sección los conceptos de “convergencia absoluta” y “convergencia condicional” son estrictamente matemáticos, a diferencia de aquellos discutidos en la sección 1.4, vinculados con la “teoría del crecimiento económico”.

**Demostración.** Para todo  $n$ , se cumple que  $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ , luego,  $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ . Ahora bien, si  $\sum |a_n|$  converge,  $\sum 2|a_n| = 2\sum |a_n|$  converge y, por el criterio de comparación directa,  $\sum (a_n + |a_n|)$  converge. Dado que  $a_n = (a_n + |a_n|) - a_n$ ,  $\sum a_n$  es convergente. ♦

No obstante lo demostrado, el recíproco del Teorema 2.11 no se cumple, necesariamente. Por ello, se introduce el concepto de **convergencia condicional** que postula que una serie converge pero no lo hace de manera absoluta.

Finalmente, una extensión del Teorema 2.6, resulta de especial utilidad. Sin mayor demostración, se presenta la versión absoluta de la **prueba de la ratio o cociente**:

**Teorema 2.12 (Versión absoluta del criterio de la ratio)**

Si  $\sum a_n$  es una serie términos positivos y negativos, y

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- (a) Si  $\rho < 1$ , la serie converge.
- (b) Si  $\rho > 1$  o  $\rho = \infty$ , la serie diverge.
- (c) Si  $\rho = 1$ , el criterio no es concluyente.

## 2.7 Síntesis

**Cuadro No. 2.1:**  
**Criterios de convergencia**

Prueba de:	Enunciado	Comentario
Divergencia (2.1)	Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\sum a_n$ diverge.	Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ la prueba no sirve.
Integral (2.3)	Sea $\sum a_n$ , $a_n > 0$ y $f$ una función que cumple con $f(i) = a_i$ y $f'(x) < 0$ ( $x \geq 1$ ), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ambos convergen o divergen.	Utilizar cuando $f(x)$ sea fácil de integrar. La prueba es aplicable solo a series de términos positivos.

(continúa)

(continuación)

Prueba de:	Enunciado	Comentario
Comparación directa (2.5)	Sean $\Sigma a_n$ y $\Sigma b_n$ dos series de términos positivos de modo que $a_n \leq b_n$ . Si $\Sigma b_n$ converge, $\Sigma a_n$ converge; si $\Sigma a_n$ diverge, $\Sigma b_n$ diverge	Utilizarlo como último recurso. La prueba es aplicable solo a series de términos no negativos.
Comparación en el límite (2.6)	Sean $\Sigma a_n$ y $\Sigma b_n$ dos series de términos positivos de modo que $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ Si $\rho$ existe y es positivo, ambas series convergen o divergen.	Su aplicación es más sencilla que la prueba de comparación directa aunque, de igual modo, requiere de un conocimiento previo de alguna serie por comparar.
Raíz (2.7)	Si $\Sigma a_n$ es una serie términos positivos y $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n}$ Si $\rho < 1$ , la serie converge. Si $\rho > 1$ o $\rho = \infty$ la serie diverge. Si $\rho = 1$ , no hay conclusión.	Utilizar esta prueba cuando $a_n$ posea enésimas potencias.
Ratio o cociente (2.8) y (2.12)	Si $\Sigma a_n$ es una serie términos positivos y $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Si $\rho < 1$ , la serie converge. Si $\rho > 1$ o $\rho = \infty$ la serie diverge. Si $\rho = 1$ , no hay conclusión.	Utilizar esta prueba cuando $a_n$ posea enésimas potencias y/o factoriales. Puede ser aplicada a series con términos negativos y positivos si se considera $ \rho $ .
Serie alternada (2.9)	Si $\{a_n\}$ es una secuencia decreciente, $\Sigma(-1)^n a_n$ (o $\Sigma(-1)^{n+1} a_n$ ) converge si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$	Aplicable solo a series alternadas. Se asume que $a_n > 0$ ( $\forall n$ ).

## Ejercicios

Determine las seis primeras sumas parciales de las siguientes series. Además evalúe su convergencia y en caso de ser convergente, halle la suma de la serie (considere la primera nota al pie del presente capítulo):

$$1. \sum \frac{1}{5^n} \quad 2. \sum \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} \quad 3. \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad 4. \sum \frac{3 + \operatorname{sen}(2^n)}{\sqrt{n^4 + 2}}$$

5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$     6.  $\sum e^{-n}$     7.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln(\ln(n))$     8.  $\sum \frac{2^n}{(2n+1)!}$   
 9.  $\sum (e/\pi)^{n-1}$     10.  $\sum (-3)^n$     11.  $\sum \left( \frac{5}{2^n} + \frac{2}{3^n} \right)$     12.  $\sum n \operatorname{sen}(1/n)$   
 13.  $\sum \frac{6}{\sqrt{n}}$     14.  $\sum n e^{-n}$     15.  $\sum \frac{210 - \sqrt{n}}{n^2}$     16.  $\sum \frac{1}{n(2n-1)}$   
 17.  $\sum \frac{n^2}{n^4 + n}$     18.  $\sum n^5 e^{-n^2}$     19.  $\sum \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$     20.  $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n}}$   
 21.  $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$     22.  $\sum 4^{n-1}$     23.  $\sum \frac{n^3 (\sqrt{2} + 2)^n}{3^n}$     24.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n[\ln(n)]^2}$   
 25.  $\sum \frac{n}{(n+1)!}$     26.  $\sum \sqrt[3]{2}$     27.  $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$     28.  $\sum \frac{1}{4n^2 - 1}$

Muestre que se cumplen las siguientes igualdades:

$$29. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2}$$

$$30. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots = \frac{3}{4}$$

$$31. \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - 1/n^2) = -\ln(2)$$

$$32. \sum 6 \times 10^{-n} = \frac{2}{3}$$

$$33. \sum \left( \frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right) = 1 \quad (p > 0)$$

$$34. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad |x| < 1$$

$$35. \sum \left( \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1$$

$$36. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad |x| < 1$$

37. El gran matemático suizo Leonhard Euler cometió ciertos errores en sus trabajos iniciales sobre series infinitas. En particular, encontró que:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad \text{y} \quad -1 = 1 + 2 + 8 + \dots$$

ya que sustituyó los valores  $\varphi = -1$  e  $\varphi = 2$  en la fórmula

$$\frac{1}{1-\varphi} = 1 + \varphi + \varphi^2 + \varphi^3 + \dots$$

¿Cuál fue el error en el razonamiento de este matemático? ♦

Utilice el **criterio de la integral** para evaluar la convergencia de las siguientes series:



38.  $\sum \frac{1}{n^2 + 3}$

39.  $\sum \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

40.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n-1}}$

41.  $\sum \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$

42.  $\sum n^2 e^{-n^3}$

43.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)[\ln(\ln(n))]^p}$

44.  $\sum \frac{\text{sen}(\pi/n)}{n^2}$

45.  $\sum \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Utilice el **criterio de comparación directa** para evaluar la convergencia de las series siguientes:

46.  $\sum \frac{1}{3^n + 5}$

47.  $\sum \frac{3}{n - \frac{1}{4}}$

48.  $\sum \frac{2}{n^2 + n}$

49.  $\sum \frac{5 \text{sen}^2(n)}{n!}$

50.  $\sum \frac{n^{-1/2}}{2 + \text{sen}^2(n)}$

51.  $\sum \frac{n+1}{n^3}$

52.  $\sum \frac{1}{n^n}$

53.  $\sum \frac{1}{\ln(n+6)}$

54.  $\sum \frac{1}{n 3^n}$

55.  $\sum \pi^{-n}$

56.  $\sum \frac{1}{\ln(n)}$

57.  $\sum \frac{n+1}{n^2 - n}$

Utilice el **criterio de comparación en el límite** para evaluar la convergencia de las series siguientes:

58.  $\sum \frac{1}{n!}$

59.  $\sum \frac{2n^2}{n^3 + 2}$

60.  $\sum \frac{n-1}{2n^n}$

61.  $\sum \text{sen}(\pi/n)$

62.  $\sum (1 - \cos(n^{-1}))$

63.  $\sum \frac{1}{(2n+3)^{17}}$

64.  $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{8n^2 - 3n}}$

65.  $\sum \frac{4n^2 - 2n + 6}{8n^2 + n - 8}$

66.  $\sum \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

67. Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  dos series de términos positivos. Probar lo siguiente:
- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = 0$  y  $\sum b_n$  converge, entonces  $\sum a_n$  converge.
  - Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = \infty$  y  $\sum b_n$  diverge, entonces  $\sum a_n$  diverge.
68. Plantear una proposición similar al Teorema 2.5 considerando series de términos **no positivos**.
69. El siguiente ejercicio prueba que no siempre los **criterios de comparación directa y comparación en el límite** brindan la misma información:
- Pruebe que  $\sum \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$  converge por comparación con  $\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ .
  - Pruebe que en este caso no es útil el Teorema 2.6. ♦

Utilice el **criterio de la raíz** para evaluar la convergencia de las series siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 70. \quad \sum \left( \frac{3n+2}{2n-1} \right)^n & 71. \quad \sum \left( \frac{n}{100} \right)^n & 72. \quad \sum \frac{n}{5^n} \\
 73. \quad \sum (1 - e^{-n})^n & 74. \quad \sum \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2} & 75. \quad \sum n^n \\
 76. \quad \sum \frac{1}{(\ln(n))^n} & 77. \quad \sum \frac{2^n}{n^3} & 78. \quad \sum \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n
 \end{array}$$

79. Sea  $\{a_n\}$  una secuencia de números positivos y  $r > 0$ , cualquier número real. Utilizando la **prueba de la raíz**, muestre que  $\sum a_n r^n$  converge si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = \rho < 1/r$$

80. Resolver lo siguiente:

- Muestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n))^{1/n} = 1$  (*Sugerencia: utilice  $y = (\ln(x))^{1/x}$  y halle  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(y)$ ).*)

- b) Con el resultado a) y el **criterio de la raíz**, muestre que  $\sum \ln(n)/3^n$  converge.
- c) Muestre que la serie de b) converge con el **criterio de la ratio**. ♦

Utilice el **criterio de la ratio** para evaluar la convergencia de las series siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 81. \quad \sum \frac{3^n}{n!} & 82. \quad \sum \frac{4^n}{n^2} & 83. \quad \sum \frac{1}{5n} \\
 84. \quad \sum n\left(\frac{1}{2}\right)^n & 85. \quad \sum \frac{n!}{n^3} & 86. \quad \sum \frac{7^{n+2}}{(n+1)!} \\
 87. \quad \sum \frac{n!n!}{(2n)!} & 88. \quad \sum \left(\frac{3}{5^n} - \frac{3^n}{5^n}\right) & 89. \quad \sum \frac{\pi^n}{8n+2} \\
 90. \quad \sum \frac{6^{2n-1}}{n^2-n} & 91. \quad \sum \frac{n^n}{n!} & 92. \quad \sum \frac{n!(2n)!}{(3n)!}
 \end{array}$$

93. Considere la serie

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

Muestre mediante el **criterio de la raíz** que es convergente. Muestre, además, que, en este caso, la **prueba de la ratio** es inútil.

94. ¿Para qué valores de  $\alpha > 0$  la serie  $\sum \alpha^n / n^\alpha$  es convergente?

95. Si la suma  $S$  de la serie convergente  $\sum a_n$  de términos positivos es aproximada por la  $n$ -ésima suma parcial,  $s_n$ , el error de aproximación viene dado por

$$S - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \dots$$

Sea  $r_k = a_{k+1} / a_k$

a) Probar que si  $r_k$  es decreciente para todo  $k \geq n+1$  y si  $r_{n+1} < 1$ , luego

$$S - s_n < \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(Sugerencia:  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  muestre que es menor a la suma de la serie geométrica:

$$a_{n+1} + r_{n+1}a_{n+1} + r_{n+1}^2a_{n+1} + \dots \text{ que es convergente}).$$

b) Probar que si  $r_k$  es creciente para todo  $k \geq n+1$  y si  $\lim r_k = \rho < 1$ , luego

$$S - s_n < \frac{a_{n+1}}{1 - \rho}$$

(Sugerencia: muestre que  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  es menor que la suma de la serie geométrica:

$$a_{n+1} + \rho a_{n+1} + \rho^2 a_{n+1} + \dots \text{ que es convergente}). \blacklozenge$$

Para cada una de las siguientes series responde lo siguiente: ¿la serie converge de manera absoluta?, ¿converge de manera condicional?, ¿la serie es convergente?:

- |     |   |      |  |      |                                     |
|-----|---|------|--|------|-------------------------------------|
| 96. | $\sum \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}$          | 100. | $\sum \frac{(-1)^n (n+1)}{2n-1}$                       | 104. | $\sum -\frac{3}{5^n}$               |
| 97. | $\sum \frac{(-2)^n}{\sqrt{n+1}}$              | 101. | $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[4]{3}}$                  | 105. | $\sum \frac{(-1)^n n}{n^4 + 2}$     |
| 98. | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$ | 102. | $\sum (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n^2}$                      | 106. | $\sum \frac{n \cos(n\pi)}{n^2 + 1}$ |
| 99. | $\sum (-1)^n n^{-1}$                          | 103. | $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n^2}\right)$ | 107. | $\sum \frac{n!}{(-2)^n}$            |

Las siguientes series satisfacen la **prueba de la serie alternada** (Teorema 2.9). Determine el **error de aproximación** (según el Teorema 2.10) que se comete considerando los valores de  $n$  presentados a continuación:

- |      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 108. | $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ; $n = 7$         | 110. | $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ ; $n = 5$             |
| 109. | $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ ; $n = 99$ | 111. | $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \ln(n+1)}$ ; $n = 3$ |

Las siguientes series satisfacen la **prueba de la serie alternada**. ¿Para qué valor de  $n$  el error de aproximación,  $\xi$ , es menor al indicado?

112.  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad |\xi| < 0.0001$

115.  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n!}; \quad |\xi| < 0.00001$

113.  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}; \quad |\xi| < 0.005$

116.  $\frac{\pi^2}{12} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}; \quad |\xi| < 0.005$

114.  $\frac{\pi}{4} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}; \quad |\xi| < 0.01$

117.  $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}; \quad |\xi| < 0.1$

118. Resolver:

En la demostración del **teorema de Leibniz** (Teorema 2.9) se evaluó  $\sum (-1)^{n+1} a_n$ .  
Desarrolle esta demostración considerando  $\sum (-1)^n a_n$ .

119. Resolver:

Un inversionista indeciso presenta el siguiente comportamiento: originalmente invierte un total de  $D$  unidades en acciones. Luego, retira  $D/2$  unidades, invierte  $D/3$ , retira  $D/4$  y así sucesivamente hasta realizar 1000 operaciones. Si  $D = 180$  unidades, determine el monto de inversión final, luego de las 1000 operaciones. Además, determine el monto total negociado (es decir, la suma de todas las operaciones del inversionista).

120. Considerando la siguiente información sobre tres **proyectos**:

	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C
$I$	800	300	1000
$F_t$	50	25	30
$r$	10%	10%	10%
$n$	50	20	$n \rightarrow \infty$

- Si un proyecto se realiza cuando  $VAN > 0$ , ¿cuál de los tres proyectos se realiza?
- Si el mejor proyecto es aquel con mayor  $VAN$ , ¿cuál escogería?
- Si se define como  $TIR$  (tasa interna de retorno) al valor de  $r$  que hace que el  $VAN$  del proyecto sea cero, determine la  $TIR$  de cada modelo y compruebe que si  $VAN > 0$  (según su respuesta en a)), luego  $r > TIR$ .
- Considere un pequeño cambio en el **proyecto c** que tiene una vida útil infinita. Los beneficios  $F_t$  son iguales a 35 si  $n \leq 50$  y 30 para valores de  $n > 50$ . Determine el nuevo  $VAN$  del proyecto.
- Considere el enunciado de d) pero incluya una nueva inversión en  $n = 35$  de 100. Determine el nuevo  $VAN$ .

**121. Instrumentos de renta variable (Modelo de Gordon):**

Una acción puede ser valorizada según el dividendo que genere. Si asumimos que alguna acción adquirida hoy reparte un dividendo  $D$  que crecerá a una tasa constante  $g$  cada período, el valor actual de dicho instrumento es:

$$P = D + D \frac{(1+g)}{1+r} + D \frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + D \frac{(1+g)^3}{(1+r)^3} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} D \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n}$$

- ¿Qué condiciones deben cumplir  $g$  y  $r$  para que el precio de la acción sea una serie convergente?
- Demuestre que, dado su razonamiento en a),  $P = D \frac{(1+r)}{(r-g)}$ .
- Considere la siguiente versión del caso anterior:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} D \frac{e^{ng}}{e^{nr}}$$

Mediante el criterio de la integral determine las condiciones que deben cumplirse para que  $P$  sea convergente. Compare sus resultados con los obtenidos en a).

**122. Recursos agotables:**

Se calcula que en 1999 las reservas de oro de la mina Yanacocha ascenderían a un total de 32.9 millones de onzas. Además, se sabe que la producción ese año fue de 1.66 millones de onzas.

- Si se mantiene en el nivel de producción de 1999, ¿en qué año se agotarán las reservas?
- Suponga que la producción se reduce en 1% cada año a partir de 2000. ¿Cuánto durarán las reservas de oro en este caso?

# III

## Series de potencias y de Taylor

### 3.1 Generalidades

En el capítulo anterior hemos estudiado series infinitas con términos constantes. A continuación, nos centraremos en series cuyos términos son variables. Como se observará más adelante, este tipo de series son de fundamental importancia en el análisis económico.

**Definición 3.1** Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots \quad \dots(1)$$

donde todos los valores  $c_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) y  $a$  son constantes, es denominada **serie de potencias de  $x-a$**  o **serie de potencias de  $x$  alrededor de  $a$** .

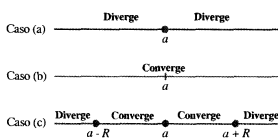
Si un valor numérico es sustituido por  $x$  en (1), la serie de constantes resultante puede converger o diverger; de este modo, el principal problema se centra en determinar aquellos valores de  $x$  para los que la serie (1) sea convergente. El Teorema 3.1 nos brinda una primera respuesta:

**Teorema 3.1** Para una serie de potencias  $\sum c_n(x-a)^n$ , solo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- (a) La serie converge solo para  $x = a$ .
- (b) La serie converge absolutamente (y, por ende, converge) para cualquier valor real de  $x$ .
- (c) La serie converge absolutamente para todo  $x$  que pertenece a un intervalo finito y usualmente abierto  $]a - R, a + R[$  y diverge si  $x < a - R$  ó  $x > a + R$ . En los puntos extremos,  $x = a - R$  ó  $x = a + R$ , la serie puede converger absolutamente, condicionalmente o diverger, dependiendo de su forma particular.

Del Teorema 3.1 se aprecia que cualquier conjunto de valores con los que una serie de potencias de  $x - a$  converge, pertenece a un intervalo centrado en  $x = a$ . Este intervalo es conocido como **intervalo o campo de convergencia**. Los casos (a) y (b) sugieren que *toda* serie de potencias posee un campo de convergencia; en otras palabras, *siempre* existe dicho intervalo.

En el caso (a) del teorema, el intervalo de convergencia se reduce a un punto único  $x = a$ ; así, decimos que la serie tiene un **radio de convergencia  $R = 0$** ; en la parte (b), el campo de convergencia es infinito (es decir, los números reales) por lo que la serie tiene un **radio de convergencia  $R = +\infty$** ; por último, en la parte (c) el intervalo se encuentra entre  $a - R$  y  $a + R$  por lo que la serie presenta un **radio de convergencia  $R$**  (ver Figura No. 3.1).



**Figura No. 3.1:**  
Convergencia de una serie de potencias

Toda serie de potencias presenta un intervalo de convergencia que puede tener un **radio** (a) nulo, (b) infinito o (c) finito.

El **radio** (y el campo) **de convergencia** es determinado a partir de los criterios de convergencia estudiados en el capítulo anterior (ver Cuadro No. 2.1). En particu-

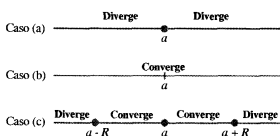


**Teorema 3.1** Para una **serie de potencias**  $\sum c_n(x-a)^n$ , solo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

- (a) La serie converge solo para  $x = a$ .
- (b) La serie converge absolutamente (y, por ende, converge) para cualquier valor real de  $x$ .
- (c) La serie converge absolutamente para todo  $x$  que pertenece a un intervalo finito y usualmente abierto  $]a - R, a + R[$  y diverge si  $x < a - R$  ó  $x > a + R$ . En los puntos extremos,  $x = a - R$  ó  $x = a + R$ , la serie puede converger absolutamente, condicionalmente o diverger, dependiendo de su forma particular.

Del Teorema 3.1 se aprecia que cualquier conjunto de valores con los que una serie de potencias de  $x - a$  converge, pertenece a un intervalo centrado en  $x = a$ . Este intervalo es conocido como **intervalo** o **campo de convergencia**. Los casos (a) y (b) sugieren que *toda* serie de potencias posee un campo de convergencia; en otras palabras, *siempre* existe dicho intervalo.

En el caso (a) del teorema, el intervalo de convergencia se reduce a un punto único  $x = a$ ; así, decimos que la serie tiene un **radio de convergencia**  $R = 0$ ; en la parte (b), el campo de convergencia es infinito (es decir, los números reales) por lo que la serie tiene un **radio de convergencia**  $R = +\infty$ ; por último, en la parte (c) el intervalo se encuentra entre  $a - R$  y  $a + R$  por lo que la serie presenta un **radio de convergencia**  $R$  (ver Figura No. 3.1).



**Figura No. 3.1:**  
**Convergencia de una serie de potencias**

Toda **serie de potencias** presenta un intervalo de convergencia que puede tener un **radio** (a) nulo, (b) infinito o (c) finito.

El **radio** (y el campo) **de convergencia** es determinado a partir de los criterios de convergencia estudiados en el capítulo anterior (ver Cuadro No. 2.1). En particu-

lar, dada la forma de una serie de potencias, la **prueba del ratio** resulta ser especialmente útil<sup>1</sup>. Algunos ejemplos pueden aclarar esta idea:

**Ejemplo 3.1** Consideremos la serie;  $\sum \frac{nx^n}{2^{n+1}}$ . Dada la Definición 3.1,

$$c_n = \frac{n}{2^{n+1}}, a = 0$$

Aplicando la **prueba de la ratio**, en su versión absoluta,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)x}{2n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|$

De este modo, si  $|x| > 2$  la serie diverge; por el contrario, si  $|x| < 2$  la serie converge absolutamente (y, entonces, converge). Analicemos los extremos: si  $x = 2$ , la serie resultante es  $\sum n/2$  que es claramente divergente; por otro lado, si  $x = -2$  se tiene otra serie,  $\sum (-1)^n n/2$ , que también es divergente. Así, el **radio de convergencia** de la serie es  $R = 2$  y el intervalo de convergencia es abierto,  $] -2, 2 [$ . ♦

**Ejemplo 3.2** La serie  $\sum \frac{(x-5)^n}{n^2}$  corresponde, según (1), a  $c_n = \frac{1}{n^2}$ ,  $a = 5$ .

La **prueba de la ratio** viene dada por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1} n^2}{(n+1)^2 (x-5)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| x-5 \right| \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = |x-5|$$

La serie converge de manera absoluta si  $|x-5| < 1$ , lo que equivale a  $4 < x < 6$  y es divergente para  $x < 4$  y  $x > 6$ . Para determinar la convergencia en los puntos extremos,  $x = 4$  ó  $x = 6$ , sustituimos estos valores en la serie. Si  $x = 6$ , se obtiene una serie “p” convergente ( $p = 2$ ). Por otro lado, si  $x = 4$ , la serie resultante converge de manera absoluta, por lo que el intervalo de convergencia es cerrado e igual a  $[4, 6]$ . El radio de convergencia es  $R = 1$ . ♦

De estos dos ejemplos, se desprende la siguiente conclusión:

**Importante.** La **prueba de la ratio** no debe ser utilizada para evaluar la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia, dado que la ratio  $\rho$  siempre es 1 en estos puntos (el lector puede demostrar esta afirmación).

<sup>1</sup> De hecho, el lector puede comprobar que  $R = (\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n})^{-1}$  o  $R = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n)^{-1}$

**Ejemplo 3.3** Al aplicar la **prueba de la ratio** a la serie  $\sum \frac{(2n)!}{(3n)!} |x|^n$  potencias se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2(n+1)]! (3n)! |x|^{n+1}}{[3(n+1)]! (2n)! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{3(3n+1)(3n+2)} |x| = 0$$

Se aprecia que la serie es convergente para cualquier valor de  $x$ . Se desprende que el **radio de convergencia** en este caso es  $R = +\infty$  y el intervalo de convergencia es la recta de los números reales.

Ahora bien, si la serie por evaluar es  $\sum \frac{(3n)!}{(2n)!} |x|^n$  encontraríamos que la convergencia de la serie según la **prueba de la ratio** se da solo si  $x = 0$ ; en este caso, el **radio de convergencia** es nulo y el intervalo de convergencia corresponde al punto  $x = 0$ . ♦

Si combinamos la información proporcionada en el Teorema 3.1 (Figura No. 3.1) con algunas definiciones básicas de los capítulos anteriores, podemos formular y evaluar el siguiente teorema:

**Teorema 3.2**

- (a) Si  $\sum c_n(x-a)^n$  converge para  $x_1 \neq a$ , luego converge de manera absoluta para todo  $x_2$  tal que  $|x_2| < |x_1|$ .
- (b) Si  $\sum c_n(x-a)^n$  diverge en  $x_1$ , luego diverge para todo  $|x_2| > |x_1|$ .

**Demostración (a).** Si  $\sum c_n(x_1 - a)^n$  converge, entonces  $\lim c_n(x_1 - a)^n = 0$  (ver Teorema 2.1). En particular, la secuencia  $\{c_n(x_1 - a)^n\}$  estará acotada (por ser convergente, ver Teoremas 1.1 - 1.2); es decir, para cualquier valor real de  $M$  y  $K$ ,  $M < c_n(x_1 - a)^n < K \forall n$ . Si  $(x_2 - a)/(x_1 - a) = r$ , por hipótesis,  $0 < r < 1$ . Luego, tenemos que:

$$|c_n(x_2 - a)^n| = |c_n(x_1 - a)^n| \cdot \left| \frac{(x_2 - a)^n}{(x_1 - a)^n} \right| = |c_n(x_1 - a)^n| \cdot \left| \frac{x_2 - a}{x_1 - a} \right|^n < Kr^n$$

y  $\sum c_n(x_2 - a)^n$  es convergente de manera absoluta por ser, en valor absoluto, término a término menor que una serie geométrica,  $\sum Kr^n$ , convergente (ver Teorema 2.5).

**Demostración (b).** Suponga que  $\sum c_n(x_1 - a)^n$  diverge. Por el argumento previo, sabemos que no puede existir un valor  $|x_2| > |x_1|$  tal que  $\sum c_n(x_2 - a)^n$  converja. La

existencia de tal valor implicaría la convergencia absoluta de  $\sum c_n(x_1 - a)^n$  lo que contradice la hipótesis.

### 3.2 Manipulando series de potencias

En esta sección revisaremos las operaciones vinculadas con las **series de potencias**. Antes de ello, resulta conveniente introducir el concepto de **representación** por una serie de potencias. Si una función  $f$  puede ser expresada como la suma de una serie de potencias (es decir, como un polinomio infinito) para todo  $x$  que pertenece a cierto intervalo  $I$  alrededor de  $a$ , se dice que es una función **analítica en  $I$** ; esto es, la serie de potencias **representa a  $f$**  en  $I$  o la serie es una **representación de series de potencias de  $f$**  en el intervalo. Por ejemplo, anteriormente vimos que la serie geométrica se representa según:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad -1 < x < 1$$

por lo que puede afirmarse que la serie  $1 + x + x^2 + \dots$  representa la función  $f(x) = 1/(1-x)$  en el intervalo  $] -1, 1 [$ . Este concepto nos será de gran utilidad posteriormente. Por el momento, centrémonos en la diferenciación e integración de series en potencias.

Informalmente, la representación de series de potencias de una función, puede ser diferenciada término por término, dada su estructura aditiva, para cualquier intervalo que pertenezca al intervalo de convergencia de dicha serie. Formalmente, se presenta el Teorema 3.3.

#### **Teorema 3.3 (Diferenciación de series de potencias)**

Si una función  $f(x)$  es representada por una serie de potencias, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

donde la serie tiene una **radie de convergencia**  $R > 0$ , entonces

(a) La serie de términos diferenciados  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x-a)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

tiene a  $R$  como radio de convergencia.

(b) La función  $f$  es diferenciable en el intervalo  $] a - R, a + R [$  y para cualquier  $x$  que pertenezca a este intervalo,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x-a)^n]$$

**Demostración.** Nos limitaremos a demostrar (a). La demostración de (b) queda a cargo del lector, quien deberá conocer el **teorema del valor medio** (ver Apéndice).

Dada la definición presentada en el Teorema 3.3, la **prueba de la ratio** para  $f^n$  resulta ser la siguiente:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{(x-a)^n}{(x-a)^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \frac{c_{n+1}}{c_n} (x-a) \right|$$

Al comprar este límite con el que se debe calcular para determinar el **radio de convergencia** de la serie original

$$L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \frac{(x-a)^{n+1}}{(x-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} (x-a) \right|$$

se tiene que  $L_1$  difiere de  $L_2$  en el término  $(n+1)/n$  que en el infinito es 1. Consecuentemente,  $L_1$  iguala a  $L_2$ , por lo que ambas series convergen en el mismo intervalo (y con el mismo **radio**).

**Otra demostración (a).** Si  $\sum c_n (x-a)^n$  converge en  $]a-R, a+R[$ , por el Teorema 3.2 sabemos que converge de manera absoluta. Supóngase que existe un número pequeño  $\varepsilon > 0$  de modo que

$$|x-a| < |x-a| + \varepsilon < |a+R|$$

Dado que  $|x-a| + \varepsilon$  pertenece al intervalo de convergencia,  $\sum |c_n (|x-a| + \varepsilon)^n|$  converge. Para cualquier valor de  $n$ , se cumple que (el lector puede demostrarlo):

$$|nc_n (x-a)^{n-1}| \leq |c_n (|x-a| + \varepsilon)^n|$$

Dado que  $\sum |c_n (|x-a| + \varepsilon)^n|$  converge, luego, por **comparación directa** (Teorema 2.5),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} [c_n (x-a)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n (x-a)^{n-1}$$

converge en  $]a-R, a+R[$ . ♦

Aplicando repetidamente el Teorema 3.3, puede extenderse su alcance. En otras palabras, en el interior del intervalo de convergencia, una serie de potencias define a una función infinitamente diferenciable. Las infinitas derivadas se obtienen, de igual manera, término por término y representan funciones convergentes en el mismo intervalo de convergencia.

Formalmente, si  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$  converge en un intervalo  $I$ ,

$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n (x-a)^n] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} [c_n (x-a)^n]$$

converge en  $I$ , para todo valor entero y positivo de  $k$ .

Análogamente a la diferenciación, la representación de una función por una serie de potencias puede ser integrada término por término en el interior del intervalo de convergencia;

**Teorema 3.4 (Integración de series de potencias)**

Si una función  $f(x)$  es representada por una serie de potencias, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ donde la serie tiene un radio de convergencia } R > 0,$$

entonces

(a) La serie de términos integrados  $\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int c_n (x-a)^n dx \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$

tiene a  $R$  como radio de convergencia.

(b) La función  $f$  es continua en el intervalo  $] a-R, a+R [$  y para cualquier  $x$  del intervalo,

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int c_n (x-a)^n dx \right] + C$$

(c) Para todo  $\alpha$  y  $\beta$  en el intervalo  $] a-R, a+R [$ , la siguiente serie converge (de manera absoluta):

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} c_n (x-a)^n dx \right]$$

**Demostración (a).** Si  $\sum c_n (x-a)^n$  converge en  $] a-R, a+R [$ ,  $\sum |c_n (x-a)^n|$  converge en el mismo intervalo. Dado que para todo  $n$  se cumple que

$$\left| \frac{c_n}{n+1} (x-a)^n \right| \leq |c_n (x-a)^n|$$

y por la **prueba de comparación directa**,  $\sum \left| \frac{c_n}{n+1} (x-a)^n \right|$  converge en el intervalo. Así,

$$(x-a) \sum \frac{c_n}{n+1} (x-a)^n = \sum \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

converge en  $] a-R, a+R [$ .

**Demostración (b).** Por el *teorema fundamental del cálculo*, si

$$g(x) = \sum \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

luego,

$$g'(x) = f(x) \rightarrow \int f(x) dx = g(x) + C$$

Nótese que la constante  $C$  representa la suma de todas las constantes que se incluyen en la integración término por término.

**Demostración (c).** Análoga a la del caso (b) pero con una integral definida o propia.

**Ejemplo 3.4** A continuación analizaremos algunas representaciones conocidas, según los postulados de los Teoremas 3.3 y 3.4. No obstante, una vez que la **serie de Taylor** sea analizada, podremos generalizar estos casos. En párrafos anteriores vimos que:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad -1 < x < 1 \quad \dots(1)$$

Sustituyendo en (\*)  $x$  por  $-x$  se obtiene

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

Al integrar ambos lados de la igualdad anterior, utilizando la parte (b) del Teorema 3.4 se llega a que:

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad -1 < x < 1 \quad \dots(*)$$

donde  $C$  es la constante de integración. Si evaluamos en ambos lados  $x = 0$ , tendremos que esta constante se anula ( $C = 0$ ). Así,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad -1 < x < 1$$

Es decir, la función  $\ln(1+x)$  es representada por la serie mostrada en (\*) para valores  $|x| < 1$ . De manera análoga, reemplazando  $x$  por  $x^2$  en (\*), e integrando ambos lados se llega a la siguiente representación de la función  $\arctg(x)$ :

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad -1 < x < 1$$

Comúnmente, las **series de potencias** son utilizadas para estimar o aproximar valores de funciones. De hecho, muchas calculadoras u hojas de cálculo utilizan este método al evaluar funciones complicadas; las series de potencias con frecuencia se utilizan en la elaboración de tablas de logaritmos, de funciones trigonométricas, probabilidades, entre otros. Si fuera posible sumar infinitos términos, bastaría con determinar la representación de series de alguna función y evaluarla en cierto punto de su dominio para obtener un punto exacto del rango; no obstante, en la mayoría de casos es imposible conocer con precisión la suma infinita de términos (una excepción es, por ejemplo, la serie geométrica) por lo que se opta por utilizar aproximaciones finitas. Sin duda, este es el principal uso de las **series de potencias: aproximar**.

El Cuadro No. 3.1 tabula las aproximaciones de los valores de  $\ln(1.50)$ ,  $\ln(0.50)$ ,  $\ln(1.99)$  y  $\ln(0.01)$ , obtenidas al evaluar la serie de potencias (\*) en  $x = 0.50$ ,  $-0.50$ ,  $0.99$ ,  $-0.99$ , respectivamente, para distintos valores de  $n$  (cifras redondeadas a 6 decimales).

**Cuadro No. 3.1**  
**Aproximación de  $\ln(1+x)$**

$n$	$x = 0.50$	$x = -0.50$	$x = 0.99$	$x = -0.99$
0	0.500000	-0.500000	0.990000	-0.990000
2	0.416667	-0.666667	0.823383	-1.803483
5	0.404688	-0.691146	0.616519	-2.390743
10	0.405479	-0.693109	0.726786	-2.912573
20	0.405465	-0.693147	0.706859	-3.445430
50	0.405465	-0.693147	0.693920	-4.066202
100	0.405465	-0.693147	0.689911	-4.393041
$\ln(1+x)$	<b>0.405465</b>	<b>-0.693147</b>	<b>0.688135</b>	<b>-4.605170</b>



La última fila del Cuadro No. 3.1 constituye el valor de  $\ln(1+x)$  que obtenemos al utilizar una calculadora. Se desprenden dos conclusiones sumamente importantes al observar el cuadro. En primer lugar, conforme aumenta el valor de  $n$ , en todos los casos, se obtiene una mejor aproximación. En segundo lugar, la precisión de las aproximaciones es mejor cuanto más cercano sea el valor de  $x$  a cero. Así, las mejores aproximaciones corresponden a los valores 0.50 y  $-0.50$ ; este hecho se debe a que la serie de potencias (\*\*\*) es convergente para un intervalo centrado en cero, de modo que los valores más lejanos (como lo son 0.99 y  $-0.99$ ) son los que "menos representan" a la función. Estas conclusiones serán desarrolladas con mayor detalle en la próxima sección. ♦

Para concluir con esta sección, presentamos el Teorema 3.5 que corresponde a operaciones elementales vinculadas con las series de potencias: suma y multiplicación. Cabe mencionar que la demostración y/o comprobación de dicho teorema queda a cargo del lector, por ser más sencilla.

#### Teorema 3.4 (Suma y producto de series de potencias)

Si  $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$  y  $g(x) = \sum b_n(x-a)^n$  son dos series de potencias con **radio de convergencia**  $R$ , se cumple que:

- (a) La suma de las series converge con un radio  $R$  y

$$f(x) + g(x) = \sum (c_n + b_n)(x-a)^n$$

- (b) El producto de las series converge con un radio  $R$  y

$$f(x) \cdot g(x) = \left( \sum c_n(x-a)^n \right) \cdot \left( \sum b_n(x-a)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n c_{n-k} b_k \right) (x-a)^n$$

#### 3.2.1 Aplicación: medidas de riesgo de un bono

En el capítulo anterior se introdujo el método convencional para valorizar un bono (ver Aplicación 2.3.2, p. 20). A continuación, estudiaremos brevemente los conceptos de **duración** y **convexidad** de un bono.

El concepto de Duración fue originalmente desarrollado por Frederick Macaulay en 1938. En un principio, la duración fue definida como una medida de la vida de alguna inversión de renta fija (como lo es un bono o cualquier flujo de caja). En

particular, Macaulay propuso un promedio ponderado del tiempo donde los intereses y el valor de vencimiento del bono son recibidos<sup>2</sup>. Si se tiene un bono con vencimiento  $n$ , tasa de descuento  $r$  y que paga un cupón  $c_t$  en el período  $t$  (donde  $c_n$  incluye el cupón así como el valor del bono en su vencimiento, es decir, en  $n$ ), su precio viene dado por

$$P = \frac{c_1}{(1+r)} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{c_n}{(1+r)^n} \quad \dots(1)$$

La **duración de Macaulay** se construye a partir del cociente del valor actual de pagos ponderado por su período correspondiente entre el precio del Bono. Formalmente,

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n t \frac{c_t}{(1+r)^t}}{P} \quad \dots(2)$$

Si se tiene bono de valor 100, con  $n = 5$  años, tasa del bono = 10% anual,  $c_t = 10$  ( $t = 1, 2, 3, 4$  y  $c_5 = 110$ ) y un rendimiento  $r = 13\%$ , entonces se obtiene  $P = 89.448$  y  $D = 4.118$  años. Es decir, dadas las condiciones del bono y los posibles riesgos asociados con cambios en  $r$ , en 4.118 años el inversionista, aproximadamente, verá recuperada la inversión hecha en el bono<sup>3</sup>.

Las inversiones de renta fija están sujetas a dos tipos de riesgo. En primer lugar, el *riesgo de mercado* es el efecto de un cambio en la tasa de interés de mercado sobre el valor de la inversión. En segundo lugar, el *riesgo de reinversión* se asocia a la posibilidad de reinvertir los cupones en aras de obtener un mayor rendimiento. Claramente, los movimientos asociados a estos riesgos tienen efectos opuestos: si la tasa de interés se incrementa, el valor del bono se reduce (ya que se descuentan los flujos a una tasa mayor) mientras que aumentan los intereses generados a partir de la reinversión de los cupones. Bajo este contexto, la duración constituye el tiempo que debe transcurrir para que el riesgo de reinversión neutralice al riesgo de mercado. En el ejemplo anterior, en 4.118 años, las posibles pérdidas (ganancias) de capital por aumentos (disminuciones) de la

2 Para mayor detalle sobre la derivación de esta medida, consúltese Frank Fabozzi, *Duration, Convexity and Other Bond Risk Measures*, McGraw Hill, 1999.

3 Siempre que el bono pague un cupón,  $D < n$ . Cuando el bono es de **cupón cero** (es decir, no paga un cupón) se cumple que  $D = n$ .

tasa de interés serán iguales a las posibles ganancias (pérdidas) generadas en la reinversión de cupones. Así, se entiende la duración de Macaulay como una medida de **inmunización** de la inversión<sup>4</sup>.

A pesar de que lo expuesto en los párrafos anteriores corresponde a la idea original de duración, este concepto es entendido típicamente como una medida de **sensibilidad**. A saber, si realizamos un cambio de variable de modo que el precio del bono resulta ser este:

$$P = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n \quad x \equiv (1+r)^{-1} \quad \dots(3),$$

se tiene una serie de potencias finita con la particularidad de que  $c_0 = a = 0$ . De esta forma, si quiere evaluarse la variación de  $P$  con respecto a  $r$  (es decir, su derivada), con ayuda de la *regla de la cadena* así como de la diferenciación término por término expuesta en el Teorema 3.3, se tiene que

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dr} = (c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}) \cdot \frac{-1}{(1+r)^2} = -\sum_{t=1}^n t \frac{c_t}{(1+r)^{t+1}} \quad \dots(4)$$

que resulta ser una expresión muy parecida a la **duración de Macaulay**. Precisamente,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P}{(1+r)} D \quad \dots(5)$$

Este análisis es muy cercano al realizado por John Hicks en 1939 (aunque no conocía el concepto de duración). Este importante economista buscaba una medida de **volatilidad** (mejor dicho, de **sensibilidad**), representada adecuadamente mediante una derivada. Lo interesante es que lo propuesto por Hicks es similar a lo estudiado por Macaulay aunque sus raíces son totalmente distintas. El aporte de Hicks ha tenido una significativa aceptación en el mercado de capitales, sobre todo a partir de la década de los años 70, fecha en la cual el mercado norteamericano completa un proceso de desregulación de las tasa de interés que, evidentemente, aumenta la volatilidad de esta variable<sup>5</sup>. Hoy en día, la propuesta de Hicks es conocida como **duración modificada** y se desprende de (5):

4 Ver Frank Fabozzi, *op. cit.*

5 Para una revisión histórica de la duración como medida de volatilidad en el mercado de capitales norteamericano, se recomienda consultar Mark Taranto, "Duration Measures: Historical Perspective", 1995 en: <http://www.duke.edu/~charvey/Clares/ba350/bondval/duration.html>.

$$D_m = \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{(1+r)} D \quad \dots(6)$$

En el ejemplo propuesto, con  $D = 4.118$  y  $r = 13\%$  se llega a  $D_m = -3.644$ , resultado que se interpreta como una *elasticidad*: si la tasa de interés aumenta (disminuye) en 1%, el precio del bono disminuye (aumenta) en 3.644%. Bajo esta perspectiva, un instrumento de renta fija será menos riesgoso cuanto menor duración presente<sup>6</sup>.

Si bien las finanzas han encontrado en la **duración modificada** una herramienta de análisis bastante útil, es cierto que muchos inversionistas no se contentan con una simple aproximación; ante este descuento surge el concepto de Convexidad. Intuitivamente, la **convexidad** es una medida para estimar cómo cambian la duración y el precio de un bono ante un cambio en la tasa de interés. Matemáticamente, la convexidad responde a una segunda derivada (por ello, a veces es llamada *curvatura*). De manera análoga a la de (6), la convexidad es definida como

$$C_b = \frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dr^2} \quad \dots(7)$$

Reexpresando (4) como una serie de potencias finita en términos de  $x$ , y utilizando la regla de la cadena y la extensión para derivadas de orden superior del Teorema 3.3, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dr} = -(c_1 x^2 + 2c_2 x^3 + 3c_3 x^4 + \dots + n c_n x^{n+1}) \quad x \equiv (1+r)^{-1} \quad \dots(8) \\ \frac{d^2 P}{dr^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dP}{dx} \frac{dx}{dr} \right) \frac{dx}{dr} = (2c_1 x + 6c_2 x^3 + \dots + n(n+1)c_n x^n) \frac{1}{(1+r)^2} = \sum_{i=0}^n \frac{t(t+1)c_t}{(1+r)^{t+2}} \end{aligned}$$

Como se mencionó, si se incluye la noción de convexidad en el análisis de bonos, se obtiene una mejor aproximación del verdadero precio del bono, una vez modificada la tasa de interés (conclusión similar a la realizada acerca del Cuadro No. 3.1). Se dice que un bono tiene convexidad positiva si el valor del instrumento aumenta

6 Sobre factores que afectan el riesgo de un bono, ver Robert Kolb, *op. cit.* Asimismo, un trabajo más avanzado con sólidas bases teóricas sobre el tema se encuentra en John Campbell y Luis Viceira, "Who Should Buy Long-Term Bonds?", *NBER Working Paper No. W6801*, 1998.

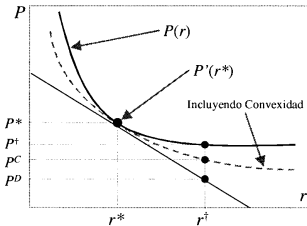
por lo menos en el valor predicho por la duración cuando el interés cae y disminuye menos que lo predicho por la duración cuando el interés se incrementa (ver Figura No. 3.2)<sup>7</sup>. Esta idea, será mejor entendida una vez que el lector se familiarice con las expansiones de Taylor (que veremos a continuación) ya que el cambio porcentual en el precio del bono puede resumirse del siguiente modo:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{dP}{dr} \frac{\Delta r}{P} + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \frac{\Delta r^2}{P} \quad \dots(9)$$

Es decir, reemplazando (6) y (7) en (9),

$$\Delta\%P = D_m \Delta r + \frac{1}{2} C_b \Delta r^2 \quad \dots(10)$$

**Figura No. 3.2:**  
**Duración y convexidad**  
**de un bono**



La duración y convexidad son medidas de sensibilidad del valor de un bono (curva  $P$ ) por lo que tratan de determinar el cambio del precio del instrumento,  $P^*$ , si, por ejemplo, la tasa de interés se incrementa de  $r^*$  a  $r^\dagger$ . Conociendo que el verdadero nuevo precio es  $P^\dagger$ , se aprecia que la duración nos brinda una aproximación,  $P^D$ , que mejora al incluir la convexidad en el análisis,  $P^C$ . El análisis es similar ante una disminución de  $r$ .

Es preciso notar que si un inversionista espera un(a) incremento (disminución) en la tasa de interés, lo más conveniente es invertir en un instrumento de duración baja (alta) y convexidad alta.

7 Ver Frank Fabozzi, *op. cit* y David Blake y Michael Orszag, "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Convexity", *Journal of Fixed Income*, June 1996.

donde  $\Delta r$  es la variación de la tasa de interés. Con los datos utilizados a modo de ilustración, se obtiene un valor  $C_b = 18.050$ . De esta forma, si  $\Delta r = 0.01$ , la variación porcentual del precio, dada por (10), es  $-0.035\%$ . Este resultado es válido en la medida en que la tasa de interés sufra variaciones infinitesimales (lo que es totalmente lógico, en circunstancias normales). Por ejemplo, si  $\Delta r = 1$ ,  $\Delta\%P = 5.381\%$ , que resulta ser una cifra distorsionada. ♦

### 3.3 Desarrollo de series de potencias: la serie de Taylor

Una de las primeras aplicaciones del cálculo fue la de brindar aproximaciones numéricas para valores de funciones como  $\text{sen}(x)$ ,  $\ln(x)$  y  $e^x$ . Tal como se realizó en el Cuadro No. 3.1, un método común para obtener estos valores se centra en la aproximación de una función mediante un polinomio. El hecho de transformar una función en un polinomio (o una serie de potencias) se conoce, en jerga matemática, como *expandir* la función. En esta sección nos centraremos en estudiar una *expansión* particular y extremadamente útil en el desarrollo del cálculo, que ha encontrado una amplia gama de aplicaciones en la teoría económica: la *serie de Taylor*.

#### 3.3.1 El polinomio de Taylor

El caso más sencillo de expansión polinómica de una función es, sin duda, el "lineal" o la noción de *recta tangente* del cálculo elemental. Si la función  $f$  es diferenciable en  $x = a$ , luego la recta tangente a  $f$  en  $a$  es la función lineal,

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

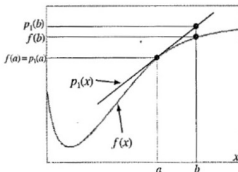


Figura No. 3.3:  
Aproximación lineal de una función

Si  $f$  es una función diferenciable en  $x = a$ , entonces la recta tangente a la función en  $x = a$  resulta ser una buena aproximación de  $f$  alrededor de  $a$ . Esta recta es una función lineal,  $p_1(x)$ , que cumple con  $f(a) = p_1(a)$  y  $f'(a) = p_1'(a)$ .

Nótese que conforme nos alejamos de  $a$ , la aproximación pierde precisión (el punto  $b$  en la figura).

La función  $p_1$  resulta ser una buena aproximación de  $f$  para valores cercanos a  $x = a$ . Como lo sugiere la Figura No. 3.2, se cumplen dos condiciones:  $p_1(a) = f(a)$  y  $p_1'(a) = f'(a)$ .

Si bien una aproximación lineal muchas veces puede ser útil para evaluar una función en algún valor, existen alternativas que presentan un mejor desempeño. Se trata, pues, de encontrar un polinomio de algún grado específico que sea el que mejor aproxime a la función  $f$  en la vecindad del punto  $a$ .

Se ha presentado vagamente el problema, ya que no se especifican ciertos requisitos como continuidad y diferenciabilidad ni es evidente qué se entiende por "la mejor aproximación alrededor de  $a$ ". Afortunadamente, estas ambigüedades pueden ignorarse temporalmente sin entorpecer el avance del análisis.

Supóngase que estamos interesados en aproximar la función  $f$  en la vecindad del punto  $a$  por el polinomio:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n \quad \dots(1)$$

Dado que  $p_n(x)$  tiene  $n + 1$  coeficientes, es razonable imponer  $n + 1$  condiciones al polinomio con el fin de encontrar una buena aproximación de  $f(x)$ . Asimismo, ya que el punto  $x = a$  es el de mayor interés, nuestra estrategia será escoger los coeficientes de  $p_n(x)$  de manera que el valor de  $p_n$  y sus primeras  $n$  derivadas sea igual al valor de  $f$  y sus primeras  $n$  derivadas en  $x = a$ . Al aplicar este procedimiento, se espera que  $f(x)$  y  $p_n(x)$  sean valores cercanos en un intervalo (posiblemente reducido) centrado en  $a$ . Así, asumiendo que  $f$  puede ser diferenciada  $n$  veces en  $a$ , hallamos los coeficientes de (1) de modo que:

$$f(a) = p_n(a), f'(a) = p_n'(a), f''(a) = p_n''(a), \dots, f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a) \quad \dots(2)$$

De (1) se tiene que:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n \\ p_n'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a)^1 + 3c_3(x-a)^2 + \dots + nc_n(x-a)^{n-1} \\ p_n''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \dots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \\ p_n'''(x) &= 3 \cdot 2c_3 + \dots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} \\ &\vdots \\ p_n^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\dots(1)c_n \end{aligned}$$

Para satisfacer (2) tenemos que:

$$\begin{aligned} f(a) &= p_n(a) = c_0 \\ f'(a) &= p_n'(a) = c_1 \\ f''(a) &= p_n''(a) = 2c_2 = 2!c_2 \\ f'''(a) &= p_n'''(a) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(a) &= p_n^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\dots(1)c_n = n!c_n \end{aligned}$$

que determina los siguientes valores para los coeficientes  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) de (1):

$$c_0 = f(a), c_1 = f'(a), c_2 = \frac{f''(a)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

El polinomio que se obtiene al reemplazar estos coeficientes en (1) es denominado **polinomio de Taylor de grado  $n$** .

**Definición 3.2** Si  $f$  puede ser diferenciada  $n$  veces en  $x = a$ , entonces se define al **polinomio de Taylor de grado  $n$  para  $f$  alrededor de  $a$**  como la siguiente expresión:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) = p_n(x)$$

Este polinomio tiene la propiedad de que su valor y el valor de sus primeras  $n$  derivadas en  $a$  coinciden con el valor de  $f(x)$  y sus primeras  $n$  derivadas, respectivamente, cuando  $x = a$ .

En el caso particular  $x = a = 0$ , el polinomio es denominado **polinomio de grado  $n$  de Maclaurin**.

**Ejemplo 3.5 (Una expansión muy conocida)** Hallar los polinomios de Maclaurin  $p_0, p_1, p_2, p_3$  y  $p_n$  para  $e^x$ .

Si  $f(x) = e^x$ , entonces se cumple que:

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x \quad y$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$



Luego,

$$p_0(x) = f(0) = 1$$

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

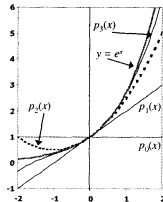
$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

La Figura No. 3.4 ilustra la idea detrás de los desarrollos de series de potencias. Sin embargo, posteriormente nos centraremos formalmente en los resultados allí expuestos. ♦

**Figura No. 3.4:**  
Aproximación de  $e^x$

En la figura se muestra la representación gráfica de una función exponencial y los gráficos de los cuatro primeros polinomios de Maclaurin. Se puede apreciar que  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son virtualmente indistinguibles de la curva  $e^x$  para valores de  $x$  cercanos al origen, por lo que estos polinomios resultan ser buenas aproximaciones de  $e^x$  cerca de cero. Sin embargo, cuanto más lejano se encuentra  $x$  de cero, las aproximaciones se tornan más pobres. Este hecho es típico de los polinomios de Maclaurin para cualquier función  $f$ : proveen buenas aproximaciones en la vecindad de cero pero esta bondad se reduce (incluso drásticamente) conforme  $x$  se aleja del valor nulo.



Frecuentemente resulta conveniente expresar la fórmula del polinomio de Taylor en términos de sumatorias. Si utilizamos  $f^{(k)}(a)$  para denotar la  $k$ -ésima derivada de  $f$  evaluada en  $a$  y como notación convencional  $f^{(0)}(a) = f(a)$ , podemos reexpresar el polinomio. A saber,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

En particular, el polinomio de grado  $n$  de McLaurin para  $f(x)$  puede ser escrito como

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

### 3.3.1.1 Aplicación: medida absoluta de aversión al riesgo

Una de las principales extensiones de la microeconomía clásica es la elección del consumidor en condiciones de incertidumbre. A partir de conocidos trabajos de von Neumann y Morgenstern y Savage, se desarrollan conceptos como *utilidad esperada* y aparecen teorías sobre la actitud de los individuos frente al riesgo<sup>8</sup>. A diferencia del análisis tradicional, los argumentos en funciones de utilidad son reducidos a uno, la riqueza del individuo, y las propiedades asociadas con la concavidad de dicha función ganan mayor interpretación económica y dejan de ser simples propiedades matemáticas necesarias en la maximización de la función. De este modo, encontramos que el individuo *adverso* al riesgo, es decir, aquel agente a quien no le gusta el riesgo, presentará una función de utilidad estrictamente cóncava (en su riqueza); por su parte, la función de utilidad del agente *neutral* (o indiferente) al riesgo será lineal en su nivel de riqueza mientras que las funciones convexas corresponden al agente *amante* al riesgo<sup>9</sup>.

Dentro de este “nuevo” desarrollo teórico, son precisamente los trabajos de Kenneth Arrow y John Pratt<sup>10</sup> los que introducen el concepto de *adversidad al riesgo* dentro del análisis económico. Debido a estos estudios seminales, hoy es muy conocida una medida de riesgo denominada el Índice de Arrow-Pratt o el

8 Ver el tercer capítulo de David Kreps, *A Course of Microeconomic Theory*, McGraw - Hill, 1995.

9 Para un mayor desarrollo sobre estos conceptos, consultar el noveno capítulo del libro de Jorge Fernández-Baca, *Microeconomía: teoría y aplicaciones*, CIUP, 2000 Tomo I, y la amplia bibliografía allí citada.

10 Puntualmente, ver Kenneth Arrow, “On the Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing”, en: Kenneth Arrow, *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Amsterdam: North Holland, 1974 y John Pratt, “Risk Aversion in the Small and in the Large”, *Econometrica*, 32, 1964.

(la **coeficiente (medida) absoluto(a) de aversión al riesgo (MAAR)**). A continuación presentaremos su derivación matemática<sup>11</sup>:

Suponga que  $U(w)$  es la función de utilidad de un individuo que tiene un nivel de riqueza  $w$ . Este individuo se enfrenta a una situación en la que puede ganar o perder cierta cantidad,  $m$ . Por ejemplo, puede tratarse de una partida de póquer. Además, se espera que, en promedio, no pierda ni gane en absoluto. Es decir, si gana y sigue jugando, puede perder lo ganado; si pierde y sigue jugando, puede recuperar lo perdido. Esto implica que  $E(m) = 0$ , donde  $E$  es conocido como el **operador de esperanza** y  $E(m)$  se interpreta como la cantidad que el individuo espera ganar (o perder) en la situación mencionada. No obstante, esta persona es adversa al riesgo (esto matemáticamente implica que  $U' > 0$  y  $U'' < 0$ ) por lo que prefiere pagar una prima por riesgo de valor  $\pi$  (por ejemplo, puede comprarse un seguro). Así, escogerá una prima de modo que una vez pagada sea indiferente a la incertidumbre que le genera la situación que enfrenta. Es decir,

$$U(w - \pi) = E(U(w + m))$$

El operador de esperanza aparece en esta expresión porque el miembro derecho de la ecuación resulta ser la utilidad *esperada*, ya que no se conoce con exactitud cuánto vale  $m$ . No obstante,  $w$  es un valor cierto por lo que  $E(w) = w$ . Al aproximar ambos miembros de la ecuación (1) mediante un polinomio de Taylor se obtiene<sup>12</sup>

$$U(w - \pi) \approx U(w) - \pi U'(w) + \frac{\pi^2}{2!} U''(w) - \frac{\pi^3}{3!} U'''(w) + \dots + (-1)^n \frac{\pi^n}{n!} U^{(n)}(w)$$

$$E(U(w + m)) \approx U(w) + E(m)U'(w) + \frac{E(m^2)}{2!} U''(w) + \dots + \frac{E(m^n)}{n!} U^{(n)}(w)$$

11 Debido a que el lector no está necesariamente familiarizado con la "teoría de elección bajo incertidumbre", nos limitaremos a los aspectos matemáticos de dicha medida. Los aspectos conceptuales e intuitivos pueden ser consultados en cualquier libro de microeconomía intermedia.

12 Una forma muy empleada del polinomio de Taylor consiste en sustituir  $x$  por  $a + h$  en la Definición 3.2:

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Si se considera  $a = w$  y  $h = -\pi$  se llega a la aproximación de la función de utilidad dada en (2).

Si  $U(w - \pi)$  es aproximada por un polinomio de primer orden y  $E(U(w + m))$ , por uno de segundo orden, se tiene<sup>13</sup>, según (1), que:

$$U(w) - \pi U'(w) = U(w) + 0 \cdot U'(w) + \frac{\sigma}{2} U''(w)$$

donde  $\sigma = E(m^2)$ . De esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{2\pi}{\sigma} = -\frac{U''(w)}{U'(w)} = r(w)$$

donde  $r(w)$  es la MAAR propuesta por Arrow-Pratt<sup>14</sup>.

### 3.3.2 La serie de Taylor

Para algún valor fijo de  $x$  cercano a  $a$ , se espera que la aproximación de  $f(x)$  por su polinomio de Taylor  $p_n(x)$  alrededor de  $a$  mejore conforme  $n$  aumente, ya que este aumento implica la coincidencia de un mayor número de derivadas de  $f(x)$  y  $p_n(x)$  en  $x = a$ . Así, resulta coherente pensar que puede mejorarse cualquier grado de precisión escogiendo un valor de  $n$  suficientemente grande; en otras palabras, los valores de  $p_n(x)$  pueden converger a  $f(x)$  cuando  $n$  tiende al infinito. Si esto ocurre, tenemos que:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

**Definición 3.3** Si  $f$  posee derivadas de todo orden en  $a$ , luego se define a la **Serie de Taylor de  $f$  alrededor de  $a$**  como:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \dots$$

En el caso particular  $x = a = 0$ , se tiene la **Serie de Maclaurin**.

<sup>13</sup> El hecho de truncar estas aproximaciones en polinomios de primer y segundo orden limita a la **medida de Arrow-Pratt** a riesgos infinitesimalmente pequeños. Esta metodología ha sido cuestionada, entre otros autores, por Alex Kane, "Skewness Preferences and Portfolio Choice", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, No. 1, 1982 y George Szpiro, "Risk Aversion as a Function of Variance and Skewness", en: A. Chikan, *Progress in Decision, Utility and Risk Theory*, Kluwer Academic Publisher, 1991, quienes utilizan polinomios de mayor grado en las aproximaciones de la función de utilidad.

<sup>14</sup> Un análisis interesante sobre el alcance e interpretación de esta medida se encuentra en Angus Deaton, y John Muellbauer, *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge University Press, 1980.

**Ejemplo 3.6 (Típico)** Si definimos a  $h(x) = \text{sen}(x)$  y  $g(x) = \text{cos}(x)$ , hallar la representación de  $h$  y  $g$  por una **serie de Maclaurin**.

Dadas las funciones, se tiene que:

$$\begin{array}{llll} h(x) = \text{sen}(x) & h(0) = 0 & g(x) = \text{cos}(x) & g(0) = 1 \\ h'(x) = \text{cos}(x) & h'(0) = 1 & g'(x) = -\text{sen}(x) & g'(0) = 0 \\ h''(x) = -\text{sen}(x) & h''(0) = 0 & g''(x) = -\text{cos}(x) & g''(0) = -1 \\ h'''(x) = -\text{cos}(x) & h'''(0) = -1 & g'''(x) = \text{sen}(x) & g'''(0) = 0 \end{array}$$

Ya que  $h^{(4)}(x) = \text{sen}(x) = h(x)$  y  $g^{(4)}(x) = \text{cos}(x) = g(x)$ , los patrones 0, 1, 0, -1 y 1, 0, -1, 0 se repiten conforme evaluamos las sucesivas derivadas de  $f$  y  $g$ , respectivamente, en  $x = 0$ . De este modo, los polinomios de Maclaurin para  $\text{sen}(x)$  y para  $\text{cos}(x)$  son, respectivamente:

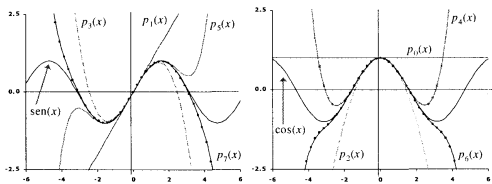
$$h(x) \approx p_{2n+1}(x) = p_{2n+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$g(x) \approx p_{2n}(x) = p_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Así, se desprende que las *series de Maclaurin* para  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$  son, en notación de sumatoria:

$$\text{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \blacklozenge$$

**Figura No. 3.5:**  
Aproximación de  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$



### 3.3.2.1 Aplicación: tasas de crecimiento

En muchos fenómenos económicos como el crecimiento poblacional<sup>15</sup> y el interés compuesto, el uso de funciones exponenciales y logarítmicas resulta ser, sin duda, adecuado. En particular, la función exponencial es conocida por representar intereses de capitalización continua y tasas instantáneas de crecimiento, mientras que la función logarítmica es especialmente útil en el cálculo de tasas porcentuales de crecimiento y elasticidades<sup>16</sup>.

Mediante el uso de **series de Taylor** comprobaremos dos proposiciones muy importantes vinculadas con el crecimiento de estas funciones y que, sin duda, han encontrado un mayor número de aplicaciones que las mencionadas anteriormente en economía:

El crecimiento de la función  $e^x$  es más “acelerado” que el de cualquier potencia de  $x$ . El crecimiento de  $\ln(x)$  es menos “acelerado” que el de cualquier potencia de  $x$ .

Para la proposición (a) nos interesa probar que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} e^x = \infty, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Del Ejemplo 3.5 se deduce que  $e^x = \sum x^k / k!$  por lo que

$$x^{-\alpha} e^x = \sum x^{k-\alpha} / k! = \sum x^k / k! .$$

Dado  $\alpha$ , siempre será posible hallar algún valor  $N$  tal que  $N - \alpha \geq 1$ . Si  $x > 0$ , cada término de la serie  $x^{-\alpha} e^x$  es positivo y menor que la suma de la serie. Luego, y en particular,

$$x^{-\alpha} e^x > \frac{x^{N-\alpha}}{N!} \geq \frac{x}{N!} \quad (x > 1) .$$

Así,  $x/N! \rightarrow \infty$  si  $x \rightarrow \infty$ , lo que demuestra la proposición.

Por otro lado, en el caso (b) nos centramos en demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\beta} \ln(x) = 0 \quad \forall \beta > 0$$

<sup>15</sup> Ciertamente, más que económico, el crecimiento poblacional resulta ser un fenómeno demográfico o biológico. No obstante, dadas las consecuencias e implicancias directas sobre la economía, puede considerarse “económico”.

<sup>16</sup> El octavo capítulo de Edward T. Dowling, *Matemáticas para economistas*, McGraw – Hill, 1982 provee una completa exposición de las funciones exponenciales y logarítmicas aplicada a la economía.

Si  $y = \beta \ln(x)$  ( $x > 0$ ), luego  $x^\beta = e^y$  por lo que  $x^\beta \ln(x) = ye^{-y}/\beta$  ya que  $\beta > 0$ , conforme  $x \rightarrow \infty$ , entonces  $y \rightarrow \infty$ . Por lo discutido en el caso previo (a), si  $y \rightarrow \infty$ ,  $\beta y^{-1}e^y \rightarrow \infty$  que equivale a afirmar que  $ye^{-y}/\beta \rightarrow 0$  si  $y \rightarrow \infty$ , hecho que demuestra la afirmación. ♦

### 3.3.2.2 Aplicación: cálculo de probabilidades

El concepto de *probabilidad* constituye una de las principales bases de la Estadística. Así, gran parte del análisis estadístico se vale de *funciones de probabilidad*, conocidas usualmente como *funciones de densidad*. Si  $f(x)$  es una de estas distribuciones,  $x$  (que es una variable *aleatoria*) constituye algún evento que ha sido cuantificado y  $0 \leq f(x) \leq 1$ , la probabilidad de que  $x$  se encuentre entre el valor  $x_1$  y  $x_2$  se define como:

$$\Pr(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Es decir, la probabilidad viene dada por el área bajo la función de densidad. Si suponemos que la función de densidad es *normal estándar* o *gaussiana* (posiblemente, la distribución de probabilidad más estudiada y utilizada) tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

Luego, la probabilidad de que  $z$  sea menor o igual que  $\alpha$  y positivo es

$$\Pr(0 \leq z \leq \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Puede apreciarse que esta integral no puede ser resuelta por métodos convencionales como sustitución de variables o integración por partes. Afortunadamente, una representación por series de Taylor (Maclaurin) junto con la integración término por término postulada en el Teroema 3.4 nos brinda una solución.

Se sabe que  $e^x = \sum x^k / k!$ . Reemplazando  $x$  por  $-\frac{1}{2}z^2$  se tiene que:

$$e^{-\frac{1}{2}z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{z^{2k}}{k!} \quad \text{por lo que} \quad \int e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = C + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

Evaluando la integral se llega a:

$$\Pr(0 \leq z \leq \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

Algunos resultados son presentados en el Cuadro No. 3.2, cuyas conclusiones son análogas a las extraídas del Cuadro No. 3.1 en cuanto a la precisión de la aproximación ante distintos valores de  $n$  y  $\alpha$ . ♦

**Cuadro No. 3.2**  
**Aproximación de la probabilidad de una función gaussiana**

$n$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 2.00$	$\alpha = 2.75$	$\alpha = 4.50$
2	0.079260	0.191472	0.585115	1.282904	14.14032
5	0.079260	0.191462	0.472897	0.266552	-87.59771
10	0.079260	0.191462	0.477251	0.499105	124.8427
20	0.079260	0.191462	0.477250	0.497020	1.233760
50	0.079260	0.191462	0.477250	0.497020	0.499997
<b>Pr(0 ≤ z ≤ α)</b>	<b>0.079260</b>	<b>0.191462</b>	<b>0.477250</b>	<b>0.497020</b>	<b>0.499997</b>

La última fila corresponde al valor "verdadero" de la probabilidad y fue hallado utilizando MS Excel mediante la siguiente operación:  $\text{DIST.NORM.ESTAND}(\alpha) - 0.5$ .

### 3.3.3 El teorema de Taylor

En la sección anterior se vio que es intuitivamente aceptable pensar que una **serie de Taylor**, concebida como un polinomio de Taylor de grado infinito, equivale a la función que representa. En otras palabras, se anticipó la posibilidad de que bajo ciertas condiciones apropiadas la **serie de Taylor** alrededor de  $x = a$  para una función  $f$  converge hacia  $f(x)$  para valores de  $x$  cercanos al punto  $a$ . En esta sección estableceremos algunas condiciones bajo las cuales se cumpla la convergencia.

Si  $p_n$  denota al  $n$ ésimo polinomio de Taylor en  $x = a$  de una función  $f$  y aproximamos a  $f$  mediante  $p_n$  en algún punto  $x$ , luego la expresión

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

es denominada **residuo o resto de grado  $n$  para  $f$**  alrededor de  $x = a$ . Esta ecuación puede ser rescrita como:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \quad \text{o} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$



**Teorema 3.5** La igualdad

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

se cumple si y solo si  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  (que, obviamente, implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x).$$

De este modo, el problema de determinar cuándo una **serie de Taylor** para  $f$  alrededor de  $a$  converge hacia  $f$  se reduce a determinar bajo qué condiciones el  $n$ ésimo resto de  $f$  tiene a cero como límite en el punto. El **teorema de Taylor** aborda directamente este problema:

**Teorema 3.5 (Teorema de Taylor)**

Supóngase que  $f$  puede ser diferenciada  $n + 1$  veces en cada punto del intervalo que contiene al punto  $a$  y que  $R_n(x)$  denota al  $n$ ésimo residuo de  $f$  alrededor de  $x = a$ . Luego, para todo  $x$  en el intervalo existe por lo menos un punto  $c$  entre  $a$  y  $x$  tal que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \dots(*)$$

Antes de proceder con la demostración del **teorema de Taylor** cabe centrarse en dos aclaraciones. En primer lugar, el hecho de que el punto  $c$  se encuentre “entre  $a$  y  $x$ ” significa que  $c$  pertenece al intervalo  $[a, x]$  si  $a < x$ , se encuentra en el intervalo  $[x, a]$  si  $x < a$  ó  $c = a$  si  $x = a$ . En segundo lugar, la expresión (\*) es comúnmente denominada **resto de Lagrange** ya que no fue originalmente propuesta por Taylor sino por el famoso matemático Joseph Louis Lagrange.

**Demostración.** Por hipótesis,  $f$  puede ser diferenciada  $n + 1$  veces en cada punto del intervalo que contiene a  $a$ . Supóngase que se escoge un punto  $b > a$  que pertenece a dicho intervalo (los casos  $b < a$  y  $b = a$  quedan a cargo del lector). Si  $p_n(x)$  es el polinomio de Taylor de grado  $n$  de  $f$  en  $x = a$ , definimos:

$$\begin{aligned} w(x) &= f(x) - p_n(x) \\ v(x) &= (x-a)^{n+1} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

Dado que  $f(x)$  y  $p_n(x)$  tienen, por construcción, el mismo valor y las mismas  $n$  primeras derivadas en  $x = a$  y cualquier derivada de  $v$  contendrá al término  $(x - a)$  de manera multiplicativa, se tiene que:

$$\begin{aligned}w(a) &= w'(a) = w''(a) = \dots = w^{(n)}(a) = 0 \\v(a) &= v'(a) = v''(a) = \dots = v^{(n)}(a) = 0\end{aligned}\quad \dots(2)$$

y que  $v(x)$  y sus primeras  $n$  derivadas son distintas de cero si  $x \neq a$ .

En el Apéndice se presenta el *Teorema del Valor Medio*. El lector puede comprobar que las funciones  $w$  y  $v$  satisfacen la hipótesis de dicho teorema en el intervalo  $[a, b]$ , de modo que existe un punto  $c_1$  que cumple con  $a < c_1 < b$  tal que (utilizando (2)):

$$\frac{w(b) - w(a)}{v(b) - v(a)} = \frac{w'(c_1)}{v'(c_1)} \quad \rightarrow \quad \frac{w(b)}{v(b)} = \frac{w'(c_1)}{v'(c_1)} \quad \dots(3)$$

Ahora bien, si se aplica el **teorema del valor medio** a  $w'$  y  $v'$  sobre el intervalo  $[a, c_1]$ , se deduce que existe un punto  $c_2$  ( $a < c_2 < c_1$ ) tal que (combinando con (3)):

$$\frac{w'(c_1) - w'(a)}{v'(c_1) - v'(a)} = \frac{w''(c_2)}{v''(c_2)} \quad \rightarrow \quad \frac{w'(c_1)}{v'(c_1)} = \frac{w''(c_2)}{v''(c_2)} \quad \rightarrow \quad \frac{w(b)}{v(b)} = \frac{w''(c_2)}{v''(c_2)}$$

Se puede apreciar que si el **teorema del valor medio** es aplicado a las sucesivas derivadas de  $w$  y  $v$ , obtendremos la expresión:

$$\frac{w(b)}{v(b)} = \frac{w^{(n+1)}(c_{n+1})}{v^{(n+1)}(c_{n+1})} \quad \dots(4)$$

donde  $a < c_{n+1} < b$ . Sin embargo,  $p_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  por lo que su derivada de orden  $n + 1$  es nula. Así, de (1):

$$w^{(n+1)}(c_{n+1}) = f^{(n+1)}(c_{n+1}) \quad \dots(5)$$

Del mismo modo, de (1) se aprecia que la derivada de orden  $n+1$  de  $v$  es la constante  $(n+1)!$  por lo que:

$$v^{(n+1)}(c_{n+1}) = (n+1)! \quad \dots(6)$$

Sustituyendo (5) y (6) en (4) se obtiene:

$$\frac{w(b)}{v(b)} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} \quad \dots(7)$$

Considerando  $c = c_{n+1}$  y con lo definido en (1) se llega a:

$$f(b) - p_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

que es precisamente la fórmula del **resto de Lagrange**<sup>17</sup> vista en el **teorema de Taylor** con la única excepción de que la variable en este caso es  $b$  en lugar de  $x$ . Por ello, el último paso de la demostración consiste sencillamente en reemplazar  $b$  por  $x$ . ♦

De la Definición 3.3 y del Teorema 3.5, puede deducirse la siguiente expresión

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

que usualmente es conocida como la **fórmula de Taylor** donde  $c$  ya ha sido definido como un valor entre  $a$  y  $x$ .

**Ejemplo 3.7** En ejemplos anteriores se han desarrollado las representaciones de **series de Maclaurin** de  $e^x$ ,  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$ . A continuación, demostraremos que estas series convergen hacia sus respectivas funciones para cualquier valor de  $x$ . Así,

$$\begin{aligned} (1) \quad e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n^1(x) & R_n^1(x) &= \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \\ (2) \quad \text{sen}(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n^2(x) & R_n^2(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \\ (3) \quad \text{cos}(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n^3(x) & R_n^3(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \end{aligned}$$

17 Ver ejercicios 62 y 63.

donde  $f^{(n+1)}(c) = \pm \operatorname{sen}(x)$  o  $f^{(n+1)}(c) = \pm \operatorname{cos}(x)$ , dependiendo del valor de  $n$ . Además,  $c$  es un valor entre 0 y  $x$  y no es, necesariamente, igual en todos los casos.

En el caso (1) para todo  $r > c$  y considerando que la función exponencial es estrictamente creciente en todo su dominio:

$$0 \leq |R_n^1(x)| \leq e^r \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De este modo,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| \leq e^r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^r \cdot 0 = 0$ ; la serie converge a la función  $\forall x$ .

Los casos (2) y (3) tienen el mismo trato. Dada la definición de  $f^{(n+1)}(x)$  líneas arriba, se tiene que  $|f^{(n+1)}(c)| \leq 1$  para cualquier valor que pueda tomar  $c$ . Utilizando la fórmula del resto de Lagrange para cualquiera de estos dos casos,

$$0 \leq |R_n^i(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad i = 1, 2$$

Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n^i(x)| = 0 \quad i = 1, 2 \quad \forall x$ .

Estos resultados nos llevan a concluir que la **serie de Taylor** representa a las funciones en todo su dominio. El desarrollo de potencias de estas funciones es válido para todos los valores de  $x$ . ♦

Una vez conocidos estos conceptos cabe preguntarse cuál es la utilidad práctica del **residuo de Lagrange**. Esta fórmula brinda una aproximación sobre el *límite superior* que se comete al sustituir  $f$  por  $p_n$ . Supongamos que para todo  $x$  en un intervalo  $I$  el máximo valor absoluto del término es  $f^{(n+1)}(x)$  es  $M$ . De este modo,

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1}$$

**Ejemplo 3.8** Aproximar.  $\sqrt[3]{36.02}$

Consideremos  $f(x) = (x+36)^{1/2}$  y  $n = 1$ . Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+36)^{-1/2} \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(x+36)^{-3/2}$$

Se aprecia que  $f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$  y  $f''(c) = -\frac{1}{4}(c+36)^{-3/2}$ . Así, el desarrollo de Maclaurin es:

$$(x+36)^{1/2} = 6 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{8}(c+36)^{-3/2}x^2$$

Para estimar  $\sqrt{36.02}$ , es claro que  $x = 0.02$  y que  $c$  debe ser algún número entre 0 y 0.02; ya que  $c$  es positivo,  $(c+36)^{-3/2} < (36)^{-3/2} = \frac{1}{216}$ . De esta forma,

$$|R_1(0.02)| = \left| -\frac{1}{8}(c+36)^{-3/2}(0.02)^2 \right| \leq \frac{1}{8} \frac{1}{216} \frac{4}{10000} = 2.31 \times 10^{-7}$$

Luego,  $\sqrt{36.02} \approx 6 + \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{100} = 6.0017$  con un error menor a  $2.31 \times 10^{-7}$  (realmente reducido). ♦

Puede notarse que al momento de plantear una **fórmula de Taylor** puede incurrirse en dos tipos de errores. El primero, llamado **error de truncamiento**, es el error que se da cuando la serie entera es aproximada por una suma parcial (es decir, por un polinomio finito). El segundo, denominado **error de redondeo**, es muy conocido y resulta de utilizar aproximaciones decimales. En el Ejemplo 3.8 se aprecia un error de truncamiento de  $2.31 \times 10^{-7}$  (precisión hasta el séptimo decimal). Sin embargo, para poder obtener un valor en este ejemplo se utilizó una computadora que puede generar errores de redondeo, dadas sus posibles limitaciones. El trato hacia este tipo de problemas será brevemente analizado posteriormente, al analizar algunos *métodos numéricos* en el Capítulo 5.

**Ejemplo 3.9** La **teoría de la firma** en microeconomía y muchos modelos de la **teoría del crecimiento económico** se han valido ampliamente de la función de producción conocida como CES (por las siglas en inglés de elasticidad de sustitución constante)<sup>18</sup>. Si definimos esta función a través de  $r$ , un parámetro de sustitución, se tiene<sup>19</sup>:

$$s(r) = A(\alpha K^r + (1-\alpha)L^r)^{m/r}$$

18 Esta función fue introducida en la literatura en un excelente trabajo de cuatro grandes personajes en el desarrollo de la teoría económica de los 60. Al respecto, véase K. J. Arrow, H. Chenery, B. S. Minhas y R. M. Solow, "Capital - Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics*, XLIII, 1961.

19 Esta especificación difiere ligeramente de la original presentada por los economistas citados en la nota anterior. No obstante, es matemáticamente equivalente.

donde  $A$  es un parámetro de eficiencia,  $\alpha$  define la participación relativa de los factores productivos: Capital,  $K$ , y Trabajo,  $L$ ;  $m$  es un factor de escala y  $r$  es el valor de la elasticidad de sustitución.

La importancia de las funciones CES en el análisis económico radica en que, según valores de  $r$ , puede representar una serie de funciones especiales. Análíticamente, si  $r \rightarrow 0$ , se aproxima a una función del tipo Cobb–Douglas.  $s(1)$  es claramente una función lineal, mientras que  $s(-1)$  es una media armónica.

Aunque las aproximaciones de Taylor no han tenido mucho éxito en la literatura empírica sobre este tipo de funciones<sup>20</sup>, a modo de ilustración, consideremos valores  $A = m = 1$ ,  $K = 10$ ,  $L = 5$  y  $\alpha = 0.3$ . Con estos valores, tenemos la siguiente función Cobb-Douglas :

$$s_{CD} = AK^\alpha L^{1-\alpha} = 6.15572$$

Reagrupando y simplificando algunos términos se obtienen<sup>21</sup> los siguientes polinomios de Taylor alrededor de  $r = 0.01$  para  $s(r)$ :

$$p_1(r) = 6.15883 + 0.31127(r - 0.01)$$

$$p_2(r) = 6.15883 + 0.31127(r - 0.01) - 0.03648(r - 0.01)^2$$

Si imponemos  $r = 0$ , se obtiene

$$s_{CD} - p_1(0) = 3.64 \times 10^{-6}$$

$$s_{CD} - p_2(0) = -3.64 \times 10^{-6}$$

Es decir, dado que  $s(0)$  no es un valor definido pueden optarse aproximaciones de Taylor son el fin de obtener dicha cifra, que teóricamente corresponde al *output* de una función Cobb - Douglas. Los valores obtenidos en (\*) pueden ser interpretados como residuos. No obstante, es necesario agregar que junto con los dos errores mencionados anteriormente, se tiene un tercer tipo de error: el de aproximación de una Cobb–Douglas por una CES. Este error es inexistente si  $r = 0$ , por lo que puede aminorarse ensayando expansiones de Taylor con valores más reducidos que el utilizado aquí ( $r < 0.01$ ). ♦

20 Ver J. Kmenta, "On the Estimation of the CES Production Function", *International Economic Review*, 8, 1967.

21 Estos cálculos fueron obtenidos por medio del paquete matemático MATLAB 5.0.

### 3.3.3.1 Aplicación: distribución del ingreso

Muchas veces resultan útiles aproximaciones de Taylor al evaluar integrales. Como se vio en el cálculo de probabilidades (Aplicación 3.3.2.2), este procedimiento consiste en sustituir el integrando por los  $n$  primeros términos de su desarrollo en series de Maclaurin o de Taylor; este método se puede aplicar siempre que el integrando admita un desarrollo de aquel tipo y los límites de integración pertenezcan al campo de convergencia de la serie.

Con el fin de ilustrar esta utilidad sobre las aproximaciones de Taylor estudiaremos brevemente dos conceptos de central importancia referidos a la distribución del ingreso o del consumo en algún país: la **curva de Lorenz** y el **coeficiente de Gini**<sup>22</sup>.

Existen muchas maneras de medir y expresar el grado de inequidad en la distribución de ingreso de una sociedad. Quizá la manera más simple de hacerlo consiste en *ordenar* a las personas, familias u hogares, desde la (el) más pobre hasta la (el) más rica (o). Típicamente esta jerarquía es dividida entre cinco (quintiles) o diez (deciles) de modo que se tienen cinco o diez grupos, según su nivel de pobreza<sup>23</sup>. Finalmente, se calcula el ingreso promedio por cada grupo para así determinar el porcentaje de ingreso que concentra cada porcentaje de la población.

---

22 Como se mencionó, se trata de realizar tan solo una ilustración al respecto ya que ambas concepciones parten de ciertos fundamentos estadísticos que escapan al alcance de este libro. En esta línea, Knut Sydsaeter y Peter J. Hammond, *Matemáticas para el análisis económico*, Prentice Hall, 1996, pp. 296 – 299, presentan una interesante introducción del tema además de citar los trabajos que dan origen a la curva de Lorenz y al coeficiente de Gini. Para un enfoque empírico, se recomienda ver el segundo capítulo de H. Stephen Gardner, *Comparative Economic Systems*, 2nd ed., Harcourt Brace College Publishers, 1998. Adicionalmente, Joseph E. Stiglitz, *Economics*, WW Norton y Co., 1993, provee una didáctica evaluación sobre estas medidas.

23 Ha surgido un gran debate respecto de la medida de pobreza por utilizar en el análisis de inequidad. Un trabajo ilustrativo al respecto, aunque bastante técnico, es el de Nanak Kakwani en "Poverty and Economic Growth: With Application to Cote d'Ivoire", LSMS Working Paper 63, The World Bank Group, 1990.

**Cuadro No. 3.3**  
**Distribución del ingreso por quintiles (porcentajes)**

	Perú (1996)	Brasil (1996)	Suiza (1992)
<b>Quintil 1</b>	4.4	2.5	6.9
<b>Quintil 2</b>	9.1	5.5	12.
<b>Quintil 3</b>	14.1	10.0	17.3
<b>Quintil 4</b>	21.3	18.3	22.9
<b>Quintil 5</b>	51.2	63.8	40.3

Fuente: The World Bank Group, World Development Indicators 2000, Table 2.8.

El Cuadro No. 3.3 muestra qué porcentaje del ingreso se concentra en los quintiles ordenados según niveles de pobreza; la fila correspondiente al Quintil 1 se refiere al 20% más pobre de la población de cada país mientras que el Quintil 5 corresponde al 20% más rico. Como puede apreciarse en el Perú y Brasil, el quintil más pobre concentra menos del 5% del ingreso, mientras que en el más rico se distribuye más del 50% del mismo. Esta situación no ocurre (de manera acentuada) en Suiza; por ello, puede concluirse que la desigualdad social, medida por el ingreso, es mayor en Brasil y en el Perú que en Suiza.

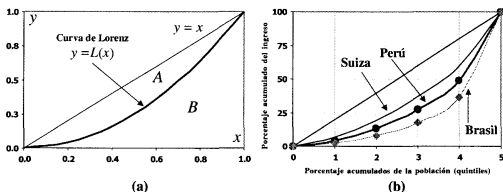
Una idea similar a la expuesta fue desarrollada en 1905 por Max Otto Lorenz mediante el uso del instrumental gráfico que se muestra en la Figura No. 3.6, donde el porcentaje acumulado de ingreso ( $y$ ) es una función del porcentaje acumulado de la población ( $x$ )<sup>24</sup>. La línea delgada es una recta que forma 45 grados con el eje  $x$  ( $y = x$ ) y representa la máxima equidad; un punto en esta línea indica, por ejemplo, que el 65% de la población se distribuye exactamente el 65% del ingreso. Un punto en la *curva de Lorenz* se refiere más bien, por ejemplo, a que el 65% de la población concentra tan solo el 30% del ingreso lo que, obviamente, indica inequidad.

---

24 Las propiedades y formas empíricas de las curvas de Lorenz pueden ser halladas en Nanak Kakwani, *op. cit* y Abdelkrim Araar, y Jean-Yves Duclos, *An Atkinson-Gini Family of Social Evaluations Functions*, Université Laval, Canadá, 1998.



Figura No. 3.6  
Curva de Lorenz



- (a) La **curva de Lorenz** es un instrumento gráfico que mide la distribución del ingreso en alguna sociedad; es una relación no decreciente entre el porcentaje acumulado de la población y el porcentaje acumulado de concentración del ingreso o consumo.
- (b) Curvas de Lorenz para tres países (datos del Cuadro No. 3.3). Brasil (Suiza) es uno de los países en donde existe mayor desigualdad (igualdad) en la distribución del ingreso. Por ello, su **curva de Lorenz** tiende a ser notablemente (levemente) convexa.

Como se aprecia en la Figura No. 3.6 (a), la curva de Lorenz configura dos áreas:  $A$  y  $B$ . A partir de ellas, Corrado Gini en 1912 introdujo una medida de inequidad denominada el **coeficiente de Gini**<sup>25</sup>. Si  $y = L(x)$  es la curva de Lorenz, el coeficiente de Gini se define según:

$$G = \frac{A}{A+B} = 2A = 2 \left[ \int_0^1 x dx - \int_0^1 L(x) dx \right] = 1 - 2 \int_0^1 L(x) dx \quad \dots(g)$$

Según cifras del Banco Mundial, el coeficiente de Gini para el Perú corresponde a 46.1%, para Brasil, 60.0% y para Suiza, 33.1%. Esto es, si dibujáramos una **curva de Lorenz** para cada uno de estos países (Figura No. 3.6 (b)), podríamos observar que el área  $A$  en Brasil es casi el doble que la suiza. Por su parte, el **coeficiente de Gini** es cero si  $A = 0$ , es decir cuando se da la igualdad perfecta (la

25 Los fundamentos tras la noción del coeficiente de Gini son recopilados en Hawyard Alker, *Mathematics and Politics*, Macmillan Company, 1965, citado en: <http://www.panix.com/~dhenwood/>. Adicionalmente, consúltese Abdelkrim Araar y Jean-Yves Duclos, *op. cit.*

**curva de Lorenz** coincide plenamente con  $y = x$  y es igual a uno si  $A = B$ , situación que corresponde a la máxima inequidad. El hecho de que el coeficiente de Gini peruano se sitúe en 46.1% implica que nuestro país se encuentra casi en la mitad de los casos extremos mencionados por lo que el grado de inequidad es, ciertamente, elevado<sup>26</sup>.

Supongamos que la Curva de Lorenz para algún país responde a:

$$L(x) = \frac{\alpha x e^x}{1 + e^{-x}} \quad \alpha \equiv \frac{1 + e^{-1}}{e} \quad \dots(*)$$

Con el fin de determinar el **coeficiente de Gini** para este país, debe reemplazarse (\*) en (g). Lamentablemente, este procedimiento resulta ser tedioso. Luego de integrar por partes y tras una serie de sustituciones y reemplazar el resultado en (\*) se obtiene un coeficiente de Gini *verdadero* de 32.516%. Veamos hasta qué punto puede ser útil una expansión de Taylor. Para tales efectos, el punto más significativo (aunque arbitrario) es  $a = 0.5$ . Tenemos que (suprimiendo la constante  $\alpha$ ):

$$L'(x) = \frac{(2e^{-x} + 1)e^x x + (1 + e^{-x})e^x}{(1 + e^{-x})^2}$$

$$L''(x) = \frac{(2 + 6e^{-x} + 4e^{-2x} + x + 3xe^{-x} + 4xe^{-2x})e^x}{(1 + e^{-x})^3}$$

$$L'''(x) = \frac{(3 + 12e^{-x} + 21e^{-2x} + 12e^{-3x} + x + 4xe^{-x} + 5xe^{-2x} + 8xe^{-3x})e^x}{(1 + e^{-x})^4}$$

Los polinomios de Taylor de primer y segundo de  $L(x)$  orden corresponden a:

$$p_1(x) = L(a) + L'(a)(x - a) = 0.5131 + 1.7331(x - 0.5)$$

$$p_2(x) = L(a) + L'(a)(x - a) + \frac{1}{2}L''(a)(x - a)^2$$

$$= 0.5131 + 1.7331(x - 0.5) + 1.8403(x - 0.5)^2$$

---

<sup>26</sup> Para mayor discusión ver Andrés Medina, "Pobreza, crecimiento y desigualdad: Perú 1991 - 1994", en: Instituto Cuánto, *¿Cómo estamos? Análisis de la encuesta de niveles de vida*, Lima, 1996.

Adicionalmente pueden calcularse los *restos de Lagrange*; si imponemos  $c = 0.75$ ,

$$R_1(x) = \frac{1}{2} L''(c)(x-a)^2 = 2.7223(x-0.5)^2$$

$$R_2(x) = \frac{1}{6} L'''(c)(x-a)^3 = 1.3705(x-0.5)^3$$

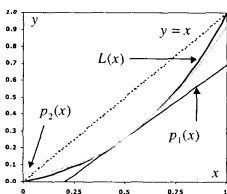


Figura No. 3.7

### Curva de Lorenz y polinomios de Taylor

Los polinomios de Taylor son muy utilizados en el cálculo de integrales que son analíticamente difíciles o imposibles de determinar. A modo de ilustración, al aproximar mediante polinomios de Taylor la curva de Lorenz dada por (\*) se aprecia la notable mejora en optar por una aproximación cuadrática; incluso, las áreas que determinan el Coeficiente de Gini resultan ser próximas, por lo que esta medida de inequidad puede ser fácilmente calculada.

Ahora bien, si sustituimos  $L(x)$  por  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  en (\*) obtenemos como **coeficientes de Gini** los valores 48.357% y 32.923%, respectivamente. Dado el valor real de esta medida, el primer comentario válido es que no se requiere de polinomios de orden mayor que el segundo (ver Figura No. 3.7). Finalmente, resulta interesante analizar la información brindada por el **resto de Lagrange**. De hecho, por el Teorema de Taylor (Teorema 3.5) la integral de los residuos debe equivaler al área entre la recta de 45 grados y los polinomios que aproximan a la **curva de Lorenz**. Así, los valores de las integrales evaluadas entre 0 y 1 de  $R_1$  y  $R_2$  son, respectivamente, 0.1142 y 0.0108 (no olvidar a  $\alpha$ ). Según (\*), el doble de estos valores, en términos porcentuales, es 22.8401% y 2.1552%, respectivamente, que representan valores aproximados de la diferencia entre el **coeficiente de Gini verdadero** y los hallados con polinomios de Taylor (15.8410% y 0.4070)<sup>27</sup>.

### 3.3.4 Técnicas comunes en la obtención de aproximaciones de Taylor

En la práctica, muchas veces nos enfrentamos a funciones cuya diferenciación implica un complicado procedimiento por lo que la obtención de la **serie de**

27 El lector debe recordar que el resto de Lagrange tan solo brinda aproximaciones o límites de los errores de truncamiento, ya que el valor de  $c$  es, en cierta medida, arbitrario.

**Taylor** que las representan o los polinomios que las aproximan resultan tediosas. A continuación, se muestran algunos criterios que permiten lidiar con este problema.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones que satisfacen, según la **fórmula de Taylor**,

$$f(x) = p_n^f(x) + R_n^f(x)$$

$$g(x) = p_m^g(x) + R_m^g(x)$$

donde  $n$  es el grado del **polinomio de Taylor** que aproxima a  $f$  y  $m$  es el grado del polinomio que estima el valor de  $g$  (no son necesariamente iguales). Luego, utilizando en cierta medida lo postulado en el Teorema 3.4, se tiene que:

$$h(x) = f(x) + g(x) \rightarrow h(x) \approx p_n^f(x) + p_m^g(x)$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \rightarrow h(x) \approx p_n^f(x) \cdot p_m^g(x)$$

$$h(x) = f(x) \div g(x) \rightarrow h(x) \approx p_n^f(x) \div p_m^g(x)$$

Es decir, una función puede ser aproximada por los **polinomios de Taylor** de las funciones que la generan (si estas pueden ser identificadas). Cabe mencionar que, lógicamente, se obtendrán mejores aproximaciones conforme  $n$  y/o  $m$  aumenten, en la medida que el **campo de convergencia** de  $f$  y  $g$  pertenezcan al de  $h$  (lo cual es cierto, según el Teorema 3.4).

**Ejemplo 3.10** Hallar los cuatro primeros términos de la **serie de Maclaurin** de  $\operatorname{tg}(x)$ .

En lugar de calcular la serie de manera directa, puede escribirse (ver Ejemplo 3.6):

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{cos}(x)} = \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \div \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right)$$

A través de la división de los polinomios se obtiene

$$\operatorname{tg}(x) \approx x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 3.11** Hallar la **serie de Maclaurin** de  $e^{-x^2} \operatorname{arctg}(x)$ .

Utilizando las series halladas anteriormente de  $e^{-x^2}$  y  $\operatorname{arctg}(x)$  según la Aplicación 3.3.2.2 y el (Ejemplo 3.4), se tiene que:

$$e^{-x^2} \operatorname{arctg}(x) = \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \dots\right) \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right)$$

Al multiplicar las series, se obtiene:

$$e^{-x^2} \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{31}{50}x^5 - \dots \quad -1 < x < 1$$

Un mayor número de términos en esta expresión pueden ser hallados al incluir más términos en los factores

### 3.3.5 Polinomios de Taylor de funciones multivariadas

Hasta el momento se han analizado funciones cuyo dominio corresponde a los números reales. En la medida en que estas funciones puedan ser representadas por una serie de potencias, podemos realizar aproximaciones polinómicas que resultan ser de gran utilidad en muchos cálculos. No obstante, puede pensarse en expansiones de Taylor de funciones con dominio de dimensiones mayores a uno. Adicionalmente, puede pensarse en la aproximación de sistemas de ecuaciones. Este último tema será tratado en capítulos posteriores.

Definimos a  $F$  tal que  $F: R^m \rightarrow R$  donde  $m > 1$  (es decir,  $F$  es una función de  $m$  variables). Luego, la **fórmula de Taylor** de la función alrededor del vector  $a$  ( $m \times 1$ ) puede expresarse, en forma matricial como<sup>28</sup>:

$$F(x) = F(a) + \nabla F(a)'(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)'D^2F(c)(x-a) \quad \dots \text{(M)}$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)'$  es un vector de dimensiones  $m \times 1$  (el apóstrofe denota "traspuesta") y  $c$  es una **combinación lineal convexa** de  $x$  y  $a$  ( $c = \lambda x + (1-\lambda)a \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ ).

Adicionalmente,  $\nabla F(x)$  es el **vector gradiente** ( $m \times 1$ ) de  $F$  y  $D^2F(x)$  es la **matriz Hessiana** ( $m \times m$ ) de la función y son definidos como<sup>29</sup>:

<sup>28</sup> El caso general donde  $F: R^m \rightarrow R^r$  puede ser consultado en textos de cálculo avanzado. Se ha optado por exponer un caso particular ya que es el único útil en el desarrollo de este libro.

<sup>29</sup> El vector gradiente y la matriz hessiana resultan ser fundamentales en el cálculo matricial. Por ello, el lector puede profundizar sobre estas matrices especiales en libros de cálculo intermedio.

$$\nabla F(x) = \left[ \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m} \right]_{m \times 1}$$

$$D^2 F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}_{m \times m}$$

La expresión (M) es la versión  $m$ -dimensional de la expuesta en las definiciones y teoremas aplicados a casos univariados. Por ello las principales conclusiones al respecto no varían.

Finalmente, muchas veces plantear la **fórmula de Taylor** en términos cuadráticos (como en (M)) es adecuado y por ello su uso es generalizado. Desarrollos de mayor orden conllevan a un tedioso e inadecuado planteamiento matricial. Cabe mencionar que la aproximación lineal de  $F$  corresponde a los dos primeros términos del lado derecho de (M).

**Ejemplo 3.12** Aproximar la función de producción Cobb – Douglas,  $Q(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$  alrededor del vector  $(K^*, L^*)$ .

Con el fin determinar una expresión similar a (M) procedemos a calcular las primeras y segundas derivadas parciales de  $Q$  con respecto a  $K$  y a  $L$  y forma el vector gradiente y matriz Hessiana correspondiente. De este modo, dado que  $m=2$ :

$$Q(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha} \approx (K^*)^\alpha (L^*)^{1-\alpha} + [\alpha(L/K)^{1-\alpha} \quad (1-\alpha)(K/L)^\alpha] \begin{bmatrix} K - K^* \\ L - L^* \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} K - K^* & L - L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha)K^{\alpha-1}L^{-\alpha} & \alpha(\alpha-1)K^\alpha L^{-\alpha-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K^* \\ L - L^* \end{bmatrix}$$

Si  $\alpha = 0.3$ ,  $K^* = L^* = 10$  se tiene que como polinomios de Taylor de  $Q$ ,

$$P_1(K, L) = 0.3K + 0.7L$$

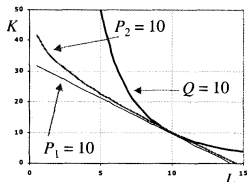
$$P_2(K, L) = 0.3K + 0.7L - 0.021K^2 + 0.042KL - 0.021L^2$$

Geométricamente,  $P_1$  constituye un plano tangente a  $Q(K, L) = K^{0.3}L^{0.7}$  en  $(K, L) = (10, 10)$  mientras que  $P_2$  es un paraboloido elíptico cuyo vector gradiente y matriz Hessiana coincide con sus pares de  $Q$  en  $(K, L) = (10, 10)$ .

Típicamente, en el análisis microeconómico se estudian las *curvas de nivel* de la función de producción y son denominadas *isocuantas*. La Figura No. 3.8 muestra una de estas curvas en un plano cartesiano  $(K, L)$ , que corresponde a  $Q(K, L) = 10$ ; adicionalmente, se grafican las curvas de nivel de los polinomios de Taylor ( $P_1(K, L) = 10$  y  $P_2(K, L) = 10$ ) con el fin de visualizar la aproximación que se realiza en torno al vector  $(10, 10)$ . ♦

**Figura No. 3.8**  
Función de producción Cobb – Douglas  
y aproximaciones

Al graficar las curvas de nivel de la función de producción y sus respectivos polinomios de Taylor puede apreciarse que las conclusiones obtenidas en el análisis univariado tienen vigencia en el análisis multivariado: las aproximaciones son mejores al incrementar el orden del polinomio. Adicionalmente, el vector gradiente y la matriz Hessiana de la expansión  $(M)$  coincide en  $(K^*, L^*)$  con el gradiente y Hessiano de la función original.



## Ejercicios

Encontrar el **radio** y el **intervalo** de convergencia de cada una de las siguientes series. Analizar, de existir, los extremos de dicho intervalo.

1.  $\sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
2.  $\sum \frac{x^n}{\ln(n)}$
3.  $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n (x+5)^n$
4.  $\sum \frac{(x-4)^n}{(n+1)^2}$
5.  $\sum \frac{\pi^n (x-1)^{2n}}{(2n+1)!}$
6.  $\sum \frac{x^n}{(\ln(n))^n}$
7.  $\sum (-1)^n \frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!}$
8.  $\sum \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$
9.  $\sum \frac{x^{2n}}{2^n}$
10.  $\sum n(x-b)^n$
11.  $\sum (-1)^n \frac{(x-6)^n}{n3^n}$
12.  $\sum \frac{(2n-1)!}{(2n-2)!} x^n$
13.  $\sum b^{-n} (x-a)^n \quad b > 0$
14.  $\sum (n!)^{-p} (pn)! x^n \quad p \in \mathbb{R}^+$
15.  $\sum \frac{(n+p)!}{n!(n+q)!} x^n \quad p, q \in \mathbb{R}^+$
16.  $\sum s_n x^n \quad s_n \equiv \sum_{k=1}^n k^{-1}$

Demostrar las siguientes proposiciones:

17. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = L \neq 0$ , luego  $1/L$  es el **radio de convergencia** de  $\sum c_n x^n$ .
18. Si  $\sum c_n x^n$  tiene un **radio de convergencia**  $R$ , luego  $\sum c_n x^{2n}$  tiene un radio  $\sqrt{R}$ .
19. Ud. dispone de la siguiente información sobre algunos bonos:

	Bono A	Bono B	Bono C
$n$	10	5	4
$C$	5	8	10
$C_n$	105	108	110
$r$	10%	12%	5%

- a) Hallar la **duración de Macaulay**, **duración Modificada**, **convexidad** y  $\Delta\%P$  de cada bono.
- b) Si espera que la tasa de interés se eleve en 1%, ¿en cuál de ellos invertiría?  
¿Y si espera una disminución de la tasa de interés?
- c) ¿Tiene sentido hablar de la **duración** de un bono perpetuo? ¿Por qué?

20. El control de calidad de una fábrica exige que cada producto de la misma sea revisado y evaluado inmediatamente después de ser ensamblado. Si la probabilidad de que el producto sea bueno y tenga una evaluación positiva es  $p$  y la



probabilidad de que la evaluación sea negativa (es decir, que el producto sea defectuoso) es  $q = 1 - p$ , luego la probabilidad de que  $n$  productos sean evaluados antes de encontrar al primer producto defectuoso es  $P_n = p^{n-1}q$ . Si el promedio de productos evaluados antes de hallar el primer defectuoso se define como:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n$$

Hallar  $A$ . (Nota:  $0 \leq p, q \leq 1$ ).

Utilizando la representación de series de potencias y, de ser necesario, los Teoremas 3.3 y 3.4, demostrar las siguientes identidades:

$$21. \quad \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

$$22. \quad \text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$$

$$23. \quad \text{sen}^2(x) = 1 - \text{cos}^2(x)$$

$$24. \quad \text{cos}(2x) = 2\text{cos}(x) - 1$$

$$25. \quad \text{sec}(x) = \text{cos}^{-1}(x)$$

$$26. \quad \text{tg}(x) = \text{sen}^{-1}(x)\text{cos}(x)$$

$$27. \quad \frac{d \text{sen}(x)}{dx} = \text{cos}(x)$$

$$28. \quad \frac{d \text{cos}(x)}{dx} = -\text{sen}(x)$$

$$29. \quad \frac{d e^{ax}}{dx} = a e^{ax}$$

$$30. \quad \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

Hallar la serie de Maclaurin que representa las siguientes funciones y analizar para qué valores de  $x$  dicha serie converge hacia la función:

$$31. \quad e^{-2x}$$

$$32. \quad x^2 \text{cos}(x)$$

$$33. \quad e^{\text{cos}(x)}$$

$$34. \quad \sqrt{1 + \text{sen}(x)}$$

$$35. \quad x^2 \text{cos}(x^2)$$

$$36. \quad \int_0^x (1+t^3)^{-1} dt$$

$$37. \quad \int e^{-x} \text{cos}(\sqrt{x}) dx$$

$$38. \quad 2 \text{sen}(x)\text{cos}(x)$$

$$39. \quad \ln(1-x^2)$$

$$40. \quad \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$41. \quad \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

$$42. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$43. \quad \frac{1}{1-4x^2}$$

$$44. \quad \frac{x^2}{1+3x}$$

$$45. \quad \frac{x}{1-x}$$

$$46. \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Hallar mediante un desarrollo en series de potencias

$$47. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\text{cos}(x)}}{x^2}$$

$$48. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\text{sen}(x)}}{x^3}$$

$$49. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}(x)}$$

$$50. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x}) - \text{sen}(x)}{x}$$

51. Un Teorema que será de gran utilidad al resolver ecuaciones diferenciales en los próximos capítulos se expresa en las siguientes **relaciones de Euler**:

$$e^{qit} = \text{sen}(qt) + i \cos(qt)$$

$$e^{-qit} = \text{sen}(qt) - i \cos(qt)$$

donde  $q$  es un número real e  $i$  es la unidad imaginaria ( $i \equiv \sqrt{-1}$ ). Demuestre las relaciones mediante desarrollo en series de potencias.

52. **Binomio de Newton**. Si introducimos la siguiente notación, conocida como *coeficientes binomiales*, para cualquier valor  $m$  real y  $k$  entero positivo,

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} \text{ donde } \binom{m}{1} = m \text{ y } \binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1.$$

Mediante desarrollo de series de potencias demuestre que la conocida expansión binomial:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k \text{ es convergente si } |x| \leq 1.$$

Hallar el Resto de Lagrange, dados los valores de  $n$  y  $a$ :

53.  $e^{2x}$ ,  $n = 5$ ,  $a = 0$       54.  $\cos(x)$ ,  $n = 8$ ,  $a = \pi$       55.  $\sqrt{x}$ ,  $n = 3$ ,  $a = 4$

56.  $\text{sen}(x)$ ,  $n = 4$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$       57.  $\cos(\pi x)$ ,  $n = 2$ ,  $a = 0.5$       58.  $x^{-1}$ ,  $n = 5$ ,  $a = 1$

59.  $\frac{1}{(1+x)^2}$ ,  $n = 5$ ,  $a = -2$       60.  $5^x$ ,  $n = 4$ ,  $a = 2$       61.  $\frac{\text{sen}(x)}{x}$ ,  $n = 3$ ,  $a = 1$

62. ¿Por qué otra forma de expresar el **resto de Lagrange** es

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(s)}{n!} (x-s)^n ds ?$$

63. Una manera alternativa de expresar el residuo de un desarrollo de **series de Taylor** fue propuesta por Cauchy. Si se define al **resto de Cauchy** como:

$$R_n^c(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a)$$

Halle este resto con los datos de los ejercicios 52 – 60. ¿Existen diferencias fundamentales entre ambos residuos (Lagrange y Cauchy)? ¿Podría llegar al **resto de Cauchy** a partir del **resto de Lagrange** y del **teorema del valor medio**?

Con un grado de precisión que considere suficientemente alto, aproximar, mediante desarrollo de series de Maclaurin o de Taylor:

64.  $e^{-2}$     65.  $\sqrt[3]{98}$     66.  $\text{sen}(\pi/9)$     67.  $\ln(2)$   
 68.  $\sqrt[3]{28}$     69.  $\pi/4$     70.  $1/\pi$     71.  $\ln(0.97)$   
 72.  $\text{tg}(\pi)$     73.  $(36)^{-1/5}$     74.  $\cos(2\pi)$     75.  $6e^6$

Aproxime con una precisión de tres decimales, las siguientes integrales:

76.  $\int_0^1 \text{sen}(x^2) dx$     77.  $\int_0^{0.2} \sqrt[3]{1+x^4} dx$     78.  $\int_{-0.1}^{0.1} e^{-x^2} dx$   
 79.  $\int_0^{0.1} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx$     80.  $\int_{0.5}^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}} dx$     81.  $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos(x^2) dx$

82. Si  $x$  representa el porcentaje acumulado de la población ( $x \in [0, 1]$ ) y las siguientes funciones representan las **curvas de Lorenz** de tres países (A, B, C),

$$L_A(x) = \beta x \text{sen}(x^3) e^x \quad \beta = 0.4372$$

$$L_B(x) = x^2$$

$$L_C(x) = \alpha \frac{e^x \ln(x^2+1)}{1+e^x} \quad \alpha = 1.9734$$

Determine los coeficientes de Gini en cada caso y, a la luz de estos resultados, diga en cuál país existe una mejor (peor) distribución del ingreso (**Nota:** utilice los criterios expuestos en la sección 3.3.4).

Realice aproximaciones cuadráticas para las siguientes funciones multivariadas, alrededor del vector  $a$  indicado:

83.  $f(x, y, z) = \ln(x+y+z)$      $a = (1, 1, 1)$

84.  $f(x, y) = e^{x+y}$      $a = (0, 0)$

85.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$      $a = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

86.  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$      $a = (1, 0, 1)$

### Apéndice. El teorema del valor medio<sup>30</sup>

Para la demostración de este teorema es necesario conocer el *teorema de Rolle* (que se presenta sin mayor demostración). Si  $g(x)$  es una función continua en el intervalo cerrado  $a \leq x \leq b$  y derivable en el intervalo abierto  $a < x < b$ , y se cumple que  $g(a) = g(b) = 0$ , existe al menos un valor  $x = c$ , comprendido entre  $a$  y  $b$  en el que verifica  $g'(c) = 0$ .

**El teorema.** Si  $f(x)$  es una función continua en el intervalo cerrado  $a \leq x \leq b$  y derivable en el intervalo abierto  $a < x < b$ , existe al menos un valor de  $x$ ,  $\xi$ , comprendido entre  $a$  y  $b$  en el que se verifica:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

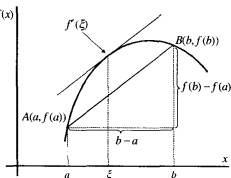
Geoméricamente este teorema puede interpretarse de la siguiente manera. Si  $A$  y  $B$  son dos puntos de una curva continua, existe al menos un punto de la misma comprendido entre  $A$  y  $B$  en el cual la tangente es paralela a la recta  $AB$  (ver Figura).

Ahora bien,  $g(x)$  satisface las condiciones del **teorema de Rolle** (como fácilmente puede comprobarse) con lo que:

$$g'(x) = f'(x) - K = 0$$

en algún  $x = \xi$  comprendido entre  $a$  y  $b$ .  
Por tanto,

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



<sup>30</sup> Aunque este teorema constituye uno de los postulados fundamentales del cálculo y puede ser encontrado en muchos textos, se recomienda consultar Sydsaeter y Hammond, *Matemáticas para el análisis económico*, Prentice Hall, 1996, cap. 7; si se quiere profundizar en su contenido.

**Demostración.** La ecuación de la secante  $AB$  es

$$F(x) = f(b) + K(x-b); \quad K = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

En un punto cualquiera  $x$  del intervalo  $a < x < b$ , la distancia vertical de la secante a la curva viene dada por:

$$g(x) = f(x) - F(x) = f(x) - f(b) - K(x-b)$$

Una extensión al **teorema del valor medio**, el **teorema extendido del valor medio** o **teorema de Cauchy**, postula que si  $f$  y  $g$  cumplen las condiciones del **teorema del valor medio**, entonces (el lector puede demostrarlo),

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

En el caso particular de que  $g(x) = x$ , este teorema coincide con el del **valor medio**. Esta expresión fue utilizada en la demostración del **teorema de Taylor** (Teorema 3.5). De este modo, las **series de Taylor** pueden interpretarse como una sustitución recursiva, continua e infinita utilizando el **teorema del valor medio**. ♦

# IV

## Ecuaciones diferenciales I

### 4.1 Introducción

Una ecuación diferencial es la relación existente entre una función desconocida y sus derivadas de cualquier orden. El término “diferencial” se sustenta en la particularidad propia de incluir diferenciales en la mencionada relación. A modo de ejemplo, supongamos que se desea encontrar la función de *demanda marshalliana*  $x = f(P)$  del bien  $x$ , donde  $P$  es su precio, si se sabe que su elasticidad precio puntual es  $\eta_p = -1$  ( $\forall P > 0$ ). Por definición,

$$\eta_p = \frac{dx}{dP} \frac{P}{x} = -1$$

de esta forma,  $\frac{dx}{x} = -\frac{dP}{P}$ .

La expresión anterior constituye una ecuación diferencial en la medida que incluye de manera explícita los diferenciales de  $x$  y  $P$ . Al integrar ambos lados se obtiene

$$\ln(x) = -\ln(P) + C \rightarrow x = \frac{k}{P}$$

Se dice que una ecuación diferencial es **ordinaria** si en su planteamiento existe una única variable independiente. Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} = y + x^2 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x \quad \frac{dy}{dx} = \text{sen}(y)$$

son ecuaciones diferenciales ordinarias ya que la función incógnita, es decir  $y = y(x)$ , depende de una variable independiente única. Por otro lado, una ecuación diferencial es **parcial** (o en derivadas parciales) si involucra a más de una variable independiente. Por ejemplo, el *teorema de Euler* (para una función homogénea de primer orden) postulado como

$$x \frac{\partial S}{\partial x} + y \frac{\partial S}{\partial y} = S$$

es una ecuación diferencial parcial para  $S = S(x, y)$ . En este texto, se desarrollan aspectos teóricos y prácticos *exclusivamente* de **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDO, en adelante).

**Ejemplo 4.1** Determinar una curva en el plano  $xy$  que contenga al punto  $(0, 3)$  y cuya pendiente en el punto  $(x, y)$  sea  $2x/y^2$ .

Dado que la pendiente de la recta tangente de la función en  $(x, y)$  es la primera derivada de  $y$  con respecto a  $x$ , se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$$

Despejando ambos términos e integrando se llega a

$$\int y^2 dy = \int 2x dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} y^3 = x^2 + C$$

Por dato del problema,  $y(0) = 3$ , por lo que  $C = 9$ . Así, la curva solicitada viene dada por

$$y = (3x^2 + 27)^{1/3} \quad \blacklozenge$$

En general, puede atribuirse cualquier significado económico a las variables, independiente y dependiente, en una EDO. En el caso de la elasticidad visto líneas arriba, las variables son precio y cantidad, respectivamente. Sin embargo, las EDO han encontrado un amplio espectro de aplicaciones económicas, consi-

derando al **tiempo** como variable independiente. En este sentido, resultan ser herramientas fundamentales en el análisis dinámico ya que describen el **proceso de cambio** (evolutivo o dinámico) de la función incógnita. Por ello, la solución de este tipo de ecuaciones implica una **trayectoria** (esto es, una senda temporal o cronológica),  $y = y(t)$ , denotada, indistintamente, como  $y_t$ .

**Ejemplo 4.2** Considere un flujo de inversión,  $I_t = 100e^{-0.05t}$

En un mundo sin depreciación, donde la inversión  $I_t$  equivale al cambio en el *stock* de capital en  $t$ , se tiene

$$\frac{dK}{dt} = 100e^{-0.05t} \rightarrow K_t = \int 100e^{-0.05t} dt \rightarrow K_t = -2000e^{-0.05t} + C$$

donde  $C$  es una constante arbitraria. La expresión resultante de  $K_t$  es una solución **general** de su EDO ya que  $C$  es indeterminada. Con el fin de encontrar una trayectoria exacta de  $K_t$  es necesario conocer el valor del *stock* de capital en algún momento determinado. Por ejemplo, si en  $t = 0$ ,  $K$  es 1000, entonces  $C = 3000$ . Estos aspectos serán desarrollados posteriormente. ♦

**Ejemplo 4.3 (Modelo de Harrod - Domar)** Se sabe que un cambio en los niveles de inversión afecta tanto a la demanda agregada como a la capacidad productiva de una economía. El **modelo de Harrod - Domar** determina la trayectoria en la que puede crecer una economía, manteniendo la plena utilización de su capacidad productiva. Si la propensión marginal a ahorrar,  $s$ , y la ratio capital producto,  $k$ , son constantes, procederemos a determinar la función de inversión de esta economía.

En primer lugar, el cambio en la demanda agregada es igual al cambio de la inversión por un multiplicador  $1/s$ , de modo que

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s} \frac{dI}{dt}$$

donde  $Y$  denota la demanda agregada e  $I$ , la inversión. Por su parte, el cambio de  $Q$ , la capacidad productiva del país, es igual a las variaciones del *stock* de capital por la inversa de la ratio  $k$ . Asimismo, la inversión es igual a los cambios en el *stock* de capital,

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dK}{dt} \rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{k} I$$



En equilibrio,  $dQ = dY$ , se tiene

$$\frac{1}{s} \frac{dl}{dt} = \frac{1}{k} l \quad \rightarrow \quad \frac{dl}{l} - \frac{s}{k} dt = 0$$

expresión que al ser integrada arroja como resultado

$$I_t = C e^{(s/k)t}$$

donde  $C$  es una constante arbitraria (el nivel de inversión cuando  $t = 0$ ). La trayectoria obtenida ilustra la predicción esencial del **modelo de Harrod – Domar**: la inversión aumenta a una tasa constante determinada por  $s/k$ , la razón de ahorros dividido por la relación capital producto<sup>1</sup>. ♦

Una ecuación diferencial implica el uso de derivadas. El **orden** de una ecuación diferencial viene dado por el orden de la mayor derivada explícita en esta relación. Por ejemplo,

$$(a) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = 4t \quad (b) \frac{d^3 y}{dt^3} + y = -t^2 + y \quad (c) \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos(t) \frac{dy}{dt} = e^t$$

de estos casos, (a) es una EDO de primer orden, (b) es una EDO de tercer orden y (c) es de segundo orden.

Por otro lado, el **grado** de una ecuación diferencial es la potencia a la cual está elevada el diferencial de mayor orden. En los casos mostrados, (a) es una EDO cuadrática (de grado dos) mientras que (b) y (c) son ecuaciones diferenciales lineales (de grado uno).

**Nota.** Por conveniencia, en las secciones y capítulos siguientes denotaremos a la derivada de  $y$  con respecto al tiempo como  $y'$ . En general,

$$y' = \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} \quad \dots \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

---

1 Para un desarrollo más extenso, así como un contraste empírico sobre el modelo de Harrod – Domar, consúltese Jorge Fernández-Baca y Janice Scinfeld, *Capital humano, instituciones y crecimiento*, CIUP, Lima, 1995, pp. 36 – 42.

En adelante, se discutirán y desarrollarán ciertos criterios analíticos en la resolución de EDO lineales, es decir, EDO de primer grado. Adicionalmente, se analizarán enfoques alternativos en la resolución de EDO no lineales (de grado superior a uno). ♦

La discusión anterior puede ser sintetizada en la siguiente definición:

**Definición 4.1** Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden  $n$  satisface

$$F(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

donde  $F$  denota alguna forma funcional. La ecuación diferencial es ordinaria en tanto su solución es una función que depende únicamente del tiempo (en un intervalo dado),

$$y = y(t) \equiv y_t$$

Alternativamente, una EDO **normal** de orden  $n$  puede expresarse como

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

Se dice que una EDO es **autónoma** si no depende explícitamente del tiempo. Formalmente,

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

**Recordar.** La solución de una EDO es una función que la satisface. Así,  $y = \varphi$  es solución de la EDO si y solo si

$$F(t, \varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$$

#### 4.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Según la Definición 4.1, una EDO de primer orden es toda relación

$$y' = f(t, y) \quad \dots(1)$$

En particular, una EDO *lineal* de primer orden puede expresarse como

$$y' + a(t)y = b(t) \quad \dots(2)$$

La solución de (2) resulta ser una función  $y_i$  que satisface la EDO. La manera de enfrentar este problema se basa en la observación de que, si definimos a  $u = u(t) = u_i$  según

$$u_i = e^{\int a(t) dt}$$

luego,

$$u' = \frac{du}{dt} = e^{\int a(t) dt} \frac{d}{dt} \int a(t) dt = u_i a(t)$$

Así mismo,

$$\frac{d(uy)}{dt} = uy' + u'y = uy' + uay \quad \dots(3)$$

Si (2) es multiplicado por  $u_i$ , utilizando (3) se tiene que

$$uy' + uay = ub$$

$$\frac{d(uy)}{dt} = ub \quad \dots(4)$$

Al integrar ambos lados de (4), se obtiene

$$y_i = u^{-1} \left[ \int ub dt + C \right] = e^{-\int a(t) dt} \left[ \int e^{\int a(t) dt} b(t) dt + C \right] \quad \dots(5)$$

donde  $C$  es una constante de integración arbitraria.

Este procedimiento es resumido en los tres pasos mostrados en el Cuadro No. 4.1

**Cuadro No. 4.1**  
**Resolución de una EDO lineal de primer orden**

<b>Paso 1.</b>	Calcular, $u = e^{\int a(t) dt}$ comúnmente denominado <b>factor de integración</b>
<b>Paso 2.</b>	Multiplicar ambos miembros de (2) por $u$ y expresar el resultado como $d(uy) / dt = ub$
<b>Paso 3</b>	Integrar ambos lados de la ecuación obtenida en el Paso 2 e incluir una constante de integración

**Ejemplo 4.4** Resolver  $y' - 4ty = t$ 

Dado que  $a(t) = -4t$ , el factor de integración viene dado por  $u_t = e^{\int(-4t)dt} = e^{-2t^2}$ .

Al multiplicar la ecuación dada por  $u$ , se obtiene  $d(e^{-2t^2}y)/dt = te^{-2t^2}$  e integrando ambos miembros, se llega a

$$y_t = Ce^{2t^2} - \frac{1}{4}$$

donde  $C$  es la constante de integración. ♦

La ecuación presentada en (2) representa el caso más general de una EDO lineal de primer orden. Cuando  $a(t)$  es una función, como el Ejemplo 4.3, se dice que la EDO tiene **coeficiente variable**; por su parte si  $b(t)$  es una función, la EDO tiene **término variable** o **móvil**. Cuando ambos,  $a(t)$  y  $b(t)$ , son constantes, la EDO presenta **términos constantes**.

La mayor parte de las aplicaciones que las EDO de primer orden han encontrado en economía son, en forma, más sencillas que las presentadas hasta el momento, aunque muchos modelos y relaciones de comportamiento parten de planteamientos similares a (2). El Cuadro No. 4.2 resume los casos más comunes.

**Cuadro No. 4.2**  
**Planteamientos y soluciones de EDO lineales de primer orden**

Caso	Planteamiento	Factor de integración	Solución
1. Caso general	$y' + a(t)y = b(t)$	$u_t = e^{\int a(t)dt}$	Ver (5)
<i>Casos homogéneos</i>			
2.	$b(t) = 0$ $y' + a(t)y = 0$	$u_t = e^{\int a(t)dt}$	$y_t = Ce^{-\int a(t)dt}$
3.	$a(t) = a \in R$ $b(t) = 0$ $y' + ay = 0$	$u_t = e^{\int a dt} = e^{at}$	$y_t = Ce^{-at}$
<i>Casos no homogéneos</i>			
4.	$a(t) = a \in R$ $y' + ay = b(t)$	$u_t = e^{\int a dt} = e^{at}$	$y_t = e^{-at} \left[ \int e^{at} b(t) dt + C \right]$
5.	$a(t) = a \in R$ $b(t) = b \in R$ $y' + ay = b$	$u_t = e^{\int a dt} = e^{at}$	$y_t = Ce^{-at} + b/a$
6.	$a(t) = 0$ $y' = b(t)$	1	$y_t = \int b(t) dt$

Evidentemente, los casos 2 - 6 del Cuadro No. 4.2 pueden concebirse como simplificaciones del caso general. Una observación sobre la información contenida en el cuadro, se centra en la clasificación *homogéneo* y *no homogéneo*. Como puede apreciarse, una EDO es **homogénea** si  $b = 0$  y **no homogénea** de otro modo. La razón de esta clasificación radica en que la solución de una ecuación diferencial puede ser expresada como la suma de dos soluciones, la solución homogénea o **complementaria** y la solución no homogénea o **particular**. Por ejemplo, en el caso 5 del cuadro, la solución complementaria viene dada por  $Ce^{-at}$  mientras que la particular corresponde a  $b/a$ . Si bien es cierto que esta observación no es necesaria en la resolución de EDO de primer orden (ya que el procedimiento del Cuadro No. 4.1 es suficiente), el principio es útil para el desarrollo de EDO de orden superior, como se discutirá detalladamente en la sección 4.3.

Hasta el momento se han determinado soluciones que no son únicas debido a la presencia de una constante arbitraria. En los ejemplos desarrollados, de hecho, pueden existir infinitas soluciones toda vez que  $C$  pueda adoptar cualquier valor real. Este tipo de solución se llama **solución general** de una EDO. Uno de los problemas centrales en la teoría de ecuaciones diferenciales es responder bajo qué circunstancias existe o no una solución a la que un punto  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  pertenezca. Al determinar dicha solución, la función resultante es única o solución específica.

El problema de hallar una solución para (1) que pase por el punto  $(t_0, y_0)$  es conocido como el **problema del valor inicial** donde  $y(t_0) = y_0$  es la condición inicial. Dada la condición inicial, la constante de integración puede ser determinada, enfatizando el hallazgo de una solución única.

**Ejemplo 4.5** Resolver la ecuación  $y' - y/t = t$  dado  $y_1 = 8$ .

Al aplicar los pasos del Cuadro No. 4.1, se tiene que  $y_1 = t \ln(t) + C$ . Si utilizamos la condición  $y_1 = 8$ , se tiene que  $C = 8$ , y así se llega a una función única que satisface la EDO. ♦

#### 4.2.1 Aplicación: crecimiento exponencial

Muchas variables cambian con el tiempo proporcionalmente con el valor que la misma toma en el presente. Ejemplos de ello son el número de habitantes de un país y algunos tipos de inversión. Las ecuaciones diferenciales han probado ser una herramienta útil en la modelación de este tipo de comportamiento. De hecho, la formulación matemática de este fenómeno es:

$$y' = \alpha y \quad \dots(*)$$

Se dice que una variable tiene **crecimiento (decrecimiento) exponencial** en el tiempo si su tasa de crecimiento (o decrecimiento) es proporcional al valor que la variable toma en el presente, lo que es expresado en (\*).

El número  $\alpha$  es denominado *constante de proporcionalidad* o *coeficiente malthusiano*<sup>2</sup>. Si  $\alpha > 0$ ,  $y' > 0$ , por lo que  $y$  se incrementa con el tiempo; por el contrario, si  $\alpha < 0$ ,  $y$  decrece en todo momento. Por este motivo, cuando  $\alpha$  es positiva se dice que es una tasa de crecimiento, mientras que cuando es negativa se trata de una tasa de decrecimiento. Alternativamente, el crecimiento o decrecimiento exponencial puede ser entendido en términos de una *tasa relativa*. De (\*) se desprende que

$$y' / y = \alpha$$

de modo que se dan cambios exponenciales en una variable  $y$ , si su tasa de cambio relativa es constante.

Con el fin de determinar la trayectoria de  $y$ , (\*) puede ser reescrita como

$$y' - \alpha y = 0$$

Es decir, como una EDO homogénea similar al caso 3 del Cuadro No. 4.1. Así, su solución viene dada por

$$y_t = y_0 e^{\alpha t}$$

donde  $y_0$  es el valor de  $y$  en  $t = 0$ .

#### 4.2.1.1 Crecimiento poblacional

Suponga que el número de habitantes de un país o región sigue un modelo de crecimiento exponencial. En un período inicial  $t_0 = 0$  la población de este país ascendió a  $A_0$ ; posteriormente, en  $t_1$  la población fue de  $A_1$  (es claro que  $t_1 > t_0$  y  $A_1 > A_0$ ). Entonces, cabe preguntarse cuál será la población de este país en  $t_2$  y en qué período la población será igual a  $A_2$ .

---

2 En honor al economista "clásico" Thomas Malthus, quien sostenía en 1798 que, dado un crecimiento poblacional geométrico junto con un crecimiento aritmético en los niveles de producción (de alimentos), los salarios se verían dramáticamente reducidos a un nivel mínimo de subsistencia. Una nota interesante al respecto puede ser hallada en Thomas M. Humphrey, "Algebraic Production Functions and Their Uses Before Cobb-Douglas", *Economic Quarterly*, vol. 83, 1, Federal Reserve of Richmond, 1997.

De acuerdo con los datos mencionados, el número de habitantes del país se comporta según

$$y_t = A_0 e^{\alpha t}$$

con la información del período  $t_1$  se desprende que

$$A_1 = A_0 e^{\alpha t_1}$$

por lo que  $\alpha$ , la tasa de crecimiento, está dada por<sup>3</sup>

$$\alpha = [\ln(A_1) - \ln(A_0)]/t_1$$

Así en  $t_2$  la población ascenderá a  $y_{t_2} = A_0 e^{[\ln(A_1) - \ln(A_0)]t_2/t_1}$ .

Por su parte, se deduce que en  $t = [\ln(A_2) - \ln(A_0)]/\alpha$  la población será igual a  $A_2$ .

Resolvamos el ejercicio anterior con cifras. Según datos de la Organización de Naciones Unidas, la población mundial en 1990 fue de 5.3 mil millones de habitantes con una tasa de crecimiento de 2% al año. Si consideramos a 1990 como  $t = 0$ , tendremos que la población mundial obedece a

$$y_t = 5.3e^{0.02t}$$

miles de habitantes. Así, este planteamiento predice que en el año 2000 ( $t = 10$ ) la población fue de  $y_{10} = 5.3e^{0.02 \times 10}$ , que es aproximadamente 6.5 miles de millones de habitantes. Por su parte, la población mundial será de 12.5 miles de millones de habitantes en  $t = \ln(12.5/5.3) = 43$ , es decir, en el año 2033.

Por otro lado, si  $y$  tiene crecimiento exponencial, el tiempo necesario para que su valor actual se duplique se denomina **tiempo de duplicación**. Si  $y$  tiene un modelo de decrecimiento exponencial, el tiempo necesario para que su valor se reduzca a la mitad es denominado **vida media de  $y$** . Formalmente, si  $T$  denota el número de períodos necesarios para que  $y$  se duplique, se tiene

$$2y_0 = y_0 e^{\alpha T}$$

por lo que

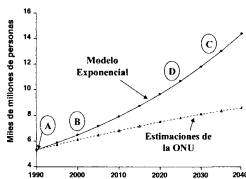
$$T = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

<sup>3</sup> Note que el caso general de esta expresión es  $\alpha = [\ln(A_1) - \ln(A_0)]/(t_1 - t_0)$ .

Es importante notar que  $T$  no depende de las condiciones iniciales del problema ( $t_0$  e  $y_0$ ). El lector puede demostrar que si  $\alpha < 0$ , la *vida media* de una variable con decrecimiento exponencial es  $T = -\ln(2)/\alpha$  periodos<sup>4</sup>.

Con los datos anteriores, puede concluirse que en  $T = \ln(2)/0.02 \approx 35$ . Esto es, manteniéndose un ritmo de crecimiento de 2% anual, la población mundial será 10.6 miles de millones en el año 2025 y 21.2 miles de millones hacia el año 2060.

**Figura No. 4.1:**  
**Población mundial**



Según el modelo de crecimiento exponencial, tomando como punto de partida una población de 5.3 miles de millones de personas en 1990 (punto A), en el año 2000 el planeta ha sido habitado por 6.5 miles de millones de individuos (punto B), mientras que en el año 2033 serán cerca de 12 mil millones (punto C). Por otro lado, el punto D corresponde a 2024, periodo consistente con el tiempo de duplicación de la población de 1990.

Por último, como se observa en la Figura No. 4.1 al comparar los resultados del modelo de crecimiento poblacional desarrollado con las proyecciones (estimaciones) de la ONU<sup>5</sup>, podemos apreciar que el primero provee valores sistemáticamente mayores que las segundas. De hecho, es difícil imaginar un conjunto poblacional que mantenga, por periodos prolongados, un crecimiento exponencial (note que en cortos periodos, el modelo exponencial presenta un perfil aceptable, en particular hasta el año 2000). Posteriormente, se expondrán modelos alternativos que subsanen estas deficiencias.

#### 4.2.1.2 Interés compuesto

En el primer capítulo se introdujo la idea básica detrás del funcionamiento del interés compuesto. Considere cierta cantidad de dinero invertido a una tasa anual de interés  $r$ . Si las ganancias obtenidas por concepto de intereses de esta inversión se capitalizan cada año, se dice que el interés es compuesto anual-

4 Una aplicación económica inmediata es el cálculo de la tasa de depreciación de algún activo. En general, si se calcula que la vida media de este activo es igual a  $T$ , su tasa de depreciación es  $d = \ln(2) / T$ .

5 Las cifras han sido tomadas de <http://www.popin.org/pop1998/default.htm#contents>.



mente; si se realizan dos veces al año, semestralmente; si son cuatro veces al año, trimestralmente y así sucesivamente. Un caso extremo se centra en la capitalización o composición del interés cada día, cada hora, cada segundo o incluso cada fracción de segundo. El límite de esta secuencia es que el interés sea compuesto de manera instantánea, fenómeno conocido como *capitalización continua*.

Si  $h$  denota una fracción de tiempo, el interés redituado por una inversión  $A_t$  en el período comprendido entre  $t$  y  $t+h$  es

$$A_{t+h} - A_t = rhA_t$$

Así, si  $h \rightarrow 0$ , se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_{t+h} - A_t}{h} = rA_t$$

que equivale a

$$A' = rA_t$$

De ello se deduce que el capital invertido será, en el período  $t$

$$A_t = A_0 e^{rt}$$

Es decir, en la medida en que transcurre el tiempo, el dinero invertido inicialmente,  $A_0$ , tiende a crecer en un factor  $e^{rt}$ , conocido como *tasa de interés efectiva*.

#### 4.2.2 Convergencia y estabilidad

La solución de una EDO es estable o converge si tiende a algún valor real y definido conforme la variable dependiente, típicamente  $t$ , aumenta de manera indefinida. El valor real al que tiende la trayectoria es denominado **estado estacionario** o, dado el carácter temporal que hemos adoptado en el análisis, **equilibrio de largo plazo**.

Teóricamente, el estado estacionario resulta ser una situación en la que la variable dependiente de la solución de la EDO permanece estática. Es decir, el estado estacionario de  $y$  en (2) se da cuando  $y' = 0$ . Si se aplica esta condición a la ecuación (2), se tiene que el valor de largo plazo de  $y$  viene dado por

$$y_s = b(t) / a(t)$$

Luego, una primera condición para que  $y$  sea convergente es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) / a(t) = y_s \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

En otras palabras, si el estado estacionario de  $y$ ,  $y_{ss}$ , no es definido (o es infinito),  $y$  será una función divergente (se cumple que  $y' \neq 0$  para todo valor posible de  $t$ ). En caso de existir estado estacionario, definido sobre un conjunto  $\Omega$  de los números reales, la posible diferencia existente entre el valor inicial de  $y$  y su valor de largo plazo, es decir  $y_0 - y_{ss}$ , es denominada **desequilibrio inicial**.

Si bien la condición mencionada en el párrafo anterior es necesaria, no es suficiente. Supóngase una ecuación similar al caso 3 del Cuadro No. 4.2. Claramente, el estado estacionario es definido en  $y_{ss} = 0$ . La solución a este problema es  $y_t = Ce^{-at}$ . Si  $a < 0$ , el límite de  $y$  es infinito; por el contrario, si  $a > 0$ , su límite es definido (e igual a cero). Aunque existe un estado estacionario, queda abierta la posibilidad de que la trayectoria de  $y$  nunca lo alcance, o incluso se aleje de él. Así, se desprende una segunda condición, dada por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1/u(t) = 0$$

donde  $u$  es el factor de integración de la EDO, definido en el Cuadro No. 4.1

**Teorema 4.1** Se dice que la solución de una EDO lineal de primer orden converge a su **estado estacionario** (o, alternativamente, que la EDO es **estable**) si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = y_{ss} \in \Omega \subset R$$

Para que la convergencia se dé, debe cumplirse que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t)/a(t) = y_{ss} \in \Omega \subset R$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 1/u(t) = 0$$

Por otro lado, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \pm \infty$$

$y$  es divergente. En algunos casos se dice que  $y$  tiene una **trayectoria explosiva**.

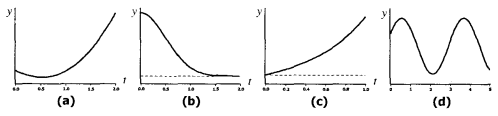
**Ejemplo 4.6** Con el fin de esclarecer los conceptos vinculados con la convergencia de una trayectoria, considérese los ejemplos presentados en el Cuadro No. 4.3 cuyas soluciones son graficadas en la Figura No. 4.2

**Cuadro No. 4.3**  
**Algunos ejemplos de EDO de primer orden**

	Ecuación	Condición	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b(t)}{a(t)}$	$u_t$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a(t)}$	$y_{ss}$	¿Converge?
a)	$y' - y = \sin(t)$	$y(\pi/2) = 0$	$\infty$	$e^{-t}$	$\infty$	No existe	No
	Solución: $y_t = \frac{1}{2}(e^{-0.5t} - \sin(t)) - \cos(t)$						
b)	$y' + 4ty = 6t$	$y(0) = 15$	1.5	$e^{2t^2}$	0	1.5	Sí
	Solución: $y_t = 13.5e^{-2t^2} + 1.5$						
c)	$y' - 2y = 6e^{-t}$	$y(0) = 0$	0	$e^{-2t}$	$\infty$	0	No
	Solución: $y_t = 2e^{2t} - 2e^{-t}$						
d)	$y' + y = \cos(2t)$	$y(0) = 0.2$	$w \in [-1, 1]$	$e^t$	0	No definido	No
	Solución: $y_t = 0.2(\cos(2t) + 2\sin(2t))$						

Según lo definido, el caso (a) constituye una EDO inestable por dos motivos: la trayectoria de su solución no tiene un estado estacionario y el límite de la inversa del factor de integración asociado con esta EDO no es definido. En el Panel (a) de la Figura No. 4.2 se aprecia claramente que en este caso  $y$  tiende al infinito conforme transcurre el tiempo, esbozando así una trayectoria explosiva. Por el contrario, el caso (b) es estable y, consecuentemente,  $y$  converge hacia 1.5, su valor de largo plazo, representado por líneas punteadas en la Figura No. 4.3. Dado que  $y$  en  $t = 0$  es 15, el desequilibrio inicial de esta trayectoria es  $15 - 1.5 = 13.5$ .

**Figura No. 4.2:**  
**Ejemplos de trayectorias**



Los casos (c) y (d) ilustran la importancia de que *las dos* condiciones discutidas en el Teorema 4.1 deben cumplirse para asegurar la convergencia de  $y$ . En primer lugar, el problema del caso (c) presenta un estado estacionario (igual a cero); no obstante ello, la trayectoria de  $y$  se aleja sistemáticamente del mismo, comportándose de manera explosiva (no se cumple la condición vinculada al límite de  $1/u$ ). Por su parte, en el caso (d) el límite de  $y$  no es definido ya que se trata de una función permanentemente fluctuante. Así, se tiene una función divergente, mas no explosiva.

#### 4.2.2.1 Aplicación: estabilidad en economía

##### 4.2.2.1.a Equilibrio macroeconómico

Consideremos un modelo sencillo de determinación de equilibrio macroeconómico. Para tales efectos expresaremos las variables como desviaciones de su equilibrio de largo plazo. Así, si  $X$  es una variable macroeconómica, su desviación con respecto a su estado estacionario es

$$\hat{X}_t = X_t - X_{ss}$$

El modelo está compuesto por las siguientes ecuaciones:

$$\hat{C}_t = c\hat{Y}_t \quad \hat{I}_t = b\hat{Y}_t \quad \hat{Y}' = a(\hat{C}_t + \hat{I}_t - \hat{Y}_t) \quad 0 < a, b, c < 1$$

donde se asume que tanto el consumo  $C$  como la inversión  $I$  son funciones lineales del ingreso  $Y$ . Asimismo, la tercera ecuación nos informa que el ingreso cambia a un índice proporcional a la demanda en exceso. Sustituyendo las dos primeras ecuaciones en la tercera, se tiene:

$$\hat{Y}' = a(c + b - 1)\hat{Y}$$

que es una ecuación diferencial similar a la estudiada en el modelo de crecimiento exponencial. Así,

$$\hat{Y}_t = C e^{a(c+b-1)t}$$

En  $t = 0$ ,  $\hat{Y} = Y_0 - Y_{ss}$  por lo que

$$Y_t = [Y_0 - Y_{ss}] e^{a(c+b-1)t} + Y_{ss}$$

De este modo, se aprecia que conforme  $t \rightarrow \infty$ ,  $Y \rightarrow Y_{ss}$  solo si  $c + b < 1$ . Es decir, se alcanza el equilibrio macroeconómico si la suma de la propensión marginal al

consumo y la propensión marginal a invertir,  $c$  y  $b$ , respectivamente, es menor a uno. Asimismo, si se tiene una situación inicial  $Y_0 < Y_{ss}$  ( $Y_0 > Y_{ss}$ ),  $Y$  crecerá (decrecerá) exponencialmente bajo la condición de estabilidad, con el fin de alcanzar su valor de equilibrio. Por el contrario, si  $c + b > 1$ ,  $Y$  decrecerá (crecerá) de modo que se trate de una trayectoria explosiva. Por último si  $c + b = 1$ ,  $Y = Y_0$ .

#### 4.2.2.1.b Demanda por dinero e inflación

Bajo el enfoque de la teoría cuantitativa del dinero, la demanda por dinero es motivada exclusivamente por fines transaccionales y puede ser expresada como

$$M_t^d = kP_tQ$$

donde  $k$  es una constante positiva,  $P_t$  es nivel de precios de la economía en el instante  $t$  y  $Q$  es la producción real que se asume fija. La inflación, es decir, la tasa de cambio del nivel de precios, es proporcional al exceso de oferta monetaria (constante),  $M^s$ , sobre la demanda de dinero,

$$P' = \vartheta(M^s - M_t^d) \quad \vartheta > 0$$

La dinámica que siguen los precios puede ser expresada como una ecuación diferencial; reemplazando la ecuación de demanda por dinero en la ecuación de inflación, se tiene

$$P' + \vartheta kQP = \vartheta M^s$$

con lo que se deduce que

$$P_t = [P_0 - P_{ss}]e^{-\vartheta kQt} + P_{ss} \quad P_{ss} = M^s / kQ$$

Puesto que  $\vartheta kQ > 0$ , la convergencia del nivel de precios está asegurada. Asimismo, puede verificarse que la inflación converge a su valor de estado estacionario,  $P' = 0$ .

Supongamos ahora que la demanda por dinero se ve reducida por las expectativas inflacionarias,  $P^{e'}$ , de modo que

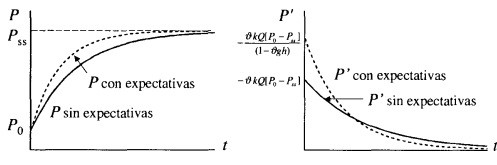
$$M_t^d = kP_tQ - gP^{e'}$$

Por simplicidad, asumiremos que la inflación esperada es función positiva de la inflación observada de modo que  $P^{e'} = hP'$ . Bajo estas especificaciones, puede verificarse que el nivel de precios obedece a

$$P_t = [P_0 - P_{ss}]e^{-(\vartheta kQ/h)(1 - \vartheta gh)t} + P_{ss}$$

En este caso,  $P \rightarrow P_{ss}$  si  $\theta hg < 1$ . Este resultado es interesante ya que incluso cuando  $h > 1$ , lo que quiere decir que los agentes esperan que la inflación se acelere, la economía es estable toda vez que  $\theta$  y/o  $g$  tomen valores suficientemente reducidos.

Figura No. 4.3:  
Nivel de precios e inflación bajo condiciones de convergencia



#### 4.2.2.1.c Equilibrio microeconómico

Consideremos un mercado donde las funciones de demanda y oferta,  $Q^d$  y  $Q^s$ , vienen definidas como

$$Q_t^d = \alpha_d - \beta_d P_t$$

$$Q_t^s = \alpha_s + \beta_s P_t + e^{-\theta t} \cos(t)$$

La función de demanda resulta convencional. Sin embargo, la función de oferta presenta un término móvil poco usual cuya presencia es justificada en la medida en que el productor se vea afectado por *shocks* periódicos. Ejemplos de ello son los denominados *productos estacionales* como uniformes escolares o adornos navideños. Asimismo, el término móvil puede representar un ajuste dinámico en el proceso de aprendizaje del productor; en el límite, este ajuste es nulo (dado que  $\theta$  es positivo) y, por ende, el productor fija su nivel de producción sin distorsiones.

Los precios en este mercado se ajustan proporcionalmente con el exceso neto de demanda,

$$P' = k(Q_t^d - Q_t^s) \quad k > 0$$

Asumiendo  $k = 1$  y reemplazando las funciones de oferta y demanda en la ecuación de ajuste de precios se llega a la EDO

$$P' + (\beta_d + \beta_s)P = (\alpha_d - \alpha_s) - e^{-\theta t} \cos(t) \quad \dots(*)$$

Según lo establecido en el Teorema 4.1, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\alpha_d - \alpha_s) - e^{-\theta t} \cos(t)}{(\beta_d + \beta_s)} = \frac{(\alpha_d - \alpha_s)}{(\beta_d + \beta_s)} \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta_d + \beta_s)t} = 0$$

por lo que puede afirmarse que el estado estacionario de los precios es definido y que la interacción de oferta y demandan aseguran la convergencia hacia el mencionado precio de equilibrio.

La EDO (\*) es en forma similar al caso 4 del Cuadro No. 4.2. La solución es hallada mediante integración por partes del producto del término móvil por el factor de integración,

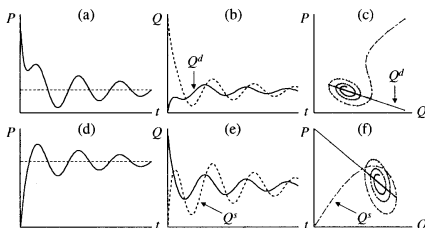
$$\int e^{(\beta_d + \beta_s)t} [(\alpha_d - \alpha_s) - e^{-\theta t} \cos(t)] dt = e^{(\beta_d + \beta_s)t} \left[ \frac{\alpha_d - \alpha_s}{\beta_d + \beta_s} - e^{-\theta t} \frac{(\beta_d + \beta_s - \theta) \cos(t) - \sin(t)}{(\beta_d + \beta_s - \theta)^2 + 1} \right]$$

que es multiplicado (junto con una constante de integración) por la inversa del factor de integración. De esta forma, la trayectoria de los precios viene dada por

$$P_t = C e^{-(\beta_d + \beta_s)t} + \left[ \frac{\alpha_d - \alpha_s}{\beta_d + \beta_s} - e^{-\theta t} \frac{(\beta_d + \beta_s - \theta) \cos(t) - \sin(t)}{(\beta_d + \beta_s - \theta)^2 + 1} \right]$$

donde  $C$  es una constante determinada a partir de alguna condición inicial sobre el mercado. En la Figura No. 4.4 se presenta la trayectoria de los precios y de las cantidades demandadas y ofertadas, según la situación inicial del mercado. Si en  $t = 0$  el exceso de demanda es positivo (es decir,  $Q^d > Q^s$ ) los precios tenderán al alza de modo que la brecha sea cerrada. Por el contrario, los precios son decrecientes si en  $t = 0$ ,  $Q^d < Q^s$ . Asimismo, note que la presencia del término móvil retarda la consecución del equilibrio ya que tanto  $P$  como  $Q^d$  y  $Q^s$  oscilan alrededor de sus valores de equilibrio hasta que éstos son alcanzados.

**Figura No. 4.4:**  
**Convergencia de precio y cantidades en un modelo de mercado**



El modelo desarrollado tiene la particular característica de presentar un factor de oscilación en las decisiones de oferta que puede interpretarse como un componente estacional o ajustes por aprendizaje del productor. Los Paneles (a) y (b) presentan la trayectoria del precio y las cantidades a partir de un exceso de oferta inicial. Claramente, las cantidades ofertadas son fluctuantes (lo que genera el mismo efecto sobre el resto de variables), hecho que puede ser apreciado en el Panel (c), donde la situación inicial corresponde a los primeros puntos de la derecha de la Figura. Los Paneles (d), (e) y (f) presentan la dinámica del modelo ante un exceso de demanda inicial.

### 4.2.3 Resolución de un caso especial

En esta sección desarrollaremos brevemente una metodología de resolución de EDO lineales de la forma especificada en el caso 4 del Cuadro No. 4.2, es decir, nos centraremos en resolver

$$y' + ay = b(t) \quad \dots(6)$$

Esta EDO tiene la particularidad de contar con **coeficiente constante**,  $a$ , y un **término móvil**,  $b(t)$ . La lógica de esta sección es la de introducir al lector en el método de resolución más común de EDO de orden superior. Por tal motivo, los aspectos formales detrás de los pasos que a continuación se discuten pueden ser encontrados en las secciones 4.3.1 y 4.3.2.



Como se mencionó anteriormente, la solución de una EDO puede ser expresada como la suma de dos soluciones

$$y_t = y_c + y_p \quad \dots(7)$$

donde  $y_c$  es denominada solución o **integral complementaria** (u homogénea) e  $y_p$  es conocida como **integral particular** (o no homogénea). La idea de denominar "integral" a las soluciones está vinculada con el intrínseco carácter diferencial de un planteamiento como (6).

La solución complementaria,  $y_c$ , es aquella función que satisface la versión homogénea (conocida como **forma reducida**) de (6)

$$y' + ay = 0 \quad \dots(8)$$

Del análisis de las secciones anteriores (ver Cuadro No. 4.2) se sabe que las funciones del tipo  $Ce^{rt}$  satisfacen (8). Entonces, cabe preguntarse qué función en particular satisface (8). Para ello, planteamos una solución  $y_c = Ce^{rt}$ . Así,  $y'_c = rCe^{rt}$ . Reemplazando este intento de solución en (8), se tiene

$$He^{rt}(r + a) = 0$$

Luego, para que  $y_c$  sea solución de (8),  $r = -a$ . En otras palabras,  $y_c = Ce^{-at}$ , lo que es totalmente coincidente con la solución respectiva dada en el Cuadro No. 4.3.

Por su parte, la solución particular,  $y_p$ , es aquella función que satisface (6), la ecuación **no homogénea** o **forma completa** de la EDO. Una manera alternativa al método del Cuadro No. 4.1 de encontrarla es el **método de los coeficientes indeterminados**, que será detallado en la sección 4.3.2. Los lineamientos básicos de este método sugieren plantear una función  $\Psi(t)$ , de la familia de funciones de  $b(t)$ , que cumpla con (6),

$$\Psi' + a\Psi = b(t)$$

dado que  $\Psi$  es similar a  $b(t)$  la expresión anterior constituye una igualdad de polinomios. Por ello, para que  $\Psi$  sea solución de (8), sus coeficientes deben ser determinados (de ahí el nombre del método) de acuerdo con la EDO.

#### **Ejemplo 4.7** Resolver $y' + y = 5t^2$

La solución complementaria viene dada por  $y_c = Ce^{-t}$ . Con el fin de hallar la solución particular, se plantea un polinomio de segundo orden, de similares características a  $b(t) = 5t^2$ ,

$$y_p = c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \quad y'_p = 2c_2 t + c_1$$

Al reemplazar este intento en la EDO,

$$c_2 t^2 + (2c_2 + c_1)t + (c_1 + c_0) = 5t^2$$

se obtiene una igualdad de polinomios que debe cumplirse con el fin de que  $y_p$  satisfaga la EDO. Resolviendo la mencionada igualdad,

$$\begin{aligned} c_2 &= 5 \\ 2c_2 + c_1 &= 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -2c_2 = -10 \\ c_1 + c_0 &= 0 \quad \rightarrow \quad c_0 = -c_1 = 10 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución particular es  $y_p = 5t^2 - 10t + 10$  y el problema es resuelto por

$$y_i = y_c + y_p = Ce^{-t} + 5t^2 - 10t + 10$$

El lector puede comprobar que esta solución satisface la EDO planteada. ♦

**Ejemplo 4.8** Resolver  $y' + y = 4e^{4t}$

La solución complementaria se deduce inmediatamente,  $y_c = Ce^{-t}$ . Por su parte, como solución particular se plantea

$$y_p = ce^{4t} \quad y'_p = 4ce^{4t}$$

Al reemplazar este intento en la EDO,

$$5ce^{4t} = 4e^{4t}$$

de modo que  $c = 4/5$  y la solución de la EDO es

$$y_i = He^{-t} + \frac{4}{5}e^{4t} \quad \blacklozenge$$

Con los ejemplos mostrados un aspecto queda claro: la solución particular **siempre** es definida y **única**. No obstante, la solución complementaria requiere de una condición inicial para ser determinada, dada la presencia de la constante de integración  $C$ . Aspectos generales sobre el método de coeficientes indeterminados y los posibles problemas en su uso serán abordados posteriormente.

Al adaptar las condiciones de estabilidad a (8), puede notarse que  $y$  es convergente si

$$a > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = b \in \Omega \subset \mathbb{R}$$

De modo que el estado estacionario en este caso puntual es  $y_{ss} = b/a$ . Note que este valor es plenamente coincidente con la solución particular cuando  $b(t)$  es constante.

**Ejemplo 4.9 (La curva de aprendizaje):** La ecuación

$$Q' = k(B - Q_t) \quad k, B > 0$$

ha sido sumamente utilizada en estudios vinculados con la relación entre la eficacia con que una persona puede desempeñar una tarea y la cantidad de experiencia que el individuo posee. Suponga que  $Q$  es la experiencia que Ud. acumula en su trabajo. Según la formulación presentada, Ud. puede acumular un máximo de experiencia de  $B$  (que es la cota superior de  $Q$ ); asimismo, conforme va obteniendo mayores conocimientos, el ritmo al que obtiene experiencia se reduce proporcionalmente con la constante  $k$ .

La dinámica de  $Q$  puede ser expresada como

$$Q' + kQ = kB$$

La solución complementaria de esta EDO es  $Q_c = Ce^{-kt}$  mientras que la solución particular es constante e igual a  $Q_p = B$ . Así, dado un nivel de experiencia inicial,  $Q_0$ , la trayectoria de  $Q$  responde a

$$Q_t = [Q_0 - B]e^{-kt} + B$$

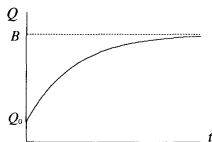
Ya que  $k$  es un número positivo y  $B$  es una constante (por lo que su límite cuando  $t \rightarrow \infty$  es  $B$ )  $Q_t$  es una trayectoria convergente. Del mismo modo, dado que por construcción  $B > Q_0$ ,  $Q_t$  es una trayectoria creciente (ver Figura No. 4.5).

#### 4.2.3.1 Aplicación: dinámica de la producción per cápita

En un estudio sobre la evolución de la población (mano de obra) de una economía como factor productivo, el premio nobel Trygve Haavelmo<sup>6</sup> propone las siguientes ecuaciones:

---

6 Ver Trygve Haavelmo, *A Study in the Theory of Economic Evolution*, North-Holland, Amsterdam, 1964, citado en: Peter J. Hammond, y Knut Sydsaeter, *op. cit.*, pp. 624.



**Figura No. 4.5:**  
**La curva de aprendizaje**

*La curva de aprendizaje describe la relación existente entre la eficacia de un individuo en ejercer alguna labor y la cantidad de conocimiento adquirido. Esta relación es descrita por una EDO donde cierta cantidad varía negativa y proporcionalmente con la distancia existente entre su valor presente y una cota superior, B, de modo que cuanto mayor sea esta diferencia, mayor el ritmo de acumulación de la mencionada cantidad.*

$$\frac{N'}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{X} \quad \alpha, \beta > 0 \quad \dots(*)$$

$$X = AN^a \quad a > 0, a \neq 1 \quad \dots(**)$$

donde  $N$  representa el tamaño poblacional y  $X$  denota la producción total de esta economía. La primera ecuación sostiene que la tasa de crecimiento poblacional es una función inversa del recíproco del producto medio de esta economía; en otras palabras, un producto medio elevado (reducido no) puede sostener niveles altos de crecimiento poblacional. La segunda ecuación es una función de producción, siendo  $a$  el parámetro que determina la naturaleza de los rendimientos marginales de la mano de obra. Si se define a  $x = X/N$  al producto por poblador (producto medio), luego de (\*\*\*) se desprende

$$x = AN^{a-1} \quad x' = A(a-1)N^{a-2}N' = (a-1)x \frac{N'}{N} \quad \dots(\diamond)$$

Si reemplazamos lo hallado en ( $\diamond$ ) en (\*), se tiene

$$\frac{x'}{(a-1)x} = \alpha - \frac{\beta}{x}$$

Multiplicando ambos miembros de esta ecuación por  $(a-1)x$  se tiene la siguiente EDO

$$x' - \alpha(a-1)x = -\beta(a-1)$$

De esta forma la trayectoria del producto por poblador viene dada por

$$x_t = \left[ x_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right] e^{\alpha(a-1)t} + \frac{\beta}{\alpha}$$

Como se discutió esta trayectoria es convergente si  $0 < a < 1$ , es decir, si la función de producción presenta *rendimientos marginales decrecientes*, lo que es intuitivamente lógico<sup>7</sup>.

Con el propósito de analizar los resultados del modelo de Haavelmo, considere las siguientes ecuaciones adicionales a (\*) y (\*\*)

$$N_t = \left( \frac{x_t}{A} \right)^{1/(a-1)} \quad \frac{X'}{X} = a \frac{N'}{N}$$

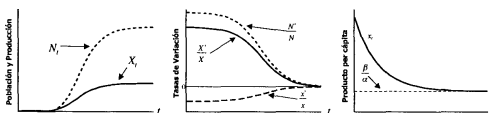
Asimismo, bajo la condición de convergencia o la presencia de rendimientos marginales decrecientes, el valor de estado estacionario de  $x$  es definido, al igual que el correspondiente a  $N$  y  $X$ . Los límites de estas variables vienen dados por

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x_t &= \frac{\beta}{\alpha} & \lim_{t \rightarrow \infty} N_t &= \left( \frac{\beta}{A\alpha} \right)^{1/(a-1)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} X_t &= A \left( \frac{\beta}{A\alpha} \right)^{a/(a-1)} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N'}{N} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X'}{X} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x'}{x} = 0 \end{aligned}$$

Como se aprecia en la Figura No. 4.6, inicialmente existe cierta cantidad poblacional que varía a una tasa aproximadamente constante. Dados los rendimientos decrecientes, la producción crece a un ritmo menor al número de habitantes, lo que conlleva a una permanente caída en el producto medio. Este deterioro desacelera el crecimiento poblacional, que a su vez desacelera el crecimiento de la producción hasta llegar a una situación de estado estacionario o de largo plazo. En ella, el producto medio,  $x$ , permanece constante al igual que  $N$  y, por ende,  $X$  y sus tasas de variación se tornan nulas. Note que el nivel de vida de esta economía, aproximado por la cuantía dada por el producto medio, depende fundamentalmente de dos parámetros,  $\alpha$  y  $\beta$ , asociados estrechamente con el ritmo de crecimiento poblacional.

7 Véase Michael J. Stutzer, "Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro Model", Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Staff Report No. 55*, 1980.

Figura No. 4.6:  
El modelo de Haavelmo



Bajo rendimientos decrecientes, la producción de un país crece a un ritmo menor que su población lo que, a su vez, reduce el producto medio. Esta disminución desacelera el crecimiento poblacional con repercusiones en la producción y así sucesivamente. La economía converge a un estado estacionario donde el producto medio permanece constante.

Estas cifras vienen dadas exógenamente y están asociadas con la capacidad de la economía de absorber la nueva entrada de mano de obra así como a un nivel exógeno del resto de factores productivos como, por ejemplo, capital. Así, un incremento en el *stock* de capital de esta economía es consistente con una reducción considerable en  $\beta$ . Por su parte, políticas de control de natalidad buscan reducir  $\alpha$ . Ambos fenómenos aseguran un mayor nivel de vida futuro.

### 4.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

En esta sección se estudia lo concerniente a EDO lineales de segundo orden. La materia por tratar es fundamental para el entendimiento tanto de EDO lineales de orden superior, sistemas de EDO y una mayor gama de modelos dinámicos utilizados en economía. En general, una EDO de segundo orden puede ser expresada como

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \quad \dots(8)$$

donde  $a_1$ ,  $a_0$  y  $b$  son funciones continuas. Como se mencionó,  $y''$  denota la segunda derivada de  $y$  con respecto a  $t$ . En adelante trataremos la solución analítica del caso donde los coeficientes de (8) son *constantes*. Soluciones generales de (8) podrán ser halladas o aproximadas con los métodos desarrollados en el siguiente capítulo.

### 4.3.1 Independencia lineal y la ecuación homogénea

Se dice que dos funciones son **linealmente dependientes** si una es múltiplo de la otra. Por ejemplo, si  $h(x) = \cos(x)$  y  $g(x) = 7\cos(x)$ . Por el contrario, dos funciones son **linealmente independientes** si ninguna es múltiplo de la otra. Si  $h(x)$  y  $g(x)$  cumplen con esta propiedad, entonces para todo valor real de  $\gamma$ ,  $h(x) - \gamma g(x) \neq 0$ .

Ahora bien, considere el caso homogéneo o la forma reducida de (8); es decir, si  $\forall t \ b(t) = 0$ . El siguiente teorema es fundamental en el análisis de EDO de segundo orden.

**Teorema 4.2** Si  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  son dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \dots(9)$$

Luego,

$$y_t = C_1 y_{1t} + C_2 y_{2t} \quad \dots(10)$$

es la solución general de (9) ya que cualquier solución de (9) puede ser obtenida de (10) al escoger apropiadamente los valores de las constantes arbitrarias,  $C_1$  y  $C_2$ . Alternativamente, (10) es solución de (9) para cualquier elección de  $C_1$  y  $C_2$ .

**Demostración.** Si  $y_1 = y_1(t)$  e  $y_2 = y_2(t)$  son soluciones de (9), entonces se cumple que

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0 \quad \text{junto con} \quad y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$$

Ahora bien, por (10), se cumple  $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$  e  $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2''$  de modo que (9) es

$$\begin{aligned} y'' + a_1 y' + a_0 y &= (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + a_1 (C_1 y_1' + C_2 y_2') + a_0 (C_1 y_1 + C_2 y_2) \\ &= C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) \\ &= C_1 (0) + C_2 (0) = 0 \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $C_1 y_1 + C_2 y_2$  es solución de (9) sin necesidad de tomar en cuenta el valor de las constantes arbitrarias. Por su parte, si  $y_1$  e  $y_2$  fueran funcio-

nes linealmente dependientes, el teorema sería ocioso. Se estaría confirmando que alguna de estas funciones satisfacen (9). ♦

La expresión del miembro derecho de (10) es denominada **combinación lineal** de  $y_1$  e  $y_2$ . De este modo, el Teorema 4.2 nos dice que una vez que se han determinado dos soluciones linealmente independientes<sup>8</sup> de (9), conocemos *todas* las soluciones de esta ecuación ya que cualquiera de ellas puede ser expresada como una combinación lineal de las soluciones iniciales. Con el fin de poder realizar esta combinación es necesario determinar valores para  $C_1$  y  $C_2$  que pueden ser determinados a partir de dos **condiciones iniciales** de la trayectoria de  $y$ .

¿Cómo saber si  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente independientes? Con el fin de determinar esta condición, considere la matriz

$$w = \begin{bmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{bmatrix}$$

Como un arreglo numérico las filas de la matriz  $w$  contienen una función y su respectiva primera derivada. Supóngase que  $y_1$  e  $y_2$  son linealmente dependientes, es decir,  $y_1 = \gamma y_2$ ; se deduce que  $y_1' = \gamma y_2'$ . Bajo este caso, la matriz  $w$  viene dada por

$$w = \begin{bmatrix} \gamma y_2 & \gamma y_2' \\ y_2 & y_2' \end{bmatrix}$$

Claramente, la primera fila es múltiplo de la segunda; por ello el determinante de  $w$  es nulo. Esto quiere decir que si  $w$  es una matriz singular, las funciones que la conforman son linealmente dependientes. En términos generales, estas funciones contienen la misma información y son, por ende, redundantes.

Este análisis fue realizado hace más de un siglo y medio por el matemático polaco Josef Hoëné Wroski (1778 – 1853). En general, el **wronskiano** de dos funciones diferenciables  $y_1$  e  $y_2$  es definido como

$$W(y_1, y_2) = W(t) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = |w|$$

<sup>8</sup> Si  $y_1$  e  $y_2$  son soluciones linealmente independientes de (9), se dice que son integrales **fundamentales**.



Si las soluciones  $y_1$  e  $y_2$  presentan un **wronskiano** distinto de cero, entonces son linealmente independientes. Por el contrario, como se ha discutido en los párrafos anteriores, dos funciones son linealmente dependientes si su **wronskiano** es nulo.

Tras lo discutido hasta el momento el objetivo al enfrentar una EDO como (9) es hallar dos soluciones linealmente independientes que la satisfaga. Para empezar y con lo visto en las secciones precedentes, la solución es del tipo  $y = e^{rt}$ . La motivación de ello es que tanto la primera como la segunda derivada de  $y$  son múltiplos de  $y$ , lo que sugiere resolver (9) es equivalente a determinar un valor correcto de  $r$ . Al sustituir este intento en (9) se llega a

$$(r^2 + a_1 r + a_0) e^{rt} = 0$$

igualdad que se cumple si

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad \dots(11)$$

Como se mencionó (11) es conocida como **ecuación auxiliar o característica** de la EDO. Asimismo,  $P(r)$  es denominado **polinomio característico** de la EDO y puede ser expresado al remplazar en (10)  $y''$  por  $r^2$ ,  $y'$  por  $r$  e  $y$  por  $r^0 = 1$ . La solución de (11),  $r_1$  y  $r_2$ , las **raíces características**, pueden ser obtenidas mediante la aplicación directa de la **fórmula cuadrática general**:

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad \dots(12)$$

Existen tres tipos de solución, de acuerdo con el valor que tomen los parámetros de la EDO,  $a_1$  y  $a_0$ . La raíces determinadas en (12) pueden ser distintas y reales, iguales y reales o complejas conjugadas dependiendo de si el discriminante de (12) es positivo, cero o negativo, respectivamente. A continuación estudiaremos cada uno de estos casos por separado.

#### 4.3.1.1 Raíces reales y distintas

Si  $a_1^2 - 4a_0 > 0$ , entonces se tiene dos raíces distintas y reales, definidas, según (11), como

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

de esta forma, (9) presenta dos soluciones

$$y_{1t} = e^{r_1 t} \quad y_{2t} = e^{r_2 t}$$

que son claramente linealmente independientes, hecho que se comprueba al analizar su respectivo **wronskiano**,

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & r_1 e^{r_1 t} \\ e^{r_2 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)t} (r_2 - r_1) \neq 0$$

Así, de acuerdo con lo establecido en el Teorema 4.2, la solución general a (9) bajo este caso es

$$y_t = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Adicionalmente, el lector podrá haber notado que  $y$  es convergente si **ambas** raíces son negativas. Si alguna de ellas es positiva, y seguirá una trayectoria explosiva (ver los Paneles (a) y (b) de la Figura No. 4.7).

#### 4.3.1.2 Raíces reales e iguales

Si  $a_1^2 - 4a_0 = 0$ , entonces se tiene dos raíces distintas e iguales, definidas, según (11), como

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{a_1}{2}$$

Este hecho inmediatamente se traduce en la dependencia lineal de  $y_1$  e  $y_2$ , lo que automáticamente invalida la aplicación del Teorema 4.2. La ecuación característica en este caso ha dado como resultado una única función

$$y_t = e^{(-a_1/2)t}$$

Con el fin de obtener una función  $y_2$  independiente de  $y_1$ , se propone

$$y_{2t} = t e^{(-a_1/2)t}$$

que satisface (9). Diferenciando  $y_2$  dos veces, se tiene

$$y_2' = \left(1 - \frac{a_1}{2}t\right) e^{(-a_1/2)t} \quad y_2'' = \left(\frac{a_1^2}{4}t - a_1\right) e^{(-a_1/2)t}$$

de modo que

$$\begin{aligned} y_2'' - a_1 y_2' + a_0 y_2 &= \left[ \left(\frac{a_1^2}{4}t - a_1\right) + a_1 \left(1 - \frac{a_1}{2}t\right) + a_0 t \right] e^{(-a_1/2)t} \\ &= -\frac{1}{4}(a_1^2 - 4a_0) e^{(-a_1/2)t} = 0 \end{aligned}$$

Asimismo, el wronskiano con la solución propuesta viene dado por

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{rt} & te^{rt} \\ e^{rt} & (1+rt)e^{rt} \end{vmatrix} = e^{2rt} \neq 0$$

por lo que la solución general en este caso es

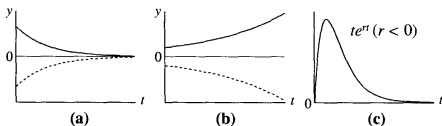
$$y_t = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$$

De forma análoga a la del caso anterior, la integral planteada converge si  $r < 0$ . En caso contrario, la trayectoria será explosiva ( $r > 0$ ). El término  $te^{rt}$  puede cuestionar, a primera vista, la convergencia de la variable. Sin embargo, hay que considerar (aplicando la regla de límites indeterminados de L'Hopital) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{rt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{-rt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{-r e^{-rt}} = 0 \quad (r < 0)$$

ya que mientras que el término  $t$  crece de manera lineal, el término  $e^{rt}$  crece de manera exponencial. Así, si  $r$  es negativo se tendrá una fracción convergente a cero (el numerador crece linealmente mientras que el denominador lo hace de manera exponencial). Esta situación se presenta en el Panel (c) de la Figura No. 4.7.

**Figura No. 4.7:**  
Raíces reales en una EDO de segundo orden



Panel (a): Trayectoria de  $y$ , en dos casos: (1)  $r_1 \neq r_2$ ,  $r_1$  y  $r_2 < 0$ ; (2)  $r_1 = r_2 = r < 0$ .

Panel (b): Trayectoria de  $y$ , en dos casos: (1)  $r_1 \neq r_2$ ,  $r_1$  o  $r_2 > 0$ ; (2)  $r_1 = r_2 = r > 0$ .

Panel (c): Convergencia de  $y$ , cuando  $r_1 = r_2 = r < 0$ .

#### 4.3.1.3 Raíces complejas conjugadas

Si  $a_1^2 - 4a_0 < 0$ , entonces se tienen dos raíces complejas conjugadas,

$$r_1 = p + qi \quad r_2 = p - qi$$

donde

$$p = -\frac{a_1}{2} \quad q = \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$$

e  $i$  es la unidad imaginaria. Es así como se plantean como soluciones

$$y_{1t} = e^{(p+qi)t} = e^{pt} e^{qit} \quad y_{2t} = e^{(p-qi)t} = e^{pt} e^{-qit}$$

En el Ejercicio 51 del Capítulo 3 se pide que demuestre un resultado conocido como las relaciones de Euler,

$$e^{\pm qit} = \cos(qt) \pm i \operatorname{sen}(qt)$$

Al utilizar esta propiedad, las soluciones pueden ser expresadas como

$$y_{1t} = e^{pt} (\cos(qt) + i \operatorname{sen}(qt)) \quad y_{2t} = e^{pt} (\cos(qt) - i \operatorname{sen}(qt))$$

de modo que la solución general de (9) en este caso es

$$\begin{aligned} y_t &= C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{pt} [(C_1 + C_2) \cos(qt) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(qt)] \\ &= e^{pt} (G_1 \cos(qt) + G_2 \operatorname{sen}(qt)) \end{aligned} \quad \dots(*)$$

donde  $G_1$  y  $G_2$  son constantes arbitrarias y se ha ignorado la presencia de la unidad imaginaria<sup>9</sup>.

Un primer comentario sobre la solución obtenida es que se pueden plantear las soluciones

$$y_{1t} = e^{pt} \cos(qt) \quad y_{2t} = e^{pt} \operatorname{sen}(qt)$$

(el lector puede comprobar que satisfacen (9)) y luego combinarlas de acuerdo con el postulado del Teorema 4.2 para llegar a una solución similar a (\*). Para tales efectos, note que se tratan de dos funciones linealmente independientes,

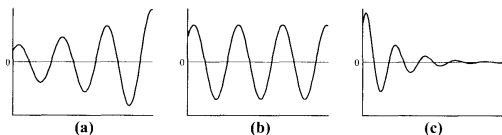
$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{pt} \cos(qt) & e^{pt} [p \cos(qt) - q \operatorname{sen}(qt)] \\ e^{pt} \operatorname{sen}(qt) & e^{pt} [p \operatorname{sen}(qt) + q \cos(qt)] \end{vmatrix} = qe^{2pt} \neq 0$$

<sup>9</sup> Esta decisión no es del todo arbitraria. Si  $C_1 = p + qi$  y  $C_2 = p - qi$ , se cumplen las condiciones para que  $y$  sea una solución de la EDO. De este modo,  $G_1 = C_1 + C_2 = 2p$  y  $G_2 = (C_1 - C_2)i = -2q$  son reales.

En segundo lugar, utilizando propiedades trigonométricas, (\*) puede ser expresada de manera alternativa como<sup>10</sup>

$$y_t = C_1 e^{pt} \cos(qt + C_2)$$

**Figura No. 4.8:**  
Raíces complejas conjugadas en una EDO de segundo orden



Panel (a): Trayectoria de  $y$ , en cuando  $p > 0$ : oscilación explosiva.

Panel (b): Trayectoria de  $y$ , en cuando  $p = 0$ : oscilación uniforme.

Panel (c): Trayectoria de  $y$ , en cuando  $p < 0$ : oscilación amortiguada.

La trayectoria que sigue  $y$  en este caso resulta ser distinta a la obtenida en las clasificaciones anteriores. La presencia de términos trigonométricos en  $y$  necesariamente le asignan un comportamiento sinusoidal. Así, la función tiene una trayectoria **oscilante**<sup>11</sup>. Por otro lado, la convergencia de  $y$  dependerá exclusivamente del valor que tome  $p$ , la parte real de las raíces complejas conjugadas ya que el término  $G_1 \cos(qt) + G_2 \sin(qt)$  no tiene un límite establecido (por ejemplo, ver el cuarto caso del Cuadro No. 4.2). Si  $p = 0$ , la solución de  $y$  viene dada solamente por sus términos trigonométricos (ya que  $e^{0t} = 1$ ) por lo que  $y$  oscila de manera **uniforme**; si  $p > 0$ ,  $e^{pt}$  crecerá de manera indefinida por lo que la trayectoria es una oscilación **explosiva**; por último, si  $p < 0$ ,  $e^{pt} \rightarrow 0$  a

<sup>10</sup> Note que  $C_1 = \sqrt{G_1^2 + G_2^2}$  y  $C_2 = \text{tg}^{-1}(G_2 / G_1)$ .

<sup>11</sup> En primera instancia, puede considerarse la palabra "oscilante" como sinónimo de "fluctuante" que es un término de mayor uso en economía. No obstante y bajo un criterio estrictamente matemático, al referirnos a tiempo continuo, el concepto de "oscilación" es apropiado mientras que las "fluctuaciones" se dan en tiempo discreto, como veremos al estudiar **ecuaciones en diferencia**.

$t \rightarrow \infty$  dando a  $y$  una oscilación **amortiguada**. Luego, si  $p \geq 0$  y será divergente mientras que si  $p < 0$ , y converge. Estas situaciones se presentan en la Figura No. 4.8.

**Ejemplo 4.10 (Otro modelo de mercado).** Consideremos un modelo de mercado similar al presentado en la sección 4.2.2.1.c.,

$$\begin{aligned} Q_t^d &= \alpha_d - \beta_d P_t & \alpha_d, \beta_d > 0 \\ Q_t^s &= \alpha_s + \beta_s P_t & \alpha_s, \beta_s > 0 \end{aligned}$$

No obstante, la dinámica del precio en este ejemplo viene dada por

$$P' = k(Q_t^d - Q_t^s) \quad k > 0$$

hecho que puede interpretarse como que el precio *se acelera* proporcionalmente con el exceso de demanda, a diferencia del caso anterior donde los precios se ajustaban o *cambiaban* directamente<sup>12</sup>. Al juntar las ecuaciones que definen el mercado se tiene la EDO de segundo orden

$$P'' + k(\beta_d + \beta_s)P_t = k(\alpha_d - \alpha_s)$$

Considerando una situación de estado estacionario (donde  $P'' = P' = 0$ ), puede decirse que el precio de largo plazo es

$$P_{ss} = \frac{\alpha_d - \alpha_s}{\beta_d + \beta_s}$$

que es similar al obtenido en el ejercicio previo. Por otro lado, la ecuación característica de la ecuación reducida revela la existencia de dos raíces complejas conjugadas en la EDO. El lector puede comprobar, luego, que la solución general de esta viene dada por

$$P_t = G_1 \cos(\sqrt{k(\beta_d + \beta_s)}t) + G_2 \sin(\sqrt{k(\beta_d + \beta_s)}t) + \frac{\alpha_d - \alpha_s}{\beta_d + \beta_s}$$

A primera vista, puede concluirse que el precio mantiene una trayectoria uniformemente oscilante y, consecuentemente, divergente. Tomando como dato las condiciones iniciales,

<sup>12</sup> Es equivalente, además, sostener que el cambio en el precio es proporcional al total de excesos de demanda históricos en el mercado. Formalmente,  $P' = k \int_{-\infty}^t (Q_z^d - Q_z^s) dz$

$$P_0 = \frac{\alpha_d}{\beta_d + \beta_s} \quad P'_0 = \alpha_s \sqrt{\frac{k}{\beta_d + \beta_s}}$$

se llega a la solución única

$$P_t = \frac{\alpha_s}{\beta_d + \beta_s} [\cos(\sqrt{k(\beta_d + \beta_s)}t) + \sin(\sqrt{k(\beta_d + \beta_s)}t)] + \frac{\alpha_d - \alpha_s}{\beta_d + \beta_s}$$

Ahora bien, puede encontrarse en qué momentos el mercado estará en equilibrio. Esto es, determinar un valor de  $t$  de modo que  $P = P_p$ ; en otras palabras, qué valor de  $t$  anula la solución complementaria. Para ello, es conveniente recordar que  $\cos(x) = -\sin(x)$  si  $x = -\pi/4, -5\pi/4, -9\pi/4$  y así sucesivamente. Entonces, el valor deseado de  $t$  es

$$\tau = \frac{(n + 0.25)\pi}{\sqrt{k(\beta_d + \beta_s)}} \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalmente, el lector debe notar que, dadas las derivadas

$$P'_t = C[-\sin(qt) + \cos(qt)]$$

$$P''_t = C[-\cos(qt) - \sin(qt)]$$

una vez que  $P$  llega al equilibrio (esto es,  $t = \tau$ ), se tiene

$$P'_\tau = \sqrt{2}C, \quad P''_\tau = 0 \text{ si } n \text{ es impar y } P'_\tau = -\sqrt{2}C, \quad P''_\tau = 0 \text{ si } n \text{ es par.}$$

Con ello, se confirma que aunque  $P_t = P_{ss}$ ,  $P'_t \neq 0$ , por lo que  $P$  oscila indefinidamente. ♦

#### Cuadro No. 4.4 Soluciones de la ecuación complementaria

Ecuación: $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$		
Polinomio característico: $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$		
Caso	Solución general	Converge si...
Raíces reales y distintas ( $r_1 \neq r_2$ )	$y_t = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$	$r_1, r_2 < 0$
Raíces reales e iguales ( $r_1 = r_2 = r$ )	$y_t = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$	$r < 0$
Raíces complejas conjugadas ( $p \pm qi$ )	$y_t = e^{pt} (G_1 \cos(qt) + G_2 \sin(qt))$	$p < 0$

#### 4.3.1.4 Aplicación: deuda pública

Ante dificultades en el financiamiento interno de las operaciones del fisco, típicamente los gobiernos optan por endeudarse con el fin de enfrentar sus obligaciones corrientes y de desarrollar proyectos de inversión con la esperanza que en el futuro reditúen el suficiente ingreso como para enfrentar la deuda adquirida. Asimismo, si un gobierno posee una deuda, usualmente el pago de sus intereses es financiado con mayores cargas tributarias. Al respecto, Domar desarrolla un modelo en donde la *carga de la deuda pública* es la proporción en que el impuesto adicional afecta al ingreso nacional de una economía<sup>13</sup>. El modelo establece que la tasa de endeudamiento neto, es proporcional al ingreso nacional,  $Y$ ,

$$D' = \alpha Y_t \quad 0 < \alpha < 1 \quad \dots(*)$$

donde  $D_t$  es el *stock* de deuda en el instante  $t$ . Asimismo, asumiendo una tasa de interés constante,  $\rho$ , el volumen de impuestos por recaudar con el fin de cubrir el pago de intereses es

$$T_t = \rho D_t$$

Domar define la carga de la deuda como

$$\delta_t = \frac{T_t}{Y_t} = \rho \frac{D_t}{Y_t}$$

Luego, el objetivo de este ejercicio es determinar el comportamiento de  $\delta$ . Para tales efectos, es necesario establecer un comportamiento dinámico para  $Y$ . Asumiremos que el ingreso nacional crece a una tasa relativa constante,

$$Y' = \beta Y_t \quad 0 < \beta < 1 \quad \dots(**)$$

Hallemos la trayectoria de  $D$ . Al derivar (\*) con respecto al tiempo, utilizando (\*\*) y luego empleando (\*) se tiene que

$$D'' = \alpha Y' = \alpha \beta Y_t = \beta D_t$$

de donde se deduce una la ecuación complementaria (reducida)

$$D'' - \beta D_t = 0$$

<sup>13</sup> Esta aplicación es tomada de Ángel Vegas Pérez y Manuel López Cachero, *Elementos de matemáticas para economistas*, Madrid: Pirámide, 1976, pp. 233 – 238.



que tiene un polinomio característico  $r^2 - \beta r = 0$ . De ello se deduce que la EDO contiene dos raíces reales y distintas,  $r_1 = 0$  y  $r_2 = \beta$ . Así, la solución general de la EDO es

$$D_t = C_1 + C_2 e^{\beta t}$$

Si las condiciones iniciales para  $t = 0$  son  $D = D_0$  e  $Y = Y_0$  podremos establecer una solución puntual para  $D_t$ . En efecto, como

$$D_t = C_2 \beta e^{\beta t}$$

Podemos concluir que  $C_1 = D_0 - \frac{\alpha}{\beta} Y_0$  y  $C_2 = \frac{\alpha}{\beta} Y_0$ . Con estos valores,

Asimismo, estamos en condiciones de asegurar que, dada la forma de (\*\*),

$$Y_t = Y_0 e^{\beta t}$$

$$D_t = \frac{\alpha}{\beta} Y_0 (e^{\beta t} - 1) + D_0$$

Con respecto a la convergencia de las trayectorias, puede afirmarse sin ambigüedad que tanto  $D$  e  $Y$  son funciones explosivas, dado el valor positivo de  $\beta$ . No obstante, tal y como está construida, la *carga de la deuda* de Domar,

$$\delta_t = \rho \frac{D_t}{Y_t} = \rho \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) + \left( \frac{D_0}{Y_0} - \frac{\alpha}{\beta} \right) e^{-\beta t} \right]$$

resulta ser una trayectoria temporal convergente<sup>14</sup> con un valor de estado estacionario igual a

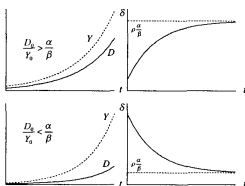
$$\delta_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_t = \rho \frac{\alpha}{\beta}$$

Los resultados de este modelo son intuitivamente aceptables. La carga de la deuda será mayor en el largo plazo cuanto más elevadas sean la tasa de interés o el factor de proporcionalidad de endeudamiento,  $\alpha$ , o cuanto más reducida sea la tasa de crecimiento del ingreso nacional,  $\beta$ . Adicionalmente, el lector puede comprobar que la relación entre la deuda inicial y el nivel inicial de ingreso nacional son determinantes de la trayectoria de  $\delta$ . Como se aprecia en la Figura No. 4.9, puede deducirse que

Si  $\frac{D_0}{Y_0} > \frac{\alpha}{\beta}$  luego  $\delta_{ss} < \delta_0$  que implica  $\delta' < 0 \quad \forall t$

<sup>14</sup> El lector puede comprobar que si  $Y' = \beta$ , la convergencia no se cumple.

**Figura No. 4.9:**  
**El modelo de deuda de Domar**



Según los resultados de este modelo la carga de la deuda definida como el aumento impositivo que la economía debe realizar con el fin de cumplir con el servicio de la deuda pública, como proporción del ingreso nacional, puede tener una trayectoria convergente. El nivel de largo plazo de la misma dependerá tanto de la tasa de crecimiento de la economía y de la velocidad de endeudamiento como de las condiciones iniciales sobre el ingreso nacional y el stock de deuda.

#### 4.3.2 Método de los coeficientes indeterminados

A continuación analizaremos una metodología que resuelva la **EDO completa o no homogénea**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t) \quad \dots(13)$$

Para tales efectos, el Teorema 4.3 es de gran importancia.

**Teorema 4.3 (Principio de superposición)** La solución general de (13) es

$$y_t = C_1 y_{1t} + C_2 y_{2t} + y_p \quad \dots(14)$$

donde  $C_1 y_1 + C_2 y_2$  es la solución de la ecuación homogénea (9), la integral complementaria, e  $y_p$  es cualquier solución de (13), conocida como integral particular.

**Demostración.** Para que el teorema sea cumplido, debemos probar dos aspectos. En primer lugar, cualquier opción de  $C_1$  y  $C_2$  la función  $y$  definida por (14) satisface (13) y, en segundo lugar, que toda solución de (13) puede ser obtenida de (14) al elegir apropiadamente los valores de  $C_1$  y  $C_2$ .

Para probar el primer aspecto, considere de (14) que

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + y_p' \quad y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + y_p''$$

de tal forma que

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = C_1 (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2 (y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + (y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p)$$

Ahora,  $y_1$  e  $y_2$  satisfacen (9) e  $y_p$  satisface (13), entonces la expresión anterior se reduce a

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 + 0 + b(t) = b(t)$$

lo que demuestra que  $y$  satisface (13).

En lo concerniente al segundo aspecto, considere que  $y$  es cualquier solución de (13). Seguidamente,

$$y_t - y_p,$$

satisface (9) debido a que

$$\begin{aligned} (y_t - y_p)'' + a_1 (y_t - y_p)' + a_0 (y_t - y_p) &= (y'' + a_1 y' + a_0 y) - (y_p'' + a_1 y_p' + a_0 y_p) \\ &= b(t) - b(t) = 0 \end{aligned}$$

Luego, dado que  $C_1 y_1 + C_2 y_2$  es la solución general de (9), existen valores para  $C_1$  y  $C_2$  de modo que la solución  $y - y_p$  puede ser escrita como

$$y_t - y_p = y_1 + y_2$$

de donde se deduce (14) inmediatamente<sup>15</sup> ♦

**Recordar.** La ecuación (9) es denominada la **ecuación complementaria** a (13) e  $y_p$  es llamada la solución **particular** de (13). Luego, el Teorema 4.3 postula que la solución general de (13) es obtenida al sumar una solución particular de (13) a la solución general de la ecuación complementaria (solución complementaria).

<sup>15</sup> De esta demostración pueden desprenderse los siguientes postulados alternativos: "si  $y$  e  $y^*$  son solución de una EDO completa, luego  $y - y^*$  son solución de la EDO reducida" y "si  $y_p$  es la solución particular de una EDO completa, luego toda solución de la ecuación completa puede ser escrita como la solución de la EDO reducida más  $y_p$ ".

Dado que la sección anterior se ha dedicado a conocer la solución general de (9) nos centraremos en el problema de obtener la solución particular de (13). Para tales efectos existen ciertas alternativas<sup>16</sup> de las cuales discutiremos el método de los **coeficientes indeterminados**, que se introdujo aproximadamente en la sección 4.2.3.

El primer paso en este método consiste en realizar un intento (o conjetura) sobre la forma de la solución particular. Este intento contendrá una serie de coeficientes que deben ser determinados a partir de las condiciones obtenidas en la sustitución de la solución propuesta de la EDO tratada. Consideremos los dos siguientes ejemplos a modo de ilustración.

**Ejemplo 4.11** Hallar la solución particular de  $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$

Es claro notar que un intento de respuesta razonable es  $y_p = Ae^{3t}$ , donde  $A$  es un coeficiente desconocido que debe ser determinado. Así,

$$y_p' = 3Ae^{3t} \quad y_p'' = 9Ae^{3t}$$

Reemplazando las funciones anteriores en la EDO se obtiene

$$9Ae^{3t} + 2(3Ae^{3t}) - 8Ae^{3t} = e^{3t} \rightarrow 7Ae^{3t} = e^{3t} \rightarrow A = \frac{1}{7}$$

de esta forma, la solución particular de este ejemplo

$$y_p = \frac{1}{7}e^{3t} \blacklozenge$$

**Ejemplo 4.12** Hallar la solución particular de  $y'' - y' - 6y = e^{3t}$

Al igual que el ejemplo anterior, es razonable suponer que  $y_p = Ae^{3t}$ . Sin embargo, al reemplazar la función y sus respectivas derivadas en la EDO se consigue

$$9Ae^{3t} - 3Ae^{3t} - 6Ae^{3t} = e^{3t} \text{ o, alternativamente, } 0 = e^{3t}$$

lo que es una evidente contradicción. ¿Qué ocurrió? ¿Falló el método? El problema en este caso puntual es que  $y = Ae^{3t}$  es solución de la ecuación complemen-

---

<sup>16</sup> Otro método de cierta popularidad (y un poco más complicado) es denominado **variación de parámetros** y puede ser encontrado en los textos avanzados de cálculo y el Apéndice A.

taria  $y'' - y' - 6y = 0$ , hecho que imposibilita a  $y_p$  satisfacer la EDO, sin importar el valor que  $A$  tome. ¿Cómo proceder? La experiencia señala que multiplicar  $Ae^{3t}$  por  $t$  produce buenos resultados. Así, probamos

$$y_p = Ate^{3t} \quad y'_p = Ate^{3t}(1 + 3t) \quad y''_p = Ate^{3t}(6 + 9t)$$

Al evaluar estas funciones en la EDO se obtiene  $A = \frac{1}{5}$  y, por consiguiente,  $y_p = \frac{1}{5}te^{3t}$ .

**Importante.** Si  $Ate^{3t}$  también hubiera sido una solución complementaria, lo lógico hubiera sido probar con  $At^2e^{3t}$  como candidato para ser solución particular de la EDO y así sucesivamente. ♦

Los ejemplos mostrados ilustran el modo de operar y las posibles complicaciones detrás del método de coeficientes indeterminados. El Cuadro No. 4.5 resume la esencia del método propuesto.

**Cuadro No. 4.5**  
**Método de los coeficientes indeterminados**

	Plantear $y_p = B(t)$ como primer intento. Se presentan, sin mayor prueba algunas soluciones tentativas, dependiendo la forma de $b(t)$ :	
	Término móvil, $b(t)$	Intento inicial para $y_p = B(t)$
<b>Paso 1.</b>	$ce^{at}$ $c_0 + c_1t + \dots + c_n t^n$ $c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t)$ $e^{at}(c_0 + c_1t + \dots + c_n t^n)$	$Ae^{at}$ $A_0 + A_1t + \dots + A_n t^n$ $A_1 \cos(\nu t) + A_2 \sin(\nu t)$ $e^{at}(A_0 + A_1t + \dots + A_n t^n)$
<b>Paso 2.</b>	Verificar si $y_p = B(t)$ (o algún elemento de $B(t)$ ) es solución de la ecuación complementaria $y'' - a_1y' - a_0y = 0$	
<b>Paso 3.</b>	Si el intento inicial <b>no</b> es solución de la ecuación complementaria, luego $y_p = B(t)$ es una forma correcta de la solución particular	
<b>Paso 4.</b>	Si el intento inicial es solución de la ecuación complementaria, luego multiplique $y_p$ por la menor potencia entera de $t$ requerida para producir una función que no sea solución complementaria. Formalmente, si $y_p = B(t)$ no funciona, ensaye $y_p = tB(t)$ ; si no funciona, pruebe con $y_p = t^2B(t)$ y así sucesivamente	

**Ejemplo 4.13** Hallar la solución general de  $y'' + y' = 4t^2$

Empecemos el desarrollo obteniendo la solución complementaria  $y'' + y' = 0$ , que presenta una ecuación característica  $r^2 + r = 0$  y, por ende, tiene como raíces  $r_1 = 0$  y  $r_2 = -1$ . Luego, la solución general de la ecuación complementaria es

$$y_c = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-t} = C_1 + C_2 e^{-t}$$

Por su parte, el lado derecho de la EDO por resolver es un polinomio de segundo orden, por lo que el intento inicial de solución particular es

$$y_p = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$$

No obstante,  $A_0$  es una solución de la ecuación complementaria (cuando  $C_1 = A_0$  y  $C_2 = 0$ ) por lo que se intenta con

$$y_p = A_0 t + A_1 t^2 + A_2 t^3 \quad \dots(*)$$

Este intento, que no contiene elementos que sean parte de la solución complementaria, es una forma correcta para  $y_p$ . Diferenciando  $y_p$ ,

$$y_p' = A_0 + 2A_1 t + 3A_2 t^2 \quad y_p'' = 2A_1 + 6A_2 t$$

al sustituir en la EDO estas funciones, se obtiene

$$3A_2 t^2 + 2(A_1 + 3A_2)t + (A_0 + 2A_1) = 4t^2$$

Con el fin de hallar  $A_0$ ,  $A_1$  y  $A_2$ , igualamos los coeficientes correspondientes de los dos lados de esta ecuación. Este procedimiento da como resultado,

$$\begin{aligned} 3A_2 &= 4 & \rightarrow & A_2 = \frac{4}{3} \\ A_1 + 3A_2 &= 0 & \rightarrow & A_1 = -3A_2 = -4 \\ A_0 - 2A_1 &= 0 & \rightarrow & A_0 = -2A_1 = 8 \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en (\*), la solución particular viene dada por

$$y_p = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 8t$$

por lo que la solución general de la EDO planteada es

$$y_p = C_1 + C_2 e^{-t} + \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 8t$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  pueden ser hallados a partir de dos condiciones iniciales sobre el comportamiento de  $y$ . ♦

#### 4.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior

Lo discutido en la sección 4.3 puede ser generalizado sin mayor complicación, de modo que el lector adquiera la capacidad de resolver una EDO lineal de cualquier orden y coeficientes constantes. De manera análoga a la desarrollada hasta el momento, la EDO completa de orden superior es expresada como

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(t) \quad \dots(15)$$

con una ecuación homogénea igual a

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \quad \dots(16)$$

donde  $y^{(n-j)}$  ( $n \geq j \geq 0$ ) es la " $n-j$ "-ésima derivada de  $y$  con respecto a  $t$ .

La resolución del caso homogéneo (16) está vinculada con la generalización del Teorema 4.2. En otras palabras, si se encuentran  $n$  soluciones linealmente independientes de (16), luego su combinación lineal constituye la solución general de (16). En este caso, la solución presentará  $n$  constantes arbitrarias que podrán ser determinadas a partir de  $n$  condiciones iniciales. Asimismo, el **wronskiano** de  $n$  funciones puede ser utilizado en el análisis de independencia lineal. Sea  $y_k$  la  $k$ -ésima solución de (16) con  $n \geq k \geq 0$ , luego, las  $n$  soluciones son linealmente independientes si

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(k)} & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(k)} & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_k & y_k' & \dots & y_k^{(k)} & \dots & y_k^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(k)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

En consecuencia, obedeciendo al Teorema 4.3, la solución general de (15) es

$$y_t = y_c + y_p = \sum_{i=1}^n C_i y_i + y_p \quad \dots(17)$$

donde  $y_p$ , la solución particular, puede ser determinada mediante el uso del método de los coeficientes indeterminados. La ecuación complementaria está asociada al polinomio característico (reemplazando en (16)  $y^{(n-j)}$  por  $r^{n-j}$ ),

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0 \quad \dots(18)$$

La solución del polinomio (18) implica la obtención de  $n$  raíces, normalmente, a través de procedimientos algebraicos de factorización como Rouffini o Horner. Si  $m_1$  raíces son reales y distintas,  $m_2$  son raíces reales e iguales entre sí y  $m_3$  raíces son pares de complejas conjugadas, donde se cumple que  $m_1 + m_2 + 2m_3 = n$ , la solución general (17) viene a ser (ver Cuadro No. 4.4)

$$y_i = \sum_{i=1}^{m_1} A_i e^{r_i t} + \sum_{i=1}^{m_2} B_i t^{(i-1)} e^{r_i t} + \sum_{i=1}^{m_3} e^{p_i t} (C_i \cos(q_i t) + G_i \operatorname{sen}(q_i t)) + y_p \quad \dots(19)$$

donde la primera sumatoria es vinculada con las raíces reales y distintas, la segunda sumatoria se refiere a las raíces reales e iguales y la tercera sumatoria se asocia con las raíces complejas conjugadas de (18).

**Ejemplo 4.14** La ecuación auxiliar de la EDO

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} - 5y''' + y'' - 4y' + 5y = 0$$

es

$$P(r) = (r+5)(r-1)^2(r^2+r+1) = 0$$

De modo que se tienen dos raíces reales e iguales, una raíz real y distinta a las anteriores y un par de raíces complejas conjugadas. Así, la solución general de la EDO es

$$y_i = A_1 e^{-5t} + (B_1 + B_2 t) e^t + e^{-\frac{1}{2}t} \left( G_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + G_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \quad \blacklozenge$$

Con respecto a la convergencia de (18) es claro que debe cumplirse

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_p = y_{ss} \in \Omega \in \mathbb{R} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_c = 0$$

La convergencia de la solución particular depende exclusivamente de la forma de  $b(t)$ . Si  $b(t)$  es convergente,  $y_p$  lo será. Por su parte, de lo analizado en la sección 4.3, la convergencia de  $y_c$  es garantizada si **la parte real de las raíces es negativa**. Es decir, si  $r_j$  y  $p_i < 0$ . Para ello, el Teorema 4.4 resulta sumamente útil.

**Teorema 4.4 (Routh – Hurwitz)** Una condición **necesaria y suficiente** para que la solución de (16) sea convergente es que las raíces de (18) tengan parte real negativa lo que se cumple *si y solo si* los  $n$  determinantes de la sucesión

$$\left| a_{n-1} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{cccccc} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{array} \right|$$

son (**todos**) positivos.



El Teorema de Routh - Hurwitz<sup>17</sup> cuenta con el poder de brindarnos una condición necesaria y suficiente para la convergencia. Lamentablemente, los cálculos requeridos cuando  $n$  es un número grande pueden resultar realmente tediosos, incluso utilizando técnicas de matrices particionadas. Por otra parte, note que en todos los planteamientos como (16) se asume, sin pérdida de generalidad, que  $a_n = 1$  (de no ser así, divida la EDO entre  $a_n$ ). Note que  $a_{n-j} = 0$  para todo  $j > n$ .

**Ejemplo 4.15** La solución de  $y^{(4)} + 8y''' + 18y'' + 17y' + 10y = 0$  es convergente ya que

$$|a_{n-1}| = 8 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 17 & 18 \end{vmatrix} = 127 > 0, \blacklozenge$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 17 & 18 & 8 \\ 0 & 10 & 17 \end{vmatrix} = 1519 > 0$$

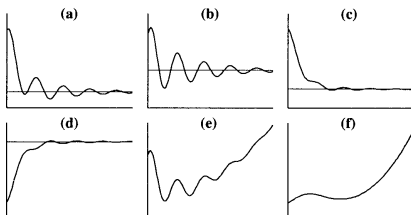
Finalmente, el comportamiento de la trayectoria y dependerá, en cierta medida, de las condiciones iniciales del problema que determinan los valores de las constantes  $(A, B, C, G)$ . Si las raíces entre partes reales negativas se seguirá, en general, la trayectoria de aquella raíz asociada a la constante de mayor valor absoluto siempre y cuando exista una diferencia sustancial entre esta y el resto de constantes. Por el contrario si una raíz es positiva, la trayectoria de  $y$  se verá gobernada por el comportamiento de este miembro. A modo de ejemplo, la Figura No. 4.10 ilustra el caso  $n = 6, m_1 = m_2 = 2, m_3 = 1$ ,

$$y_c = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} + B_1 e^{r_3 t} + B_2 t e^{r_3 t} + e^{m t} (C \cos(qt) + G \sin(qt))$$

donde los valores de  $r_1, r_2, r$  y  $p$  son similares en valor absoluto y las diferencias entre trayectorias se debe básicamente a discrepancias entre las constantes arbitrarias.

<sup>17</sup> La demostración del teorema puede ser consultada en el libro de Paul Samuelson, *Foundations of Economics Analysis*, Harvard University Press, 1947.

**Figura No. 4.10:**  
**Un ejemplo de EDO de orden superior**



- Panel (a): Converge,  $r_1, r_2, p < 0$ . Las constantes toman valores cercanos:  $A_1 \gg B_1 \gg C \gg G$ .  
 Panel (b): Converge,  $r_1, r_2, p < 0$ . La trayectoria se adecua al caso de raíces complejas:  $C \text{ o } G \gg A_1, B_1$ .  
 Panel (c): Converge,  $r_1, r_2, p < 0$ . La trayectoria se adecua al caso de raíces reales:  $C \text{ y } G \ll A_1, B_1$ .  
 Panel (d): Igual que (c) pero la constante dominante es negativa.  
 Panel (e): Diverge,  $r_1 \text{ o } r_2 \text{ o } p > 0$ . Las constantes toman valores cercanos:  $A_1 \gg B_1 \gg C \gg G$ .  
 Panel (f): Diverge:  $r_1 \text{ o } r_2 \text{ o } p > 0$ . La trayectoria se adecua al caso de raíces reales:  $C \text{ y } G \ll A_1, B_1$ .

#### Ejemplo 4.16 La solución de la EDO

$$2y'' + 5y' + y - 2y = e^{-3t}; \quad y_0 = 0, y_0' = 0, y_0'' = 0,$$

En primer lugar, determinemos la solución complementaria. El polinomio característico de la EDO  $2r^3 + 5r^2 + r - 2 = 0$  puede ser factorizado como  $(2r-1)(r+2)(r+1) = 0$ , lo que nos permite afirmar que las raíces son reales y distintas. Asimismo, los elementos de la solución homogénea son linealmente independientes con el término de la EDO.

La solución particular es hallada a través del método de los coeficientes indeterminados,

$$y_p = Ae^{-3t} \quad y_p' = -3Ae^{-3t} \quad y_p'' = 9Ae^{-3t} \quad y_p''' = -27Ae^{-3t}$$

Reemplazando el intento en la EDO,

$$-14Ae^{-3t} = e^{-3t} \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{14}$$

De esta manera, la solución general de la EDO

$$y_t = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} - \frac{1}{14} e^{-3t}$$

y utilizando las condiciones iniciales obtenemos la siguiente trayectoria divergente

$$y_t = \frac{4}{105} e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-2t} - \frac{1}{14} e^{-3t}$$

Finalmente, el Teorema de Routh – Hurwitz confirma la divergencia de la trayectoria (ya que el término móvil es convergente, el teorema es aplicable),

$$|a_{n-1}| = 5 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \quad \blacklozenge$$

#### 4.4.1 Aplicación: una nota breve sobre ciclos

El comportamiento de trayectorias como las mostradas en la Figura No. 4.8 resulta ser un tópico de interés en muchas ciencias. Por ejemplo, en física la oscilación amortiguada es útil para modelar las vibraciones que genera un resorte luego de ser estirado, mientras que en ingeniería comportamientos oscilatorios permiten analizar y conocer fundamentos técnicos del sonido. En economía, estas herramientas son básicas en el estudio de variables con comportamiento *cíclico* y, en particular, en los denominados *ciclos económicos*<sup>18</sup>.

Se dice que una variable es periódica si existe algún número entero positivo,  $\tau$ , tal que

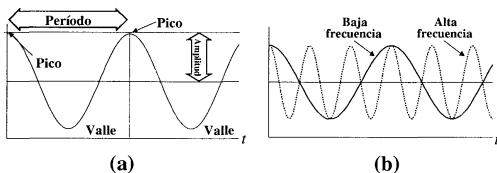
$$y_t = y_{t+\tau} \quad \dots(*)$$

Asimismo, el menor valor de  $\tau$  para que cumple con (\*) es denominado **período**. Fijémonos en el Panel (a) de la Figura No. 4.11 que presenta una oscilación

<sup>18</sup> Una de las definiciones pioneras de *ciclo económico* es dada por Burns y Mitchell: “[...] un ciclo consiste en expansiones que ocurren al mismo tiempo en un conjunto de actividades económicas, seguidas de recesiones generales, contracciones y rebotes que constituyen la fase expansiva del siguiente ciclo”. Ver Arthur F. Burner y Wesley C. Mitchell, *Measuring Business Cycles*, NBER, Nueva York, 1946.

uniforme y describe los elementos básicos de un ciclo. Se aprecia que el **período** viene dado por el tiempo necesario para pasar de pico a pico o de valle a valle; en otras palabras, el período es el tiempo requerido para que una oscilación completa sea ejecutada. Por su parte, la **amplitud** del movimiento viene dada por la “altura” (a partir de cero) de la función en algún instante.

Figura No. 4.11:  
Elementos básicos de un ciclo



No debe ser sorpresa para el lector el hecho de que las funciones trigonométricas pueden replicar la idea mencionada en el párrafo anterior. Consideremos la función  $y = \cos(\omega)$ ; ya que el círculo trigonométrico tiene un radio unitario, la circunferencia del mismo viene dada por  $2\pi$ . Luego, un ciclo corresponde a  $2\pi$  (medido en radianes) porque  $y$  toma todos sus posibles valores en el intervalo  $w \in [0, 2\pi]$ . Más aún, el patrón es repetido para cualquier entero  $n$  de forma que

$$\cos(\omega) = \cos(\omega + n2\pi)$$

El número  $\omega$  es denominado **frecuencia** y es equivalente al recíproco del período. Si el lector es observador, habrá caído en la cuenta de que la frecuencia es el número de oscilaciones que  $y$  realiza en una unidad de tiempo. En el Panel (b) de la Figura No. 4.11, se muestra el comportamiento de la función coseno con dos frecuencias distintas (baja y alta) y puede apreciarse que la función de mayor frecuencia, efectivamente presenta un menor período, lo que se traduce en un mayor número de oscilaciones por cada oscilación que la función de menor frecuencia ejecuta<sup>19</sup>.

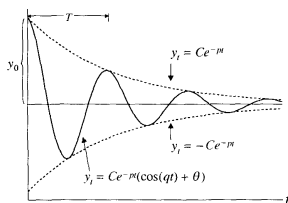
<sup>19</sup> En particular, si por ejemplo la frecuencia baja es  $w = \pi/2$  y la alta es  $w = 3\pi/2$ , la trayectoria con alta frecuencia oscilará 3 veces por cada oscilación de la trayectoria de baja frecuencia.

Como se ha discutido en este capítulo, la solución de una EDO de orden superior que contenga algún par de raíces complejas tendrá en principio, un comportamiento cíclico, como los precios en la Aplicación 4.2.2.1.c o en el Ejemplo 4.10. Centremos la atención en una EDO de segundo orden con raíces complejas y conjugadas. Como ya se desarrolló una trayectoria válida es

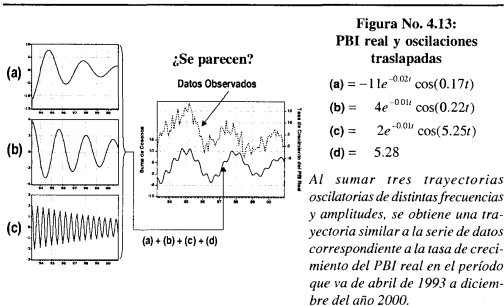
$$y_t = Ce^{-pt} \cos(qt + \theta) \quad \dots(**)$$

En primera instancia supongamos que  $p = 0$ . El período de  $y$  es  $T = 2\pi/q$  (un ejercicio similar ha sido desarrollado en el Ejemplo 4.10). Asimismo, la amplitud viene dada por la constante  $C$ , similar al Panel (a) de la Figura No. 4.11. Por otro lado, si  $p \neq 0$ , el período no se ve alterado; no obstante, se tiene una amplitud móvil. La Figura No. 4.12 muestra una trayectoria caracterizada por ser oscilante y amortiguada. En este caso, su amplitud es decreciente y viene dada por  $Ce^{pt}$  por lo que (\*\*) oscila entre  $Ce^{pt}$  y  $-Ce^{pt}$  (debido a que la función coseno toma sus valores extremos, 1 ó -1, periódicamente). Estrictamente hablando, el caso  $p \neq 0$  no posee un comportamiento cíclico ya que (\*) no se cumple. Sin embargo, si cada máximo (o mínimo) relativo puede ser visto como el fin de una oscilación y el comienzo de una nueva, la noción de período es válida. A pesar de que la amplitud se va reduciendo, el período y frecuencia de la vibración permanecen inalterados (¿Por qué?). El análisis es similar si  $p > 0$ .

**Figura No. 4.12:**  
**Amplitud móvil**



Hasta el momento se han discutido ciertos puntos que pueden resultar de gran utilidad desde una perspectiva teórica: una EDO de orden superior puede generar una trayectoria cuyo comportamiento cíclico es similar al de muchas variables económicas. Desde un enfoque empírico, la discusión sobre ciclicidad también resulta ser útil. Es difícil creer que una serie de datos se comporte como las trayectorias mostradas en las figuras de esta sección<sup>20</sup>. Afortunadamente, pueden obtenerse aproximaciones cercanas considerando más de un patrón oscilatorio o la suma de componentes de diversas frecuencias. Esta noción resulta ser la motivación de un conjunto de métodos empíricos denominado *econometría espectral*<sup>21</sup>.



Nota. El número (d) corresponde al promedio de los datos utilizados.

20 Existen importantes diferencias entre los ciclos considerados en esta sección y los *ciclos económicos*. Estos últimos no son periódicos y no tienen un periodo constante. “[...] esta secuencia de cambios no es periódica; en duración, los ciclos económicos varían desde más de un año hasta diez o doce años” (Ver Arthur F. Burns y Wesley C. Mitchell, *op. cit.* y ver, además, Robert Lucas, *op. cit.*)

21 Se recomienda al lector interesado consultar el sexto capítulo de Andrew C. Harvey, *Time series models*, 2nd ed., Massachusetts, The MIT Press, 1993. Asimismo, puede visitar la página web del economista danés Torben Mark Pedersen, <http://www.econ.ku.dk/tmp/>.

A modo de ilustración se ha realizado el ejercicio mostrado en la Figura No. 4.13. Se trata de replicar el comportamiento que ha seguido la tasa de crecimiento del PBI real desde abril de 1993 hasta diciembre del año 2000<sup>22</sup>. Para tales efectos, se suman tres componentes: uno de baja frecuencia (y alto período, (a)), uno de mediana frecuencia (b) y uno de alta frecuencia, (c). Estos componentes han sido ajustados por diversas amplitudes con el fin de obtener mejores aproximaciones. Finalmente, el lector puede comprobar que la trayectoria obtenida al traslapar diversas trayectorias equivale a desarrollar una EDO de orden 6 con tres pares de raíces complejas conjugadas.

#### 4.5 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

En muchas oportunidades pueden suscitarse problemas que requieren la formulación de un conjunto de ecuaciones diferenciales por ser resueltas de manera simultánea. Para tales motivos, en esta sección consideramos la noción de “sistemas de ecuaciones ordinarias”. En particular analizaremos estos sistemas cuando son lineales, dejando otros tópicos de interés y la posible presencia de no linealidad para el próximo capítulo.

Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** es un conjunto de EDO que relaciona una variable independiente con **varias** dependientes (en igual número que el de ecuaciones) y sus respectivas derivadas hasta ciertos órdenes. Análogamente al caso individual, el **orden** de un sistema viene dado por la derivada más elevada que figure en el mismo.

**Definición 4.2** Un sistema de  $m$  ecuaciones diferenciales de orden  $n$  viene dado por

$$F_1(t, y_1, \dots, y_m; y_1', \dots, y_m'; \dots; y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) = 0$$

$$F_2(t, y_1, \dots, y_m; y_1', \dots, y_m'; \dots; y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) = 0$$

$$\vdots$$

$$F_m(t, y_1, \dots, y_m; y_1', \dots, y_m'; \dots; y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) = 0$$

donde  $F_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) denota alguna forma funcional e  $y_j = f_j(t)$ . La **solución o integral** del sistema consiste en las funciones de la variable independiente que, introducidas en él, convierten sus ecuaciones en identidades.

<sup>22</sup> La serie utilizada corresponde a la variación porcentual a 12 meses del índice de PBI Real (1994 = 100) elaborada y publicada por el Banco Central de Reserva del Perú.

Por su parte, un **sistema lineal** de primer orden y de  $m$  ecuaciones con coeficientes constantes viene dado por

$$y'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j + P_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

o, de manera compacta,

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{P}_t$$

donde  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  es una matriz **no** singular, (de rango completo), es decir  $\mathbf{A}^{-1}$  existe.

#### 4.5.1 Sistemas lineales de primer orden: solución general

Consideremos el sistema de primer orden de dos variables

$$\begin{aligned} y'_{1t} &= a_{11}y_{1t} + a_{12}y_{2t} + P_{1t} \\ y'_{2t} &= a_{21}y_{1t} + a_{22}y_{2t} + P_{2t} \end{aligned}$$

donde  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) son constantes. En notación matricial, el sistema puede ser expresado como

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}_t + \mathbf{P}_t \quad \dots(20)$$

donde

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \end{bmatrix}$$

Tal y como se desarrolló anteriormente, la solución general de un sistema es la suma de una solución complementaria y una solución particular (Teorema 4.3, principio de superposición). Con el fin de determinar la solución complementaria ( $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ) del sistema, suponga que la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonal de modo que

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Sin duda, cada variable es independiente de la otra. Más aún, el sistema puede resolverse por separado. Bajo el supuesto establecido, la integral homogénea del sistema es

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{a_{11}t} & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$



Ahora bien, ¿cómo resolver el sistema si  $A$  no es diagonal? La manera más sencilla de hacerlo es acudir a *transformar las variables* de modo que obtengamos un sistema diagonal. Si se define

$$Z_t \equiv BY_t$$

Tendremos que

$$Z'_t \equiv BY'_t \rightarrow Z'_t = BAY_t \rightarrow Z'_t = BAB^{-1}Z_t$$

Si somos capaces de encontrar una matriz  $B$  de modo que  $BAB^{-1}$  sea diagonal, podremos afirmar que la solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

donde  $r_1$  y  $r_2$  son los elementos de la diagonal de  $BAB^{-1}$ . De esto se desprende que la solución del sistema para el vector  $Y$  es

$$Y_t = B^{-1}Z_t = B^{-1} \begin{bmatrix} e^{r_1 t} & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \dots(21)$$

El lector debe haber caído en la cuenta de que si  $BAB^{-1}$  es diagonal, luego  $B$  es la matriz conformada por los **vectores propios** de  $A$  y  $BAB^{-1}$  es una matriz diagonal cuyos elementos son los **valores propios** de  $A$ <sup>23</sup>. De esta manera, el sistema es resuelto al determinar los valores propios o característicos de  $A$  o, en otras palabras, al resolver la ecuación característica de  $A$

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0 \quad \dots(22)$$

lo que equivale a solucionar

$$\begin{aligned} r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= 0 \\ r^2 - \text{tr}(A)r + \det(A) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(23)$$

donde  $\text{tr}(A)$  es la *traza* de la matriz  $A$  y  $\det(A)$  es el *determinante* de la misma.

---

23 Un enfoque alternativo al adoptado en esta exposición se encuentra en el Apéndice B.

Para hallar la solución particular del sistema puede aplicarse el método de coeficientes indeterminados expuesto en la sección 4.3.2. Alternativamente, como se discutió en el Teorema 4.2, puede determinarse el **estado estacionario del sistema**, es decir, el punto donde ambas derivadas son nulas. Esta segunda opción es sencilla si el segundo término de (20) es constante (o si puede transformarse en un término constante). Bajo la condición  $Y' = \mathbf{0}$  y  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ ,

$$Y_p = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}$$

Una forma alternativa, aunque similar, de enfrentar un sistema como (20) se basa en aplicar los métodos previamente analizados. Si prestamos nuestra atención al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad Y' - AY_t = \mathbf{0} \quad \dots(24)$$

puede conjeturarse  $y_1 = H_1 e^{rt}$  e  $y_2 = H_2 e^{rt}$  que cumplen con

$$y_1' = ry_1 \quad \text{e} \quad y_2' = ry_2.$$

De (24) se tiene

$$(a_{11} - r)y_1 + a_{12}y_2 = 0 \quad a_{21}y_1 + (a_{22} - r)y_2 = 0$$

lo que nos lleva a la ecuación (reemplazando las formas funcionales de  $y$ )

$$\begin{bmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots(25)$$

La solución **no trivial** ( $H_1 \neq 0$  y  $H_2 \neq 0$ ) de este sistema es totalmente equivalente a hallar  $r$  según (22) o (23). Un aspecto importante es que (25) puede ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

donde el vector no nulo  $(H_1, H_2)$  es un **vector propio** de  $A$ . Con ello, el lector puede deducir que si los valores de propios de  $A$  son iguales, la matriz  $B$ , discutida líneas arriba, es singular y por ende, la exposición anterior sobre el desarrollo del sistema (20) ó (24) no es aplicable.

**Nota.** En muchos casos, pueden presentarse sistemas de la forma

$$\Phi Y' = \Theta Y_t + N_t$$

Si  $\Phi$  es no singular, el sistema puede ser **normalizado**, de modo que se asemeje a (20)

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}_r + \mathbf{P}_r \quad \text{donde } \mathbf{A} = \Phi^{-1}\Theta \quad \text{y } \mathbf{P}_r = \Phi^{-1}\mathbf{N}_r \spadesuit$$

Analizaremos, a continuación las distintas soluciones del sistema homogéneo (24), de acuerdo con la naturaleza de las raíces de (23). En primer lugar, si estas raíces *son reales y distintas* es claro que la solución al sistema es

$$\begin{bmatrix} y_{1r} \\ y_{2r} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} H_{11}e^{r_1t} \\ H_{21}e^{r_1t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} H_{12}e^{r_2t} \\ H_{22}e^{r_2t} \end{bmatrix} \quad \dots(26)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias que deben ser determinadas a partir de las condiciones iniciales de las trayectorias de  $y_1$  e  $y_2$ , hecho que se traduce en una solución única del sistema. Asimismo, el lector debe notar que la solución en este caso es totalmente equivalente a (21), teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 4.16** El sistema  $y_1' = 2y_1 - y_2$  e  $y_2' = -y_1 + 2y_2$  tiene como solución

$$\begin{bmatrix} y_{1r} \\ y_{2r} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \spadesuit$$

Por otro lado, si las raíces son *reales e iguales* entre sí, puede comprobarse que

$$\begin{bmatrix} y_{1r} \\ y_{2r} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} H_{11}e^{rt} \\ H_{21}e^{rt} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} (H_{12} + H_{11}t)e^{rt} \\ (H_{22} + H_{21}t)e^{rt} \end{bmatrix} \quad \dots(27)$$

Un caso especial (implícitamente excluido en el análisis) se da cuando, en (24),  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonal con elementos iguales (por lo que  $\mathbf{B}$  es singular), esto es

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

donde la ecuación característica de  $\mathbf{A}$  es resuelta solo si  $r = a$ . La solución general es, obviamente,  $y_1 = H_1 e^{at}$  e  $y_2 = H_2 e^{at}$  y, a diferencia de los casos anteriores, las constantes  $H_1$  y  $H_2$  son arbitrarias. Por ello, sin pérdida de generalidad puede imponerse  $H_1 = H_2 = 1$  lo que se traduce en

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad \dots(28)$$

Por último, si las raíces del sistema son *complejas conjugadas*,  $r_{1,2} = p \pm qi$ , entonces

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} H_{11} e^{(p+qi)t} \\ H_{21} e^{(p+qi)t} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} H_{12} e^{(p-qi)t} \\ H_{22} e^{(p-qi)t} \end{bmatrix}$$

Dado que los valores propios de A obtenidos son números complejos, sus vectores propios (es decir, la matriz B) contendrán números complejos. Por ello, si  $H_{11} = \alpha_1 + i\alpha_2$ ,  $H_{21} = \beta_1 + i\beta_2$  y  $H_{12} = \alpha_1 - i\alpha_2$ ,  $H_{22} = \beta_1 - i\beta_2$  y utilizando las **relaciones de Euler**,

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = e^{pt} \left( C_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos(qt) - \alpha_2 \operatorname{sen}(qt) \\ \beta_1 \cos(qt) - \beta_2 \operatorname{sen}(qt) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \alpha_1 \cos(qt) + \alpha_2 \operatorname{sen}(qt) \\ \beta_1 \cos(qt) + \beta_2 \operatorname{sen}(qt) \end{bmatrix} \right) \quad \dots(29)$$

**Ejemplo 4.17** El sistema  $y'_1 = -y_1 - y_2$  e  $y'_2 = y_1 - y_2$  tiene como raíces  $r_{1,2} = -1 \pm i$ . Así,

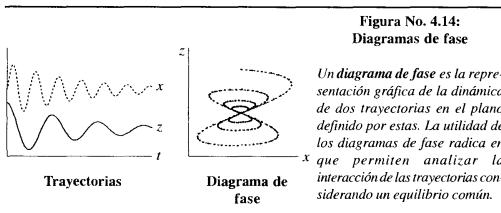
$$B^{-1} = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 0$ . Luego, la solución del sistema es

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = e^{-t} \left( C_1 \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(qt) \\ \cos(qt) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(qt) \\ \cos(qt) \end{bmatrix} \right) \quad \blacklozenge$$

#### 4.5.2 Análisis gráfico y estabilidad

A continuación, se discutirán los principales aspectos concernientes con la dinámica de las soluciones de sistemas homogéneos como (24). Para tales efectos es necesario introducir el concepto de **diagrama de fase** que será detallado y analizado con mayor rigor en los siguientes capítulos. Lo relevante en esta sección es concebir a un **diagrama de fase** como la representación gráfica de dos trayectorias en el plano  $(y_1, y_2)$  o una herramienta que permite visualizar la dinámica intrínseca en un sistema. El primer panel de la Figura No. 4.14 presenta las trayectorias de dos variables,  $x$  y  $z$ , mientras que el segundo panel presenta el diagrama de fase de ambas trayectorias, en el plano  $(x, z)$



En el sistema (24), sin lugar a dudas,  $(y_1, y_2) = (0, 0)$  es un **punto de equilibrio** o un estado estacionario ya que en ese punto  $y_1' = y_2' = 0$ . El comportamiento dinámico de la solución de (24) depende, evidentemente, de los valores de las raíces del sistema o de los valores propios de la matriz  $A$ . A continuación desarrollaremos algunos seis al respecto.

#### 4.5.2.1 Raíces reales y distintas

Según lo desarrollado en la sección precedente, de (26) se tiene

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 H_{11} e^{r_1 t} + C_2 H_{12} e^{r_2 t} \\ y_2 &= C_1 H_{21} e^{r_1 t} + C_2 H_{22} e^{r_2 t} \end{aligned} \quad \dots(26')$$

En primer lugar, supongamos que ambas raíces son negativas. Más aún, sin pérdida de generalidad,  $r_1 < r_2 < 0$ . Dado que  $r_1$  y  $r_2$  son menores que cero,  $y_1$  e  $y_2$  se aproximan a cero conforme  $t \rightarrow \infty$  sin necesidad de considerar las condiciones iniciales de estas trayectorias. De ello, puede decirse que el punto  $(0, 0)$  es un equilibrio **globalmente estable**. Si  $C_2 = 0$ , de (26'),

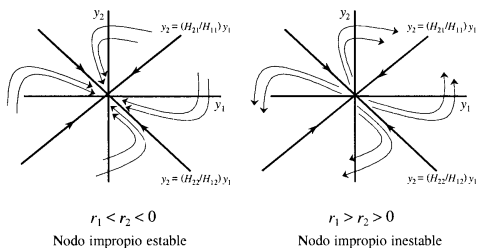
$$y_1 = C_1 H_{11} e^{r_1 t}, \quad y_2 = C_1 H_{21} e^{r_1 t} \quad \text{de modo que } y_2 = (H_{21} / H_{11}) y_1$$

por lo que ambas trayectorias se aproximan a cero conforme el tiempo transcurre, en el plano  $(y_1, y_2)$  sobre la recta  $y_2 = (H_{21} / H_{11}) y_1$ . Por su parte, si  $C_1 = 0$ , las trayectorias se desplazan hacia el origen mediante la relación  $y_2 = (H_{22} / H_{12}) y_1$ . Si  $C_1 \neq 0$  y  $C_2 \neq 0$ , las trayectorias sobre el plano son curvas. De (26') se obtiene

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{(C_1 H_{12} / C_2) e^{(r_1 - r_2)t} + H_{22}}{(C_1 H_{11} / C_2) e^{(r_1 - r_2)t} + H_{21}}$$

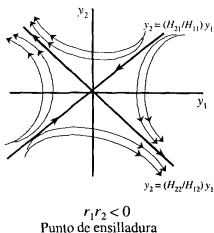
dado que  $r_1 < r_2$   $y_2/y_1$  tiende a  $H_{22}/H_{21}$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Ello implica que las trayectorias se aproximan tangentes a  $y_2 = (H_{22}/H_{21})y_1$ . Este análisis es similar cuando ambas raíces son positivas, exceptuando que  $y_1$  e  $y_2$  son trayectorias explosivas, por lo que el punto de equilibrio es **inestable**. Es decir, cualquier solución no trivial del sistema se alejará permanentemente del origen. En cualquiera de los casos mencionados hasta el momento, el punto de equilibrio es denominado **nodo impropio** o, simplemente, **nodo**.

**Figura No. 4.15:**  
Raíces reales y distintas: nodos impropios



Una situación distinta se da cuando las raíces son reales y de signo opuesto. Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que  $r_2 > 0 > r_1$ . La dinámica del sistema sobre la recta  $y_2 = (H_{21}/H_{11})y_1$  se aproxima al origen conforme  $t \rightarrow \infty$  mientras que, por el contrario, las trayectorias sobre la recta  $y_2 = (H_{22}/H_{12})y_1$  se aleja de él. El lector puede comprobar que las rectas mencionadas desempeñan el papel de asíntotas de las trayectorias. De hecho, como se muestra en la Figura No. 4.16 el equilibrio en este caso es inestable. En esta situación,  $(0, 0)$  es denominado **punto de ensilladura** y las trayectorias convergen a él si y *solo si* las condiciones iniciales del problema ubican a  $y_1$  e  $y_2$  sobre la recta  $y_2 = (H_{21}/H_{11})y_1$ , denominada **senda de ensilladura** o **rama estable**.

**Figura No. 4.16:**  
Raíces reales y distintas: punto de ensilladura



**Ejemplo 4.17** Considere el siguiente modelo de economía cerrada

$$\begin{aligned} S_t &= sY_t \\ Q' &= S_t - I_0 \\ Y' &= a(Q_t - Q'_t) \\ Q'_t &= bY_t + bhY' \\ a, b > 0 \quad 0 < s, bh < 1 \end{aligned}$$

La primera ecuación define al ahorro agregado  $S$ , como proporción constante,  $s$ , de la demanda agregada,  $Y$ . La segunda ecuación establece que la dinámica del nivel de producción,  $Q$ , viene dada por el diferencial entre el ahorro (que es igual a la inversión) en el instante  $t$  y un nivel de inversión inicial, denotado por  $I_0$ . Asimismo, la demanda agregada se ajusta según el diferencial entre un nivel de producción deseado  $Q'$  (definido por la cuarta ecuación) y el nivel de producción observado en  $t$ , tal y como se aprecia en la tercera ecuación. El modelo puede ser expresado según el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} Q' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ \frac{-a}{1-bh} & \frac{-a}{1-bh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El equilibrio de largo plazo, tanto de  $Q$  como de  $Y$ , viene dado por la solución particular del sistema,

$$\begin{bmatrix} Q_p \\ Y_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} s & 0 \\ \frac{-ab}{1-bh} & \frac{-a}{1-bh} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -I_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} I_0 \\ \frac{b}{s} I_0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, utilizando (23) la ecuación característica está dada por

$$r^2 + \left(\frac{a}{1-bh} - s\right)r + \left(\frac{-sa}{1-bh}\right) = 0$$

con lo que las raíces del sistema son reales y de signo opuesto,

$$\begin{aligned} r_1 &= s > 0 \\ r_2 &= \frac{-a}{1-bh} < 0 \end{aligned}$$

Con ello, puede afirmarse que el equilibrio del sistema ( $Q_p, Y_p$ ) es un punto de ensilladura sin necesidad de considerar el valor numérico de los parámetros del modelo. Asimismo, el lector puede comprobar que la solución complementaria del sistema (calculando la matriz  $B^{-1}$ ) es

$$\begin{bmatrix} Q \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-a-sbh}{ab} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{st} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-a}{1-bh}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

por lo que la senda de ensilladura es igual a la recta  $Q = \frac{-ab}{s+a-sbh} Y$  . ♦

#### 4.5.2.2 Raíces reales e iguales

En este caso, la solución general (sin considerar (28)) de la forma

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 H_{11} e^{rt} + C_2 (H_{12} + H_{11}t) e^{rt} \\ y_2 &= C_1 H_{21} e^{rt} + C_2 (H_{22} + H_{21}t) e^{rt} \end{aligned} \quad \dots(27')$$

Si  $r < 0$  ambas trayectorias convergen a cero si  $t \rightarrow \infty$ . Si  $C_2 = 0$ , las soluciones se relacionan según  $y_2 = (H_{22}/H_{21})y_1$ , de manera similar a los casos de la sección 4.5.2.1. Si  $C_2 \neq 0$ ,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{(C_1 H_{12} / C_2) + H_{22} + H_{12}t}{(C_1 H_{11} / C_2) + H_{21} + H_{11}t}$$

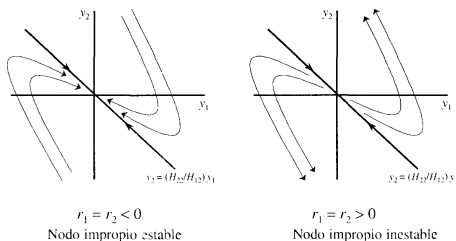
de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_2}{y_1} = \frac{H_{12}}{H_{11}}$$



Esto es, las trayectorias se aproximan a  $(0, 0)$  y son tangentes, en ese punto, a  $y_2 = (H_{22}/H_{21})y_1$ . En cambio, cuando  $r > 0$  ambas trayectorias se alejan del equilibrio siendo el resto de sus características similares. Los puntos de equilibrio mostrados en la Figura No. 4.17 son denominados, al igual que los correspondientes a las Figura No. 4.15, **nodos impropios**.

**Figura No. 4.17:**  
**Raíces reales e iguales: nodos impropios**

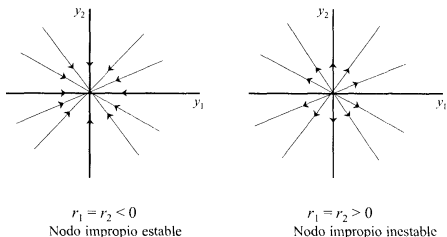


Si prestamos la atención a la solución mostrada en (28), esto es

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{at} \\ y_2 &= C_2 e^{at} \end{aligned}$$

veremos que  $y_2/y_1 = C_2/C_1$ , de modo que para  $C_1 \neq 0$  y  $C_2 \neq 0$ , las trayectorias en el plano son líneas rectas. En los extremos, si  $C_1 = 0$  [ $C_2 = 0$ ] la trayectoria viene dada por el eje  $y_2$  [ $y_1$ ]. Finalmente, como se muestra en la Figura No. 4.19, si  $r < 0$  el sistema es estable y las trayectorias se aproximan a  $(0, 0)$ ; si  $r > 0$ , las trayectorias se alejan del origen. En este caso puntual, el equilibrio es denominado **nodo propio**.

**Figura No. 4.18:**  
**Raíces reales e iguales: nodos propios**



#### 4.5.2.3 Raíces complejas conjugadas

Cuando  $r_{1,2} = p \pm qi$ , la solución general del sistema es

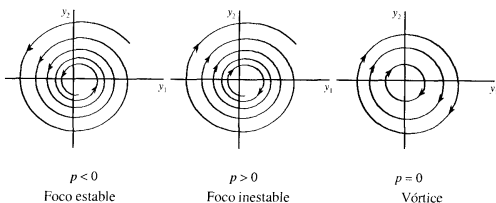
$$\begin{aligned} y_1 &= e^{pt} [C_1(\alpha_1 \cos(qt) - \alpha_2 \sin(qt)) + C_2(\alpha_1 \cos(qt) + \alpha_2 \sin(qt))] \\ y_2 &= e^{pt} [C_1(\beta_1 \cos(qt) - \beta_2 \sin(qt)) + C_2(\beta_1 \cos(qt) + \beta_2 \sin(qt))] \end{aligned} \quad \dots(29')$$

Si  $p < 0$ , el sistema es globalmente estable ( $y_1$  e  $y_2 \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ ). Por el contrario, si  $p > 0$ , el sistema es inestable. El lector puede comprobar que las trayectorias en el plano generan un espiral alrededor de  $(0, 0)$ . En el primer caso, el espiral va reduciéndose hasta llegar al equilibrio mientras que en el segundo caso el espiral se incrementa sistemáticamente (Figura No. 4.19). Intuitivamente, de (29') se desprende que si  $y_1$  aumenta,  $y_2$  disminuye indefinidamente. Si  $p < 0$  estas discrepancias se ven reducidas conforme  $t$  aumenta; por el contrario, las diferencias entre  $y_1$  e  $y_2$  se enfatizan cuando  $t$  aumenta. Asimismo, puede comprobarse que la dirección que toma la espiral depende de los valores de  $\alpha_{21}$ . Análiticamente,  $y_1$  e  $y_2$  pueden ser expresadas en sus coordenadas polares, ejercicio a cargo del lector<sup>24</sup>. En estos casos, el origen es denominado **foco**.

<sup>24</sup> Una explicación clara de este caso se encuentra en Akira Takayama, *Analytical Methods in Economics*, Harvester Wheatsheaf, 1994, pp. 397 - 403.

Finalmente, si las raíces son imaginarias puras, esto es  $p = 0$ , se sabe que las trayectorias no convergen a  $(0, 0)$ , por lo que no se comportan como espirales. El movimiento de cada una es oscilante y uniforme por lo que su relación en el plano es una curva cerrada o elipses<sup>25</sup>. El punto de equilibrio en este caso es conocido como **centro o vórtice**.

**Figura No. 4.19:**  
**Raíces complejas: focos y vórtices**



#### 4.5.3 Estabilidad: aspectos analíticos

A partir del análisis gráfico de la sección anterior puede postularse un conjunto de condiciones de estabilidad en sistemas de EDO lineales. Un primer punto se centra en que, de existir un término móvil, este debe ser convergente. Dicho esto, volveremos a concentrar el análisis en el caso homogéneo. Hasta el momento pueden esbozarse cuatro conclusiones sobre el comportamiento de las trayectorias de un sistema:

- El punto de equilibrio  $(0, 0)$  en el sistema lineal (24) es globalmente estable si y solo si la parte real de ambas raíces es negativa.
- El equilibrio es un nodo si y solo si las raíces del sistema son reales y del mismo signo.
- El punto de equilibrio es un punto de ensilladura si y solo si las raíces del sistema son reales y con signos opuestos.

<sup>25</sup> Ello se deduce al resolver la ecuación diferencial que se deduce de (24),  $\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$

- Un sistema arroja trayectorias espirales (es decir, el equilibrio es un foco) si las raíces son complejas conjugadas. Si estas son imaginarias, el equilibrio será un vórtice.

Es necesario notar que, de (23) se tiene que

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A})}]$$

Asimismo, por propiedad,

$$r_1 + r_2 = \text{tr}(\mathbf{A}) \quad r_1 r_2 = \det(\mathbf{A}) \quad \dots(30)$$

Luego, las condiciones mencionadas líneas arriba pueden traducirse en

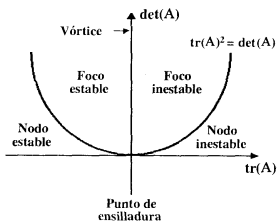
- El punto de equilibrio de un sistema es globalmente estable si  $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$  y  $\det(\mathbf{A}) > 0$ .
- El equilibrio es un nodo si  $\det(\mathbf{A}) > 0$ .
- El equilibrio es un punto de ensilladura si  $\det(\mathbf{A}) < 0$ .
- El equilibrio es un foco si  $\text{tr}(\mathbf{A})^2 < 4\det(\mathbf{A})$ . Por su parte, el equilibrio es un vórtice si  $\text{tr}(\mathbf{A})$  es cero y  $\det(\mathbf{A}) > 0$ .

**Cuadro No. 4.6:**  
**Equilibrios en sistemas de EDO**

$\det(\mathbf{A})$	$\text{tr}(\mathbf{A})$	$\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4\det(\mathbf{A})$	Tipo de equilibrio	Valores Propios de $\mathbf{A}$
$< 0$		$> 0$	Ensilladura	$r_1 > 0 > r_2$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	Nodo inestable	$r_1 > r_2 > 0$
$> 0$	$< 0$	$> 0$	Nodo estable	$r_2 < r_1 < 0$
$> 0$	$> 0$	$= 0$	Nodo propio inestable	$r_1 = r_2 > 0$
$> 0$	$< 0$	$= 0$	Nodo propio estable	$r_1 = r_2 < 0$
$> 0$	$> 0$	$< 0$	Foco (espiral) inestable	$p > 0$
$> 0$	$< 0$	$< 0$	Foco (espiral) estable	$p < 0$
$> 0$	$= 0$	$< 0$	Vórtice	$p = 0$
$= 0$	$> 0$	$> 0$	Sin equilibrio o equilibrios múltiples inestables	$r_1 > r_2 = 0$
$= 0$	$< 0$	$> 0$	Sin equilibrio o equilibrios múltiples estables	$r_1 < r_2 = 0$

El Cuadro No. 4.6 resume las principales condiciones de estabilidad que son, a su vez, ilustradas en la Figura No. 4.20. Cabe aclarar que (30) es una propiedad válida incluso para matrices (sistemas) de  $m \times m$  (variables).

Figura No. 4.20:  
Equilibrios en sistemas de EDO



**Ejemplo 4.18 (Modelo de estabilización).** En este modelo el ingreso nacional de una economía,  $Y$ , se comporta según la ecuación:

$$Y' = \alpha(Y_t^d - Y_t) \quad \alpha > 0$$

que implica un ajuste por excesos de demanda, definida como:

$$Y_t^d = G_t + (1 - g)Y_t \quad 0 < g < 1$$

donde  $G_t$  es el gasto público en el instante  $t$  y  $g$  es la propensión marginal al gasto, por lo que el término  $(1 - g)Y$  es interpretable como una demanda privada. Bajo esta dinámica, el gobierno sigue la siguiente regla de gasto

$$G' = \delta(B(Y_t) - G_t) \quad \delta > 0$$

Es decir, el gasto público varía proporcionalmente según las diferencias existentes entre un nivel de gasto "deseado", dado por la función objetivo del gobierno  $B(Y)$ , y el nivel observado de gasto. Si en el instante  $t$  el gasto público es mayor que el objetivo,  $G'$  será negativo de modo que la discrepancia es corregida. Suponiendo que en el instante  $t = 0$ , el nivel de gasto fue el deseado, el funcional objetivo del gobierno puede formularse como

$$B(Y_t) = G_0 + \lambda(Y_0 - Y_t) \quad \lambda > 0$$

donde  $G_0$  es el nivel de gasto en  $t = 0$  e  $Y_0$ , el respectivo valor del ingreso nacional en ese instante. De hecho,  $G_0 = gY_0$ . Así, si  $Y_t < Y_0$  el nivel de gasto deseado en  $t$  será mayor a  $G_0$ , aplicando así una política expansiva con la meta de recuperar los niveles de ingreso deseados. Por el contrario, el modelo predice una política fiscal restrictiva si  $Y_t > Y_0$ . Las ecuaciones anteriores pueden ser representadas por el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} Y' \\ G' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha g & \alpha \\ -\delta \lambda & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(g + \lambda)Y_0 \end{bmatrix}$$

Dado que el término del sistema es constante, la solución particular del mismo (es decir, los valores de largo plazo tanto del ingreso nacional como del gasto público), es

$$\mathbf{Y}_p = -\begin{bmatrix} -\alpha g & \alpha \\ -\delta \lambda & -\delta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta(g + \lambda)Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ gY_0 \end{bmatrix}$$

Dado que, en este caso,  $\det(A) = \alpha\delta(g + \lambda) > 0$  se descarta la posibilidad de que el punto de equilibrio sea un punto de ensilladura. Por su parte,  $\text{tr}(A) = -(\alpha g + \delta) < 0$  limitan la caracterización del equilibrio en un nodo (propio o impropio) estable o un foco estable, de acuerdo con el valor que tome el discriminante en

$$r_{1,2} = \frac{1}{2}[(\alpha g + \delta) \pm \sqrt{(\alpha g + \delta)^2 - 4\alpha\delta\lambda}]$$

Este hecho resulta ser la conclusión central del modelo desarrollado: si se establece un regla de gasto como la planteada, la estabilidad es garantizada (aunque no necesariamente el tipo de trayectoria), y se enfatiza así la importancia de un política fiscal contracíclica. ♦

#### 4.5.4 Consideraciones finales

El lector habrá notado que la resolución de un sistema homogéneo de EDO de primer orden con dos variables (dos ecuaciones) implica el desarrollo de una ecuación característica de segundo orden. En general, si se conjetura  $\mathbf{Y} = \mathbf{H}e^{rt}$  en el sistema

$$\mathbf{Y}^{(n)} + \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{Y}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{A}_2 \mathbf{Y}'' + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}' + \mathbf{A}_0 \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad \dots(31)$$

se tiene como ecuación característica

$$\begin{aligned} [r^n + A_{n-1}r^{n-1} + \dots + A_2r^2 + A_1r + A_0]He^{rt} &= 0 \\ T(r)He^{rt} &= 0 \end{aligned}$$

Dado que  $e^{rt} \neq 0$  y la solución no trivial de (31) implica que  $H \neq 0$ , entonces  $T(r)$  debe ser una matriz singular, por lo que debe hallarse el valor de  $r$  que satisfaga  $\det(T(r)) = 0$ . En otras palabras, la solución homogénea del sistema es hallada a partir de la resolución de un polinomio de orden  $n \times m$ , donde  $m$  es el número de ecuaciones del sistema. Ante ello, las condiciones de estabilidad global discutidas anteriormente siguen siendo válidas. Esto es, el sistema es estable si la parte real de todas sus raíces es negativa. No obstante, la clasificación del punto de equilibrio depende de la naturaleza de estas raíces. Por ejemplo, el sistema tendrá como punto de equilibrio a un nodo estable si todas sus raíces son distintas, reales y negativas; por el contrario, y por dar un caso puntual, si el sistema tiene dos raíces reales y distintas, tres reales e iguales y dos imaginarias puras, el punto de equilibrio no está claramente definido ya que, al igual que el caso individual, la estabilidad del sistema dependerá del valor tanto de la parte real de las raíces como de las constantes asociadas con ellas.

**Ejemplo 4.19** La representación matricial del sistema

$$y_1' = y_2 \quad y_2' = y_3 \quad y_3' = -y_1 \text{ es}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica y raíces del sistema vienen dadas por

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 0 \\ 0 & -r & 1 \\ -1 & 0 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - 1 = 0 \rightarrow \begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ r_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Por ello,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = e^{-\frac{1}{2}t} \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Así, un sistema de primer orden con tres variables posee un polinomio característico de tercer grado. ♦

**Ejemplo 4.20 (Modelo de estabilización, otra vez).** Retomemos el modelo del Ejemplo 4.18 con ciertas variaciones:

$$\begin{aligned} Y' &= \alpha \int_0^t (Y_z^d - Y_z) dz & \alpha > 0 \\ Y_t^d &= G_t + (1-g)Y_t & 0 < g < 1 \\ G' &= \delta(B(Y_t) - G_t) & \delta > 0 \\ B(Y_t) &= G_0 + \lambda \int_0^t (Y_0 - Y_z) dz - \beta Y_t & \lambda, \beta > 0 \end{aligned}$$

La diferencia de este ejemplo con el Ejemplo 4.18 se centra, en primer lugar, en que el ajuste del ingreso nacional se da por excesos de demanda acumulados. Asimismo, el funcional objetivo del gobierno considera la evolución del diferencial entre el nivel inicial de ingreso y el corriente. Al reemplazar este funcional en la ecuación de variación del gasto obtendremos un *regla con retroalimentación*. Reemplazando la segunda ecuación en la derivada de la primera e incluyendo la cuarta ecuación en la derivada de la tercera se obtiene

$$\begin{aligned} Y'' &= \alpha(G_t - gY_t) \\ G'' &= \delta(\lambda(Y_0 - Y_t) - \beta Y' - G') \end{aligned}$$

que es un sistema de segundo orden con dos variables cuya notación matricial es

$$\begin{bmatrix} Y'' \\ G'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta\beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y' \\ G' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha g & -\alpha \\ \delta\lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\lambda Y_0 \end{bmatrix}$$

El término del sistema es constante lo que sugiere plantear una solución particular  $Y_p = K$ , que, a su vez, implica  $Y'' = Y' = 0$ . Al evaluar esta conjetura en el sistema, obtenemos el equilibrio de largo plazo, previamente determinado

$$Y_p = \begin{bmatrix} \alpha g & -\alpha \\ \delta\lambda & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\lambda Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ gY_0 \end{bmatrix}$$

Las raíces que resuelven la solución complementaria del sistema, satisfacen

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta\beta & \delta \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \alpha g & -\alpha \\ \delta\lambda & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} r^2 + \alpha g & -\alpha \\ \delta(\beta r + \lambda) & r^2 + \delta r \end{vmatrix} = 0$$



Así, la solución del sistema es lograda tras el desarrollo de un polinomio de *cuarto orden*

$$P(r) = r^4 + \delta r^3 + \alpha \beta r^2 + \alpha \delta (g + \beta)r + \alpha \delta \lambda = 0 \quad \blacklozenge$$

Por otra parte, hasta el momento la resolución de los sistemas ha implicado el manejo de matrices, determinantes y valores propios. Esta forma de proceder es conocida como el **método matricial**. Paralelamente, existe un **método algebraico** (un poco más práctico) que será ilustrado en el siguientes ejemplo y consiste en la reducción de un sistema de  $m$  ecuaciones de orden  $n$  en un EDO de orden  $n \times m$ .

**Ejemplo 4.21** Resolver el sistema

$$\begin{aligned}y' &= t + y + z \\z' &= 2t - 4y - 3z \\y_0 &= 1 \quad z_0 = 0\end{aligned}$$

Al derivar la primera ecuación del sistema se obtiene

$$y'' = 1 + y' + z' = 1 + (t + y + z) + (2t - 4y - 3z) = 3t - 3y + 2z + 1$$

Por otra parte, de la primera ecuación se desprende que

$$z = y' - t - y \quad \dots(*)$$

con lo que, sustituyendo en la expresión hallada para  $y''$ ,

$$y'' = 3t - 3y + 2y' + 2t + 2y + 1$$

por lo que se obtiene la EDO no homogénea de segundo orden

$$y'' + 2y' + y = 5t + 1$$

Obviando algunos pasos intermedios (que el lector puede comprobar) y utilizando el método de coeficientes indeterminados, la solución general de la EDO viene dada por

$$y_t = (C_1 + C_2 t)e^{-t} + 5t - 9$$

Al derivar esta expresión y reemplazar lo hallado en (\*) se obtiene la expresión

$$z_t = (C_2(1 - 2t) - 2C_1)e^{-t} - 6t + 14$$

Analizando las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned}C_1 - 9 &= 1 \\C_2 - 2C_1 + 14 &= 4\end{aligned} \quad \rightarrow \quad C_1 = 10, C_2 = 6$$

Así, la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales planteadas es

$$\begin{aligned}y_t &= (10 + 6t)e^{-t} + 5t - 9 \\z_t &= (14 + 12t)e^{-t} - 6t + 14 \quad \blacklozenge\end{aligned}$$

Un aspecto final, de gran utilidad en particular para el siguiente capítulo, se centra en el hecho de que una ecuación diferencial de orden  $n$  puede ser expresada como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden, a través de manipulaciones algebraicas simples. El sistema resultante de esta manipulación se denomina **sistema equivalente**. A modo de ilustración, la EDO de tercer orden

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

puede ser expresada, por sustitución, como

$$\begin{aligned}y' &= x_1 & y'' &= x_2 = x_1' & y''' &= x_2' \\ \begin{bmatrix} y' \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

**Ejemplo 4.23.** La EDO  $y'' + 3y' - 4y = 0$  es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}y' &= x & y'' &= x' \\ \begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\end{aligned}$$

cuyas raíces son  $r_{1,2} = \frac{1}{2}[-3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 4(4)}]$ , es decir,  $r_1 = 4$  y  $r_2 = 1$ . Luego,

$$y_t = C_1 e^{4t} + C_2 e^t \quad \blacklozenge$$

## Ejercicios

Con el procedimiento presentado en el Cuadro No. 4.1, resolver las siguientes EDO lineales de primer orden (considere en todos los casos que  $y_0 = 1$ ):

- |  |  |
|--|--|
| 1. $ty' = y$                                     | 2. $y' + 3y = e^{-2t}$                             |
| 3. $y' + y = \cos(e^t)$                          | 4. $2y' + 4y = 1$                                  |
| 5. $y' + ty = 0$                                 | 6. $y' + y = e^{-t}$                               |
| 7. $y' + y = (1 + e^t)^{-1}$                     | 8. $y' = -4ty^2$                                   |
| 9. $ty' - y = t$                                 | 10. $y' + 5y/t = t$                                |
| 11. $t^2y' + 3ty + 2t^5 = 0$                     | 12. $ty' - t = -1$                                 |
| 13. $2(t^3 + 1)y' = -3yt$                        | 14. $y' + y = t^2$                                 |
| 15. $y' - 3y = 4t^3$                             | 16. $y' + ay/t = bt^2 \quad (a, b \in \mathbb{R})$ |
| 17. $y' - 3y = t^2 + e^t \operatorname{sen}(2t)$ | 18. $y' + \sqrt{1-t^2}y = t \quad t < 1$           |
| 19. $y' - te^t = e^t$                            | 20. $y' + 2ty = te^{-t^2}$                         |
| 21. $y' - t^2y = e^t$                            | 22. $y' + \operatorname{sen}(t)y + t^3 = 0$        |

**23. Crecimiento exponencial.** Elabore un modelo de crecimiento poblacional para el Perú si, según datos del INEI, en 1900 la población ascendía a 3.8 millones de habitantes; en 1950, a 7.6, en 1990 a 21.6 y en el año 2000 a 25.7 millones de personas. En primer lugar, considere un comportamiento único de 1900 a 2000. Luego, plantee otro modelo con dos comportamientos distintos: el primero, de 1900 a 1950 y el segundo de 1950 a 1990. Finalmente, plantee tres períodos: de 1900 a 1950, de 1950 a 1990 y de 1990 a 2000.

### 24. Sobre interés compuesto

- Ud. desea destinar un monto de 1000 en una inversión segura que se compone continuamente. Si el interés que reditúa esta inversión es de 8% anual, ¿cuánto será su capital en 5 años?
- Si desea que una inversión al 8% anual (compuesto continuamente) tenga el valor de 10,000 € a 10 años, ¿cuánto debe invertir hoy?
- ¿Cuánto tiempo se necesita para que una inversión de  $A$  a una tasa  $r$  duplique su valor? ¿Y para que lo triplique?

**25. Una de física.** La ley de enfriamiento de Newton establece que, en general, la temperatura de un cuerpo en proceso de enfriamiento cambia en razón proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente.

te. Así, si  $T_t$  es la temperatura del cuerpo en el tiempo  $t$  y la del medio ambiente es  $a$ , plantee una EDO para esta ley y resuélvala.

**26. Tributación.** Se sabe que excesos tributarios (impuestos muy elevados) distorsionan la economía. El gobierno ha identificado que el ISC a los combustibles es ineficiente y perjudica, además, a las exportaciones. Por ello, se ha programado una reducción paulatina de este impuesto de tal forma que no desequilibre el presupuesto fiscal bruscamente. La variación temporal de la tasa impositiva será la siguiente:

$$s' + 2s = 0$$

- (a) Si la tasa inicial es de 2%, y se planea reducirla durante 2 años, ¿cuál será la tasa final? (s está expresado en porcentaje).  
 (b) Por otro lado, la recaudación tributaria del gobierno se define por:

$$r = -s^2 + 2s + 2$$

- ¿En qué año se produce la recaudación máxima?  
 (c) Se sabe, además, que la pérdida de ingreso fiscal, debido a menores tasas, se puede compensar con un incremento en las exportaciones, que se relacionan a la tasa ISC de la siguiente forma:

$$x = -as + b \quad a, b > 0$$

¿Cuál es el primer momento en que el aumento de las exportaciones (desde el período inicial) igualará a la caída en la recaudación?

**27. Mercado laboral.** El mercado laboral de una economía tiene el siguiente comportamiento:

$$L^s = 4w$$

$$L^d = 12 - 2w + \alpha w'$$

donde:  $L^s$  es la cantidad ofertada de trabajo,  $L^d$  es la cantidad demandada de trabajo y  $w$  es el salario real.

- a) Calcule la senda temporal de  $w$  si se sabe que el cambio del salario real a lo largo del tiempo es el doble del exceso de la cantidad demandada de trabajo.  
 b) ¿Qué condiciones debe cumplir  $\alpha$  para que  $w$  tienda en el largo plazo a su nivel de equilibrio? ¿Cuál será dicho nivel de salario real de equilibrio?

**28. Modelo macroeconómico.** El ingreso nacional,  $Y$ , el consumo,  $C$  y la inversión,  $I$ , de un país se relacionan según las ecuaciones

$$Y_t = C_t + I_t \quad I_t = kC' \quad (k > 0) \quad C_t = aY_t + b \quad (0 < a < 1, b > 0)$$

- Plantee y resuelva una ecuación diferencial para  $Y_t$  y hallar  $I_t$ . Estudie su estabilidad en función de los parámetros del modelo.
- Calcule el valor de  $\lim_{t \rightarrow \infty} (I_t / Y_t)$  e interprete sus resultados.

**29. Crisis cambiarias.** Los modelos de primera generación sobre crisis de balanza de pago sostienen que las crisis cambiarias se dan a partir de ataques especulativos. La variable más importante de este análisis resulta ser el tipo de cambio nominal cuya dinámica se pide sea analizada. Para tales efectos considere la siguiente información:

- El país mantiene un tipo de cambio fijo en el nivel  $q^*$  hasta que el Banco Central ve agotadas sus reservas internacionales. Dicho evento ocurre en el instante  $t_c$ .
- Dado el colapso, las autoridades monetarias se ven obligadas a dejar flotar el tipo de cambio, siguiendo la dinámica:

$$q_t = m + \alpha q' \quad (\alpha > 0)$$

donde  $m$  representa al *stock* nominal de dinero que se asume constante. El tipo de cambio flota durante un período de duración  $T$  y luego vuelve a fijarse.

- Considerando que el tipo de cambio deja de flotar hasta un nivel  $q_h$ , calcule  $T$  y halle la trayectoria del tipo de cambio. Grafique su respuesta.
- Si luego de  $T = T$  períodos el tipo de cambio vuelve a ser fijo, determine su nuevo nivel.

**30. Modelo de crecimiento económico.** Considere el modelo siguiente de crecimiento económico de un país en vías de desarrollo:

$$X_{(t)} = \sigma K'_{(t)} \quad K' = \alpha X_{(t)} + H_{(t)} \quad N' = \rho N$$

donde todos los parámetros son positivos,  $X$  es la producción total anual,  $K$  el *stock* de capital,  $H$  el flujo anual de inversión extranjera y  $N$  el tamaño de la población. Asimismo se tienen como condiciones iniciales  $K_0$  y  $N_0$  para el capital y la población, respectivamente.

- Suponga que la inversión extranjera crece a tasa de crecimiento constante igual a  $\mu$ . Halle la trayectoria de  $K$  si  $\alpha\sigma \neq \mu$ .
- Halle una expresión para la producción per cápita  $x_t = X_t/N_t$ .
- Suponga que  $H = 0$ , es decir, no existe inversión extranjera. Considere  $\sigma = 0.3$  y  $\rho = 0.03$  (usual en países como el Perú) y halle a cuánto debe ascender la tasa de ahorro  $\alpha$  para que la producción per cápita crezca con el tiempo.

Resuelva las siguientes EDO homogéneas de segundo orden. Asegúrese de cumplir con el Teorema 4.2; para ello, evalúe el **wronskiano** de sus respuestas. Finalmente, estudie la convergencia de cada trayectoria.

- |                           |                            |
|---------------------------|----------------------------|
| 31. $y'' + 3y' - 4y = 0$  | 32. $y'' + 6y' + 5y = 0$   |
| 33. $y'' - 2y' + y = 0$   | 34. $y'' + 6y' + 9y = 0$   |
| 35. $y'' + 5y = 0$        | 36. $y'' + y = 0$          |
| 37. $y'' - y = 0$         | 38. $y'' + 3y' = 0$        |
| 39. $y'' + 4y' + 4y = 0$  | 40. $y'' - 10y' + 25y = 0$ |
| 41. $y'' - 4y' + 13y = 0$ | 42. $y'' - 6y' + 25y = 0$  |
| 43. $8y'' - 2y' - y = 0$  | 44. $9y'' - 6y' + y = 0$   |

Resuelva las siguientes problemas de valor inicial

- |   |  |
|---|--|
| 45. $y'' + 2y' - 3y = 0$                | $y_0 = 1, y'_0 = 5$                              |
| 46. $y'' - 6y' - 7y = 0$                | $y_0 = 5, y'_0 = 3$                              |
| 47. $y'' - 6y' + 9y = 0$                | $y_0 = 2, y'_0 = 1$                              |
| 48. $y'' + 4y' + y = 0$                 | $y_0 = 1, y'_0 = 5$                              |
| 49. $y'' + 4y' + 5y = 0$                | $y_0 = -3, y'_0 = 0$                             |
| 50. $y'' - 6y' + 13y = 0$               | $y_0 = -1, y'_0 = 1$                             |
| 51. $8y'' - 2y' - y = 0$                | $y_0 = 1, y'_0 = 5$                              |
| 52. $(b+1)y'' - (2+b)ay' + a^2y = -a^2$ | $y_0 = 1, y_1 = 0.5(e' + e^{\frac{a}{b+1}}) - 1$ |

53. Halle una ecuación diferencial de segundo orden (lineal y con coeficientes constantes) que tengan como soluciones:

- $y_1 = e^{3t}, \quad y_2 = e^{-2t}$
- $y_1 = e^{4t}, \quad y_2 = te^{4t}$
- $y_1 = e^{-t} \cos(4t), \quad y_2 = e^{-t} \sin(4t)$

54. Halle los valores de  $k$  para los que la EDO  $y'' + ky' + ky = 0$  tenga la solución general:

- $y = C_1 e^{nt} + C_2 e^{nt}$
- $y = (C_1 + C_2 t) e^{nt}$
- $y = C_1 e^{qt} \cos(qt) + C_2 e^{qt} \sin(qt)$

55. Suponga que la ecuación auxiliar de la EDO  $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$  tiene raíces  $u$  y  $v$ . Muestre que la función  $g(t)$  es solución de la EDO, si

$$g(t) = \frac{e^{ut} - e^{vt}}{u - v}$$

56. **Equilibrio microeconómico.** Un mercado presenta las siguientes funciones de oferta y demanda, afectadas por el precio corrientes y su tendencia (es decir, si se incrementa o disminuye a una tasa creciente o decreciente),

$$Q_t^s = c_1 + w_1 P_t + u_1 P' + v_1 P''$$

$$Q_t^d = c_2 + w_2 P_t + u_2 P' + v_2 P''$$

$$c_1 < 0, w_1 > 0, c_2 > 0, w_2 < 0$$

A partir del equilibrio ( $Q^d = Q^s$ ), discuta la estabilidad dinámica del mercado.

**57. Una demostración.**

a) Demostrar que si  $y_1$  es solución de

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(t)$$

y la función  $y_2$  es solución de

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_2(t)$$

luego,  $y_1 + y_2$  es solución de  $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(t) + b_2(t)$

b) Generalice el resultado de a) para  $y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1(t) + b_2(t) + \dots + b_n(t)$

c) Utilizando los resultados previos, resolver  $y'' + 3y' - 4y = t + e^t$ .

Utilizando el método de los coeficientes indeterminados (Cuadro No. 4.5), determine la solución general de las siguientes EDO de orden superior

58.  $y'' + 6y' + 5y = 2e^{3t}$

59.  $y'' + 3y' - 4y = 5e^{7t}$

60.  $y'' - 9y' + 20y = -3e^{3t}$

61.  $y'' + 2y' + y = e^{-t}$

62.  $y'' + 4y' - 5y = -6t^2$

63.  $y'' - 6y' = t - 1$

64.  $y'' + 3y' = 2t + 2$

65.  $y'' - t^3 + 1 = 0$

66.  $y'' - 4y = 2\sin(2t) + 3\cos(2t)$

67.  $y'' - y = 1 + t + t^2$

68.  $y'' - 4y' + 13y = 0$

69.  $y'' - 6y' + 25y = 0$

70.  $y'' - y = \cos 2t - 2 \operatorname{sen}(2t)$       71.  $y'' + 4y'' + 7y' + 12y = e^{-3t}$   
 72.  $y'' - 6y' + 9y = t + e^{2t}$       73.  $y'' + 7y'' + 15y' + 9y = t^2$   
 74.  $y^{(4)} + 6y'' + 14y' + 16y = 24 \operatorname{sen} t$       75.  $y'' - 2y' - 5y' + 6y = e^{3t}$   
 76.  $y'' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4t}$       77.  $y'' - 2y' + 4y = t^4 + 3t^2 - 5t + 2$   
 78.  $y^{(4)} + 4y'' + 13y' + 3y' + 36y = t$       79.  $y'' - y' + 2y = t^3 - t$   
 80.  $y'' - 2ay' + y = e^{bt}$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )      81.  $y'' - y'' + y' - y = t$   
 82.  $y'' + y' + y = t^2 + e^{3t}$       83.  $y'' + y = te^{2t}$   
 84.  $y'' - by = te^t$  ( $b \in \mathbb{R}$ )      85.  $y'' - y'' + y' - y = \cos(t)$

**86.** Si se anima, utilice el **método de variación de parámetros** explicado en el Apéndice A para resolver 58 – 85.

**87.** Estudie la estabilidad de las soluciones homogéneas de los Ejercicios 58 – 85 haciendo uso del **teorema de Routh – Hurwitz**.

**88. Riesgo.** En la sección 3.3.1.1 (Capítulo 3) se presentó la *medida absoluta de aversión al riesgo*. Asimismo, existe una *medida relativa de aversión al riesgo*. Si  $u(w)$  representa una función de utilidad ( $w$  es la riqueza), determine una forma funcional de la misma de modo que

$$-\frac{u''(w)}{u'(w)} = A > 0 \quad -w \frac{u''(w)}{u'(w)} = R > 0$$

es decir halle  $u(w)$  de modo que su medida de aversión absoluta al riesgo sea igual a una constante  $A$  y, por otro lado, que su medida relativa de aversión al riesgo sea constante e igual a  $R$ . Note que se trata de resolver una EDO cuya variable independiente es  $w$ .

**89. Mercado de acciones.** El mercado de acciones de una economía está conformado por especuladores e inversionistas “normales”. El exceso de demanda especulativa en el instante  $t$  viene dado por la diferencia entre el precio esperado de la acción y el precio observado de la acción en el mismo momento,

$$D_t^e = k(P_t^e - P_t) \quad k > 0$$

Por su lado, el exceso de demanda de los inversionistas “normales” es

$$D_t^n = a_0 + a_1 P_t + a_2 \cos(ct) \quad a_0, a_1, a_2, c > 0$$

Sin especuladores el precio de equilibrio de la acción viene dado cuando el exceso de demanda de los inversionistas normales es nulo. Con la presencia de



los especuladores, la condición de equilibrio del precio del activo es

$$D_t^n + D_t^e = 0$$

Finalmente, los especuladores forman sus expectativas sobre el precio de la acción según las variaciones del precio observado y su tendencia. Esto es,

$$P_t^e = b_0 P_t + b_1 P^e + b_2 P''$$

Determine la trayectoria de los precios de equilibrio con y sin intervención de especuladores y diga cuál es el impacto sobre el precio de la presencia de especuladores en el mercado.

**90. Ecuaciones de Bernoulli.** Una EDO de la forma

$$x' + a(t)x = b(t)x^n$$

donde  $n$  es un número real distinto de 0 ó 1 es denominada **ecuación de Bernoulli**. Esta EDO puede ser reducida a una lineal simple. Si se define a  $z = x^{1-n}$  realice un cambio de variable en la EDO mostrada y determine la trayectoria de  $x$ .

**91.** ¿Cuáles deben ser las condiciones iniciales (en  $t = 0$ ) de  $x$ ,  $y$  y  $z$  para que el sistema

$$x' = -x - 2z \quad y' = -y + 4z \quad z' = 2x + 2y - z$$

converja a  $(0, 0, 0)$ ?

En los siguientes sistemas homogéneos, clasifique al punto de equilibrio  $(0, 0)$  como nodo, punto de ensilladura, foco o vórtice y diga cuáles son estables e inestables.

92.  $x' = 3x - 2y$        $y' = 2x - 3y$

93.  $x' = 2x - y$        $y' = x - y$

94.  $x' = y$        $y' = 2x$

95.  $x' = x - 4y$        $y' = 4x - 7y$

96.  $x' = x - 3y$        $y' = 4x - 5y$

97.  $x' = 3x - 2y$        $y' = 4x - y$

98.  $x' = x + y$        $y' = 4x - 2y$

99.  $x' = -x + 2y$        $y' = -2x - y$

100.  $x' = 3x - 4y$        $y' = x - y$

**101.** Resuelva los ejercicios de la ecuación complementaria de los 58 – 85 mediante el uso de **sistemas equivalentes**.

**102.** Un banco que está experimentando serios problemas económicos ha estimado que las trayectorias de sus colocaciones y de sus depósitos (en millones de soles) serían las siguientes:

$$C' + C + 3D + 15D' = 63$$

$$D' - C + 6D = -42$$

Resuelva el sistema, si para el tiempo inicial las colocaciones son iguales a 90 millones y los depósitos a 31 millones.

**103. La Curva de Phillips.** Se cuenta con la *relación de Phillips*, modelo que explica la interacción de la inflación y el desempleo mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + h\pi_t$$

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p_t - \pi_t)$$

$$\frac{dU}{dt} = -k(m - p_t)$$

donde:  $\alpha, \beta > 0$

$h, j$  = coeficientes de ajuste de expectativas ( $0 < h, j \leq 1$ ).

$k$  = factor de ajuste ( $k > 0$ ).

$\pi$  = tasa de inflación *esperada*.

$p$  = tasa de inflación *real* ( $\equiv P'/P$ ).

$U$  = tasa de desempleo

$m$  = tasa de crecimiento del dinero nominal ( $\equiv M'/M$ ).

Halle las trayectorias del desempleo e inflación planteando un sistema de EDO. Discuta la convergencia en todos sus casos. ¿Tiene sentido? ¿Qué podemos concluir acerca de la *tasa de crecimiento del dinero nominal* ( $m$ ) con respecto a las trayectorias de la inflación real y la esperada?

**104.** Un comerciante adquiere en una subasta pública un lote de 1000 computadoras, valuadas en 50 mil. Dada la aparición de nuevos modelos en el mercado y la depreciación de los equipos, el valor de realización (valor de venta) de cada computadora disminuye continuamente cada año a una tasa de 10%. Recién en el año 4, el comerciante consigue vender algunas computadoras, de forma tal que en el año 5 el valor de realización de todas las computadoras en *stock* es igual a la mitad del valor de realización inicial. ¿Cuántas computadoras aproximadamente vendió el comerciante en el año 4?

105. Escriba un ejemplo numérico de :

- Una EDO de segundo orden que represente una trayectoria temporal de equilibrio móvil y divergente.
- Una EDO de segundo orden que represente una trayectoria temporal convergente y fluctuante, con un valor de equilibrio igual a 5.

106. ¿Para cual valor de  $a$ , la solución del siguiente sistema diferencial converge sobre  $(0,0)$  ?

$$\begin{aligned}x' &= 3x - 2y & x_0 &= 4 \\y' &= 2x - 2y & y_0 &= a\end{aligned}$$

Considere un sistema en forma matricial  $\mathbf{A}_2 \mathbf{Y}'' + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}' + \mathbf{A}_0 \mathbf{Y} = \mathbf{B}$ . Normalícelo, resuélvalo y analice su estabilidad si

107.  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$     $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     $\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$     $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

108.  $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$     $\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$     $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$

### Apéndice A. El método de variación de parámetros

Este método resulta ser útil cuando el **método de coeficientes indeterminados** no es aplicable; por ejemplo, cuando el término móvil de la misma no tiene alguna forma reconocible como las presentadas en el Cuadro No. 4.5. Considere la EDO

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(t)$$

Ahora, supóngase que el conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea es  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . La solución particular de la EDO puede ser encontrada como

$$y_p = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2 + \dots + u_n(t)y_n$$

donde la función  $u_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) puede ser obtenida a través del sistema

$$\begin{aligned} u_1'(t)y_1 + u_2'(t)y_2 + \dots + u_n'(t)y_n &= 0 \\ u_1'(t)y_1' + u_2'(t)y_2' + \dots + u_n'(t)y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ u_1'(t)y_1^{(n-1)} + u_2'(t)y_2^{(n-1)} + \dots + u_n'(t)y_n^{(n-1)} &= b(t) \end{aligned}$$

Note que este sistema equivale a

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

De este modo, aplicando la **regla de Cramer**, se obtiene que

$$u_i'(t) = \frac{b(t)W_i(t)}{W(t)}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

donde  $W(t)$  es el **wronskiano** ( $\neq 0$ , por premisa) de la EDO y  $W_i(t)$  es el determinante obtenido del **wronskiano** al reemplazar la  $i$ -ésima columna por el vector columna  $[0, 0, \dots, 1]$ , tal y como se realiza por la regla de Cramer. De este modo, la solución particular de la EDO es

$$y_p = \sum_{i=1}^n y_i \int \frac{b(t)W_i(t)}{W(t)} dt$$

**Ejemplo.** En el Ejemplo 4.13 resolvimos la EDO  $y'' + y' = 4t^2$ .

Las soluciones de la ecuación complementaria de la EDO son  $y_1 = 1$  e  $y_2 = e^{-t}$ , y son linealmente independientes. Luego, se tiene el sistema

$$\begin{aligned} u_1' + u_2' e^{-t} &= 0 \\ -u_2' e^{-t} &= 4t^2 \end{aligned} \quad \text{que equivale al sistema} \quad \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4t^2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla de Cramer se tiene que  $u_1' = 4t^2$  y  $u_2' = -4t^2 e^t$ .

Al integrar se obtiene  $u_1 = \frac{4}{3}t^3$  y  $u_2 = -4t^2 e^t + 8te^t + 8e^t$ .

De modo que la solución particular de la EDO es

$$y_p = u_1(t)y_1 + u_2(t)y_2 = \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 8t + 8$$

que es coincidente con la determinada en el Ejemplo 4.13 mediante el **método de los coeficientes indeterminados** (considere que  $C_1 = A_0 = 8$ ).

El lector puede constatar que en el caso de una EDO de segundo orden,  $y_p$  responde a

$$y_p = -y_1 \int \frac{b(t)y_2}{W(t)} dt + y_2 \int \frac{b(t)y_1}{W(t)} dt$$

## Apéndice B. Nota sobre sistemas de EDO lineales

Considere el Sistema Homogéneo de  $n$  variables

$$Y' = AY, \quad Y(0) = Y_0$$

Una expansión de Taylor alrededor de  $t = 0$  del vector de variables retorna

$$Y_t = Y_0 + tY_0' + \frac{t^2}{2}Y_0'' + \dots$$

Reemplazando  $Y' = AY$ ,  $Y'' = AY' = A^2Y$ , ..., da como resultado

$$Y_t = Y_0 + tAY_0 + \frac{t^2}{2}A^2Y_0 + \dots = (1 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots)Y_0 = e^{At}Y_0$$

Si todos los valores propios de  $A$  son reales y distintos, entonces existe una matriz no singular  $P$  (la matriz **modal**) cuyas columnas son los vectores propios de  $A$  de modo que

$$P^{-1}AP = \Lambda \quad \text{o, alternativamente,} \quad A = PAP^{-1}$$

donde  $\Lambda$  es la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de  $A$ . Se cumple que para cualquier entero positivo  $k$ ,

$$A^k = \underbrace{(PAP^{-1})(PAP^{-1})\dots(PAP^{-1})}_{k \text{ veces}} = P\Lambda^k P^{-1}$$

por lo que, sustituyendo en la expansión de Taylor,

$$e^{At} = I + PAP^{-1}t + P\Lambda^2 P^{-1} \frac{t^2}{2!} + P\Lambda^3 P^{-1} \frac{t^3}{3!} + \dots = P(I + \Lambda t + \Lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \Lambda^3 \frac{t^3}{3!} + \dots)P^{-1} = P e^{\Lambda t} P^{-1}$$

De manera que la solución al sistema homogéneo es

$$Y_t = e^{At} Y_0 = P e^{\Lambda t} P^{-1} Y_0 \quad \blacklozenge$$

Consideremos ahora un sistema no homogéneo de primer orden con coeficientes constantes

$$Y' = AY_t + B\Psi_t \quad Y(0) = Y_0$$

donde  $\Psi$  es un vector de orden  $r$  y  $B$  es una matriz de coeficientes de orden  $n \times r$ . Siguiendo un procedimiento similar al expuesto en el Cuadro No. 4.1, es decir, tomando en consideración un factor de integración se tiene

$$\begin{aligned} Y' - AY_t &= B\Psi_t \\ e^{-At} [Y' - AY_t] &= e^{-At} B\Psi_t \\ Y_t &= e^{At} Y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\Psi(\tau) d\tau \quad \dots(*) \end{aligned}$$

Si los elementos del vector  $\Psi$  son constantes y  $A$  es no singular, luego (\*) es simplemente

$$Y_t = e^{At} (Y_0 + A^{-1}B\Psi) - A^{-1}B\Psi$$

donde  $[e^{At} - I]A^{-1}B\Psi$  es la solución particular del sistema.  $\blacklozenge$



# Ecuaciones diferenciales II

## 5.1 Introducción

En el capítulo anterior se han discutido una serie de procedimientos que permiten determinar soluciones analíticas de una EDO. En muchos casos, sin embargo, las soluciones cuantitativas no pueden ser obtenidas o bien no son de interés. Ejemplos de esta situación se dan cuando la forma de la EDO es desconocida, cuando un sistema es no lineal o cuando el interés solo se concentra en la estabilidad de la EDO o del sistema y no en su solución explícita. En estos casos, es relevante aproximar las trayectorias o realizar un análisis cualitativo sobre la dinámica intrínseca en la EDO. En este capítulo estudiaremos tres enfoques al respecto. En primer lugar abordaremos un **enfoque cualitativo** sobre la solución de largo plazo de una EDO o de un sistema, utilizando como herramienta fundamental el mencionado diagrama de fase aunque ligeramente distinto al presentado en el capítulo precedente. Acto seguido, el análisis se centra en aproximar las soluciones de un tipo particular de EDO mediante el desarrollo en **serie de potencias** de su solución. Finalmente se presenta una introducción a los **métodos numéricos** más importantes en la resolución de la EDO.

## 5.2 Enfoque cualitativo

El objetivo de este análisis es simplemente determinar ciertas características sobre el comportamiento de la solución de una EDO. Sin duda, la principal característica de esta solución está vinculada a su estabilidad o convergen-

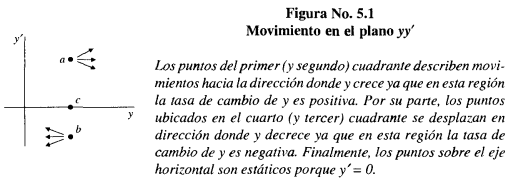
cia. Este aspecto es satisfactoriamente abordado por el uso de **diagramas de fase**. Así, en esta sección centramos la discusión en el estudio de esta herramienta gráfica.

### 5.2.1 Caso unidimensional

El paso inicial para la elaboración de un **diagrama de fase** de este tipo es conocer una relación entre una variable y su tasa de cambio con respecto al tiempo mediante cualquier ecuación diferencial autónoma<sup>1</sup>. Observemos la EDO de primer orden

$$y' = f(y) \quad \dots(1)$$

donde la función  $f(y)$  se asume continuamente diferenciable, puede presentar cualquier forma (lineal o no lineal) y es posible graficarla en un plano cartesiano con ejes  $y$  e  $y'$ . Para comprender el mecanismo dinámico esbozado en un **diagrama de fase** debemos conocer el movimiento de los diversos puntos implicados en el mencionado plano. Consideremos la Figura No. 5.1.



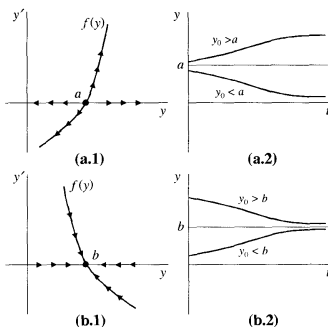
En la figura, la posición del punto  $a$  hará que este tienda a moverse de izquierda a derecha, en la dirección en la que  $y$  crece. Esto se debe a que se encuentra ubicado en el cuadrante donde  $y' > 0$ ; el signo positivo de esta derivada implica que conforme pasa el tiempo, el valor de la variable (representada por el eje de abscisas) aumenta, dando así la explicación a dicho movimiento. El punto  $b$ , por

<sup>1</sup> Es bueno recordar que una EDO es *autónoma* cuando la variable independiente (el tiempo) no aparece en forma explícita como argumento de la función (ver Definición 4.1); es decir, si  $\partial y'/\partial t = 0$  (nótese que se trata de una derivada **parcial**).



su parte, se comporta de manera contraria al punto  $a$ . Debido a que en el cuadrante donde se encuentra  $y' < 0$ , y decrecerá ante un incremento en la variable temporal por lo que se describe un movimiento de derecha a izquierda. El último caso involucra al punto  $c$ . Nótese que éste se encuentra sobre el eje horizontal donde  $y' = 0$ . Esta situación representa un estado estacionario análogo al del estudiado en el capítulo anterior, ya que  $y$  no describe movimiento alguno. De esto, confirmamos que estamos frente a un posible punto de equilibrio cuando la variable adquiere un estado estático. Aunque en la Figura No. 5.1 se presenten valores positivos de  $y$ , sin pérdida de generalidad y puede tomar cualquier valor real, de acuerdo con la variable económica que represente.

**Figura No. 5.2**  
**Diagramas de fase y estabilidad**



Luego de comprender el comportamiento que adopta un punto  $(y, y')$ , puede distinguirse e identificarse de manera cualitativa la trayectoria solución y equilibrio de largo plazo de (1). La representación gráfica de la relación (1) en el mencionado plano es denominada **curva de fase** y describe, dependiendo de las condiciones iniciales del problema, la transición de  $y$  hacia o desde su valor estacionario. El Panel (a.1) de la Figura No. 5.2 ilustra un caso particular en donde la curva de fase tiene pendiente positiva, por lo menos alrededor del

punto  $a$ . En esta situación el equilibrio de largo plazo es *dinámicamente inestable* por lo que puede concluirse que la solución de (1) constituye una trayectoria divergente. Resulta interesante dar cierto énfasis a las condiciones iniciales de esta trayectoria: si estas ubican a  $y$  en el equilibrio, es decir  $y_0 = a$ , las fuerzas de movimiento implícitas en la **curva de fase** harán que  $y$  se aleje, cada vez más de  $a$  y que no sea factible "regresar" a este equilibrio; si  $y_0 > a$ , tendremos una función creciente  $y$ , por el contrario, si  $y_0 < a$ , la función será decreciente (ver el Panel (a.2) de la Figura No. 5.2). Por otro lado, el punto  $b$  en los Paneles (b.1) y (b.2) es un equilibrio *dinámicamente estable*. En tal caso, si  $y_0 = b$ , la dinámica hará que siempre  $y$  se mantenga en este punto; si  $y_0 \neq b$ , se dará un desplazamiento a lo largo de la **curva de fase** que nos llevará, finalmente, al equilibrio, como lo sugieren las flechas del gráfico.

De los dos casos anteriores podemos obtener una conclusión importante que involucra a la pendiente de la **curva de fase**: si esta es negativa ( $dy'/dy < 0$ ) aseguramos la estabilidad temporal de la variable; si es positiva ( $dy'/dy > 0$ ) tratamos con inestabilidad dinámica.

Antes de formalizar y resumir el análisis, es necesario recalcar que, dada la naturaleza cualitativa del enfoque adoptado, el único punto relevante de toda la trayectoria de  $y$  es su estado estacionario,  $y_{ss}$ . Por ello, la estabilidad de (1) puede concebirse en términos de la vecindad de  $y_{ss}$ <sup>2</sup>. La Definición 5.1 brinda una primera idea al respecto.

**Definición 5.1** La ecuación diferencial autónoma (1) tiene como punto de equilibrio a  $y_{ss}$  que satisface  $f(y_{ss}) = 0$  que es

- (a) **Localmente estable** si dado un valor inicial  $y_0$  lo suficientemente cercano a  $y_{ss}$ ,  $y \rightarrow y_{ss}$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .
- (b) **Globalmente estable** si para cualquier valor inicial  $y_0$ ,  $y \rightarrow y_{ss}$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

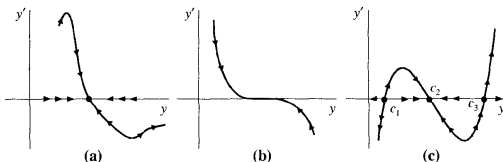
Ello implica que  $y_{ss}$  es

- (a) Localmente estable si  $f'(y^*) < 0$  donde  $|y^* - y_{ss}| \leq \varepsilon$  siendo  $\varepsilon$  un número pequeño.
- (b) Globalmente estable si  $f'(y) < 0, \forall y$ .

2 Este criterio es denominado **prueba de estabilidad lineal**, ya que solo es necesario calcular una primera derivada, lo que equivale a linealizar (1) alrededor del estado estacionario y analizar su trayectoria.

Puede deducirse que si  $y_{ss}$  es globalmente estable es localmente estable, pero no ocurre lo contrario. Asimismo si  $y'$  es una función creciente de  $y$  alrededor de  $y_{ss}$ , el equilibrio es **localmente inestable** (ello implica  $f'(y^*) > 0$ , donde  $y^*$  es introducido en la Definición 5.1); del mismo modo, si  $y'$  es una función decreciente de  $y$  para cualquier valor de  $y$  ( $f'(y) < 0$ ),  $y_{ss}$  es un **equilibrio globalmente estable**. Finalmente, es posible que la condición de equilibrio  $f(y) = 0$  sea satisfecha por más de un valor de  $y$ , por lo que el análisis cualitativo admite multiplicidad de equilibrios. Ante ello, el concepto de estabilidad global pierde relevancia (¿por qué?).

**Figura No. 5.3**  
Estabilidad y multiplicidad de equilibrios



La Figura No. 5.3 ilustra estos aspectos. En el Panel (a) se aprecia un equilibrio localmente estable. La **curva de fase** tiene pendiente negativa alrededor de  $y_{ss}$ ; y el punto de equilibrio es globalmente estable aunque, fuera del equilibrio, la **curva de fase** presenta algunas oscilaciones, por lo que la derivada de la misma cambia de signo. Por otro lado, la **curva de fase** de Panel (b) contiene un número infinito de equilibrios estables. En el Panel (c), existen tres valores de largo plazo, uno de ellos es localmente estable ( $c_2$ ) mientras que los otros ( $c_1$  y  $c_3$ ) son localmente inestables. En este caso, la estabilidad de la trayectoria dependerá de sus condiciones iniciales: el lector puede apreciar que si  $c_2 < y_0 < c_3$ ,  $y$  será convergente, de otro modo  $y$  divergirá.

**Ejemplo 5.1.** En el capítulo anterior se ha estudiado la EDO lineal  $y' + ay = b$ . El lector sabe que en este caso,  $y_{ss} = b/a$ . Asimismo,  $dy'/dy = -a$  por lo que  $y_{ss}$  es globalmente estable siempre que  $a$  sea positivo (independientemente de  $y_0$ ,  $y$  será en el largo plazo igual a  $b/a$ ).

**Ejemplo 5.2 (Crecimiento logístico).** En la Aplicación 4.2.1 se estudió el modelo de crecimiento poblacional exponencial y se concluyó que este no refleja necesariamente lo observado empíricamente. Si bien es cierto que en ciertas etapas de la historia de un conjunto de individuos el incremento poblacional puede alcanzar niveles extraordinarios, el crecimiento exponencial solo puede mantenerse por períodos limitados, es insostenible. Este fenómeno encuentra sustento en variables tales como la cantidad de alimentos, distribución de edades y de riqueza, condiciones sanitarias y enfermedades, espacio vital disponible, entre otras. De esta forma, en lugar de suponer una tasa de crecimiento constante, resulta más realista y consistente con lo observado sostener que una vez que la población supera cierto nivel  $K$  (la capacidad del entorno poblacional) la tasa de crecimiento per cápita decrezca llegando incluso a valores negativos. Este tipo de hipótesis puede ser representada por la EDO<sup>3</sup>

$$y' = ry \left( 1 - \frac{y}{K} \right) \quad \dots(*)$$

Según (\*) si el número de habitantes,  $y$ , es pequeño en comparación con  $K$ , (el “máximo” número de pobladores que puede alojar un espacio, la *capacidad de la población*)  $y/K$  tiende a cero de modo que  $y' \approx ry$  e  $y$  crece aproximadamente de manera exponencial. No obstante, conforme el tamaño poblacional aumenta ( $y$  se aproxima a  $K$ ), se reduce la tasa de crecimiento de la población. Puede demostrarse que la ecuación (\*) es satisfecha por funciones del tipo logístico. A saber,

$$y_t = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}$$

Por esta razón, esta clase de modelos es considerada de **crecimiento logístico hasta el nivel  $K$** <sup>4</sup>. Bajo una perspectiva cualitativa, se aprecia que la condición  $y' = 0$  es satisfecha en (\*) por los puntos  $y = 0$  e  $y = K$ . Más aún,

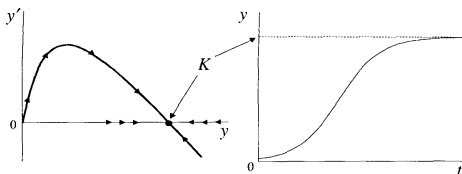
$$\frac{dy'}{dy} = f'(y) = r - \frac{2r}{K} y$$

3 Un pionero en el uso este tipo de modelos es Raymond Pearl, quien estudió la reacción de células de levadura en contacto con azúcar. Para mayor detalle, ver Raymond Pearl, “The Growth of Populations”, *Quarterly Review of Biology*, 2, 1927, pp 532 – 548.

4 El uso del modelo logístico por economistas se limita al estudio poblacional (como el analizado en el texto) y para analizar la dinámica de recursos naturales explotables. Si el lector quiere profundizar sobre el tema crecimiento poblacional, se recomienda revisar Evelyn Hutchinson, *An Introduction to Population Ecology*, New Haven/London, Yale University Press, 1978.

de modo que  $f'(0) = r > 0$  y  $f'(K) = r < 0$ . Así, se concluye que  $y = 0$  es localmente inestable mientras que  $y = K$  es el valor de estado estacionario estable (ver Figura No. 5.2). ♦

**Figura No. 5.4**  
Crecimiento logístico

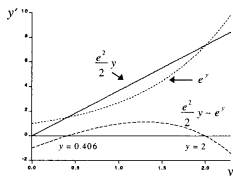


*Este modelo asume que la velocidad de crecimiento de una población dependerá de la distancia existente entre el tamaño actual de la población y un valor  $K$  denominado «capacidad poblacional». Como se aprecia en el **diagrama de fase**, si el tamaño poblacional es mayor que  $K$ , y disminuirá hasta llegar a este nivel. El gráfico de la trayectoria de  $y$  es una «curva sigmosoidal» debido a la forma de «S» que la caracteriza.*

**Ejemplo 5.3** En los ejemplos anteriores se han contrastado resultados cualitativos con soluciones cuantitativas. En este ejemplo, consideremos la EDO

$$y' = \frac{e^2}{2} y - e^y$$

que no tiene un solución cuantitativa (o no sabemos cómo hallarla). Es fácil deducir que un valor de estado estacionario de la EDO es  $y = 2$ . No obstante, al graficar la EDO, se aprecia la existencia de otro punto de equilibrio. Para tales fines, la Figura No. 5.4 muestra que la gráfica de  $y'$  puede ser obtenida mediante la diferencia vertical de dos funciones, una lineal y la otra exponencial.



**Figura No. 5.5**  
**Diferencia de funciones**

*En muchos casos, como este, resulta útil acudir a la diferencia de funciones para poder esbozar la forma gráfica de una función. En este caso, ya que la EDO puede concebirse como la diferencia de una función lineal y una exponencial, la curva de fase es representada por la distancia vertical entre ambas funciones, como se muestra en la figura.*

El punto  $y = 0.406$  satisface, también, la condición  $y' = 0$ . Se tiene que  $f'(0.406) = 2.193 > 0$  mientras que  $f'(2) = -e^2/2 < 0$ . Se concluye, luego  $y$  como se aprecia en la Figura No. 5.4, que el punto  $y = 0.406$  es un equilibrio localmente inestable mientras que  $y = 2$  es estable. ♦

Dado el análisis anterior cabe preguntarse qué puede concluirse si  $f'(y_{ss}) = 0$ . La respuesta es, desafortunadamente, "nada". En este caso,  $y_{ss}$  puede ser estable o inestable y es necesario conocer la **curva de fase** en un intervalo (centrado en  $y_{ss}$ ) más amplio (observe el Panel (b) de la Figura No. 5.3). Este hecho puede considerarse una limitante del análisis gráfico - cualitativo expuesto. No obstante, la mayor limitación de este análisis se observa en que no se llegan a conocer, por ejemplo, aspectos como la velocidad con la que  $y$  cambia fuera de su estado estacionario o el comportamiento que la trayectoria adopta en puntos alejados de éste.

### 5.2.2 Caso bidimensional

A continuación estudiaremos los principales procedimientos en la evaluación cualitativa de sistemas de EDO. Consideremos el sistema autónomo de dos variables

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}\quad \dots(2)$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  se asumen continuas y diferenciables por lo menos dos veces en todos sus argumentos. Al igual que en la sección 4.5.2, (2) posee un punto de equilibrio  $(x_{ss}, y_{ss})$  que es caracterizado por ser estático. Esto es, el punto de equilibrio satisface  $x' = y' = 0$ , es decir,

$$\begin{aligned} f(x_{ss}, y_{ss}) &= 0 \\ g(x_{ss}, y_{ss}) &= 0 \end{aligned} \quad \dots(3)$$

Para valores de  $x$  e  $y$  cercanos a  $x_{ss}$  e  $y_{ss}$ , respectivamente, el **teorema de Taylor** (Teorema 3.5) nos habilita para realizar una aproximación de primer orden de  $f$  y  $g$  alrededor del estado,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_{ss}, y_{ss}) + f_x(x_{ss}, y_{ss})(x - x_{ss}) + f_y(x_{ss}, y_{ss})(y - y_{ss}) + R_2^f \\ g(x, y) &= g(x_{ss}, y_{ss}) + g_x(x_{ss}, y_{ss})(x - x_{ss}) + g_y(x_{ss}, y_{ss})(y - y_{ss}) + R_2^g \end{aligned} \quad \dots(4)$$

donde  $f_z$  o  $g_z$  denotan la derivada parcial de  $f$  o  $g$  con respecto a  $z$ . Reemplazando (2) y (3) en (4) e ignorando los **residuos de Lagrange** de (4) se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} x' &= f_x(x_{ss}, y_{ss})(x - x_{ss}) + f_y(x_{ss}, y_{ss})(y - y_{ss}) \\ y' &= g_x(x_{ss}, y_{ss})(x - x_{ss}) + g_y(x_{ss}, y_{ss})(y - y_{ss}) \end{aligned}$$

cuya notación matricial es

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_{ss}, y_{ss}) & f_y(x_{ss}, y_{ss}) \\ g_x(x_{ss}, y_{ss}) & g_y(x_{ss}, y_{ss}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ y - y_{ss} \end{bmatrix} \quad \dots(5)$$

El sistema (5) es la aproximación lineal de (2) alrededor de su estado estacionario. Por ello, (5) es conocido como **sistema linealizado**. Si se definen dos variables auxiliares, como las desviaciones del estado estacionario de  $x$  e  $y$ , es decir,  $z_1 = x - x_{ss}$  y  $z_2 = y - y_{ss}$ ,  $\mathbf{Z} = [z_1, z_2]'$ , (5) puede ser reescrito como

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{JZ} \quad \dots(6)$$

siendo  $\mathbf{J}$  la **matriz jacobiana** del sistema original (2) evaluada en  $(x_{ss}, y_{ss})$ . En síntesis, un sistema autónomo implícito o no lineal como (2) puede ser expresado como un sistema lineal homogéneo como (6), a través de una aproximación de Taylor de primer orden y de la construcción de su **matriz jacobiana**. De este modo, hemos llegado a una expresión, (5), análoga a la del sistema (20) del Capítulo anterior. Por ello, el análisis, definiciones y conclusiones de la sección

5 Esta afirmación es el **teorema de Poincaré**.

4.5 son aplicables para (6): las raíces del sistema son los valores propios de  $\mathbf{J}$  que se obtienen resolviendo el polinomio característico de (6)

$$r^2 - \text{tr}(\mathbf{J})r + \det(\mathbf{J}) = 0$$

Consecuentemente, un primer enfoque del análisis de un sistema no lineal o implícito es su linealización alrededor de su estado estacionario. Note que si el sistema es lineal, la **matriz jacobiana** equivale a la matriz de coeficientes, denominada en el capítulo anterior como  $A$ . Por ello, la calificación del estado estacionario de (2) puede hacerse con los criterios del Cuadro No. 4.6 que, por conveniencia, se repite (adaptado) a continuación.

**Cuadro No. 5.1**  
**Equilibrios en sistemas de EDO**

$\det(\mathbf{J})$	$\text{tr}(\mathbf{J})$	$\text{tr}(\mathbf{J})^2 - 4\det(\mathbf{J})$	Tipo de equilibrio	Valores propios de $\mathbf{J}$
$< 0$		$> 0$	Enselladura	$r_1 > 0 > r_2$
$> 0$	$> 0$	$> 0$	Nodo inestable	$r_1 > r_2 > 0$
$> 0$	$< 0$	$> 0$	Nodo estable	$r_2 < r_1 < 0$
$> 0$	$> 0$	$= 0$	Nodo propio inestable	$r_1 = r_2 > 0$
$> 0$	$< 0$	$= 0$	Nodo propio estable	$r_1 = r_2 < 0$
$> 0$	$> 0$	$< 0$	Foco (espiral) inestable	$p > 0$
$> 0$	$< 0$	$< 0$	Foco (espiral) estable	$p < 0$
$> 0$	$= 0$	$< 0$	Vórtice	$\mu = 0$
$= 0$	$> 0$	$> 0$	Sin equilibrio o equilibrios múltiples inestables	$r_1 > r_2 = 0$
$= 0$	$< 0$	$> 0$	Sin equilibrio o equilibrios múltiples estables	$r_1 < r_2 = 0$

**Ejemplo 5.4** El sistema

$$\begin{aligned}x' &= x^2 y + y \\y' &= x - y + 1\end{aligned}$$

tiene como punto de equilibrio  $(x_{ss}, y_{ss}) = (-1, 0)$ . La **matriz jacobiana** del mismo es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 + 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ que evaluada en el punto de equilibrio iguala a } \mathbf{J}_{(-1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



De este modo, las raíces del sistema linealizado son  $r = 1$  y  $r = -2$ . Luego,  $\text{tr}(\mathbf{J}) < 0$ ,  $\det(\mathbf{J}) < 0$  y el discriminante del polinomio característico de  $\mathbf{J}$  es positivo (las raíces son reales). Verificando estos resultados en el Cuadro No. 5.1 se deduce que  $(-1, 0)$  es un *punto de ensilladura*. ♦

A diferencia del caso de una sola variable, el **diagrama de fase** de dos variables es realizado sobre un plano cartesiano donde los ejes están dados por las variables dinámicas, mas no por sus tasas de cambio ( $x$  e  $y$ , no  $x'$  e  $y'$ ). En el caso unidimensional los posibles equilibrios de una EDO están dados por puntos que hacen que  $y' = 0$ ; al incrementar el número de variables, el equilibrio de un sistema está dado cuando *todas* las variables alcanzan sus respectivos estados estacionarios. Esta situación puede ser graficada: los estados estacionarios de las variables generan las *curvas de fase* ( $x' = 0$  e  $y' = 0$ ) y la intersección de ambas, el punto de equilibrio intertemporal del sistema: las curvas de fase, representadas por  $f(x, y) = 0$  y  $g(x, y) = 0$ , nos proporcionan relaciones entre las variables (involucradas en los ejes) que podemos graficar sin mayor complicación.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la curva  $f(x, y) = 0$  tiene pendiente positiva en plano  $xy$  mientras que  $g(x, y) = 0$  tiene pendiente negativa. Formalmente, utilizando el *teorema de la derivada implícita*,

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{f(x,y)} = -\frac{f_x}{f_y} > 0 \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{g(x,y)} = -\frac{g_x}{g_y} < 0$$

Estas funciones son graficadas en la Figura No. 5.6. Como se mencionó, los puntos sobre la curva  $f(x, y) = 0$  representan los distintos valores de estado estacionario de  $x$  mientras que en los puntos sobre la curva  $g(x, y) = 0$   $y$  es estático. Se aprecia que cada curva de fase separa el plano  $xy$  en dos regiones, donde cada variable reporta algún movimiento particular. Observe el Panel (a) de la Figura No. 5.6 y suponga que en la región por encima de  $f(x, y) = 0$ , se cumple que  $x' = f(x, y) > 0$ . En este caso,  $x$  crecerá si se encuentra por encima de  $f(x, y) = 0$  y decrecerá si se encuentra en la región inferior de la curva de fase. Dado este supuesto, resulta útil dibujar una flecha que indique la dirección que  $x$  adopta (recuerde que  $x$  es representada por el eje de las abscisas): en la zona superior a la curva de fase se ha dibujado una flecha que indica una dirección de movimiento de izquierda a derecha,  $\rightarrow$ , mientras que en la región inferior la flecha indica la dirección contraria,  $\leftarrow$ . En el Panel (b) por su parte, se consideran flechas con dirección de arriba hacia abajo ( $\downarrow$ ) o viceversa ( $\uparrow$ ) ya que se están representando los movimientos de  $y$ .

Si bien el análisis anterior es fundamental, muchas veces no es práctico ya que puede resultar complicado determinar en qué región  $f$  o  $g$  son positivas o negativas. Ante ello, puede recurrirse al uso de derivadas parciales. Consideremos nuevamente el Panel (a) de la Figura No. 5.6. Manteniendo el supuesto de que en la región superior a  $x' = f(x, y) = 0$ ,  $x' > 0$ , (es decir, una flecha de izquierda a derecha,  $\rightarrow$ ), puede determinarse el mismo movimiento según

$$\frac{\partial x'}{\partial x} < 0 \text{ o, equivalentemente, } \frac{\partial x'}{\partial y} > 0 \quad \dots(\spadesuit)$$

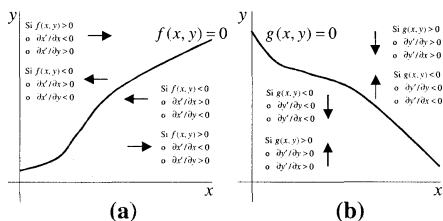
La primera derivada puede leerse de la siguiente manera: “en la dirección donde  $x$  crece,  $x'$  decrecerá, por lo que  $x$  tenderá a reducirse”. Aunque la frase anterior parece un trabalenguas, es cierta. Analicémosla detalladamente: “en la dirección donde  $x$  crece” = la región inferior con respecto a la **curva de fase**. “ $x'$  decrecerá” =  $f(x,y) < 0$ , “por lo que  $x$  tenderá a reducirse” = se traza una flecha de derecha a izquierda,  $\leftarrow$ . Equivalentemente, puede optarse por el uso de una derivada cruzada. En el ejemplo que estamos utilizando, la segunda derivada puesta en  $(\spadesuit)$  puede leerse: “en la región donde  $y$  crece,  $x$  crece”. Esto es, “en la región donde  $y$  crece” = la región por encima de  $f(x,y) = 0$ , “ $x$  crece” =  $f(x,y) > 0$  por lo que se traza una flecha de izquierda a derecha,  $\rightarrow$ . Una evaluación similar puede hacerse con  $g(x,y)$ .

**Importante recordar.** Basta solo con determinar la dirección que  $x$  o  $y$  toman en una de las dos regiones separada por  $f$  o  $g$ , respectivamente. En la región restante el movimiento de  $x$  o  $y$  es exactamente opuesto. Es relevante y necesario recalcar que los movimientos de  $x$  (horizontales) se determinan a partir de las regiones demarcadas por la curva  $f(x,y) = 0$ , mientras que los movimientos de  $y$  (verticales) son determinados en las regiones que separa  $g(x,y) = 0$ .

En la Figura No. 5.6 se ha analizado el movimiento fuera de cada **curva de fase** por separado. Sin embargo, el análisis debe hacerse sobre el estado estacionario del sistema, cuando ocurre simultáneamente  $x' = y' = 0$ ; en otras palabras, debe estudiarse la dinámica de ambas variables en el plano  $xy$  con **ambas curvas de fase** en él. Al cortarse las curvas de *demarcación* o de fase en el punto de equilibrio ( $x' = y' = 0$ ), el espacio de fases (el plano  $xy$ ) se ve dividido en cuatro regiones distintas llamadas **isosectores**. Ya se mencionó que fuera del equilibrio alguna variable o ambas reportan cambios con el tiempo en las direcciones que indiquen las derivadas temporales (parciales)  $\partial x'/\partial x$ ,  $\partial y'/\partial y$  o bien, de manera alternativa, las derivadas cruzadas  $\partial x'/\partial y$ ,  $\partial y'/\partial x$ . Estos movimientos generan las **trayectorias de fase** o **sendas de fase** del diagrama (que pueden ser graficadas)

y las combinaciones de ellas generan diversos tipos de equilibrios: nodos, puntos de silla, focos o vórtices. Cabe resaltar que, según su forma funcional, las **curvas de fase** pueden determinar más de un punto de equilibrio; cada uno de ellos tendrá, consecuentemente, las mencionadas cuatro regiones y pueden corresponder a distintas categorías. Finalmente, si bien el análisis gráfico puede ser concluyente, la linealización de sistemas es una herramienta útil en la calificación de algún estado estacionario.

**Figura No. 5.6**  
**Movimiento en el plano  $xy$**



Cada curva de fase separa al plano  $xy$  en dos regiones. Las regiones definidas por la curva  $f$  describen movimientos de  $x$  (horizontales) mientras que las regiones demarcadas por  $g$  generan los movimientos de  $y$  (verticales). Con el ejemplo propuesto puede apreciarse que la dirección de cada variable en una de las dos regiones es absolutamente opuesta a la dirección de movimiento dentro de la región restante.

**Ejemplo 5.5 (Producción y Polución):** Sea  $K$  el *stock* de capital de una economía y  $P$  el nivel de contaminación de la misma. La producción agregada es dada por  $Y = K^\alpha$  donde  $0 < \alpha < 1$ ,  $s > 0$  denota la tasa de ahorro que se asume constante y  $\delta > 0$  es la tasa de depreciación del capital, de modo que la tasa de crecimiento del capital es

$$K' = sY - \delta K = sK^\alpha - \delta K$$

Por su parte un nivel de capital  $K$  genera un nivel de contaminación de  $K^\beta$  con  $\beta > 1$  que decrece a una tasa constante  $\gamma$ . Así, la tasa neta de cambio del *stock* de contaminación es

$$P' = K^\beta - \gamma P$$

Por lo que representan  $K$  y  $P$ , se considera solo el cuadrante positivo del plano  $KP$ . Las curvas de fase del sistema son definidas como

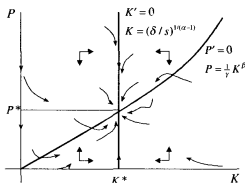
$$P' = 0 \rightarrow P = \frac{1}{\gamma} K^\beta$$

$$K' = 0 \rightarrow K = \left(\frac{\delta}{s}\right)^{1/(\alpha-1)} \quad \text{ó} \quad K = 0$$

La primera curva de fase es una curva convexa que parte del origen. Por su parte, existen dos curvas de fase que cumplen con  $K' = 0$ . Ambas son líneas verticales (ya que  $P$  no es argumento de  $K'$ ). Así, el sistema tiene dos estados estacionarios:

$$(K^*, P^*) = \left(\left(\frac{\delta}{s}\right)^{1/(\alpha-1)}, \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\delta}{s}\right)^{\beta/(\alpha-1)}\right) \quad \text{ó} \quad (K^*, P^*) = (0, 0)$$

**Figura No. 5.7**  
**Producción y polución**



La curva de fase  $K' = 0$  es una línea vertical sobre el nivel de equilibrio de  $K$  mientras que la curva de fase  $P' = 0$  es una función convexa que parte del origen. El cruce de ambas curvas determina el estado estacionario del sistema que es un nodo estable. Esto es, independientemente de las condiciones iniciales del problema, la solución de largo plazo siempre será ese punto de equilibrio.

La Figura 5.7 muestra el **diagrama de fase** del sistema. Ignoremos un instante la segunda solución del sistema (donde  $K = 0$ ). Como se ha discutido, el cruce de las curvas  $P' = 0$  y  $K' = 0$  definen cuatro regiones. Determinemos los signos de  $K'$  y  $P'$  en cada isosector. Se aprecia que

$$\frac{\partial K'}{\partial K} = s\alpha K^{\alpha-1} - \delta \rightarrow \left. \frac{\partial K'}{\partial K} \right|_{K^*} = \delta(\alpha-1) < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P'}{\partial P} = -\gamma < 0$$

La derivada de  $K'$  con respecto a  $K$  nos dice que conforme  $K$  crece (la región derecha de  $K' = 0$ )  $K'$  es negativo de modo que en las dos regiones a la derecha de  $K' = 0$  se traza una flecha  $\leftarrow$  y en las regiones a la izquierda de  $K' = 0$  se traza  $\rightarrow$ . Por otro lado, el signo negativo de  $\partial P'/\partial P$  nos dice que en el área superior de  $P' = 0$  (donde  $P$  crece) deben trazarse flechas hacia abajo mientras que en los

isosectores por debajo de  $P' = 0$  debe trazarse  $\uparrow$ . Este análisis puede resumirse en la siguiente frase: en los isosectores a la derecha (izquierda) de  $K' = 0$  se tiene que  $K' < 0$  ( $K' > 0$ ) mientras que en los isosectores por encima (abajo) de  $P' = 0$ ,  $P' < 0$  ( $P' > 0$ ).

Una vez dibujadas las flechas que indican la dirección que toma cualquier punto en el plano se aprecia que estas apuntan al estado estacionario. Consecuentemente, el equilibrio del sistema es estable. Más aún, tomando en cuenta el sistema linealizado

$$\begin{bmatrix} K' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha s K^{\alpha-1} - \delta & 0 \\ \beta K^{\beta-1} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K^* \\ P - P^* \end{bmatrix}$$

y evaluando la **matriz jacobiana** en  $(K^*, P^*)$ ,

$$\begin{bmatrix} K' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(\alpha-1) & 0 \\ \beta \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{(\beta-1)/(\alpha-1)} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K^* \\ P - P^* \end{bmatrix}$$

se tiene el polinomio característico

$$r^2 - (\delta(\alpha-1) - \gamma) - \gamma \delta(\alpha-1) = 0$$

cuyas raíces son reales y negativas,

$$r_1 = \delta(\alpha-1) < 0 \quad \text{y} \quad r_2 = -\gamma < 0$$

de modo que, según el Cuadro No. 5.1, el punto de equilibrio del sistema es un nodo estable.

El análisis del estado estacionario  $(0,0)$  es similar. Si evaluamos las raíces características del sistema linealizado alrededor de  $(0,0)$  tendremos un punto inestable, como se aprecia en el **diagrama de fase**.

**Ejemplo 5.6 (Extracción de peces).** Suponga que la cantidad de peces en un lago varía según

$$P' = P - P^2 - x$$

donde  $P$  es la cantidad de peces y  $x$  es el total de toneladas de peces extraídos (ambos en el momento  $t$ ) por una flota que tiene un tonelaje  $K$ , de modo que la extracción es dada por

$$x = P\sqrt{K}$$

Asumiremos que la tasa relativa de crecimiento del tonelaje es proporcional al beneficio medio de extraer  $x$  peces que se venden  $p$  unidades monetarias por toneladas. Asimismo, cada tonelada implica un costo de tonelaje de  $c$  de modo que

$$K' / K = px / K - c$$

Tomando por simplicidad  $p = c = 1$  y eliminando a  $x$  del sistema, se tiene

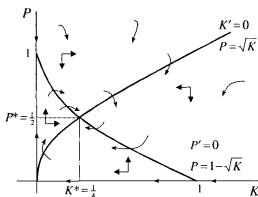
$$K' = K(P / \sqrt{K} - 1)$$

$$P' = P(1 - \sqrt{K})$$

Las curvas de fase del sistema anterior son (asumiendo que  $K$  y  $P$  son estrictamente positivos para evitar el origen como estado estacionario)

$$P' = 0 \rightarrow P = 1 - \sqrt{K}$$

$$K' = 0 \rightarrow P = \sqrt{K}$$



**Figura No. 5.8**  
**Extracción de peces**

La curva de fase  $K' = 0$  es una función cóncava y creciente mientras que la curva de fase  $P' = 0$  es convexa y decreciente. En este modelo, el estado estacionario del sistema es un foco estable. Dado un par de condiciones iniciales, la dinámica del sistema hará que las trayectorias de  $P$  y  $K$  presenten fluctuaciones amortiguadas alrededor de sus valores de equilibrio. Ciertamente  $(0,0)$  y  $(0,1)$  satisfacen las condiciones de equilibrio pero no son considerados por carecer de sentido económico.

Como puede apreciarse en la Figura No. 5.8, la curva  $P' = 0$  es convexa y decreciente (los puntos  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$  son fronteras abiertas de la función, por el supuesto  $K, P > 0$ ). Por su parte, la curva  $K' = 0$  es creciente y cóncava. La intersección de las curvas de fase se da en  $(1/4, 1/2)$ . Con el fin de determinar las fuerzas de movimiento en cada isosector, nótese que

$$\frac{\partial K'}{\partial P} = K / \sqrt{K} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P'}{\partial K} = -P / \sqrt{K} < 0$$

Así, en los isosectores por encima de  $K' = 0$  (donde  $P$  crece) debe trazarse  $\rightarrow$  mientras que corresponde trazar  $\leftarrow$  en los isosectores por debajo de  $K' = 0$ . Asimismo, los isosectores a la derecha de  $P' = 0$  (donde  $K$  crece) deben tener una flecha hacia abajo mientras que en las regiones restantes se traza  $\uparrow$ .

Una vez conocida la dirección de los puntos en el plano  $KP$  queda calificar el estado estacionario. En primer lugar, sin mayor análisis, puede concluirse que este es estable ya que todas las fuerzas de movimiento apuntan hacia él. El sistema linealizado,

$$\begin{bmatrix} K' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}P/\sqrt{K} - 1 & \sqrt{K} \\ -\frac{1}{2}P\sqrt{K} & 1 - 2P - \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K' - \frac{1}{4} \\ P' - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

evaluado en el estado estacionario es

$$\begin{bmatrix} K' \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K' - \frac{1}{4} \\ P' - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

El lector puede verificar que las raíces del sistema son complejas conjugadas  $r_{1,2} = 0.5(-1 \pm i)$  lo que implica una fluctuación amortiguada (la parte real de las raíces es negativa) hacia el equilibrio. En otras palabras, estamos frente a un foco estable.

**Ejemplo 5.7 (Modelo depredador - presa).** Imagínese que en un mismo espacio geográfico coexisten dos especies. Además, imagine que una especie es el alimento de la otra. Por ejemplo, si  $y$  denota la cantidad de conejos en este espacio y  $x$  la cantidad de zorros, claramente la población de cada especie depende, además de su número actual, del comportamiento de la otra.

Consideremos el siguiente escenario: en un momento inicial existen muchos conejos de modo que la población de zorros crece rápidamente dada la disposición de alimentos. No obstante, esta depredación reduce la población de conejos. Una vez que la población de conejos es escasa (por la existencia de muchos zorros), los zorros empiezan a extinguirse por falta de alimento. Ahora, ya que existen pocos depredadores, el número de conejos se incrementa. El incremento en la población de conejos vuelve a facilitar el alimento a los zorros y estos empiezan a incrementarse nuevamente. Indiscutiblemente, el proceso descrito es periódico o cíclico.

Describiremos esta dinámica a través del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x' &= rxy - bx \\y' &= ay - sxy\end{aligned}$$

donde las constantes  $a$ ,  $b$ ,  $r$  y  $s$  son positivas. Este planteamiento recoge la esencia de la dinámica descrita líneas arriba. En primer lugar, suponga que no existen zorros, esto es  $x = 0$ . Se aprecia que en este caso  $y' = ay$  por lo que la población de conejos crece indefinida y exponencialmente a una tasa  $a$ . Por otro lado, suponga que no existen conejos,  $y = 0$ . En esta circunstancia la población de zorros decrece exponencialmente a una tasa  $b$  ya que  $x' = -bx$ . En el sistema el término  $xy$  refleja la interacción entre ambas especies.

Las curvas de fase del sistema son graficadas en la Figura 5.9 y son iguales, dado  $x, y > 0$ , a

$$\begin{aligned}x' = 0 &\rightarrow y = b/r \\y' = 0 &\rightarrow x = a/s\end{aligned}$$

Esto es, las curvas de fase son ortogonales:  $x' = 0$  es un línea horizontal mientras que  $y' = 0$  es una línea vertical. Dejamos al lector el análisis de la dinámica de los isosectores de la Figura No. 5.9.

El sistema linealizado es

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ry - b & rx \\ -sy & a - sx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{a}{s} \\ y - \frac{b}{r} \end{bmatrix}$$

que evaluado en el punto de equilibrio equivale a

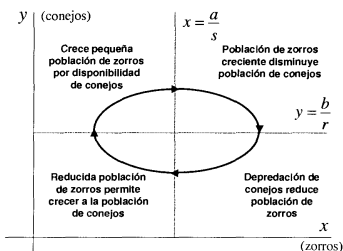
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{a}{s} \\ y - \frac{b}{r} \end{bmatrix}$$

Entonces, se tiene que  $\text{tr}(\mathbf{J}) = 0$ ,  $\det(\mathbf{J}) = sb > 0$  por lo que el discriminante del sistema es  $-4sb < 0$  de tal forma que las raíces características del mismo son imaginarias (con parte real nula). Ello lleva a concluir que el estado estacionario es un *vórtice* y, por ende, inestable. Más aún, la dirección en el mismo sentido que las manijas de un reloj del centro de la Figura No. 5.9 puede deducirse a partir de las derivadas parciales de  $x'$  e  $y'$  con respecto a  $y$  y  $x$ , respectivamente, que son de signo contrario. ♦

El uso de diagramas de fase es muy común en economía tanto en el nivel académico y teórico como práctico. Este fenómeno se debe a que estos instrumentos, además de ser sumamente útiles, son fáciles de implementar. En esta sección



Figura No. 5.9  
Modelo depredador - presa



hemos prestado atención a sistemas de dos variables. Este análisis es suficiente. En caso de enfrentarnos, por ejemplo, a un sistema no lineal de tres variables  $x, y, z$  (aunque se trata de una situación rara) los procedimientos descritos pueden ser generalizados; en tal caso, deben construirse tres diagramas de fase: el primero en el plano  $xy$  (asumiendo a  $z$  constante), el segundo en el plano  $xz$  (con  $y$  constante) y el tercero en el plano  $yz$  (con  $x$  fija).

Por otro lado, resulta necesario hacer un breve paralelo entre los diagramas de fase presentados en esta sección y los de la sección 4.5.2. Los primeros son la versión general de los segundos. Dado un sistema lineal, el lector puede replicar las Figuras No. 4.15 a No. 4.19 con la metodología de esta sección. Por dar un caso, las rectas  $y_2 = (H_{21}/H_{11})y_1$  e  $y_2 = (H_{22}/H_{12})y_1$  de la Figura No. 4.15 no son más que las curvas de fase  $y_1' = 0$  e  $y_2' = 0$ , respectivamente.

Por último, es bueno reconocer que una limitación considerable del análisis gráfico desarrollado es que no contempla el comportamiento de las variables del sistema diferencial fuera (lejos) del estado estacionario. Asimismo, aspectos como la velocidad o la aceleración del movimiento en el espacio de fases no explícitamente evaluados ni considerados.

## 5.2.2.1 Aplicación: modelo IS - LM

Consideremos una versión dinámica del conocido modelo IS-LM<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} Y' &= a(E(Y - T, r) + G - Y) = f(Y, r) \\ r' &= b(L(Y, r) - M/P) = g(Y, r) \end{aligned}$$

donde  $Y$  es el nivel de producción (ingreso) de la economía,  $r$  es la tasa de interés,  $E$  es igual a la suma de gastos en consumo e inversión,  $G$  es el gasto público,  $T$  son los pagos netos por concepto de impuestos,  $L$  es la función de demanda por dinero,  $M$  es la oferta de dinero nominal y  $P$  es el nivel precios. Las constantes  $a$  y  $b$  son positivas y representan la velocidad de ajuste del mercado de bienes y del mercado de dinero, respectivamente. Así, si asumimos a  $G$ ,  $T$ ,  $M$  y  $P$  como fijos, el sistema mostrado no es más que un modelo de ajuste: el producto  $Y$  varía proporcionalmente con el exceso de demanda agregada mientras que la tasa de interés  $r$  se ajusta según los desequilibrios en el mercado de dinero. El equilibrio macroeconómico ( $Y^*$ ,  $r^*$ ) del modelo es el estado estacionario del sistema de EDO que no es más que la intersección de las curvas IS y LM. Es decir,

$$Y' = 0 \text{ (IS)} \quad r' = 0 \text{ (LM)}$$

Las funciones de gastos  $E$  y la demanda por dinero cumplen las siguientes propiedades

$$0 < E_Y < 1 \quad E_r < 0 \quad L_Y > 0 \quad L_r < 0$$

para cualquier nivel de  $Y$  y  $r$ . Dados los supuestos anteriores, puede apreciarse que la curva IS tiene pendiente negativa en el plano  $Yr$  mientras que la curva LM tiene pendiente positiva,

$$\left. \frac{dr}{dY} \right|_{r=0} = -\frac{f_Y}{f_r} = -\frac{E_Y - 1}{E_r} < 0 \text{ (IS)} \quad \left. \frac{dr}{dY} \right|_{r=0} = -\frac{g_Y}{g_r} = -\frac{L_Y}{L_r} > 0 \text{ (LM)}$$

Las curvas IS y LM son graficadas en la Figura No. 5.11. Por otro lado, se tiene que

$$\frac{\partial Y'}{\partial r} = aE_r < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial r'}{\partial Y} = bL_Y > 0$$

6 La aplicación es adaptada de Akira Takayama, *op. cit.*, pp. 419 - 43.

Por lo que se puede deducir que  $Y' > 0$  ( $Y' < 0$ ) a la izquierda (derecha) de  $Y' = 0$  mientras que a la derecha (izquierda) de  $r' = 0$  se cumple que  $r' > 0$  ( $r' < 0$ ). Así, la dinámica inherente en cada isosector del plano  $Yr$  implica, como se muestra en las Figuras No. 5.10 y No. 5.11 un equilibrio estable. No obstante, es necesario conocer el sistema linealizado. Este es

$$\begin{bmatrix} Y' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(E_{Y^*} - 1) & aE_{r^*} \\ bL_{Y^*} & bL_{r^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y - Y^* \\ r - r^* \end{bmatrix}$$

donde se han evaluado las derivadas parciales en el equilibrio. Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{J}) &= a(E_{Y^*} - 1) + bL_{r^*} < 0 \\ \det(\mathbf{J}) &= ab[(E_{Y^*} - 1)L_{r^*} - E_{r^*}L_{Y^*}] > 0 \end{aligned}$$

verificando este resultado con el Cuadro No. 5.1, se sabe que  $(Y^*, r^*)$  es un punto **estable** aunque no se puede determinar sin ambigüedades la calificación de este equilibrio ya que el signo del discriminante del sistema depende de la magnitud de las derivadas parciales del modelo. En particular, se tiene que el equilibrio...

$$\dots \text{es un } \textit{nodo} \text{ si } (a(E_{Y^*} - 1) + bL_{r^*})^2 + 4abE_{r^*}L_{Y^*} > 0$$

$$\dots \text{es un } \textit{foco} \text{ si } (a(E_{Y^*} - 1) + bL_{r^*})^2 + 4abE_{r^*}L_{Y^*} < 0$$

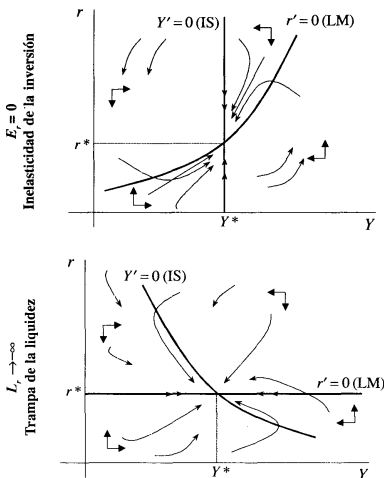
A partir de este resultado puede hacerse una síntesis sobre la interpretación que distintas escuelas dan al modelo IS-LM<sup>7</sup>. En primer lugar, los **keynesianos** tienden a suponer cierta inelasticidad del consumo e inversión ante la tasa en comparación con la elasticidad tasa de interés de la demanda por dinero (por el motivo especulativo de la demanda por dinero). Bajo esta perspectiva, valores bajos para  $E_r$  y altos para  $L_r$ , parece más verosímil catalogar al punto de equilibrio como un *nodo*<sup>8</sup>. Del mismo modo, pueden considerarse dos casos extremos. En primer término, si  $E_r = 0$  la curva IS es vertical y la inversión es perfectamente insensible a cambios en la tasa de interés; por otro lado, si  $L_r \rightarrow -\infty$ , la curva LM es horizontal y la demanda por dinero es perfectamente elástica. Esta

7 Para el debate keynesiano – monetarista véase la quinta parte de Jorge Fernández Baca, *op. cit.*

8 Una explicación a estos supuestos es que los mercados financieros (como el mercado de dinero) se ajustan más rápido que los mercados de bienes.

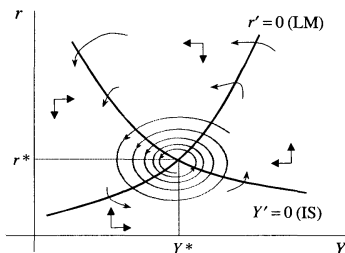
última situación es conocida como la **trampa de la liquidez**. Ambos casos son ilustrados en la Figura No. 5.10.

**Figura No. 5.10**  
Modelo IS-LM: enfoque keynesiano (Casos extremos)



Una segunda interpretación al modelo es dada bajo una tendencia **monetarista**. El postulado básico monetarista es que la demanda por dinero es estable, lo que es consistente con un valor reducido de  $L_r$ . En un caso extremo, si  $L_r = 0$  se da la **teoría cuantitativa del dinero**. Alternativamente puede pensarse en un valor significativo de  $E_r$ . Ambos casos dan como resultado un *foco* como equilibrio macroeconómico, como el mostrado en la Figura No. 5.11.

Figura No. 5.11  
Modelo IS-LM: enfoque monetarista



#### 5.2.2.2 Aplicación: la $q$ de Tobin

En 1978 James Tobin<sup>9</sup> introdujo en la literatura económica un indicador llamado la ratio " $q$ ". La " $q$ " es el cociente entre el valor de mercado de las empresas,  $V$ , y su costo de reposición (o el valor de sus activos, su costo contable),  $K$ ,

$$q = \frac{V}{K}$$

y es un interesante indicador para la toma de decisiones sobre la adquisición de nuevos activos por parte de una empresa. Definimos una función de inversión  $I(q)$  creciente ( $I'(q) > 0$ ) y cóncava ( $I''(q) < 0$ ) que tenga las siguientes características: si  $q < 1$ , el valor de mercado de una empresa es menor a su valor contable; esto es, el capital invertido no es lo suficientemente rentable por lo que  $I(q) < 0$  (se desinvierte, se desecha el capital no rentable). Por el contrario, si  $q > 1$ , la empresa es cotizada a un valor superior a lo contemplado en sus registros conta-

<sup>9</sup> Ver James Tobin, "Monetary Policies and the Economy: The Transmission Mechanism" *Southern Economic Journal*, 1978, pp. 421 - 431.

bles: conviene invertir por lo que  $I(q) < 0$ . Finalmente, es claro que si  $q = 1$ ,  $I(q) = 0$  (situación en un mercado competitivo). Formalmente, se tiene

$$I(q) = I/K \rightarrow K' = KI(q) \quad \dots(*)$$

Por otra parte, la tasa de retorno del capital exigida por los accionistas es definida como

$$\alpha = \frac{\mu}{V} + \frac{V'}{V} \rightarrow V' = \alpha V - \mu$$

donde  $\mu$  es la utilidad que genera el capital. Si  $F_K$  denota la función de producción de la empresa,  $F'_K$  es la productividad marginal del capital que es positiva pero decreciente ( $F'_K > 0$  y  $F''_K < 0$ ) y sea  $t$  la tasa impositiva, se tiene

$$\mu = (1 - \tau)KF'(K) - KI(q) = (1 - \tau)KF'_K - K'$$

La tasa de cambio de  $q$  es definida según

$$q' = \frac{VK - K'V}{K^2} = \frac{V'}{K} - \frac{K'}{K}q = \frac{V'}{K} - I(q)q = \frac{\alpha V - (1 - \tau)KF'_K + I(q)K}{K} - I(q)q$$

$$q' = q(\alpha - I(q)) + I(q) - (1 - \tau)F'_K = Z(K, q) \quad \dots(**)$$

De este modo se ha construido el sistema diferencial (\*) - (\*\*) cuyas **curvas de fase** son

$$K' = 0 \rightarrow I(q)K = 0 \rightarrow q = 1$$

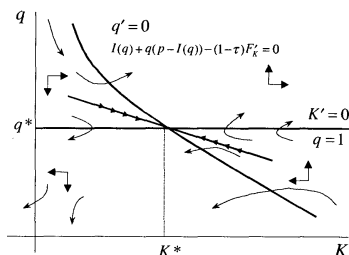
$$q' = 0 \rightarrow q(\alpha - I(q)) + I(q) - (1 - \tau)F'_K = 0$$

Como se esperaba, una condición de equilibrio es  $q = 1$ , una línea horizontal en el plano  $Kq$  como se aprecia en la Figura No. 5.12. Dado que la forma funcional de  $q' = 0$  analizamos su pendiente en el plano de modo que tenemos

$$\left. \frac{dq}{dK} \right|_{q=0} = -\frac{Z_K}{Z_q} = \frac{(1 - \tau)F''_K}{\alpha - I(q) + (1 - q)I'(q)} < 0 \quad \dots(\blacklozenge)$$

El denominador ( $\blacklozenge$ ) es igual a  $\alpha > 0$  cuando  $q = 1$  por lo que  $q' = 0$  tiene pendiente negativa. Si  $q$  es menor que la unidad,  $Z_q$  es positivo por lo que  $q' = 0$  es decreciente. Finalmente, si  $q > 1$ , la **curva de fase** tendrá pendiente negativa si y solo si  $\alpha > I(q) + (1 - q)I'(q)$ , lo que se establece como un supuesto. Concluimos, pues, que  $q' = 0$  tiene pendiente negativa, como se aprecia en la Figura No. 5.12.

Figura No. 5.12  
Ratio  $q$  de Tobin



Tomando en consideración que

$$\frac{\partial K'}{\partial q} = KI'(q) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial q'}{\partial K} = -(1 - \tau)F'_k > 0$$

puede comprobarse que el equilibrio del sistema es un *punto de ensilladura*. Ello implica que se converge al estado estacionario siempre y cuando las condiciones iniciales del sistema ubiquen a  $K$  y a  $q$  sobre la senda de ensilladura. En un esquema donde exista concentración de poder de mercado o burbujas especulativas en el mercado de acciones, las condiciones iniciales lo ubicarán fuera de la mencionada senda y será divergente.

### 5.3 Métodos de series de potencias

El análisis cualitativo desarrollado anteriormente es una herramienta analítica muy potente, sobre todo al enfrentar ecuaciones diferenciales no lineales. No obstante, este análisis se limita a EDO o sistemas autónomos. A continuación utilizaremos los resultados del Capítulo 3 sobre el desarrollo en **series de potencias** de funciones analíticas para resolución de una EDO. Cabe resaltar que los procedimientos que serán discutidos son particularmente útiles cuando nos enfrentamos a una EDO lineal con coeficientes o términos móviles (el trato a

EDO no lineales puede resultar sumamente engorroso, lo que resta utilidad al enfoque). Una ventaja sobre el análisis cualitativo es que el orden de la EDO no es un factor limitante.

Originalmente, la introducción de los conceptos e ideas concernientes con **series de potencias** y de Taylor en la literatura de ecuaciones diferenciales es debida al matemático alemán Lazarus Fuchs (1833 – 1902) quien planteó el siguiente teorema<sup>10</sup>

**Teorema 5.1 (Teorema de Fuchs)** Dado el problema de valor inicial

$$\begin{aligned}y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y &= b(t) \\ y(0) = y_0 \quad y'(0) &= y'_0\end{aligned}$$

si las funciones  $a_1(t)$ ,  $a_0(t)$  y  $b(t)$  son analíticas en  $t = t_0$  y, por ende, convergen en un intervalo con radio  $R > 0$ , luego la EDO tiene una solución única que es analítica en  $t_0$  y, consecuentemente, converge al intervalo  $[-R, R]$ . En otras palabras, la solución de la EDO puede ser representada como una **serie de potencias** de  $t - t_0$ ,

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k \quad \dots(7)$$

Si bien el teorema ha sido formulado en términos de una EDO de segundo orden, la noción de **sistemas equivalentes** permiten afirmar que es válido para una EDO de cualquier orden. Ilustremos la esencia del teorema con los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 5.7** Centrémonos en la EDO  $y' = my$ . Ya que  $m$  es una constante, se trata de una función analítica en  $t = 0$ . Por ello, se asume que la solución de la EDO tiene la forma

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n + \dots$$

---

<sup>10</sup> Un esquema de la demostración del teorema puede encontrarse en Charles. H. Edwards y David E. Penny, *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*, 2da. ed., Prentice Hall, 2000, pp. 69-70.



cuya primera derivada es (ver teorema 3.3)

$$y_t' = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \dots + (n+1)a_{n+1}t^n + \dots$$

Luego, al evaluar estas expresiones en la EDO, se tiene

$$(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n + \dots) = m(a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \dots + (n+1)a_{n+1}t^n + \dots)$$

por lo que  $a_1 = ma_0$ ,  $2a_2 = ma_1$ ,  $3a_3 = ma_2$ , etc. En general, de manera recursiva se

tiene que  $a_{n+1} = \frac{m}{n+1}a_n$ , que equivale, en términos de  $a_0$  (el lector puede com-

probarlo) a  $a_n = \frac{m^n}{n!}a_0$ . Así,

$$y_t = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mt)^k}{k!} = a_0 e^{mt}$$

que es la solución esperada y acorde con lo revisado previamente. En este caso,  $a_0$  juega el papel de constante arbitraria. Note que  $y_0 = a_0$ . ♦

**Ejemplo 5.8** A diferencia del ejemplo anterior, la EDO

$$(1+t)y'' + y' = 1$$

no puede ser resuelta con los procedimientos explicados en el capítulo anterior. Debido a que  $1/(1+t)$  puede ser representada como una serie de potencias en  $t = 0$ , se plantea como solución

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad y_t' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \quad y_t'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$$

Sustituyendo estas conjeturas en la EDO se aprecia que

$$\begin{aligned} (1+t) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} &= 1 \\ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} &= 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} t^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} &= 1 \end{aligned}$$

Dado que la primera y la tercera sumatorias comienzan en  $k = 1$  y la segunda con  $k = 2$ , la expresión anterior puede reescribirse como

$$(2a_2 + a_1) + \sum_{k=2}^{\infty} (k(k+1)a_{k+1} + k(k-1)a_k + ka_k)t^{k-1} = 1$$

$$(2a_2 + a_1) + \sum_{k=2}^{\infty} (k(k+1)a_{k+1} + k^2a_k)t^{k-1} = 1$$

de donde se desprende que

$$2a_2 + a_1 = 1$$

$$k(k+1)a_{k+1} + k^2a_k = 0 \rightarrow a_{k+1} = -\frac{k}{k+1}a_k \quad k \geq 2$$

Se observa que en este ejemplo no aparece  $a_0$  que toma el papel de constante arbitraria. Puesto que la EDO es de segundo orden, es necesario contar con una segunda constante de integración. Esta será  $a_1$ . De este modo,

$$a_2 = \frac{1-a_1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{2}{3}a_2 = -\frac{2}{3}\left(\frac{1-a_1}{2}\right) = -\frac{1-a_1}{3}$$

$$a_4 = -\frac{3}{4}a_3 = -\frac{3}{4}\left(-\frac{1-a_1}{3}\right) = \frac{1-a_1}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}(1-a_1) \quad k \geq 2$$

Consecuentemente,

$$y_t = a_0 + a_1t + (1-a_1) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} t^k$$

Si recordamos el Ejemplo 3.4, se tiene que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$$

por lo que, finalmente, la solución de la EDO es

$$y_t = a_0 + a_1t + (1-a_1)(t - \ln(1+t)) = a_0 + t + (a_1 - 1)\ln(1+t) \quad \blacklozenge$$

De los ejemplos anteriores se concluye un aspecto interesante. El método presupone una solución del tipo (7) y su resolución se basa en la existencia de  $n$

constantes arbitrarias, donde  $n$  es el orden de la EDO por resolver<sup>11</sup>. En el segundo ejemplo, la EDO requiere de dos constantes, dadas por  $a_0 = y_0$  y  $a_1 = y'_0$ .

**Importante.** Al asumir que la solución de una EDO posee una representación de **series de potencias** se supone (entre otras cosas) que esta solución es una función infinitamente diferenciable. Este hecho no siempre se cumple por lo que el método puede ser limitado. Sin embargo, el método resulta útil **aunque** no puedan hallarse, a partir de las **series de potencias**, formas cerradas de la solución como las funciones  $\text{sen}(t)$  o  $e^t$ .

**Ejemplo 5.9** La EDO  $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ <sup>12</sup> debe ser reescrita como

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}y = 0$$

para que el **teorema de Fuchs** sea aplicable (note que este paso se obvió en el Ejemplo 5.8). Luego, debemos analizar cuál es el **radio de convergencia** de

$$a_1(t) = -\frac{2t}{1-t^2} \quad \text{y} \quad a_0(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-t^2}$$

Dado que  $-2t$  y  $\alpha(\alpha+1)$  son funciones analíticas con un radio infinito, por el Teorema 3.4 debemos hallar el **radio de convergencia** del denominador de  $a_1(t)$  y  $a_0(t)$ . Por lo visto de **series geométricas** (sección 2.3), se sabe que

$$f(t) = \frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}$$

en el intervalo  $|t| < 1$ . Dado que  $t$  se refiere a “tiempo”, el intervalo se reduce a  $t < 1$ . Luego, el **teorema de Fuchs** nos asegura que en este intervalo la solución de la EDO es

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}$$

<sup>11</sup> Al respecto, un enfoque técnico puede consultarse en Changgui Zhang, “Summability of Power Series Solutions of  $q$ -Difference Equations”, Université de La Rochelle, 1998.

<sup>12</sup> Esta EDO es conocida como **ecuación de Legendre de orden  $\alpha$** . Fue empleada por el francés Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) para analizar la trayectoria de una bala de cañón.

Entonces, imponiendo  $\alpha = 1$ ,

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)t^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)t^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k kt^k + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+2}(k+2)(k+1) - a_k(k+2)(k-1)t^k] = 0$$

De esta forma se tiene la recursión  $a_{k+2} = \frac{k-1}{k+1} a_k$  que, en términos de  $a_0$ , equivale a

$$\begin{array}{llll} a_2 = -a_0 & a_4 = \frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{3}a_0 & a_6 = \frac{3}{5}a_4 = -\frac{1}{5}a_0 & \dots \\ a_3 = 0 & a_5 = 0 & a_7 = 0 & \dots \end{array}$$

Luego,

$$y_t = a_0(1 - t^2 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{5}t^6 - \dots) + a_1 t$$

Es conveniente notar que este desarrollo reconoce la existencia de dos soluciones linealmente independientes de la EDO original, como lo establecido en el Teorema 4.2:  $y_t = C_1 y_1 + C_2 y_2$  donde puede apreciarse que  $C_1 = a_0$  y  $C_2 = a_1$  si

$$y_1 = 1 - t^2 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{5}t^6 - \dots \quad e \quad y_2 = t \quad \blacklozenge$$

El ejemplo anterior ilustra la idea subyacente de soluciones linealmente independientes de una EDO de orden superior incluso cuando estas son aproximadas por **series de potencias**. Consideremos la EDO

$$8t^2 y'' + 10ty' + (t-1)y = 0$$

Dado que  $t^2$  es una función analítica en  $t = 0$ , el Teorema 5.1 sugiere que la solución puede ser representada por una **serie de potencias** de modo que (tras algunas manipulaciones algebraicas)

$$-a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(8k(k+1) + 10(k+1) - 1)a_{k+1} + a_k] x^{k+1} = 0$$

Se aprecia que la constante  $a_0$  no es arbitraria y es igual a cero. Asimismo, el resto de coeficientes de la serie de potencias de  $y$  se rige por la recursión  $a_{k+1} = -w a_k$  (donde  $w$  depende de  $k$ ) por lo que, dado  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$  para todo  $k = 1, 2, 3, \dots$  con lo que se llega a una solución trivial de la EDO,  $y = 0$ . ¿Qué ocurrió? ¿Por qué falló el método? La respuesta es que la EDO contiene dos soluciones linealmente independientes que no han podido ser diferenciadas por la expansión planteada. Esta debilidad es similar a la vista en el **método de los coeficientes** indeterminados.

nados. Afortunadamente, existe una solución a esta contingencia resumida en el Teorema 5.2

**Teorema 5.2 (Teorema de Fuchs extendido)** Dado el problema de valor inicial

$$y'' + \frac{c_1(t)}{t-t_0} y' + \frac{c_0(t)}{(t-t_0)^2} (t)y = f(t)$$

$$y(0) = y_0 \quad y'(0) = y'_0$$

si las funciones  $a_1(t)$ ,  $a_0(t)$  y  $b(t)$  son analíticas en  $t = t_0$ , luego la EDO tiene al menos una solución del tipo

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t-t_0)^{k+r} \quad \dots(8)$$

donde  $r$  es un número determinado de tal forma que  $a_0 \neq 0$ .

**Ejemplo 5.10** Retomemos la EDO  $8t^2 y'' + 10ty' + (t-1)y = 0$  que puede ser reescrita como

$$y'' + \frac{5t/4}{t} y' + \frac{(t-1)/8}{t^2} y = 0$$

de modo que se asemeja a (8). Dado el **teorema de Fuchs extendido**, se plantea como solución

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+r} \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} (k+r) a_k t^{k+r-1} \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} (k+r)(k+r-1) a_k t^{k+r-2}$$

que evaluada en la EDO y tras manipulaciones triviales nos da

$$(8r^2 + 2r - 1)a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(8(k+r)(k+r+1) + 10(k+r+1) - 1)a_{k+1} + a_k] x^{k+1+r} = 0$$

donde  $r$  debe ser elegido de modo que  $a_0 \neq 0$ . Se tienen dos valores de  $r$  que satisfacen esta condición,

$$8r^2 + 2r - 1 = (4r - 1)(2r + 1) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} r_1 = \frac{1}{4} \\ r_2 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

de modo que  $a_0$  se porta como constante arbitraria. Asimismo, se aprecia que

$$a_{k+1} = -\frac{1}{(8(k+r) + 10)(k+r+1) - 1} a_k$$

Luego, ya que se han determinado dos valores para  $r$ , pueden encontrarse dos soluciones para la EDO,

$$r_1 = \frac{1}{4} \rightarrow a_{k+1} = -\frac{1}{2(4k+7)(k+1)} \rightarrow a_1 = -\frac{1}{14}a_0, \quad a_2 = -\frac{1}{44}a_1 = \frac{1}{616}a_0, \quad \dots$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow a_{k+1} = -\frac{1}{2(4k+1)(k+1)} \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}a_0, \quad a_2 = -\frac{1}{20}a_1 = \frac{1}{40}a_0, \quad \dots$$

De esta forma, se tienen dos soluciones linealmente independientes para la EDO, de modo que la solución general de la misma no es más que la combinación lineal de estas,

$$y_t = C_1 t^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{14}t + \frac{1}{616}t^2 + \dots\right) + C_2 t^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{40}t^2 + \dots\right) \quad \blacklozenge$$

Algunos comentarios finales. Esta sección ha tenido como objetivo simplemente introducir al lector en el manejo de **series de potencias** como soluciones de EDO; por ello, esta ha sido, ciertamente, menos rigurosa que las precedentes. De hecho, el **teorema de Fuchs extendido** tiene un alcance mayor que el discutido líneas arriba (por ejemplo, se debe haber preguntado qué ocurre si los valores de  $r$  son iguales). No obstante, precisamente el valor práctico del método está en aproximar soluciones sin tener que lidiar con un procedimiento tedioso, que puede ser encontrado en libros de cálculo o de física donde el tema sea central<sup>13</sup>.

## 5.4 Métodos numéricos

El último tópico que discutiremos sobre la resolución de una EDO está vinculado con la aplicación de métodos numéricos. Como su nombre lo sugiere, un método numérico es un algoritmo que permite obtener aproximaciones de la solución de una EDO de manera numérica (valga la redundancia). El desarrollo de la informática y de las economías de escala inherentes en esta industria han permitido que actualmente se cuente con computadoras sumamente potentes y, relativamente, a precios competitivos, hecho que resultaba inaudito quince años atrás. Este fenómeno ha sido uno de los determinantes para que en los últimos años muchos cursos de ecuaciones diferenciales asignen mayor importancia al uso de estos instrumentos. Probablemente en algunos años, un curso estándar

<sup>13</sup> Para mayor detalle véase Charles. H. Edwards y David E. Penny, *op cit*, p. 69 - 71.

de EDO esté enfocado en los métodos que en esta sección se desarrollan. No obstante, si bien es recomendable estudiar y discutir los avances teóricos y prácticos vinculados con los métodos numéricos en la resolución de un EDO, esta sección puede ser obviada sin perjudicar la continuidad del presente texto ni las principales conclusiones analíticas vistas hasta el momento.

### 5.4.1 Motivación

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad y_{t=0} = y_0, \quad \forall t \in \Omega \subset \mathbb{R} \quad \dots(9)$$

El objetivo de los métodos numéricos que veremos se centra en generar una secuencia de valores aproximados de  $y$ ,  $\{y(k)\} = y(1), y(2), y(3), \dots$  en los puntos  $t_1, t_2, t_3, \dots$  que pertenecen al dominio  $\Omega$ . Para tales efectos, se asumirá que  $\Omega$  es un intervalo finito y que los puntos  $t_1, t_2, t_3, \dots$  son equidistantes. En otras palabras, dada una distancia  $h$  entre dos puntos, el dominio de la secuencia  $\{y(k)\}$  viene dado recursivamente por

$$t_{k+1} = t_k + h$$

donde el carácter “discreto” (y no continuo) del enfoque adoptado implica que  $h = dt$ . En adelante, la expresión  $y$  denotará la solución exacta del problema (1) en  $t$  mientras que  $y(k)$  representará la aproximación de  $y_k$  en  $k$ . El número  $h$  es denominado **tamaño del paso**, siendo el “paso” el movimiento de  $t_k$  hacia  $t_{k+1}$ .

El planteamiento seminal de los métodos numéricos puede encontrarse en el **proceso iterativo de Picard**<sup>14</sup>, desarrollado por el francés Jean Picard (1856 – 1941). Tomando como punto de partida el problema (9), su solución viene dada por

$$\begin{aligned} \int_0^t y'_s ds &= \int_0^t f(s, y_s) ds \\ y_t - y_0 &= \int_0^t f(s, y_s) ds \\ y_t &= y_0 + \int_0^t f(s, y_s) ds \end{aligned} \quad \dots(10)$$

<sup>14</sup> Los fundamentos geométricos de este proceso son claramente expuestos en el tercer capítulo de Vladimir I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations*, 3er ed., Springer Textbook, 1992.

Si somos capaces de calcular la integral definida de (10), tendremos la solución exacta de (9). En el capítulo anterior se vieron algunas formas de calcular esta integral, aunque el planteamiento del cual se partió fue ligeramente distinto. Lamentablemente, esto no siempre es posible. Sin embargo, el proceso iterativo plantea la aproximación discreta de (10),

$$y(t_{k+1}) = y(0) + \int_0^{t_k} f(s, y(t_k)) ds \quad k \geq 1$$

**Ejemplo 5.11** La solución de la EDO  $y' = 2t(1 + y)$ ,  $y_0 = 0$  puede expresarse como

$$y(t_{k+1}) = \int_0^{t_k} 2s(1 + y(t_k)) ds$$

Así, se tiene que

$$y(1) = \int_0^1 2s ds = t^2$$

$$y(2) = \int_0^2 2s(1 + s^2) ds = t^2 + \frac{t^4}{2}$$

⋮

$$y(k) = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \dots + \frac{t^{2k}}{k!}$$

donde puede reconocerse un polinomio de Taylor, por lo que (el lector puede comprobar que) la solución de la EDO converge a

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) = e^{t^2} - 1 \quad \blacklozenge$$

En el ejemplo anterior, el proceso iterativo de Picard resultó ser útil y suficiente en determinar la solución del problema, ya que la integral era sencilla de resolver y el polinomio de Taylor resultante tenía una forma cerrada que convergía a la solución exacta del problema. De hecho, la intención del ejemplo era familiarizar al lector con el proceso iterativo. No obstante, las soluciones numéricas, por naturaleza contienen, básicamente, dos fuentes de errores, como se sugirió en la sección 3.3.3. El primer tipo es evidente ya que se trata de un **error computacional** originado al evaluar funciones implícitas o por el redondeo de las cifras. En general, esta clase de errores puede ser fácilmente controlada y depende, en gran medida, de la herramienta utilizada en la implementación de los métodos numéricos (una calculadora, una computadora). Por otro lado, existe el **error de discrecionalización** que se origina al considerar una secuencia, por definición



discreta (Definición 1.1), como solución de (9) que es una función continua (ver Definición 4.1)<sup>15</sup>. Consideraremos que el error (la suma de ambos errores), en el momento  $t$  es definido como

$$e_t = |y_t - y(t)| \quad \dots(11)$$

donde se toma valor absoluto ya que el signo de la diferencia entre el valor verdadero de  $y_t$  y su aproximación en general, no es relevante. El error puede ser expresado en términos porcentuales (ocasionalmente una medida más conveniente) de modo que

$$e_t^p = 100 \times \frac{|y_t - y(t)|}{|y_t|} \% \quad \dots(12)$$

Finalmente, los métodos numéricos en la solución de una EDO pueden ser clasificados de muchas maneras. En este texto, centraremos el análisis solo en la clasificación “Un Paso” y “Multi – Paso”. Puntualmente, analizaremos tan solo cuatro métodos de “Un paso”.

Por construcción, las ecuaciones diferenciales *no tienen memoria*. Esto es, los valores de  $y_t$  para  $t$  antes de  $t_k$  no afectan directamente a los valores de  $y_t$  para  $t$  después de  $t_k$ . Los métodos de “un paso” tampoco tienen memoria: dado  $y(k)$  existe un planteamiento para  $y(k+1)$  que depende solo de información en  $t_k$ .

Suponga que quiere aproximarse la solución de (9) en el intervalo  $[a, b]$  separado en  $n$  puntos equidistantes; así,  $h = (b - a)/n$  y  $t_k = a + kh$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Claramente, si  $a < b$ ,  $h$  es positivo, por lo que se integra una solución hacia adelante; contrariamente, si  $b > a$ ,  $h$  es negativo y se integra una solución hacia atrás<sup>16</sup>. La especificación general de los métodos de un paso es

$$y(k+1) = y(k) + hF(t_k, y(k)), \quad y(0) = y_0 \quad \dots(13)$$

<sup>15</sup> Dado que este tipo de error está estrechamente ligado con cada método numérico en particular, se le conoce a veces como **error teórico**; esto es, como un error que se genera “porque debe generarse”.

<sup>16</sup> Este caso puede ocurrir si se resuelve un problema cuya condición inicial es el punto terminal de la trayectoria solución.

donde  $F$  es una función que caracteriza a un método específico y de (11) se aprecia que

$$hF(t_k, y(k)) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y_s) ds = hF(t_k, y_k)$$

Teniendo en cuenta la noción de error de aproximación, se tiene que

$$y_{k+1} = y_k + hF(t_k, y_k) + h\tau_k \quad \dots(14)$$

donde  $h\tau_k$  es el mencionado error. Se dice que el método representado por (13) es de **orden  $p$**  si para todo  $t_k \in [a, b]$  para valores pequeños de  $h$  existen dos constantes  $C$  y  $p$  de manera que

$$|\tau_k| = Ch^p \quad \dots(15)$$

El lector puede encontrar algunas similitudes entre (15) y el **resto de Lagrange** visto en el Capítulo 3 (Teorema 3.5). Ciertamente, el origen de ambas cantidades es el mismo, por lo que el error de discretización se conoce, muchas veces, como **error de truncamiento**.

#### 5.4.2. Método de series de Taylor

Si  $y_t$  es una función que puede diferenciarse  $p + 1$  veces, se tiene que

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2} y''_k + \dots + \frac{h^p}{p!} y_k^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} y_k^{(p+1)}$$

donde  $k \leq c \leq k + 1$ . Factorizando la expresión anterior y utilizando (9) y (15),

$$y_{k+1} = y_k + h \left( f(t_k, y_k) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(t_k, y_k) \right) + hCh^p$$

Comparando esta expresión con (14) se deduce que

$$F(t_k, y_k) = f(t_k, y_k) + \frac{h^2}{2} y''_k + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(t_k, y_k)$$

Así, el método de **series de Taylor** aproxima la solución de (9) en el intervalo  $[a, b]$  con  $h$  definido como  $(b - a)/n$  mediante la recursión

$$y(k+1) = y(k) + h \left( f(t_k, y(k)) + \dots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{(p-1)}(t_k, y(k)) \right) \quad \dots(16)$$

$$t_{k+1} = t_0 + kh = t_k + h \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Cuando esta aproximación es de orden  $p = 1$ , se obtiene el método más antiguo y simple que estudiaremos, el **método de Euler**,

$$y(k+1) = y(k) + hf(t_k, y(k)) \quad \dots(\text{eul})$$

**Ejemplo 5.12** Consideremos la EDO  $y' = 0.04y$  con condición inicial  $y_0 = 50$ . La solución de la EDO es  $y_t = 50e^{0.04t}$ . Aproximaremos mediante (eul) esta solución en  $[0, 50]$ . Ya que  $f(t, y) = 0.04y$ , redondeando a dos decimales  $y$  con  $h = 1$  (es decir,  $n = 50$ ) se tiene

$$y(1) = y(0) + h(0.04y(0)) = 50 + (1)(0.04)(50) = 50 + 2 = 52$$

$$y(2) = y(1) + h(0.04y(1)) = 52 + (1)(0.04)(52) = 52 + 2.08 = 54.08$$

$$y(3) = y(2) + h(0.04y(2)) = 54.08 + (1)(0.04)54.08 + 2.16 = 56.24$$

Tabulando estos cálculos para  $t = 0, 5, 10, \dots, 50$

$t$	$y_t$	$y(t)$	Error
0	50.00	50.00	0.00
5	61.07	60.83	0.24
10	74.59	74.01	0.58
15	91.11	90.05	1.06
20	111.28	109.56	1.72
30	166.01	162.17	3.84
40	247.65	240.05	7.60
50	369.45	355.33	14.12

El lector debe haber notado que el valor del error de aproximación presentado en (3) se incrementa conforme  $t$  lo hace ya que en cada paso, este error está compuesto por los errores previamente cometidos. Una manera de controlar esta deficiencia es reduciendo el valor de  $h$ . Con  $h = 0.1$  (que implica 500 pasos), se obtiene

$$y(1) = y(0) + h(0.04y(0)) = 50 + (0.1)(0.04)(50) = 50 + 0.2 = 50.20$$

$$y(2) = y(1) + h(0.04y(1)) = 50.20 + (0.1)(0.04)(52.20) = 52.20 + 0.20 = 50.40$$

$$y(3) = y(2) + h(0.04y(2)) = 50.40 + (0.1)(0.04)50.40 = 50.40 + 0.20 = 50.60$$

Note que  $y(k)$  es la aproximación de  $y_i = y_{ik}$ . Así, se tiene en este caso que  $k = 10t$ . Los resultados con  $h = 0.1$  son tabulados a continuación:

$t$	$y_t$	$y(10t)$	Error
0	50.00	50.00	0.00
5	61.07	61.05	0.02
10	74.59	74.53	0.06
15	91.11	91.00	0.11
20	111.28	111.10	0.18
30	166.01	165.61	0.40
40	247.65	246.86	0.79
50	369.45	367.98	1.47

Como se había predicho, el cambio del tamaño del paso  $h$  de 1 a 0.1 redujo significativamente el error de aproximación. ♦

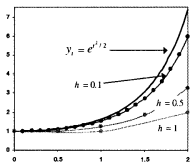
**Ejemplo 5.13** La solución exacta del problema  $y' = yt$ ,  $y_0 = 1$  es  $y_i = e^{t^2/2}$ .

Al aproximar los valores de  $y_2$  e  $y_3$  según el **método de Euler** con distintos tamaños de paso, se obtiene el siguiente cuadro:

$h$	$y_2 = 7.3891$		$y_3 = 90.0171$	
	Iteraciones	error (%)	Iteraciones	error (%)
1	2	72.9329	3	93.3346
0.5	4	55.5931	6	83.5969
0.1	20	19.1612	30	40.7865
0.05	40	10.5236	60	24.3774
0.01	200	2.2838	300	5.7403
0.001	2000	0.2328	3000	0.5973

Las columnas tituladas "Iteraciones" se refieren al número  $n$ , es decir al número de evaluaciones de  $f$  realizadas para conseguir la aproximación. En la columna "Error (%)" se calculan los valores de (4) para  $t = 2$  y  $t = 3$ . ♦

**Figura No. 5.13**  
**Precisión del método de Euler**



En la imagen se presenta la trayectoria de la solución exacta de la EDO del Ejemplo 5.13 y algunas aproximaciones obtenidas por el **método de Euler** bajo distintos tamaños de paso. Dos aspectos importantes pueden ilustrarse en la figura. En primer lugar, cuando menor es  $h$ , mejor es la aproximación conseguida. Sin embargo, y en segundo lugar, cuanto menor es  $h$  se requiere de un mayor número de pasos para alcanzar la secuencia deseada.

Tal y como se puede apreciar en los ejemplos anteriores y en la Figura No. 5.13, la precisión del **método de Euler** en aproximar los valores de  $y$ , depende del valor de  $h$ . En teoría, es posible obtener cualquier nivel de precisión al elegir un valor de  $h$  lo suficientemente pequeño; sin embargo, en la práctica existen limitaciones en esta elección que incluyen, fundamentalmente, el número de iteraciones necesarias en la aproximación y la acumulación de errores computacionales por utilizar un gran número de iteraciones. Ante ello, es válido preguntarse **cómo mejorar este método**. Naturalmente, considerando la derivación de (eul), la primera respuesta es “incrementar el orden  $p$  de aproximación”. El siguiente ejemplo aborda el tema directamente.

**Ejemplo 5.14** Consideremos la EDO simple  $y' = y$  con condición inicial  $y_0 = 1$ .

Dado que en este caso particular  $y^{(4)} = y''' = y'' = y' = y$  de (15) se tienen las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}
 p = 1 & \quad y(k+1) = y(k)[1 + h] \\
 p = 2 & \quad y(k+1) = y(k)\left[1 + h + \frac{h^2}{2}\right] \\
 p = 3 & \quad y(k+1) = y(k)\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right] \\
 p = 4 & \quad y(k+1) = y(k)\left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24}\right]
 \end{aligned}$$

Considerando estas expansiones, se genera la siguiente tabla

$n$	$h = 1/n$	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
4	0.25	2.4414 (1.11)	2.6949 (0.37)	2.7168 (0.09)	2.7182 (0.02)
8	0.125	2.5658 (1.22)	2.7118 (0.41)	2.7181 (0.10)	2.7183 (0.02)
16	0.0625	2.6379 (1.29)	2.7166 (0.43)	2.7183 (0.11)	2.7183 (0.02)
32	0.03125	2.6770 (1.32)	2.7178 (0.44)	2.7183 (0.11)	2.7183 (0.02)
64	0.015625	2.6973 (1.34)	2.7182 (0.45)	2.7183 (0.11)	2.7183 (0.02)

La verdadera solución del problema es, sin duda,  $y_1 = e^t$  por lo que el valor exacto de  $y$  en  $t = 1$  es, a cuatro decimales,  $y_1 = 2.7183$ . En la tabla, los números superiores de cada casilla representan la aproximación hecha a este valor con el orden  $p$  y el tamaño de paso  $h$ . Los números entre paréntesis (inferiores) son el valor absoluto del error de aproximación dividido por  $h^p$ . La utilidad de estos cálculos está en constatar lo afirmado en la ecuación (15), de donde puede deducirse que

$$C = |y_k - y(k)| / h^p$$

Dos conclusiones centrales pueden extraerse de los cálculos realizados. En primer lugar, dado un valor fijo de  $h$ , las aproximaciones son mejores a mayor  $p$ , lo cual es consistente con el **teorema de Taylor**. En segundo lugar, nótese que para los casos  $p = 3$  ó  $p = 4$ , las aproximaciones con 16 u 8 pasos son equivalentes a las obtenidas con 64 pasos y mucho mejores que la conseguida con  $p = 1$  y 64 pasos. Asimismo, el hecho de que  $C = 0.02$  con  $p = 4$  y  $C = 0.11$  con  $p = 3$ , refuerzan la afirmación de que mayores órdenes conllevan a mejores aproximaciones (y menores errores) ♦.

Como pudo constatar en el Ejemplo 5.13, incrementar  $p$  en (15) es una buena alternativa para mejorar el **método de Euler**. Lamentablemente, esto no siempre es cierto. Puntualmente, en el ejemplo, calcular  $y''$  y derivadas de mayores órdenes fue sumamente sencillo; en la práctica, las EDO que requieren ser aproximadas por métodos numéricos son no lineales o poseen coeficientes móviles de modo que el cálculo de las derivadas superiores resulta ser un procedimiento realmente engorroso, lo que resta eficiencia a la solución propuesta. Por ejemplo, si  $y' = t^2 + y^2$ ,  $y''$  será  $2t + 2y(t^2 + y^2)$  e  $y'''$  será  $2 + 6y^4 + 8y^2t^2 + 4yt + 2t^4$ . El lector puede considerar ecuaciones más complicadas.

### 5.4.3 El método de Euler modificado

Presentamos a continuación un procedimiento que permite lidiar con las limitaciones del **método de Euler** y, en general, del **método de series de Taylor**. Si partimos del hecho de que

$$y' = \frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

de (1) se deduce que

$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t))$$

que es la fórmula (eul). En otras palabras, el **método de Euler** se basa, simplemente, en utilizar la versión discreta de  $y'$ . Esta aproximación no es más que la evaluación de  $f$  en el límite inferior del intervalo  $[t, t+h]$  o, como se ha denotado, de  $[t_k, t_{k+1}]$  que puede ser mejorada evaluando la función en el punto medio del intervalo. A saber,

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \approx f\left(t + \frac{h}{2}, \frac{y(t+h) + y(t)}{2}\right)$$

de donde, retomando la notación anterior, se consigue el **método de Euler modificado**,

$$y(k+1) = y(k) + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, \frac{y(k+1) + y(k)}{2}\right) \quad \dots(\text{eulmod})$$

Puede demostrarse que (eulmod) *siempre* brinda mejores aproximaciones que (eul). Intuitivamente, esta superioridad es razonable ya que se parte de una mejor aproximación de  $y'$ . Sin embargo, esta técnica presenta una gran desventaja: en cada paso es necesario resolver (eulmod) para  $y(k+1)$  ya que este término se encuentra en ambos miembros de la ecuación. Muchas calculadoras o paquetes informáticos pueden realizar este procedimiento rápida y eficientemente mediante tabulaciones o iteraciones de (eulmod). A pesar de ello, en la siguiente sección estudiaremos métodos alternativos que poseen las bondades de (eulmod) sin tener esta desventaja.

**Ejemplo 5.15** La EDO  $y' + ay = b$  con condición inicial  $y_0$  ha sido ampliamente discutida en el Capítulo 4. Aplicando (eulmod) se tiene

$$y(k+1) = y(k) + h\left(-a\left(\frac{y(k+1) + y(k)}{2}\right) + b\right)$$

Despejando  $y(k+1)$  se obtiene

$$y(k+1) = \frac{2-ah}{2+ah} y(k) + \frac{2bh}{2+ah}$$

Si consideramos  $a=0.2$ ,  $b=2$ ,  $y_0=1$ ,  $h=1$  y redondeando a cuatro decimales se obtiene las siguientes cifras:

$t$	Exacta	Euler	Modificado	Ratio de errores
0	0.0000	0.0000	0.0000	
1	1.8127	2.0000	1.8182	34.1220
2	3.2968	3.6000	3.3058	33.7430
3	4.5119	4.8800	4.5229	33.3697
4	5.5067	5.9040	5.5187	33.0020
10	8.6466	8.9263	8.6557	30.9082
30	9.9752	9.9876	9.9757	25.1297
50	9.9995	9.9999	9.9996	20.7900
150	10.0000	10.0000	10.0000	10.4082

Puede observarse, comprando con las cifras de la columna "exacta", que el **método de Euler modificado** es superior al **método de Euler** simple. Más aún, la cuarta columna del cuadro, titulada "ratio de errores", que presenta el cociente entre el error de aproximación del **método de Euler simple** y el **modificado**, revela que (eulmod) resultó ser, a la larga, ¡más de 10 veces mejor! ♦

**Ejemplo 5.16 (modelo de Solow).** El **modelo de Solow** data de 1965<sup>17</sup> y constituye el trabajo pionero de la teoría del crecimiento económico moderna. Desde una perspectiva básicamente contable, Solow deriva la regla de acumulación de capital del siguiente modo:

$$k' = s\phi(k) - mk \quad 0 < s < 1, \quad m > 0$$

donde  $k$  puede interpretarse como la ratio de capital per cápita,  $\phi(k)$  es la función de producción *intensiva* (o sea, por persona),  $s$  es la propensión marginal por ahorrar constante y  $m$  es una constante que recoge la tasa de crecimiento poblacional, la tasa de depreciación del capital y algunos indicadores de cam-

17 Ver Robert M. Solow, "A Contribution to the Theory of Economy Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 1965, pp. 65 - 94.



bios o evolución tecnológicos. Asumiendo una función de producción Cobb Douglas, la regla de Solow<sup>18</sup> resulta ser

$$k' = sk^\alpha - mk \quad 0 < \alpha < 1 \quad \dots(*)$$

Cualitativamente<sup>19</sup>, esta EDO posee dos estados estacionarios,

$$k_1 = 0 \text{ y } k_2 = (s/m)^{1/(\alpha-1)}.$$

Luego,

$$\frac{dk'}{dk} = f'(k) = \alpha sk^{\alpha-1}$$

se aprecia que el primer equilibrio es localmente inestable (dado  $\alpha < 1, f'(k_1) = \infty$ ) mientras que el segundo es localmente estable ( $f'(k_2) = (\alpha - 1)m < 0$ ). Por otro lado, la solución exacta para  $k$  es<sup>20</sup>

$$k_t = ((k_0^{1-\alpha} - s/m)e^{-(1-\alpha)mt} + s/m)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

donde se observa inequívocamente que  $k \rightarrow k_2$  en la medida que  $t \rightarrow \infty$ .

La siguiente tabla resume (redondeándola a 4 decimales) los valores exactos de la trayectoria del capital per cápita junto con cálculos realizados a partir de aplicar (eulmod)<sup>21</sup> a (\*), para los valores  $s = 0.35, \alpha = 0.30, m = 0.10, k_0 = 1$  y  $h = 1$ ,

18 Al respecto, un trabajo interesante es el de Raouf Boucekine, Omar Licandro y Christopher Paul en "Differential-difference Equations in Economics: On the Numerical Solution of Vintage Capital Growth Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1997, pp. 347 – 362, donde se desarrolla numéricamente un modelo basado en las ideas de Solow.

19 Una exposición cualitativa interesante sobre el **modelo de Solow** puede encontrarse en Alpha Chiang, *op. cit.*, pp. 507 – 512 y en Knut Sydsaeter y Peter Hammond, *op. cit.*, pp. 629 – 631.

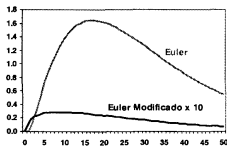
20 La EDO (\*) es una *ecuación de Bernoulli*. Este tipo de ecuaciones no se han discutido en este texto. Sin embargo, el lector puede deducir su proceso de resolución. Véase el Ejercicio 89 del Capítulo 4.

21 Note que la recursión (eulmod) en este caso no puede ser resuelta analíticamente, ya que viene dada por  $k(i+1) = s\left(\frac{k(i)+k(i)}{2}\right)^\alpha - m\left(\frac{k(i)+k(i)}{2}\right)$ ; es decir,  $k(i+1)$  no puede ser despejado.

$t$	Exacta	Euler modificado	Error $\times 10^4$
0	1.0000	1.0000	0.0000
1	1.2499	1.2501	1.5707
5	2.2031	2.2035	4.7492
20	4.5397	4.5404	6.8296
40	5.6194	5.6198	3.7476
60	5.8960	5.8962	1.4507
100	5.9819	5.9819	0.1520
150	5.9873	5.9873	0.0070

En general, la precisión del **método de Euler modificado** es bastante satisfactoria. En el peor de los casos mostrados se tiene un error de aproximación de 0.0007 ( $t=20$ ). Dado que el **método de Euler modificado** es, al igual que el **método de Euler simple**, de orden 1, puede concluirse, que para este ejemplo la constante  $C$  de (7) es un número sumamente pequeño. Finalmente, la Figura No. 5.14 presenta el cálculos de los errores porcentuales para (\*) de (eul) y (eulmod). ♦

Figura No. 5.14  
Euler vs. Euler modificado



*Se sabe que el método de Euler modificado tiene un mejor perfil que el método de Euler. En la figura se observan los errores porcentuales de aproximación en el modelo de Solow bajo ambos métodos. Por una consideración de escala, el error de (eulmod) ha sido multiplicado por 10. Una rápida inspección a estos resultados confirman que, efectivamente, (eulmod) es un método superior a (eul).*

#### 5.4.4 El método Runge Kutta de segundo orden

En términos generales, el lector habrá notado que la ecuación iterativa de Picard (2) puede ser escrita como

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y_s) ds \quad \dots(17)$$

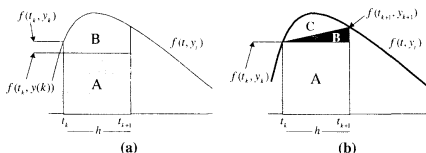
Como ya se ha discutido, la necesidad de los métodos numéricos se basa en nuestra incapacidad por resolver la integral definida, por lo que debemos aproxi-

marla. En el **método de Euler**, la función  $f(t, y)$  es aproximada mediante una constante,  $f(t_k, y(k))$  de modo que<sup>22</sup>

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y_s) ds \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_k, y(k)) ds = hf(t_k, y(k))$$

Geoméricamente, el área por debajo de  $f(t, y)$  en el intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$  es aproximada por un rectángulo "A", como puede apreciarse en el Panel (a) de la Figura No. 5.15. El **método de Euler modificado** trata de aproximar la integral agregando al área rectangular una aproximación de la región "B" de la figura. Esta es la lógica del algoritmo que desarrollaremos a continuación.

**Figura No. 5.15**  
Geometría de los métodos numéricos



Del Panel (b) de la Figura No. 5.15 se observa que una mejora con respecto al **método de Euler** es considerar evaluaciones de  $f$  en dos puntos y promediarlos de modo que se esboza un área similar al trapecoide "A + B", dejando a un área "C" como error de aproximación. Dado los valores  $t_k, y(k), t_n, y(n)$  y las constantes  $a_1$  y  $a_2$  se propone la secuencia,

$$y(k+1) = y(k) + h[a_1 f(t_k, y(k)) + a_2 f(t_n, y(n))] \quad \dots(18)$$

Si consideramos, sin pérdida de generalidad, que

$$\begin{aligned} t_n &= t_k + b_1, \\ y(n) &= y(k) + b_2 hf(t_k, y(k)) \end{aligned} \quad \dots(19)$$

<sup>22</sup> Note que es la **tercera** manera como hemos deducido el **método de Euler**.

el método será deducido una vez que encontremos valores adecuados para  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$ . Es bueno notar que  $t_n$  e  $y(n)$  son valores intermedios en los intervalos  $[t_k, t_{k+1}]$  y  $[y(k), y(k+1)]$ . Así, tomando como referencia (8), la mejor aproximación de  $y_{k+1}$ , debemos encontrar los valores que satisfagan (en lo siguiente  $f(t_k, y(k))$  será denotado simplemente como  $f$ )

$$a_1 f + a_2 f(t_k + b_1 h, y(k) + b_2 h f) = f + \frac{h}{2} f' + R_2$$

Expandiendo  $f(t_k, y(k))$  en  $h$  cercano a cero,

$$E_1 = a_1 f + a_2 f(t_k + b_1 h, y(k) + b_2 h f) = (a_1 + a_2) f + a_2 h (b_2 f f_y + b_1 f_x) + R_2$$

y resolviendo el diferencial total de  $f'$ ,

$$E_2 = f + \frac{h}{2} f' + R_2 = f + \frac{h}{2} (f f_y + f_x) + R_2$$

debe cumplirse que  $E_1 = E_2$ . Se deduce que la igualdad es satisfecha si

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 b_2 &= a_2 b_1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

de modo que se tiene un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Si escogemos arbitrariamente  $a_2 = \gamma$ , luego

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \gamma \\ b_1 &= b_2 = \frac{1}{2\gamma} \end{aligned}$$

Finalmente, evaluando estos resultados en (19) y luego en (18) se obtiene un método de segundo orden<sup>23</sup>,

$$y(k+1) = y(k) + h[(1-\gamma)f(t_k, y(k)) + \gamma f(t_k + \frac{h}{2\gamma}, y(k) + \frac{h}{2\gamma} f(t_k, y(k)))] \quad \dots(20)$$

Particularmente, el **método de Runge Kutta de segundo orden**<sup>24</sup> corresponde a  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,

<sup>23</sup> Note que la esencia del método es utilizar una combinación lineal de dos puntos dentro de  $[t_k, t_{k+1}]$  en lugar de una gran expansión de Taylor.

<sup>24</sup> El nombre del método se debe al matemático alemán Carle Runge (1856 – 1927) y al matemático polaco Martin Kutta (1867 – 1944).

$$y(k+1) = y(k) + \frac{h}{2}[f(t_k, y(k)) + f(t_k + h, y(k) + hf(t_k, y(k)))] \quad \dots(\text{rk2})$$

En gran parte de la literatura, (rk2) es denominado **método de Euler mejorado**. Por su parte, note que si  $\gamma = 0$ , (20) es exactamente igual a (eul). Finalmente, cuando  $\gamma = 1$ , se dice que (20) es el **método de Euler – Cauchy**.

**Ejemplo 5.17** En el Ejemplo 3.9 se introdujo la función de producción CES. Esta función tiene sus orígenes en la integración de una EDO. Si definimos a  $x$  como la ratio de capital por trabajador ( $K/L$ ) y a  $y$  como la producción por trabajador ( $Y/L$ ), la función CES

$$y_x = (Cx^{-\rho} + \alpha)^{-1/\rho} \quad \rho \neq 0, \alpha > 0$$

es la solución de la EDO ( $C$  es una constante de integración),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \alpha y^\rho)}{x}$$

Si consideramos los valores  $\alpha = 0.2$ ,  $\rho = 0.8$  e  $y(0.1) = 1$  y, por consiguiente,  $C = 0.1109$  con un tamaño de paso  $h = 0.05$  dentro del dominio  $[0.1, 1]$  se tienen los siguientes resultados:

$x$	Exacta	Euler	$e/h$	rk2	$e/h^2$	Ratio de errores
0.15	1.3093	1.3500	0.8150	1.3142	1.9732	8.2605
0.50	2.4197	2.5644	2.8946	2.4309	4.4656	12.964
1.00	3.0393	3.1875	2.9648	3.0494	4.0218	14.7437

En primer lugar, una diferencia fundamental entre (eul) y (rk2) es que el último es de segundo orden. Por ello, la ecuación (7) es aplicada con  $p = 2$ . De la derivación anterior puede deducirse que (rk2) resulta ser un procedimiento más general que (eul); por ello, se esperan mejores resultados de (rk2), hecho que es confirmado al observar que la razón de errores en  $x = 1$  es casi 15; ¡15 veces mejor! ♦

### 5.4.5 El método Runge Kutta de cuarto orden

Este es el último algoritmo discutido en el texto. Derivaremos el planteamiento a partir de la misma idea que (rk2). En esta ocasión, aproximaremos a la integral definida de (9) a través de una parábola y no de un rectángulo (como (eul)) o de un trapecoide (como (rk2)). Por ello, utilizaremos la **regla de integración de Simpson**<sup>25</sup>. De acuerdo con esta regla,

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y_s) ds \approx \frac{h}{6} [f(t_k, y_k) + 4f(t_k + \frac{h}{2}, y_{k+1/2}) + f(t_k + h, y_{k+1})]$$

Sin mayor demostración, a partir de esta expresión se determinan valores aproximados para  $y_k, y_{k+1/2}$  e  $y_{k+1}$ , de una manera similar a la de la sección anterior<sup>26</sup> y se obtiene el **método de Runge Kutta de cuarto orden**,

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y(k)) \\ k_2 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 &= f(t_k + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 &= f(t_k + h, y(k) + h k_3) \\ y(k+1) &= y(k) + \frac{h}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{aligned} \quad \dots(\text{rk4})$$

**Ejemplo 5.18.** Consideremos una extensión del **modelo de crecimiento logístico** del Ejemplo 5.2. En particular, definimos la tasa de crecimiento poblacional como

$$p' = rp \left( 1 - \frac{p}{k} \right) - \frac{p^2}{1+p^2} \quad \dots(*)$$

Puede observarse que la EDO consiste en la ecuación de crecimiento previamente analizada menos un componente marcadamente no lineal. Esta EDO es útil al estudiar la evolución de una especie sujeta a cierto factor de depredación o decrecimiento poblacional<sup>27</sup>,  $p^2/(1+p^2)$ . Al igual que en el caso anterior,  $r$  es la tasa de crecimiento poblacional y  $k$  es la capacidad de la población.

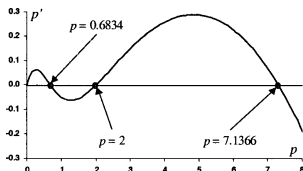
25 La regla de Simpson es uno de los **métodos numéricos** más conocidos en la aproximación de integrales definidas y puede ser consultada en textos de cálculo integral.

26 Una revisión concisa del método puede ser hallada en George Simmons, *Differential Equations: With Applications and Historical Notes*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1991.

27 Este ejemplo es tomado de J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer - Verlag, 1990, pp. 4 - 8, donde  $p$  representa la población de gusanos que vive sujeta a la depredación de algunas aves.

Lamentablemente (\*) no tiene una solución analítica. No obstante, puede hacerse un ejercicio cualitativo sobre su comportamiento además de simular la trayectoria numérica de  $p$ . Si las constantes de la EDO son  $r = 0.5$  y  $k = 10$ , podemos elaborar el **diagrama de fase** de la Figura No. 5.16, donde se aprecia la existencia de tres puntos de equilibrio (excluyendo a  $p = 0$ ). Sin mayor análisis, se concluye que los puntos 0.6834 y 7.1366 son localmente estables mientras que  $p = 2$  es localmente inestable<sup>28</sup>.

**Figura No. 5.16**  
Crecimiento logístico con depredación



En el modelo presentado se asume que una especie sigue un crecimiento logístico a la vez que está sujeta a depredación. Para valores de  $r = 0.5$  y  $k = 10$ , el **diagrama de fase** de (\*) presenta tres puntos estacionarios. El primero de ellos es estable (0.6834) y corresponde a un nivel poblacional reducido. Por su parte, el tercer punto (0.71366) que también es estable corresponde a un nivel poblacional mayor. El segundo equilibrio (2) es inestable, como se aprecia en la **curva de fase**.

Ilustremos el uso del método (rk4) con la EDO en cuestión. Como se puede apreciar de (rk4), este método realiza cuatro evaluaciones de  $f$  y luego las pondera. Asumiendo como condición inicial  $p_0 = 5$ , se tienen los siguientes cálculos (con  $h = 0.1$ )

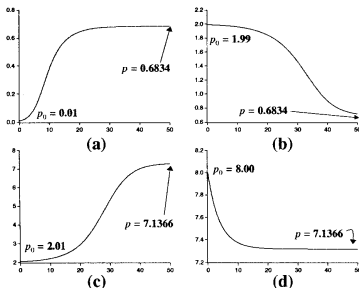
<sup>28</sup> El lector puede comprobar que si  $r = 0.6$  solo se tendrá un equilibrio que es mayor a 7.1366. Igualmente, si  $r = 0.3$  se tiene un equilibrio único y menor a 0.6834. Puede concluirse entonces que las conclusiones sobre (\*) son muy sensibles a su "parametrización".

$t$	$p$	$k_1$ $f(p)$	$k_2$ $f(p + \frac{h}{2}k_1)$	$k_3$ $f(p + \frac{h}{2}k_2)$	$k_4$ $f(p + hk_3)$	$p(k+1)$ $p + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
0.0	5.0000	0.2885	0.2882	0.2882	0.2880	5.0288
0.1	5.0288	0.2880	0.2877	0.2877	0.2875	5.0576
0.2	5.0576	0.2875	0.2872	0.2872	0.2868	5.0863
0.3	5.0863	0.2868	0.2865	0.2865	0.2862	5.1150
0.4	5.1150	0.2862	0.2858	0.2858	0.2854	5.1435
0.5	5.1435	0.2854	0.2850	0.2850	0.2846	5.1720

Nota. En el ejemplo  $f(p) = f(t, p)$  ya que se trata de una EDO autónoma.

Finalmente, utilizando el procedimiento ilustrado en el cuadro (es decir, el **método Runge Kutta 4**), se simuló la trayectoria de  $p$  para distintas condiciones iniciales y con un tamaño de paso de 0.1. Los resultados son mostrados en la Figura No. 5.17. Puede apreciarse, en primera instancia la inestabilidad del punto  $p = 2$ . El Panel (b) tiene como condición inicial a  $p_0 = 1.99$  mientras que en el Panel (c) esta condición es  $p_0 = 2.01$ . En el primer caso,  $p$  disminuye hasta llegar al punto 0.6834, donde permanece indefinidamente mientras que en el segundo lugar la población se incrementa hasta alcanzar el nivel 7.1366. Los paneles (a) y (d) simplemente confirman la estabilidad del primer y tercer estado estacionario.

**Figura No. 5.17:**  
Trayectorias numéricas de la población





### 5.4.6 Una evaluación de los métodos numéricos

Con el fin de determinar cuál de los cuatro métodos presentados contiene algún valor práctico, dos consideraciones son decisivas. En primer lugar, el esfuerzo computacional que cada algoritmo en particular demanda. En segundo lugar, es importante prestar atención a la precisión que estos esfuerzos computacionales retornan. Para los algoritmos estudiados en este texto, la manera de medir el “esfuerzo” es igual al número de evaluaciones que cada método realiza por paso. Por ejemplo, el **método de Euler** realiza una evaluación por paso, mientras que (rk4) evalúa 4 veces la función. Entonces, (rk4) es cuatro veces más costoso que (eul). Sin embargo, este aspecto no es central ya que, como veremos, puede obtenerse la misma precisión con pocos pasos utilizando (rk4) que con cientos de pasos utilizando (eul). El Cuadro No. 5.2 brinda una primera observación cualitativa sobre la comparación de los cuatro métodos.

**Cuadro No. 5.2**  
Evaluación cualitativa de los métodos numéricos

Método	Evaluaciones por paso	Precisión	Observaciones
<b>Euler</b>	1	Normalmente insatisfactoria	Cualquiera de los siguientes métodos brinda mejores resultados
<b>Euler modificado</b>	1	Generalmente buena	Requiere resolver ecuaciones en cada paso o iterar una solución.
<b>Euler mejorado</b>	2	Usualmente buena	De segundo orden. No requiere evaluar derivadas explícitas de $f$ .
<b>Runge Kutta 4</b>	4	Muy buena	rk2 Mejorado.

Para poder llegar a una evaluación cuantitativa sobre el comportamiento de los distintos algoritmos, tomemos como ejemplo el problema de valor inicial

$$y' = y - 2t, \quad y_0 = 3$$

cuya solución exacta es  $y_t = 2 + 2t + e^t$ . Con los procedimientos expuestos en el Apéndice de este Capítulo, el lector podrá comprobar que las principales conclusiones de esta sección son cualitativamente las mismas para la gran mayoría de problemas como (9). El valor exacto de  $y_1$ , a seis posiciones decimales es, 6.718282. La siguiente tabla lista el error de aproximar este valor generado por cada uno de los cuatro métodos con tres distintos tamaño de paso.

$n$	$h$	Euler		Euler modificado		Euler mejorado (rk2)		Runge Kutta 4	
		Error	#	Error	#	Error	#	Error	#
5	0.2	$2.3 \times 10^{-1}$	5	$9.1 \times 10^{-3}$	5	$1.6 \times 10^{-2}$	10	$3.1 \times 10^{-5}$	20
50	0.02	$2.7 \times 10^{-2}$	50	$9.3 \times 10^{-3}$	50	$1.8 \times 10^{-4}$	100	$3.6 \times 10^{-9}$	200
500	0.002	$2.7 \times 10^{-3}$	500	$9.1 \times 10^{-7}$	500	$1.8 \times 10^{-6}$	1000	$3.6 \times 10^{-13}$	2000

Nota. El símbolo “#” se refiere al número de evaluaciones realizadas.

De la tabla puede observarse que:

- El uso de 20 evaluaciones de  $f$  de **Runge Kutta 4** retorna un error 90 veces más pequeño que 500 evaluaciones de  $f$  bajo el **método de Euler**. Asimismo, el uso de 5 evaluaciones de **Euler modificado** retorna un error de aproximación ligeramente mayor al de 500 evaluaciones de Euler. Finalmente, en este caso **Euler modificado** supera a **Euler mejorado** (rk2).
- Con Euler, reducir  $h$  por un factor de diez, reduce el error por un factor de diez.
- Con **Euler mejorado**, reducir  $h$  por un factor de diez, reduce el error por un factor de cien.
- Con **Euler modificado**, reducir  $h$  por un factor de diez, reduce el error por un factor de 200.
- Con **Runge Kutta 4**, reducir  $h$  por un factor de diez, reduce el error por un factor  $10^4$ .

Luego de contar con estas observaciones, se realizó el siguiente ejercicio: se aplican los cuatro métodos con diez valores de  $h$ , dados por  $1/2^m$  ( $m$  es un entero positivo). Los errores son graficados para cada valor de  $m$  en la Figura No. 5.18. Note que la escala del eje vertical es logarítmica mientras que el eje horizontal presenta los valores de  $m$ . Por ejemplo, los puntos coincidentes con  $m = 3$  muestran el error de aproximar  $y_1$  bajo cada método usando  $2^3 = 8$  pasos, o un tamaño de paso de  $2^{-3} = 0.125$ .

Finalmente, una medida alternativa de precisión en las aproximaciones resulta ser el valor de la constante  $C$  en la ecuación (7). Utilizando  $p = 1$  para el **método de Euler** y **Euler modificado**, 2 para (rk2) y 4 para **Runge Kutta 4**, se generó el segundo panel de la Figura No. 5.18 con diez pasos ( $h = 0.1$ )

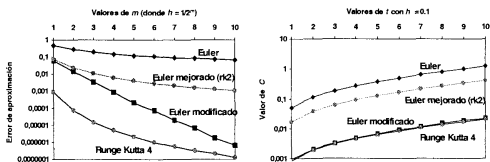
Del análisis anterior pueden obtenerse cuatro conclusiones básicas y prácticas sobre el uso de **métodos numéricos** en la resolución de una EDO<sup>29</sup>:

<sup>29</sup> Para un mayor número de criterios de evaluación consúltese E. Hairer, S. P. Norsett y G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations 1: Nonstiff Problems*, 2nd ed., Springer Textbook, 2000.

- 1) Si solo se desea tener una idea del comportamiento de una EDO o se trata de una EDO aparentemente sencilla de resolver (es decir,  $f$  no es una forma complicada), el **método de Euler** puede ser de utilidad, básicamente por su sencillez.
- 2) Si se requiere de cierta precisión en los cálculos, puede optarse por utilizar el **método de Euler mejorado** o **Runge Kutta de orden 2**. Como se aprecia en la tabla del ejemplo resuelto, 10 evaluaciones (5 pasos) de este método equivalen a 50 evaluaciones (50 pasos) simples.
- 3) Si se busca precisión y, en especial, la forma de la EDO no es muy engorrosa, puede optarse por el **Euler modificado**. Su implementación, como puede apreciarse en el Apéndice, puede ser más sencilla que la de (rk4), siendo sus resultados similares.
- 4) Sin duda, si se busca precisión y confiabilidad, utilícese (rk4). Ciertamente, se trata de un método costoso: 4 evaluaciones por paso. A diferencia de **Euler modificado** (que tiene la ventaja de contar con tan solo una evaluación por paso) no es necesario resolver una ecuación ni iterar con (rk4). Asimismo, la implementación de (rk4) puede resultar tediosa por lo que el criterio del lector prevalece sobre cualquier resultado cuantitativo.

**Figura No. 5.18**  
Evaluación de métodos numéricos

Errores de aproximación de  $y_1$  en  $y' = y - 2t, y_0 = 3$



#### 5.4.6 EDO de orden superior y sistemas

Los métodos estudiados pueden ser fácilmente generalizados para sistemas de EDO de primer orden. Además, el uso de los **sistemas equivalentes** (es decir,

expresar una EDO de orden superior como un sistema de primer orden) permiten utilizar los algoritmos numéricos en la resolución de EDO de orden superior.

Retomando la notación utilizada en la ecuación (13), si se tienen  $m$  ecuaciones (variables), luego la especificación general de los métodos de un paso para sistemas viene dada por

$$\begin{aligned} y_i(k+1) &= y_i(k) + hF_i(t_k, y_1(k), \dots, y_i(k), \dots, y_m(k)) \\ y_i(t_0) &= y_{i,0} \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad \dots(21)$$

que aproximan la solución al sistema

$$\begin{aligned} y'_i &= f_i(t, y_{1i}, \dots, y_{ii}, \dots, y_{mi}) \\ y_{i,t_0} &= y_{i,0} \end{aligned}$$

Al igual que el caso univariado, las funciones  $F_i$  denotan el método por aplicar y dependen de  $f_i$ . Ilustraremos cómo proceder en casos multivariados y en EDO de orden superior a través de cuatro ejemplos.

**Ejemplo 5.19** Resolvamos por el **método de Euler** ( $h = 0.1$ ) los dos primeros pasos del sistema

$$\begin{aligned} z' &= -2tz + 3y^2 & z_0 &= -1 \\ y' &= -3z^2(1-y) & y_0 &= 2 \end{aligned}$$

Aplicando (eul), para  $k+1=1$ ,

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h = 0.1 \\ z_1 &= z_0 + h(-2t_0 z_0 + 3y_0^2) = -1 + 0.1(0 + 3(4)) = 0.2 \\ y_1 &= y_0 + h(-3z_0^2(1-y_0)) = 2 + 0.1(-3(1)(-1)) = 2.3 \end{aligned}$$

y, finalmente, para  $k+1=2$ ,

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + h = 0.2 \\ z_2 &= z_1 + h(-2t_1 z_1 + 3y_1^2) = -0.2 + 0.1(-2(0.1)(0.2) + 3(2.3)^2) = 1.783 \\ y_2 &= y_1 + h(-3z_1^2(1-y_1)) = 2.3 + 0.1(-3(0.2)^2(-1.3)) = 2.3156 \end{aligned}$$

Según lo desarrollado, puede apreciarse que, dado el sistema

$$Y'_t = \Gamma(t, Y_t), \quad Y_0 = A$$

la recursión (eul) viene dada por

$$Y(k+1) = Y(k) + h\Gamma(t_k, Y(k))$$

**Ejemplo 5.20** La EDO  $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0$  tiene como solución exacta a

$$y_t = e^{-\frac{1}{2}t} (\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t))$$

es decir, una trayectoria con oscilaciones amortiguadas. El sistema equivalente de esta EDO es

$$\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Al aplicar (eul) al sistema se deducen las recursiones para  $y$  y para la variable ficticia  $x$ ,

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) - hx(k) \\ x(k+1) &= x(k) - h(\frac{5}{4}y(k) + x(k)) \end{aligned}$$

El siguiente cuadro tabula los errores de aproximación. Resulta útil que el lector note que cuando  $h = 1$ , (eul) es inestable y, en general (puede comprobarlo) lo es con funciones fluctuantes para grandes valores de  $h$  (¿por qué?)<sup>30</sup>

$t$	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.25$	$h = 0.1$	$h = 0.01$
1	1.000	0.688	0.611	0.590	0.583
5	0.688	0.256	0.064	0.008	0.014
10	1.290	0.042	0.008	0.009	0.008
20	9.910	0.009	0.001	0.000	0.000

**Ejemplo 5.21 (Producción y polución)** Retomemos el Ejemplo 5.5 donde se tenía que el *stock* de capital y del *stock* de contaminación seguían la dinámica

$$\begin{aligned} K' &= sK^\alpha - \delta K & 0 < \alpha < 1, \delta > 0 \\ P' &= K^\beta - \gamma P & \beta > 1, \gamma > 0 \end{aligned}$$

**30 Nota importante.** Este hecho constituye una de las más marcadas debilidades de los métodos discutidos en este texto. Afortunadamente, siempre es posible obviar este problema reduciendo el valor de  $h$ , asumiendo los costos vinculados con esta decisión. No obstante, existen algoritmos donde en cada paso el valor de  $h$  es determinado, por lo que  $h$  se reduce ante cambios bruscos en la pendiente de la función (fluctuaciones) y aumenta en tramos suaves de la misma.

si  $s = 0.35$ ,  $\alpha = 0.3$ ,  $\delta = 0.10$ ,  $\beta = 1.2$ ,  $\gamma = 0.5$  y condiciones iniciales  $K_0 = 1$  y  $P_0 = 0$ , aplicamos el **método de Runge Kutta 4** con  $h = 0.1$ . A continuación se presenta la obtención de  $K(1)$  y  $P(1)$  los dos primeros pasos:

$$\begin{aligned} k_{1K} &= sK(0)^\alpha - \delta K(0) = 0.25 & k_{1P} &= K(0)^\beta - \gamma P(0) = 1.00 \\ k_{2K} &= s(K(0) + \frac{h}{2}k_{1K})^\alpha - \delta(K(0) + \frac{h}{2}k_{1K}) = 0.2501 & k_{2P} &= (K(0) + \frac{h}{2}k_{1K})^\beta - \gamma(P(0) + \frac{h}{2}k_{1P}) = 0.9900 \\ k_{3K} &= s(K(0) + \frac{h}{2}k_{2K})^\alpha - \delta(K(0) + \frac{h}{2}k_{2K}) = 0.2501 & k_{3P} &= (K(0) + \frac{h}{2}k_{2K})^\beta - \gamma(P(0) + \frac{h}{2}k_{2P}) = 0.9903 \\ k_{4K} &= s(K(0) + hk_{3K})^\alpha - \delta(K(0) + hk_{3K}) = 0.2501 & k_{4P} &= (K(0) + hk_{3K})^\beta - \gamma(P(0) + hk_{3P}) = 0.9806 \\ K(1) &= K(0) + \frac{h}{4}[k_{1K} + 2k_{2K} + 2k_{3K} + k_{4K}] = 1.0250 & P(1) &= P(0) + \frac{h}{4}[k_{1P} + 2k_{2P} + 2k_{3P} + k_{4P}] = 0.099 \end{aligned}$$

Note que simplemente se ha aplicado una versión generalizada del **Runge Kutta 4**. A saber, si se tiene el sistema

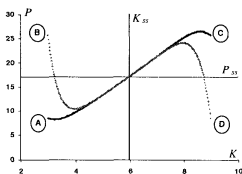
$$\mathbf{Y}' = \Gamma(t, \mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{A}$$

la recursión (rk4) viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \Gamma(t_k, \mathbf{Y}(k)) \\ \mathbf{K}_2 &= \Gamma(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}(k) + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1) \\ \mathbf{K}_3 &= \Gamma(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}(k) + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2) \\ \mathbf{K}_4 &= \Gamma(t_k + h, \mathbf{Y}(k) + h\mathbf{K}_3) \\ \mathbf{Y}(k+1) &= \mathbf{Y}(k) + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4) \end{aligned}$$

Aplicando repetidamente este algoritmo, con distintas condiciones iniciales y con  $h = 0.1$ , se simuló el modelo y se llegó al **diagrama de fase** de la Figura No. 5.19

**Figura No. 5.19**  
**Producción y polución**



La figura muestra la dinámica conjunta entre  $K$  y  $P$ . En el punto A, la condición del problema es  $K_0 = K_{ss}/2$ ,  $P_0 = P_{ss}/2$ ; en el punto C, la condición es  $K_0 = 3K_{ss}/2$ ,  $P_0 = 3P_{ss}/2$ . Los puntos B y D una variable toma como valor inicial  $3Y_{ss}/2$  y la otra  $Y_{ss}/2$ , donde  $Y_{ss}$  denota el valor de estado estacionario de  $K$  o de  $P$ . Se aprecia en este diagrama de fase numéricamente simulado que el sistema es globalmente estable por lo que el estado estacionario del mismo es un nodo, tal y como es expuesto analíticamente en la Figura No. 5.7.

**Ejemplo 5.22** En física, una importante ecuación de mecánica no lineal es la *ecuación de van der Pol*, definida como

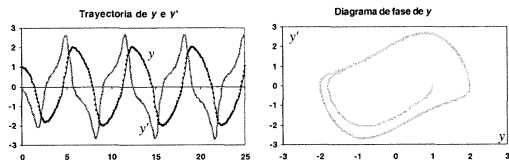
$$y'' + u(y^2 - 1)y' + y = 0$$

donde  $u > 0$ . Para un conjunto de condiciones iniciales, la solución de esta ecuación converge a una solución periódica, denominada *ciclo límite*. Por su parte, el sistema equivalente a esta ecuación es

$$\begin{aligned}y' &= x \\x' &= -u(y^2 - 1)x - y\end{aligned}$$

con  $u = 1$ ,  $h = 0.1$  y condiciones iniciales  $y_0 = 1$ ,  $y'_0 = 0$  se aplicó (rk4) y se llegó a los gráficos mostrados en la Figura No. 5.20. El primero de ellos corresponde a las trayectorias numéricas de  $y$  e  $y'$  mientras que el segundo muestra el *diagrama de fase* de  $y$  en el plano  $yy'$ . De la observación de la figura se concluye inmediatamente el carácter cíclico de la solución a la EDO de van der Pol.

**Figura No. 5.20**  
La ecuación de van der Pol



## Ejercicios

Determine el valor de estado estacionario y analice cualitativamente la estabilidad local de las siguientes EDO. Elabore un **diagrama de fase** en su respuesta:

1.  $x' = x^3 + x^2 - x - 1$

2.  $x' = xe^x$

3.  $x' = ax + bx^2 \quad a, b \in \mathbb{R}$

4.  $x' = x^2 - 8y + 5$

5.  $x' = 3 - x - \ln(x) \quad x > 0$

6.  $x' = e^{x-1} \ln(1+x)$

7.  $x' = x^3 + x^2 - x - 1$

8.  $x' = xe^x$

9.  $x' = x^{0.5} - 0.5x$

10.  $x' = \cos(x)$

Analice la estabilidad local de los siguientes sistemas:

11.  $x' = e^x - 1$

$y' = ye^x$

12.  $x' = 1 - e^y$

$y' = 5x - y$

13.  $x' = x + 2y$

$y' = x^2 - y$

14.  $x' = x + y$

$y' = -x - y$

15.  $x' = -x - y^2$

$y' = -x^2 + y^2$

**16. Modelo de crecimiento neoclásico.** Luego de resolver el problema de maximización dinámica de la utilidad de una sociedad a lo largo del tiempo (descontada con una tasa  $r$ ), obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales planteadas por el **modelo neoclásico de crecimiento (modelo de Ramsey)**:

$$k' = \phi(k) - c - (n + \delta)k$$

$$U''(c)c' = -U'(c)[\phi'(k) - (n + \delta + r)]$$

donde:  $c \equiv C/L =$  consumo per cápita.

$k \equiv K/L =$  stock de capital per cápita.

$\phi(k) =$  versión intensiva de la función de producción de la economía. Para el modelo se asume homogénea de grado uno, es decir, con rendimientos constantes a escala. La productividad marginal del capital es positiva pero decreciente.

$n \equiv L'/L =$  tasa de crecimiento de la población (se asume constante).

$\delta =$  tasa de depreciación del capital de la economía (se asume constante).

$U(c) =$  función de utilidad de los individuos que conforman la economía. Para el desarrollo del modelo se considera que estos son adversos al riesgo, es decir, su utilidad marginal es positiva y decreciente.



A partir de los datos dados, elaborar el **diagrama de fase** del modelo y evaluar visualmente el punto de equilibrio. Luego, asumiendo

$$U(c) = \ln(c) \quad f(k) = k^\alpha \quad 0 < \alpha < 1$$

Determine el punto de equilibrio, linealice el sistema y caracterice el estado estacionario.

**17. Modelo de poder de mercado.** La demanda de algún bien es

$$Q_t = a - bP_t \quad a, b > 0$$

Por otro lado, existe una empresa poderosa que fija el precio, el cual es aceptado por las pequeñas empresas.  $Y$  es la producción de las pequeñas empresas que se ajusta según

$$Y' = k(P_t - P^*) \quad k > 0$$

donde  $P^*$  es el precio de equilibrio del mercado. El objetivo del gerente de la empresa es maximizar el valor presente de sus beneficios. Este logra determinar que su precio debe ser

$$P_t = \frac{a + bc + km_t - Y}{2b}$$

Donde  $c > 0$  (costo medio) y  $m$  es una variable temporal la cual presenta la siguiente dinámica:

$$m' = P_t - c + m_t$$

- Halle las trayectorias de  $Y$  y  $m$ .
- Construya un **diagrama de fase** que explique la dinámica en el plano  $YP$ . Halle y analice el punto de equilibrio. Acuérdesse de que para realizar el **diagrama de fase** necesita  $Y'$  y  $P'$  las que solo deben depender de  $Y$  y  $P$ , mas no de  $m$ .

**18. Política monetaria.** Considere un modelo sobre la ineficacia de la **política monetaria** contra los ciclos económicos cuando se trabaja con un mecanismo de ajuste de la inflación,

$$\frac{R'}{R} = p + q - m \quad \frac{dp}{dt} = h(1 - R)$$

donde:  $\dot{p}$  = tasa de crecimiento de la inflación  
 $R$  = ratio demanda / oferta de dinero  
 $q$  = tasa del crecimiento del PBI (factor exógeno)  
 $m$  = tasa de la expansión monetaria (factor exógeno)  
 $h$  = factor de ajuste ( $h > 0$ )

Analice el punto de equilibrio mediante el uso de un **diagrama de fase**. Comente el resultado a la luz del modelo. ¿Qué ocurre si consideramos a  $m = m(p)$  como una función lineal decreciente (aplicación de una política monetaria antinflacionaria)? Plantee el nuevo modelo, dibuje el nuevo **diagrama de fase** y analice el nuevo punto de equilibrio. Realice un comentario sobre sus resultados.

**19. Producción y polución.** En el ejemplo 5.5 se planteó un modelo donde la acumulación de capital de una economía estaba asociada con el incremento de la contaminación de la misma. No obstante, el modelo en cierta medida no era realista, ya que el nivel de contaminación no afectaba a la producción agregada de la economía. Replantee el modelo de este ejemplo, considerando esta vez que la producción agregada es definida como  $Y = K^\alpha/P$ . Determine el punto de equilibrio y califíquelo. Asimismo, elabore un **diagrama de fase** y compárelo con la Figura No. 5.7.

**20. Especies en competencia.** Retomemos el modelo “Depredador – Presa” del Ejemplo 5. 7. Sin embargo, consideramos un pequeño cambio en la especificación del sistema:

$$y' = ay - sxy \quad x' = bx - rxy$$

El lector puede apreciar que este modelo corresponde a un sistema “Depredador – Depredador”, donde la existencia de una especie dentro de un espacio geográfico reduce la población de la otra especie. Si las constantes del sistema son positivas, verifique que, a diferencia de los visto en el Ejemplo 5.8, el comportamiento de  $x$  e  $y$  no es cíclico y, exceptuando el equilibrio, una especie se aproxima a la extinción mientras que otra prevalece.

**21. Especies en competencia, otra vez.** Considere la población de dos tipos de especies:  $x$  e  $y$ . A diferencia de lo visto en el texto, las dos especies compiten por obtener los alimentos que se encuentran en la naturaleza, de tal forma que la tasa de crecimiento de cada especie se encuentra relacionada negativamente con la cantidad de elementos de la otra especie (es decir, si la población de una especie

crece, la otra especie disminuye por la falta de alimentos). Dicho comportamiento se resume en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x' = x(1 - x - 2y) \quad y' = y(1 - y - 2x)$$

Elabore el **diagrama de fase** del sistema e identifique cada uno de los puntos de equilibrio existentes. A partir de la **matriz jacobiana** del sistema, caracterice cada uno de los puntos de equilibrio.

**22. Extracción de peces.** Considere el siguiente modelo de explotación óptima de peces donde la población  $N$  de peces crece en ausencia de actividades de extracción. En una comunidad cercana al lago se consume una cantidad  $C$  de pescado, que brinda una utilidad igual a  $U(C)$  ( $U'(C) > 0$ ,  $U''(C) < 0$ ) y altera el crecimiento de la biomasa según:

$$N'_{(t)} = aN_{(t)} - bN_{(t)}^2 - C_{(t)} \quad (a, b > 0)$$

El objetivo de la comunidad es maximizar las utilidades futuras descontadas a la tasa  $\rho$  y para esto ha encontrado la siguiente relación:

$$C' = \frac{U'_{(C)}}{U''_{(C)}} (2bN - a - \rho)$$

Analice la estabilidad local del punto de equilibrio ( $C^*$ ,  $N^*$ ). Dibuje el **diagrama de fase** en el plano  $CN$  e indique las cualidades del punto de equilibrio. Interpretar los resultados cuando  $\rho = 0$  y cuando  $\rho = a$ .

**23. Mercado de factores.** La acumulación de capital es regida por  $K' = sF(K, L) - \delta K$  donde  $s$  es la tasa de ahorro y  $\delta$  es la tasa de depreciación, ambas constantes entre cero y uno, y  $F$  es la función de producción. Si  $w$  es la tasa de salario exógena. La mano de obra de esta economía varía según la diferencia entre la productividad marginal del trabajo y el salario, o en otras palabras,  $L' = L[F_L(K, L) - \delta K]$  donde  $F_L$  es la derivada parcial de  $F$  con respecto a  $L$ . Asumiendo una función de producción  $F(K, L) = 4(KL)^{1/4}$ ,

- Elabore un **diagrama de fase** en el plano  $LK$ .
- Encuentre el punto de equilibrio y analice su estabilidad.
- Si  $w = 1$ ,  $s = 0.1$  y  $\delta = 0.4$  determine el punto de equilibrio, linealice el sistema y halle sus raíces características.

Resuelva las siguientes EDO mediante la aplicación del **teorema de Fuchs** o, de ser necesario, el **teorema de Fuchs extendido**:

- |   |   |
|---|---|
| 24. $y' + (1+t^2)y = 0, \quad y_0 = 1$                                | 25. $y' - 2y = t, \quad y_0 = -\frac{1}{4}$       |
| 26. $y'' + 2ty' + y = 0, \quad y_0 = 0, y_0' = 1$                     | 27. $y' - 3y = 2t, \quad y_0 = -\frac{3}{2}$      |
| 28. $y'' + ty = 0, \quad y_0 = A, y_0' = B \quad A, B \in \mathbb{R}$ | 29. $ty' - 3y = 0, \quad y_0 = 1$                 |
| 30. $(1-t^2)y'' + y = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 0$                     | 31. $y'' + 2ty' + y = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 0$ |
| 32. $y'' + (t-1)y' + y = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 1$                  | 33. $y' = \cos(y), \quad y_0 = 1$                 |
| 34. $y'' + 4y = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 0$                           | 35. $y'' + y^2 = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 0$      |

**Para la resolución de los siguientes ejercicios, consúltese el Apéndice**

Resuelva las siguientes ODE con los métodos numéricos desarrollados en el texto. Considere un tamaño de paso  $h = 0.1$ , un intervalo de tiempo  $t \in [0, 5]$  y compare la precisión en cada método mediante el cálculo de los errores de aproximación porcentuales en caso de poder determinar una respuesta analítica. Por su parte, en caso de tratarse de una EDO de

- |  |   |
|--|---|
| 36. $y' = 2y - 1, \quad y_0 = 1$   | 37. $y' = y - t, \quad y_0 = 2$                   |
| 38. $y' - y = \sin(2t), \quad y_0 = 0$   | 39. $y' = y^2 - 3y + 2, \quad y_0 = 2$            |
| 40. $y' = 1 + y^2, \quad y_0 = 0$  | 41. $y' + ty^2 = 0, \quad y_0 = 1$                |
| 42. $y' = t, \quad y_0 = 0$  | 43. $y'' + 2ty' + y = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 0$ |
| 44. $y' = e^{-ty}, \quad y_0 = 1$  | 45. $y' = \cos(y), \quad y_0 = 1$                 |
| 46. $y' = y \cos(t), \quad y_0 = 1$  | 47. $y'' + y^2 = 0, \quad y_0 = 1, y_0' = 0$      |
| 48. $y'' + 4y' + 8y = \sin(t), \quad y_0 = 1, y_0' = 0$                                  | 49. $y'' + y = \cos(t), \quad y_0 = 0, y_0' = 1$  |
| 50. $y'' - y'' \sin(t) - 2y' \cos(t) + y \sin(t) = \ln(t), \quad y_0 = y_0' = y_0'' = 1$ |   |

**51. Utilice el método de Euler mejorado para determinar la solución del sistema**

$$\begin{aligned} x' &= 10(y - x) & x_0 &= -1.3560 \\ y' &= x(28 - z) - y & y_0 &= -2.4922 \\ z' &= xy - 8/3 & z_0 &= 12.3174 \end{aligned}$$

**52. Linealice el sistema equivalente de la ecuación de van der Pol (Ejemplo 5.22) y analice su estabilidad. Compare sus resultados con lo obtenido en el texto.**

53. Verifique que  $y = -1/t$  es la solución al problema

$$y' = 0.5(y^2 - y/t) \quad y_1 = -1$$

- Utilice el método de Euler y la aproximación de segundo orden del **método de series de Taylor** para aproximar el valor de  $y_2$  del problema anterior. Utilice  $h = 0.25$  y compare sus resultados con la solución exacta  $(-0.5)$ .
- Repita a) pero con  $h = 2^{-m}$ ,  $m = 3, 4, 5, \dots, 8$ . Muestre que el error del **método de Euler** se aproxima a una constante por  $h$  mientras que el error del método en **serie de Taylor** de segundo orden se aproxima a una constante por  $h^2$ .

## Apéndice. ¿Cómo usar los métodos numéricos?

La sección 5.4 introdujo los **métodos numéricos** para la resolución de una EDO. Claramente, la naturaleza de estos métodos implica el uso de computadoras para que sea realmente práctico. En este Apéndice brindamos al lector algunos consejos de cómo implementarlos. En primer lugar, se presentan algunas rutinas en MATLAB® que serán realmente útiles para los lectores que tienen alguna noción de programación. Asimismo, el lenguaje que utiliza este paquete matemático es sumamente amigable de modo que puede ser traducido fácilmente a otras aplicaciones como, por ejemplo, Visual Basic for Applications. En segundo lugar, se dan algunas pautas de cómo la aplicación MS Excel puede ser útil en implementar los métodos. Esta parte del Apéndice ha sido elaborada pensando en el lector que no tiene experiencia en programación y que tiene un manejo básico del MS Excel.

### A. métodos numéricos en MATLAB®

Presentamos a continuación las funciones que ejecutan el **método de Euler**, **Euler mejorado** o **Runge Kutta de segundo orden** y **Runge Kutta 4**. Como preámbulo, algunas consideraciones previas para los lectores que no son usuarios de MATLAB pero que comprenden lenguajes de programación.

La sintaxis de las rutinas que presentamos es la siguiente:

$$[t, y] = \text{metodo}(f, \text{dominio}, y_0, h)$$

donde se tiene “método” es el nombre de alguno de los tres métodos que desarrollaremos (eul, rk2 ó rk4). Como insumos de la rutina se tienen: **f** que es el nombre de la función donde se encuentra  $f(t, y)$  (ver ecuación (9) del texto); **dominio** es un vector que contiene dos elementos, el primero de ellos es el valor inicial de  $t$  mientras que el segundo es el valor final de  $t$ ; **y0** es un vector de orden  $m$  que contiene el valor de las  $m$  variables  $y$  en  $t = \text{dominio}(1)$  y puede ser multidimensional; finalmente, **h** es el tamaño de paso.

Definimos a  $n = (\text{dominio}(2) - \text{dominio}(1))/h + 1$ . La rutina retorna un vector y una matriz. El primero de ellos es el vector **t** de dimensiones  $(n \times 1)$  y representa la variable independiente (el tiempo) y viene dado por la recursión  $t(k) = \text{dominio}(1) + h \cdot k$ . La matriz solución **y** de orden  $(n \times m)$  contiene las trayectorias aproximadas de  $y$  en **dominio**. La trayectoria puede ser visualizada con el comando **plot(t, y)**. Todas las rutinas utilizan el comando **feval** cuya sintaxis es **a = feval(g, tk, yk)**. El resultado

de este comando es un número,  $\mathbf{a}$ , que es igual a  $g(tk, yk)$ , es decir, la evaluación de la función  $g(t, y)$  en dos valores de sus argumentos.

**Ejemplo.** El resultado del Ejemplo 5.13 fue obtenido de la siguiente manera. En primer lugar, se define la función  $y'$  con los comandos

```
function yprima = Yp(t, y)
yprima = y*t
```

luego, con  $y_0 = 1$ , un tamaño de paso de 0.1 se ejecuta la siguiente rutina para aproximar  $y_2$ :

```
[t, y] = eul('Yp', [0 2], 1, 0.1) ♦
```

**Ejemplo.** Utilizando (rk4) para resolver el Ejemplo 5.21 se especificó la función

```
function Yprima = Yp(t, y)
Yprima(1) = 0.35*y(1)^0.30 - 0.10*y(1)
Yprima(2) = y(1)^1.20 - 0.50*y(2)
```

Note que  $\mathbf{y(1)}$  es  $K$  y  $\mathbf{y(2)}$  representa a  $P$ . Con una condición inicial  $K_0 = 1.5$  y  $P_0 = 9.8$  se ejecuta el siguiente comando con un tamaño de paso de 0.1 hasta  $t = 50$ .

```
[t, y] = rk4('Yp', [0 50], [1.5 9.8], 0.1) ♦
```

### A.1 Método de Euler

```
function [tk, yk] = eul(f, dominio, y0, h)
t0 = dominio(1); tfinal = dominio(2);
t = t0; y = y0(:);
n = floor((tfinal - t0)/h) + 1;
tout = zeros(n,1); tout(1) = t;
yout = zeros(n,size(y,1)); yout(1,:) = y.';
k = 1;
while k < n
    tout(k+1) = t0 + k*h;
    k = k+1;
    k1 = feval(f, t, y); k1 = k1(:);
    y = y + h*k1;
    t = tout(k);
    yout(k,:) = y.';
end
```

**A.2 Método de Euler mejorado o Runge Kutta 2**

```
function [tk, yk] = rk2(f, dominio, y0, h)
```

Hasta la línea “`yout = zeros(n, size(y, 1)); yout(1, :) = y.';`” el programa es idéntico al anterior. El resto debe ser reemplazado por:

```
k = 1;
while k < n
    tout(k+1) = t0 + k*h;
    k = k + 1;
    k1 = feval(f, t, y); k1 = k1(:);
    k2 = feval(f, t + h, y + h*k1); k2 = k2(:);
    y = y + h*(k1 + k2)/2;
    t = tout(k);
    yout(k, :) = y.';
end
```

**A.3 Método de Runge Kutta 4**

```
function [tk, yk] = rk4(f, dominio, y0, h)
```

Hasta la línea “`yout = zeros(n, size(y, 1)); yout(1, :) = y.';`” el programa es idéntico a los anteriores. El resto debe ser reemplazado por:

```
k = 1;
while k < n
    tout(k+1) = t0 + k*h;
    k = k + 1;
    k1 = feval(f, t, y); k1 = k1(:);
    k2 = feval(f, t + h/2, y + h*k1/2); k2 = k2(:);
    k3 = feval(f, t + h/2, y + h*k2/2); k3 = k3(:);
    k4 = feval(f, t + h, y + h*k3); k4 = k4(:);
    y = y + h*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6; t = tout(k);
    yout(k, :) = y.';
end
```

Es bueno mencionar que el MATLAB<sup>®</sup> contiene algunas rutinas más potentes que las mostradas cuyos nombres son **ODE23** y **ODE45**. Estas rutinas contienen procedimientos que no han sido explicados en el texto y su empleo es recomendable para usuarios del paquete.

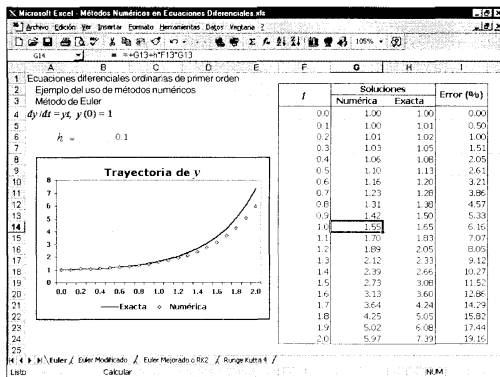


## B. Métodos numéricos en MS Excel

### B.1 Método de Euler (eul)

El problema de valor inicial  $y' = yt$ ,  $y_0 = 1$  tiene como solución exacta  $y_t = e^{t^2/2}$ .

La solución de este problema en MS Excel por el **método de Euler** puede ser observada en la siguiente figura:



Ignorando títulos, encabezados y formatos puntuales, los principales pasos por seguir, con el fin de obtener un resultado similar al presentado en la figura son resumidos en el siguiente cuadro:

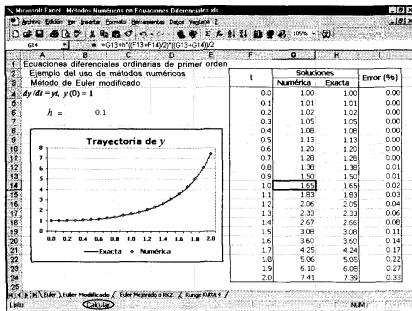
Celda / Paso	Contenido	Comentario
1. B6	= 0.1	$h$ , el valor aproximado de $dt$ .
2.	Llamar "h" a la celda B6.	
3. F4, G4, H4	= 0, = 1, = 1, respectivamente	Condiciones iniciales.
4. F5	= F4 + h	$t_{k+1} = t_k + h$ .
5. G5	= G4 + h*F4*G4	$y(k+1) = y(k) + hf(t_k, y(k))$ .
6. H5	= EXP(0.5*F5^2)	Solución exacta.
7. I5	= 100*ABS(H5 - G5)/H5	Error de aproximación.
8.	Copiar el contenido de las celdas F5:I5 en el rango F6:I24 o hasta el valor que desee aproximar.	
<b>Nota:</b> El paso 2 puede ser obviado. En tal caso, en los pasos 4 y 5 debe reemplazarse "h" por \$B\$6.		

Si  $h$  es menor que 0.1, se requiere de un mayor rango de aproximación de la solución. Por ejemplo si  $B6 = 0.01$ ,  $y(2)$  se encontrará en la celda F204 (¡180 evaluaciones más que las vistas en la figura!). Ello enfatiza lo poco conveniente que resulta mejorar la precisión del **método de Euler** mediante disminuciones del valor del  $h$ .

## A.2 Método de Euler modificado (eulmod)

Consideremos el problema anterior,  $y' = yt$ ,  $y_0 = 1$  con solución exacta  $y_t = e^{t^2/2}$ .

La solución de este problema en MS Excel por el **método de Euler modificado** puede ser observada en la siguiente figura:



Ignorando títulos, encabezados y formatos puntuales, los principales pasos por seguir, con el fin de obtener un resultado similar al presentado en la figura son resumidos en el siguiente cuadro:

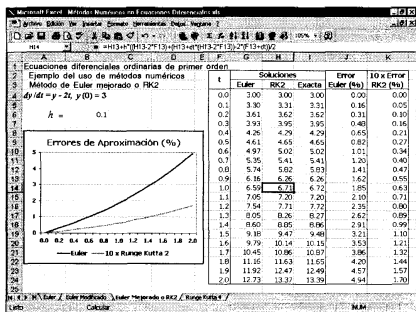
Celda / Paso	Contenido	Comentario
1. a 4.	Igual que en el caso anterior, donde se define el tamaño de $h$ , las condiciones iniciales del problema, y $t_{n+1}$	
5. G5	$= G4 + h*((F4+F5)/2)* ((G4+G5)/2)$	$y(k+1) = y(k) + hf\left(t_k + \frac{h}{2}, \frac{y(k+1)+y(k)}{2}\right)$ .
5. a 8.	Igual que en el caso anterior, donde se define el tamaño de la solución exacta, el error de aproximación y se copia el contenido de las fórmulas iniciales en el rango deseado	

**Importante.** Como se mencionó, este método tiene la particularidad de requerir de algún método iterativo para determinar  $y(k+1)$  ya que este término se encuentra en ambos miembros de una ecuación. Afortunadamente, el MS Excel cuenta con una opción para que esta iteración sea automática. Dentro de **Herramientas/Opciones/Calcular** aparece la opción “iterar”. El lector debe asegurarse de que esta opción esté activada para que pueda resolverse la columna G. De lo contrario, aparecerá un mensaje referente a la presencia de una “referencia circular” (por ejemplo, introducir el término G5 dentro de la celda G5). Si en la **barra de estado** (la franja inferior del programa donde usualmente aparece el mensaje “listo”, ver figura) se puede leer “calcular”, la opción “iterar” está activada. Caso contrario, el mensaje “circular” aparecerá y se tendrá el problema previamente mencionado.

### A.3 Método de Euler mejorado o Runge Kutta de orden 2 (rk2)

La solución exacta de  $y' = y - 2t$ ,  $y_0 = 3$  es  $y_t = 2 + 2t + e^t$ .

La solución de este problema en MS Excel por el **método de Euler mejorado** o el **método de Runge Kutta de segundo orden** puede ser observada en la siguiente figura:

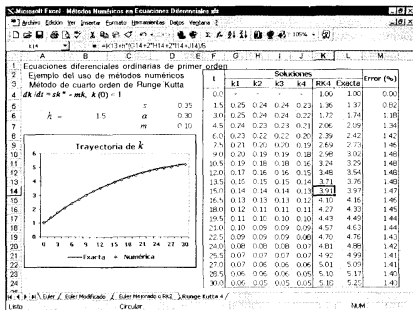


Ignorando títulos, encabezados y formatos puntuales, los principales pasos por seguir, con el fin de obtener un resultado similar al presentado en la figura son resumidos en el siguiente cuadro:

Celda / Paso	Contenido	Comentario
1. B6	= 0.1	$h$ , el valor aproximado de $dt$ .
2.	Llamar "h" a la Celda B6.	
3. F4, G4, H4, I4	= 0, = 3, = 3, = 3	Condiciones Iniciales.
4. F5	= F4 + h	$t_{i+1} = t_i + h$ .
5. G5	= G4 + h * F4 * G4	$y(k+1) = y(k) + hf(t_k, y(k))$ (Euler).
6. H5	= H4 + h * 0.5 * ((H4 - 2 * F4) + (H4 + h * (H4 - 2 * F4) - 2 * (F4 + h)))	$y(k+1) = y(k) + \frac{h}{2} (f(t_k, y(k)) + f(t_{k+1}, y(k) + hf(t_k, y(k))))$ .
7. I5	= 2 + 2 * F5 + EXP(F5)	Solución Exacta
8. J5	= 100 * ABS(I5 - G5) / I5	Error de Aproximación (Euler).
9. K5	= 100 * ABS(I5 - H5) / I5 * 10	10 x Error de Aproximación (Runge Kutta 2).
10.	Copiar el contenido de las celdas F5:K5 en el rango P6:K24 o hasta el valor que desee aproximar.	
Nota:		
El Paso 2 puede ser obviado. En tal caso, en los pasos 4, 5 y 6 debe reemplazarse "h" por \$B\$6.		

#### A.4 Método de Runge Kutta de cuarto orden (rk4)

Concentrémonos en el **modelo de Solow** (Ejemplo 5.16) visto en el texto y aproximemos la solución del capital per cápita (con  $k_0 = 1$ ) según el **método de Runge Kutta de cuarto orden**:



Los pasos por seguir son resumidos en el siguiente cuadro:

Celda / Paso	Contenido	Comentario
1. a 2.	Igual que los casos anteriores. Asimismo, las celdas D5 D6 y D7 son llamadas, "s", "a" y "m", respectivamente, con el fin de no volver engorroso el procedimiento.	
3.	F4, K4, L4 = 0, = 1, = 1, respectivamente	Condiciones Iniciales.
4.	F5 = F4 + h	$t_{i+1} = t_i + h$ .
5.	G5 = s*1.4*a - m*L4	$k_1 = f(t_i, y(k))$
6.	H5 = s*(L4+G5/2)*a - m*(L4+h*G5/2)	$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{k_1}{2}\right)$
7.	I5 = s*(L4+H5/2)*a - m*(L4+h*H5/2)	$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{k_2}{2}\right)$
8.	J5 = s*(L4+I5/2)*a - m*(L4+h*I5)	$k_4 = f(t_i + h, y(k) + k_3)$
9.	K5 = K4+h*(G5+2*I5+2*H5+J5)/6	$y(k+1) = y(k) + h\left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\right)$
10.	L5 = ((1+(1-a-s/m)*... ...EXP(-(1-a)*m*F5+s/m))/((1-a)))	Solución Exacta
11.	M5 = 100*ABS(L5 - K5)/L5	Error de Aproximación
12.	Copiar el contenido de las celdas F5-M5 en el rango F6-M24.	

Nota: El Paso 2 puede ser obviado. En tal caso, en los pasos 4 y 9 debe reemplazarse "h" por \$B\$6.

# VI

## Ecuaciones en diferencias

### 6.1 Introducción

En los capítulos anteriores se han desarrollado los principales aspectos metodológicos de la resolución y evaluación de **ecuaciones diferenciales**, que resultan ser una herramienta útil en el análisis de muchos fenómenos económicos por naturaleza dinámicos. Como se discutió, una **ecuación diferencial** tiene la particularidad de presentar una variable en función de sus derivadas y de una variable independiente por lo que su solución (determinar la variable únicamente en términos de la variable independiente, el tiempo) implica un procedimiento de integración. Este proceso exige, necesariamente, que la variable independiente sea **continua** en el tiempo, esto es, que puedan analizarse cambios temporales infinitesimales. En este capítulo estudiaremos una herramienta alternativa: las **ecuaciones en diferencias**. La diferencia fundamental de estas ecuaciones con las EDO es el carácter **discreto** del tiempo. En otras palabras, en adelante  $t$  ya no denotará al intervalo continuo de los capítulos anteriores, sino una secuencia ordenada de valores temporales con cambios discretos,  $t = 1, 2, 3, \dots$ .

A lo largo del presente capítulo, el lector podrá encontrar muchas similitudes en la resolución de **ecuaciones en diferencias** con **ecuaciones diferenciales**. En particular, el **principio de superposición** (Teorema 4.3) también es aplicable a este tipo de ecuaciones, por lo que la solución de una **ecuación en diferencias** es la suma de una solución particular (no homogénea) y una solución complementaria (homogénea). Por esta razón, este capítulo será menos riguroso en

demonstraciones y formulación de teoremas que los dos precedentes. Asimismo, dada la naturaleza discreta de una **ecuación en diferencias**, los aspectos vinculados con secuencias infinitas como su convergencia y sus representaciones, serán de suma utilidad. Por ello, es recomendable remitir al lector al primer capítulo de este texto. En adelante, se estudiarán **ecuaciones en diferencias ordinarias** (EED), es decir, funciones que dependan únicamente de una variable independiente discreta.

Resulta útil introducir un operador matemático, denominado **operador de diferencias**:

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$$

donde  $\Delta$  es el operador que reemplaza a  $dx/dt$  (utilizado en el análisis de tiempo continuo) ya que  $\Delta t = 1$ . Por su parte, las segundas diferencias de  $x$  vienen dadas por

$$\Delta^2 x_t = \Delta(\Delta x_t) = \Delta x_{t+1} - \Delta x_t = x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t$$

mientras que las terceras diferencias son

$$\Delta^3 x_t = \Delta^2(\Delta x_t) = \Delta^2 x_{t+1} - \Delta^2 x_t = x_{t+3} - 3x_{t+2} + 3x_{t+1} - x_t$$

y así sucesivamente (el lector puede calcular las diferencias de  $x$  de orden superior<sup>1</sup>). De este modo, puede definirse una EED, en primer término, como una ecuación que contiene una o más diferencias de una función del tiempo desconocida.

Puesto que las diferencias de una función pueden ser expresadas en términos de los valores adelantados de la misma, una EED también cumple con esta propiedad. Por ejemplo, la EED

$$a\Delta x_t + bx_t = 0$$

puede ser reescrita como

$$a\Delta x_t + bx_t = 0 \rightarrow ax_{t+1} + (b-a)x_t = 0 \rightarrow ax_t + (b-a)x_{t-1} = 0$$

que será el planteamiento utilizado en este texto. Es así como una EED expresa una relación entre una variable dependiente y sus retardos o **rezagos** (o de sus adelantos) y una variable independiente (convencionalmente, el tiempo). El **orden** de una EED se determina por el mayor número de períodos rezagados (o la

1 Para obtener el desarrollo de  $\Delta^n x_t$  se puede recurrir al **triángulo de Pascal**.

mayor diferencia) en la relación (independientemente de la existencia de órdenes inferiores) mientras que el **grado** de una EED es dado por la mayor potencia a la que está elevado algún rezago de la variable.

La discusión anterior puede ser sintetizada en la siguiente definición:

**Definición 6.1** Una **ecuación en diferencias** (EED) de orden  $n$  satisface

$$F(t, x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n}) = 0$$

donde  $F$  denota alguna forma funcional. La ecuación en diferencias es ordinaria en tanto su solución es una función únicamente del tiempo (en un intervalo discreto dado),

$$x = x(t) \equiv x_t$$

Alternativamente, una EDD **normal** de orden  $n$  puede expresarse como

$$x_t = f(t, x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, \dots, x_{t-n})$$

o, adelantando la expresión,

$$x_{t+n} = f(t, x_{t+n-1}, x_{t+n-2}, x_{t+n-3}, \dots, x_t)$$

Se dice que una EED es **autónoma** si no depende explícitamente del tiempo. Formalmente,

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, \dots, x_{t-n})$$

**Recordar.** Si  $v_t$  es una función que satisface la EED, luego  $v_t$  es solución de la misma. En otras palabras,  $x_t = v_t$  es solución de la EED si y solo si

$$F(t, v_t, v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_{t-n}) = 0$$

**Ejemplo 6.1** Suponga que adquiere un préstamo para comprar un auto de 20000 con una amortización de 450 al mes a un interés anual simple de 6.9%. ¿Cómo evolucionará su deuda?

El saldo inicial de la deuda es, sin duda,  $x_0 = 20\,000$  por lo que se deben determinar los saldos  $x_1, x_2, \dots$ . Así, para determinar  $x_1$  se deben sumar los intereses generados en el primer mes y restar la amortización realizada, de modo que

$$x_1 = 20000 + (0.069/12)20000 - 450 = 19665$$



Luego,  $x_2$  es determinado, de manera análoga, por

$$x_1 = 19665 + (0.069/12)19665 - 450 = 19328.07$$

y, en general, el lector puede notar que la dinámica de los saldos de su deuda está dada por

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= x_t + (0.069/12)x_t - 450 \\x_{t+1} &= 1.00575x_t - 450, \quad x_0 = 20000\end{aligned}$$

De este modo, se ha planteado una EED que el lector será capaz de resolver posteriormente. ♦

## 6.2 Ecuaciones en diferencias ordinarias lineales de primer orden

De acuerdo con la Definición 6.1 una ecuación que exprese a  $x_t$  en función de  $x_{t-1}$  es una EED de primer orden,  $x_t = f(t, x_{t-1})$ . Una EED lineal es de la forma

$$x_t = a_t x_{t-1} + b_t \quad \dots(1)$$

donde tanto el coeficiente como el término pueden ser móviles, es decir, se trata de dos secuencias. Si la secuencia  $\{b_t\}$  es igual a cero, la EED es **homogénea**. Con el fin de determinar la secuencia solución  $\{x_t\}$ , la ecuación puede ser resuelta de manera recursiva (es decir, evaluándola en  $t = 1, 2, \dots$ ). Así,

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_0 + b_1 \\x_2 &= a_2 x_1 + b_2 = a_2 a_1 x_0 + (a_2 b_1 + b_2) \\x_3 &= a_3 x_2 + b_3 = a_3 a_2 a_1 x_0 + (a_3 a_2 b_1 + a_3 b_2 + b_3) \\x_4 &= a_4 x_3 + b_4 = a_4 a_3 a_2 a_1 x_0 + (a_4 a_3 a_2 b_1 + a_4 a_3 b_2 + a_4 b_3 + b_4)\end{aligned}$$

Si la recursión es repetida indefinidamente, la solución de la EED viene dada por

$$x_t = (\prod_{s=1}^t a_s) x_0 + \sum_{k=1}^t (\prod_{s=k+1}^t a_s) b_k \quad \dots(2)$$

donde el producto de términos no existentes, por ejemplo (de  $t+1$  a  $t$ ) es igual a la unidad.

**Ejemplo 6.2** Suponga que Ud. cuenta con activos por un valor de  $z_0$ . En el período  $t$ , esa cantidad de activos tiene un retorno  $r_t$ . Por su parte la tasa de

inflación es constante e igual a  $\pi < r_t$  para todo valor de  $t$ . Finalmente, en cada período ( $t \geq 1$ ) Ud. retira dinero en monto equivalente a la compra de  $y$  en el período 1. Así, la dinámica de sus activos viene dada por la EED

$$z_t = (1 + r_t)z_{t-1} - (1 + \pi)^{t-1} y$$

de modo que sus activos en el período  $t$  son (utilizando (2)),

$$z_t = (\prod_{s=1}^t (1 + r_s))z_0 - \sum_{k=1}^t (\prod_{s=k+1}^t (1 + r_s))(1 + \pi)^{k-1} y$$

Ahora suponga que la tasa de interés es constante e igual a  $r$  en todos los períodos. Claramente, bajo este supuesto, la expresión anterior se transforma en

$$z_t = (1 + r)^t z_0 - \sum_{k=1}^t (1 + r)^{t-k} (1 + \pi)^{k-1} y = z_0 [(1 + r)^t - y(1 - (\frac{1+\pi}{1+r})^t) / (r - \pi)] \quad \blacklozenge$$

La ecuación presentada en (1) constituye el caso más general de una EED lineal de primer orden. En el Cuadro No. 6.1 se reportan distintos casos de EED y sus respectivas soluciones (todas ellas deducidas a partir de (2)) según sea la naturaleza de  $a_t$  y  $b_t$ . Los casos 3, 4 y 5 serán desarrollados detalladamente mientras que solo se darán algunas referencias de los restantes<sup>2</sup>.

A diferencia del caso de las EDO, las soluciones presentadas en el Cuadro No. 6.1 son definidas en el sentido que no presentan una constante arbitraria  $C$ . El lector puede comprobar que en realidad la constante arbitraria ya ha sido evaluada en todos los casos. Este tema será retomado posteriormente. Asimismo, teniendo presente el **principio de superposición**, es decir la solución de una EED es la suma de la solución de la EED complementaria u homogénea ( $x_c$ ) y de su solución particular ( $x_p$ ), se deduce que

$$x_c = (\prod_{s=1}^t a_s) x_0 \quad x_p = \sum_{k=1}^t (\prod_{s=k+1}^t a_s) b_k$$

---

<sup>2</sup> El caso 6 presentado en el Cuadro No. 6.1, es conocido como **variación discreta uniforme**, mientras que el tercer caso se denomina **variación discreta constante** con una tasa de crecimiento igual a  $a - 1$ .

**Cuadro No. 6.1**  
**Planteamientos y soluciones de EED lineales de primer orden**

Caso	Planteamiento	Descripción	Solución
1. Caso general	$x_t - a_t x_{t-1} = b_t$	Término y coeficiente móviles	Ver (2)
<i>Casos homogéneos</i>			
2. $b_t = 0$	$x_t - a_t x_{t-1} = 0$	Coficiente móvil	$x_t = (\prod_{i=1}^t a_i) x_0$
3. $a_t = a \in R$ $b_t = 0$	$x_t - a x_{t-1} = 0$	Coficiente constante	$x_t = a^t x_0$
<i>Casos no homogéneos</i>			
4. $a_t = a \in R$	$x_t - a x_{t-1} = b_t$	Coficiente constante y Término móvil	$x_t = a^t x_0 + \sum_{k=1}^t a^{t-k} b_k$
5. $a_t = a \neq 1 \in R$ $b_t = b \in R$	$x_t - a x_{t-1} = b$	Término y coeficiente constantes	$x_t = a^t (x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$
6. $a_t = 1$ $b_t = b \in R$	$x_t - x_{t-1} = b$	-	$x_t = x_0 + bt$

**Ejemplo 6.2 (Modelo de Harrod - Domar).** Este ejemplo resulta ser la versión en tiempo discreto del modelo estudiado en el Ejemplo 4.3. En este modelo, el ahorro nacional ( $S_t$ ) es una proporción constante del ingreso nacional ( $Y_t$ ) de modo que  $S_t = sY_t$ , donde  $s < 1$  es la propensión marginal a ahorrar. Además, se plantea que la inversión responde a

$$I_t = a\Delta Y_{t-1}$$

donde  $a$  es denominado *acelerador* ya que típicamente es un número mayor a la unidad. En equilibrio de economía cerrada,  $I_t = S_t$ . Por consiguiente,

$$sY_t = a(Y_t - Y_{t-1}) \quad \rightarrow \quad Y_t = \frac{a}{a-s} Y_{t-1}$$

Así, la solución de la EED para el ingreso nacional es

$$Y_t = \left(\frac{a}{a-s}\right)^t Y_0$$

Un aporte interesante de este modelo es el siguiente: defínase a  $G_t$  como el crecimiento porcentual en  $t$ .

$$G_t = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{[a/(a-s)]Y_{t-1} - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{s}{a-s}$$

se aprecia que  $G_t$  es constante en todo momento. Este valor es conocido como *índice de crecimiento garantizado* e implica la trayectoria que la economía debe seguir para obtener siempre equilibrio entre los ahorros y las inversiones. ♦

**Ejemplo 6.3 (Multiplicadores).** Dado el siguiente modelo de determinación de ingreso,

$$\begin{aligned}C_t &= C_0 + cY_{t-1} \\I_t &= I_0 + hY_{t-1} \\M_t &= M_0 + mY_{t-1} \\Y_t &= C_t + I_t + G_0 + X_0 - M_t\end{aligned}$$

donde  $C$  es el consumo,  $I$  es la inversión y  $M$  son las importaciones, todas ellas en función del ingreso nacional ( $Y_t$ ) rezagado un período. Las propensiones marginales por consumir, invertir e importar,  $c$ ,  $h$  y  $m$ , respectivamente, son menores a la unidad y los montos autónomos  $C_0$ ,  $I_0$  y  $M_0$  son valores exógenamente determinados. Asimismo, el modelo incluye un monto de exportaciones,  $X_0$ , exógeno y un indicador de política económica, el gasto del gobierno,  $G_0$ . Si reemplazamos las tres primeras ecuaciones en la cuarta, se obtiene la EDD

$$Y_t = (c + h - m)Y_{t-1} + (C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)$$

cuya solución es

$$Y_t = A(c + h - m)^t + \frac{1}{1 - c - h + m}(C_0 + I_0 + G_0 + X_0 - M_0)$$

donde  $A$  es una constante arbitraria por determinar a partir de las condiciones iniciales de la economía. Un aspecto importante de este tipo de modelos surge al comparar los efectos multiplicadores del gasto del gobierno en el caso de una economía cerrada versus el caso de una economía abierta. Se sabe que

$$\partial Y_t / \partial G_0 = \frac{1}{1 - c - h + m}$$

si  $m$  es restringido a cero, es decir, el caso de una economía cerrada, se obtiene que

$$\frac{1}{1 - c - h + m} < \frac{1}{1 - c - h}$$

Esto es, el multiplicador del gasto es mayor cuando la economía es cerrada (¿Por qué?). ♦

### 6.2.1 Convergencia y estabilidad

La solución de una EED es convergente si se trata de una secuencia convergente (ver sección 1.2). El límite de esta secuencia es denominado **estado estacionario** o **equilibrio de largo plazo**. Esta situación, al igual que con las EDO, se da cuando la secuencia llega a un valor estático. Esto es,

$$\Delta x_t = 0 \quad x_{t+1} = x_t \quad x_t = x_{t-1} \quad \dots(3)$$

Así, de (1) puede desprenderse que el valor de estado estacionario de  $x$  es igual a (excluyendo al sexto caso del Cuadro No. 6.1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_t / (1 - a_t) = x_{ss} \in R$$

Si el estado estacionario no es definido,  $x$  será una secuencia divergente lo que implica que la condición de equilibrio (3) nunca es satisfecha. Como se ha discutido en el Capítulo 1, el hecho de que  $b_t/(1 - a_t)$  sea definido en el límite es arbitrario y depende de la forma funcional de la secuencia. Por ello, es difícil concluir *a priori* las condiciones de estabilidad del caso general (1) por lo que deben ser verificadas mediante tabulaciones o a través del análisis numérico de (2).

**Teorema 6.1** La secuencia solución de la EED  $x_t = ax_{t-1} + b_t$  converge a su **estado estacionario** (o, alternativamente, que la EED es **estable**) si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_t = b \in R$$

$$|a| < 1$$

Por otro lado, si estas condiciones no se cumplen,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \pm \infty$$

por lo que  $x$  es una secuencia divergente.

Sin embargo, el caso más restringido  $x_t = ax_{t-1} + b_t$  puede ser estudiado sin pérdida de generalidad. El Teorema 6.1 nos brinda las condiciones pertinentes.

El Teorema 6.1 puede ser interpretado de manera distinta: una EED converge si sus soluciones complementaria y particular convergen o son secuencias acotadas.

Por otro lado, la solución de una EED puede presentar diversos patrones de movimiento de acuerdo con el valor que  $a$  puede tomar. Con el fin de ilustrar esta afirmación, considérese el quinto caso del Cuadro No. 6.1,

$$x_t = ax_{t-1} + b \quad \rightarrow \quad x_t = Ha^t + \frac{b}{1-a}$$

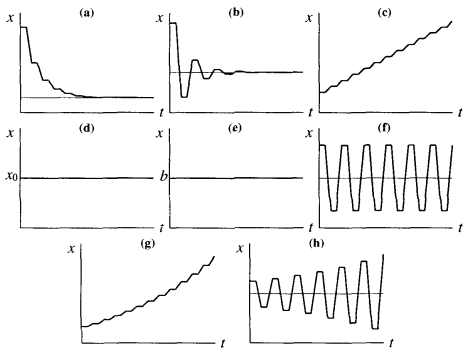
El Cuadro No. 6.2 y la Figura No. 6.1 resumen los principales casos para valores de  $a$ . Como puede apreciarse la solución de la EED puede adoptar dos tipos de movimiento: monótono o fluctuante. El primer caso se da cuando  $a$  es un número positivo mientras que el segundo se da cuando  $a$  es negativo (de modo que las potencias pares cambian su signo). Asimismo, puede verificarse que si se cumplen las condiciones del Teorema 6.1, la secuencia solución será convergente. Así, se concluye que la convergencia de la solución de una EED no depende del signo de su raíz, sino de la magnitud de su **módulo**<sup>3</sup>. Además, note que en la elaboración de las secuencias de la Figura No. 6.1 se ha supuesto que  $x_0 > x_{ss}$ , es decir, se supone un **desequilibrio inicial** ( $x_0 - x_{ss}$ ) positivo. Finalmente, las curvas que representan dichas secuencias presentan “escalones” en cada momento del tiempo con el fin de recalcar el carácter *discreto* de las trayectorias evaluadas.

**Cuadro No. 6.2**  
**Dinámica de una EED de primer orden**

Caso	Valor de $a$	Descripción de $x_t$
(a)	$0 < a < 1$	Convergente de forma monótona
(b)	$-1 < a < 0$	Convergente mediante fluctuaciones amortiguadas
(c)	$a = 1, b \neq 0$	Divergente, función lineal de $t$ con pendiente $b$
(d)	$a = 1, b = 0$	La secuencia siempre es igual al valor de condición inicial
(e)	$a = 0$	La secuencia siempre es igual a $b$
(f)	$a = -1$	Divergente mediante oscilaciones uniformes
(g)	$a > 1$	Divergente de forma monótona
(h)	$a < -1$	Divergente mediante oscilaciones explosivas

<sup>3</sup> El módulo del número  $p + qi$  es  $\sqrt{p^2 + q^2}$ . Si  $q = 0$  (número real) el módulo es  $\sqrt{p^2} = |p|$ .

Figura No. 6.1  
Dinámica de una EED de primer orden  
Ver cuadro No. 6.2



**Ejemplo 6.4** En cierto país se sabe que el *stock* constante de reservas internacionales netas  $R$  se relaciona con la depreciación nominal esperada de la moneda local de acuerdo con

$$\frac{R}{s_t} = \left( \frac{s_{t+1}^e}{s_t} \right)^a \quad a > 0$$

donde  $s_t$  es el tipo de cambio nominal en el período  $t$  y el superíndice  $e$  denota "esperado". Si se sabe que el tipo de cambio esperado se define según la siguiente regla

$$\frac{s_{t+1}^e}{s_t} = \left( \frac{s_t}{s_{t-1}} \right)^b \quad b > 0$$

¿Qué condiciones deben cumplirse para que  $s_t$  sea una secuencia estable? Con el fin de resolver el problema para  $s_t$ , la segunda ecuación es reemplazada en la primera de modo que

$$\frac{R}{s_t} = \left( \frac{s_t}{s_{t-1}} \right)^{ab}$$

El lector puede apreciar que la EED (para  $s_t$ ) resultante no es lineal por lo que no puede ser resuelta con los conocimientos obtenidos hasta el momento. No obstante, puede ser *log-linealizada*: si se define a la constante  $c = \ln(R)$  y a la variable  $x_t = \ln(s_t)$ , la expresión anterior equivale a (tomando logaritmos)

$$\begin{aligned} c - x_t &= abx_t - abx_{t-1} \\ x_t &= \frac{ab}{1+ab} x_{t-1} + \frac{c}{1+ab} \end{aligned}$$

que es una EED similar al quinto caso del Cuadro No. 6.1. Así, se concluye que la secuencia que  $x_t$  sigue es

$$x_t = H \left( \frac{ab}{1+ab} \right)^t + c$$

donde  $H (= x_0 - c)$  es una constante definida por las condiciones iniciales del problema. Dado que  $ab > 0$ , el módulo de la raíz de la EED es menor que la unidad, por lo que se espera convergencia en  $x_t$ . Asimismo, la raíz de la EED es positiva por lo que  $x_t$  es una secuencia monótonamente convergente. Finalmente, tomando exponenciales a la solución para  $x_t$  se obtiene la siguiente expresión para  $s_t$

$$s_t = R \exp \left( H \left( \frac{ab}{1+ab} \right)^t \right) \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 6.5** En el ejemplo anterior, ¿qué ocurre si el nivel de reservas internacionales es una función de tiempo, por ejemplo, son  $R_t = \exp(r_t)$ ? El lector puede comprobar que, siguiendo los procedimientos del ejemplo anterior, bajo tal supuesto, el logaritmo del tipo de cambio será

$$x_t = H \left( \frac{ab}{1+ab} \right)^t + \frac{1}{1+ab} \sum_{k=1}^t \left( \frac{ab}{1+ab} \right)^{t-k} r_k \quad \blacklozenge$$

## 6.2.2 Resolución de un caso especial

Si bien en las secciones anteriores se han analizado las soluciones que satisfacen una EED, gran parte de modelos económicos tienen la forma del caso 5 en el Cuadro No. 6.1. Por esta razón, esta sección está destinada a indagar un poco



más sobre esta EED. La discriminación entre una solución homogénea y una no homogénea es particularmente útil ya que la aplicación de técnicas como el **método de coeficientes indeterminados** (ver sección 4.3.2) es familiarizada con el lector. Del mismo modo, en esta sección presentamos los pasos por seguir en el desarrollo de EED de orden superior.

La **ecuación original** o **ecuación complementaria** de la EED

$$x_t - ax_{t-1} = b_t \quad \dots(4)$$

se da cuando  $b_t = 0$ . Esto es,

$$x_t - ax_{t-1} = 0 \quad \dots(5)$$

Se sospecha que una función del tipo  $x = Hr^t$  satisface la EED. Así, reemplazando esta conjetura en (5) se tiene que

$$Hr^t - aHr^{t-1} = 0 \quad \rightarrow \quad Hr^{t-1}(r - a) = 0$$

Ya que es arbitrario que  $H$  o  $r$  sean nulos, la ecuación anterior es satisfecha si  $r = a$  por lo que la solución complementaria es  $x = Ha^t$ .

Por su parte, la solución particular satisface la EED **completa** (4). Utilizado el método de los coeficientes indeterminados, se plantea una función  $\Psi_t$  de la familia de funciones de  $b_t$  que cumpla con (4),

$$\Psi_t - a\Psi_{t-1} = b_t$$

Luego, al determinar los coeficientes de  $\Psi_t$  se obtiene la solución particular. Un aspecto importante es que lo desarrollado anteriormente no solo es válido para (4) sino para todos sus posibles atrasados y adelantados. Por ejemplo, si en la EED

$$x_{t+1} - ax_t = b_{t+1}$$

se plantea  $x = Hr^t$  como solución complementaria, se tiene que

$$Hr^{t+1} - aHr^t = 0 \quad \rightarrow \quad Hr^t(r - a) = 0$$

donde la raíz  $a$  es la misma que el caso anterior y, por ende, la solución complementaria no varía ante adelantados o rezagos de una EDD. El lector puede comprobar que la solución particular comparte esta propiedad.

En los siguientes tres ejemplos, se aplica el método de coeficientes indeterminados a (5) y las principales conclusiones desprendidas de ellos se reportan en el Cuadro No. 6.4.

**Ejemplo 6.6** Hallar la solución general de la EED  $x_{t+1} - ax_t = bc^t$ .

En este caso,  $b_t$  es una *función exponencial*. Por este motivo debe plantearse como solución particular  $x_t = Ac^t$  y determinar el valor de  $A$  que satisface la EED. Así,

$$x_t = Ac^t \quad \rightarrow \quad x_{t+1} = Ac^{t+1} = Acc^t$$

conjetura que reemplazada en la EED brinda

$$Ac^t(c-a) = bc^t \quad \rightarrow \quad A = b/(c-a)$$

de modo que la *solución general* de la EED es  $x_t = Ha^t + bc^t/(c-a)$ .

El lector puede comprobar que el método no provee una solución inmediata si  $c = a$ . En este caso se propone una solución particular del tipo  $x_t = Atc^t$ . ♦

**Ejemplo 6.7** Hallar la solución general de la EED  $x_{t+1} - ax_t = b_0 + b_1t + b_2t^2$ .

En este caso,  $b_t$  es una *función polinomial* por lo que es necesario plantear como solución particular  $x_t = c_0 + c_1t + c_2t^2$  y determinar los valores de  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  que satisfacen la EED. Así,

$$x_t = c_0 + c_1t + c_2t^2$$

$$x_{t+1} = c_0 + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 = (c_0 + c_1 + c_2) + (c_1 + 2c_2)t + c_2t^2$$

Reemplazando las funciones anteriores en la EED,

$$((1-a)c_0 + c_1 + c_2) + ((1-a)c_1 + 2c_2)t + (1-a)c_2t^2 = b_0 + b_1t + b_2t^2$$

de modo que

$$(1-a)c_0 + c_1 + c_2 = b_0$$

$$(1-a)c_1 + 2c_2 = b_1$$

$$(1-a)c_2 = b_2$$

Tras resolver el sistema, la solución general de la EED será determinada. Para ello, primero se determina el valor de  $c_2$ , luego el de  $c_1$  y finalmente el de  $c_0$ . ♦

**Ejemplo 6.8** Hallar la solución general de la EED

$$x_{t+1} - ax_t = b_0 \cos(wt) + b_1 \operatorname{sen}(wt)$$

En este caso,  $b_t$  es una *función trigonométrica* por lo que se plantea como solución particular la función  $x_t = c_0 \cos(wt) + c_1 \operatorname{sen}(wt)$ . De este modo<sup>4</sup>,

$$\begin{aligned} x_t &= c_0 \cos(wt) + c_1 \operatorname{sen}(wt) \\ x_{t+1} &= c_0 \cos(wt + w) + c_1 \operatorname{sen}(wt + w) \\ &= [c_0 \cos(w) + c_1 \operatorname{sen}(w)] \cos(wt) + [c_0 \operatorname{sen}(w) + c_1 \cos(w)] \operatorname{sen}(wt) \end{aligned}$$

Así, evaluando estas funciones en la EED se tiene que

$$[c_0(\cos(w) - a) + c_1 \operatorname{sen}(w)] = b_0 \quad [c_0 \operatorname{sen}(w) + c_1(\cos(w) - a)] = b_1$$

Al resolver el sistema bivariado anterior, los coeficientes  $c_0$  y  $c_1$  son determinados y, con ellos, la solución particular de la EED. ♦

**6.2.3 Aplicación: modelo de la telaraña**

En esta sección se discuten las principales conclusiones del denominado **modelo de la telaraña** y algunas extensiones del mismo, que fue originalmente planteado por M. Ezekiel en los años 30<sup>5</sup> en el estudio del mercado de cerdos. La premisa básica de este modelo se centra en que, en un mundo sin posibilidad de acumular inventarios, las decisiones de consumo (demanda) se basan en el precio observado mientras que las decisiones de producción se realizan en torno a un precio esperado. Así,

$$\begin{aligned} Q_t^d &= \alpha - \beta P_t^e \\ Q_t^s &= -\gamma + \delta P_t^e \end{aligned}$$

4 Recordar las identidades

$$\begin{aligned} \cos(wt \pm w) &= \cos(wt) \cos(w) \pm \operatorname{sen}(wt) \operatorname{sen}(w) \\ \operatorname{sen}(wt \pm w) &= \operatorname{sen}(wt) \cos(w) \pm \cos(wt) \operatorname{sen}(w) \end{aligned}$$

5 M. Ezekiel, "The Cobweb Theorem", *Quarterly Journal of Economics*, 52, 1938, pp. 255 - 280.

donde  $Q_t^d$  es la cantidad demandada en el período  $t$ ,  $Q_t^o$  es la cantidad ofertada en el mismo período,  $P_t$  es el precio de mercado en  $t$ ,  $P_t^e$  es el precio que los productores esperan y los coeficientes del modelo son constantes positivas.

Originalmente, este modelo asumía que  $P_t^e = P_{t-1}$ . Esto es, las decisiones de oferta se realizan considerando el precio del período anterior. Este comportamiento es típico de bienes que requieren de una inversión previa o maduración antes de entrar al mercado como los productos agropecuarios. Considerando esta conducta del precio esperado y el equilibrio del mercado,  $Q_t^d = Q_t^o$  se desprende la EED

$$P_t + \frac{\delta}{\beta} P_{t-1} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

que es equivalente al quinto caso del Cuadro No. 6.1 (alternativamente, puede ser fácilmente resuelta según lo expuesto en la sección 6.2.2). Luego, el precio de este mercado sigue la secuencia

$$P_t = (P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}) \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

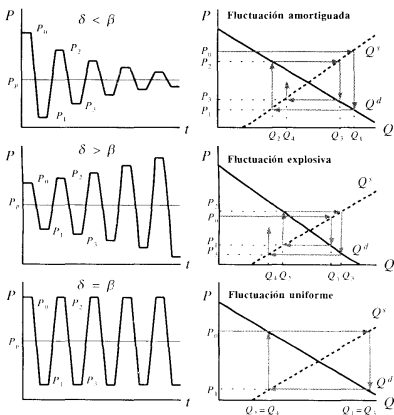
Dado que  $\beta$  y  $\delta$  son positivos puede asegurarse que  $P_t$  es fluctuante. Asimismo, si  $\delta > \beta$ ,  $P_t$  es divergente (explosivo) mientras que si  $\beta > \delta$ ,  $P_t$  es convergente. Aunque este análisis es suficiente para determinar la estabilidad de  $P_t$ , resulta interesante analizar la dinámica entre precios y cantidades con mayor detalle. Para ello, es bueno recordar que  $\delta$  es la pendiente de la curva de oferta y  $\beta$  es la pendiente de la curva de demanda.

Consideremos el primer panel de la Figura No. 6.2 el caso convergente, donde se asume que el desequilibrio inicial del precio es positivo y que la pendiente de la curva de demanda es más pronunciada que la de la curva de oferta,  $\beta > \delta$ . Bajo estas condiciones, con un precios inicial  $P_0$ , el productor ofrece en  $t = 1$  la cantidad  $Q_1$ . Dada esta oferta, el mercado se limpiará a un precio  $P_1$ , determinado por la curva de demanda. En el período 1, el productor observa  $P_1$  y decide  $Q_2$ . Así, en el período 2 se genera un exceso de demanda que eleva el precio a  $P_2$  (en la curva de demanda). Así, el tercer período se ofrece  $Q_3$  y se determina un precio  $P_3$  que es utilizado para ofrecer, luego,  $Q_4$ . Esta interacción entre oferta y demanda genera un comportamiento fluctuante del precio (y las cantidad) alrededor de su valor de equilibrio. Ya que  $\beta > \delta$  este valor es alcanzado en el largo plazo. Como se observa en el primer panel de la Figura No. 6.2 la dinámica

descrita simula una «Telaraña» entre las curvas de oferta y demanda, en el plano  $QP$  (de ahí el nombre del modelo).

El caso contrario se da cuando,  $\delta > \beta$ , la curva de oferta tiene una mayor pendiente que la curva de demanda. Utilizando el razonamiento anterior, se aprecia que en cada iteración se determina un precio cada vez más alejado de su valor de equilibrio. Finalmente, si  $\delta = \beta$  el precio fluctuará indefinidamente de manera uniforme (entre dos valores de  $P$  y  $Q$ ).

**Figura No. 6.2**  
**El modelo de la telaraña**



Una manera más efectiva de establecer  $P^e$  es a través del concepto de **expectativas adaptativas**, introducido en la literatura económica por Marc Nerlove<sup>6</sup>. Esta vez supóngase que

$$P_t^e = P_{t-1}^e + \eta(P_{t-1} - P_{t-1}^e) \quad 0 < \eta \leq 1$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de ajuste de expectativas. Note que si  $\eta = 1$  entonces  $P_t^e = P_{t-1}$ ; en este caso (el modelo de la telaraña original) se dice que las expectativas son *estáticas*. A partir de las condiciones de equilibrio del mercado puede deducirse que

$$P_t^e = \frac{\alpha + \gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_t \quad \rightarrow \quad P_{t-1}^e = \frac{\alpha + \gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_{t-1}$$

Luego,

$$P_t^e = \frac{\alpha + \gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_{t-1} + \eta(P_{t-1} - \frac{\alpha + \gamma}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} P_{t-1})$$

Si  $\eta = 1$  las expectativas son estáticas y, como ya se ha dicho, el análisis de Nerlove es equivalente al modelo de Ezekiel. Por el contrario, si  $\eta \rightarrow 0$ ,  $P_t^e \rightarrow P_{t-1}^e$  por lo que la secuencia que soluciona la EED es  $P_t = P_0$ . Finalmente, el lector puede comprobar que en este caso las condiciones de estabilidad conllevan a que si

$$1 < \frac{\eta}{\beta} (\beta + \delta) < 2$$

$P_t$  fluctuará de manera amortiguada hacia su equilibrio de largo plazo y si

$$\frac{\eta}{\beta} (\beta + \delta) < 1$$

el precio convergerá monótonamente hacia su valor estacionario.

### 6.3 Ecuaciones en diferencias ordinarias de segundo orden

En esta sección estudiaremos la EED

$$x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = w_t$$

que es equivalente a

$$x_t + a_1 x_{t-1} + a_0 x_{t-2} = b_t \quad \dots(6)$$

6 La referencia relevante para este modelo es la de Marc Nerlove, "Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena", *Quarterly Journal of Economics*, vol 72, 1958, pp. 227 - 240.

La particularidad de esta EED son sus coeficientes constantes. Soluciones de casos más generales de EED lineales pueden ser fácilmente implementadas en hojas de cálculo si se aprovecha la naturaleza discreta y recursiva de estas ecuaciones.

### 6.3.1 La solución homogénea

La ecuación homogénea de (7) es

$$x_t + a_1 x_{t-1} + a_0 x_{t-2} = 0 \quad \dots(7)$$

Suponga que  $v$  y  $u$  son dos soluciones de (6). Se cumple entonces que

$$u_t + a_1 u_{t-1} + a_0 u_{t-2} = 0 \quad \text{y} \quad v_t + a_1 v_{t-1} + a_0 v_{t-2} = 0$$

Luego, para dos constantes arbitrarias,  $C_1$  y  $C_2$  se tiene

$$\begin{aligned} C_1(u_t + a_1 u_{t-1} + a_0 u_{t-2}) + C_2(v_t + a_1 v_{t-1} + a_0 v_{t-2}) &= 0 \\ (C_1 u_t + C_2 v_t) + a_1(C_1 u_{t-1} + C_2 v_{t-1}) + a_0(C_1 u_{t-2} + C_2 v_{t-2}) &= 0 \end{aligned}$$

por lo que se deduce que  $C_1 u_t + C_2 v_t$  es una solución a (7). Sin embargo, es importante que ambas soluciones,  $u$  y  $v$ , sean linealmente independientes para que  $C_1 u_t + C_2 v_t$  sea la solución general de la EED complementaria. En otras palabras, ambas funciones deben tener un **wronskiano**

$$W(u, v) = W(t) = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix} = u_0 v_1 - v_0 u_1$$

distinto de cero.

De esta manera, el objetivo al enfrentar una EED como (7) es hallar dos soluciones linealmente independientes que la satisfagan. Para empezar, y con lo visto en las secciones precedentes, consideremos una solución del tipo  $x_t = r^t$ . La motivación de ello es que tanto el primer como el segundo rezago (o adelanto) de  $x_t$  son múltiplos de  $x_t$ , lo que sugiere resolver (7) es equivalente a determinar un valor correcto de  $r$ . Al sustituir este intento en (7) se llega a

$$(r^2 + a_1 r + a_0) r^{t-2} = 0,$$

igualdad que se cumple si

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \quad \dots(8)$$

donde  $P(r)$  es conocido como el **polinomio característico** de la EED o la ecuación (8) es denominada **ecuación característica (o auxiliar)** de (7). Las raíces que resuelven (8),  $r_1$  y  $r_2$ , son las **raíces características** de la EED y su naturaleza definen los siguientes tres casos:

### 6.3.1.1 Raíces reales y distintas

Si el discriminante de (8) es positivo,  $a_1^2 - 4a_0 > 0$ , entonces la ecuación auxiliar es resuelta por

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

de esta forma, (7) presenta dos soluciones

$$u_t = r_1^t \quad v_t = r_2^t$$

que son linealmente independientes. El wronskiano es, en este caso

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & r_1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0$$

Así, conforme lo establecido la sección anterior, la solución general a (7) bajo este caso es

$$x_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$$

Adicionalmente, el lector podrá haber notado que  $x$  es convergente si el módulo de **ambas** raíces es menor que la unidad.

### 6.3.1.2 Raíces reales e iguales

Si  $a_1^2 - 4a_0 = 0$ , entonces se tiene dos raíces distintas e iguales,

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{a_1}{2}$$

Este hecho se traduce en la dependencia lineal de  $u$  y  $v$ . La ecuación característica en este caso ha dado como resultado una función única

$$u_t = v_t = \left( -\frac{a_1}{2} \right)^t$$

Con el fin de obtener una función  $v$  independiente de  $u$ , se propone



$$v_t = t \left( \frac{-a_1}{2} \right)^t$$

que satisface (7). El wronskiano con la solución propuesta viene dado por

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{-a_1}{2} \\ 0 & \frac{-a_1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-a_1}{2} \neq 0$$

por lo que la solución general en este caso es

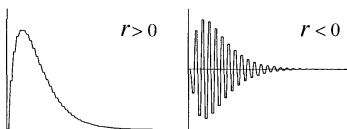
$$x_t = C_1 r^t + C_2 t r^t$$

De forma análoga al caso anterior, la secuencia solución converge si  $|r| < 1$ . El término  $t r^t$  puede cuestionar, a primera vista, la convergencia de la secuencia. No obstante, hay que considerar (aplicando la regla de límites indeterminados de L'Hôpital) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t r^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r^t}{t^{-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r^t \ln(|r|)}{-1} = 0 \quad (|r| < 1)$$

ya que mientras que el término  $t$  crece de manera *lineal*, el término  $r^t$  decrece de modo *exponencial*. Así, si  $r$  es en valor absoluto menor a la unidad se tendrá una sucesión convergente a cero. La Figura No. 6.3 presenta las secuencias de  $t r^t$  con el módulo  $r$  menor que la unidad. Un vistazo rápido a esta figura confirma la condición de convergencia mencionada. Asimismo, puede apreciarse que esta convergencia se presenta de manera monótona o fluctuante, de acuerdo con el signo de  $r$ .

Figura No. 6.3  
Convergencia de  $t r^t$



### 6.3.1.3 Raíces complejas conjugadas

Si  $a_1^2 - 4a_0 < 0$ , entonces se tienen dos raíces complejas conjugadas,

$$r_1 = p + qi \quad r_2 = p - qi$$

donde

$$p = -\frac{a_1}{2} \quad q = \frac{\sqrt{4a_0 - a_1^2}}{2}$$

de  $i$  es la unidad imaginaria. De este modo, la solución de (6) viene dada por

$$x_t = C_1(p + qi)^t + C_2(p - qi)^t \quad \dots(*)$$

Según la **representación en coordenadas polares de un número complejo**<sup>7</sup>,

$$r_1 = p + qi = \rho(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)) \quad r_2 = p - qi = \rho(\cos(\theta) - i\text{sen}(\theta))$$

donde  $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$  es el módulo de la raíz y se cumple que

$$\rho \cos(\theta) = p \quad \rho \text{sen}(\theta) = q$$

Aplicando el **teorema de De Moivre** la forma polar de las raíces se tiene

$$r_1^t = \rho^t (\cos(t\theta) + i\text{sen}(t\theta)) \quad r_2^t = \rho^t (\cos(t\theta) - i\text{sen}(t\theta))$$

El lector puede constatar que las funciones complejas  $r_1^t$  y  $r_2^t$  satisfacen (7) y que son linealmente independientes. Así, cualquier combinación lineal de  $r_2^t$  y  $r_1^t$  también satisfará (7). En particular, considérese que

$$\frac{1}{2}(r_1^t + r_2^t) = \rho^t \cos(t\theta) \quad \frac{1}{2}(r_1^t - r_2^t) = \rho^t \text{sen}(t\theta)$$

son dos soluciones de (7) linealmente independientes cuyo wrosnkiano es

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & \rho \cos(t\theta) \\ 0 & \rho \text{sen}(t\theta) \end{vmatrix} = \rho \text{sen}(t\theta) \neq 0$$

De este modo, (\*) puede ser expresado como una suma de términos trigonométricos y la solución de la EED en este caso es

---

<sup>7</sup> En el Apéndice de este libro se presenta un breve repaso sobre números complejos.

$$x_t = \rho^t (C_1 \cos(\theta t) + C_2 \text{sen}(\theta t)) \text{ o, alternativamente, } x_t = C_1 \rho^t \cos(\theta t + C_2)$$

La presencia de términos trigonométricos en la secuencia solución  $x_t$  necesariamente asigna un comportamiento sinusoidal a  $x_t$ . Sin embargo este comportamiento **fluctuante** es distinto al observado con una EED de primer orden (ver Cuadro No. 6.2) ya que es típicamente más suave. Asimismo, se aprecia que la convergencia de la secuencia depende únicamente del valor que tome el valor absoluto del módulo  $\rho$ . Si éste es igual a la unidad la secuencia evolucionará presentado **fluctuaciones uniformes**; si es menor a la unidad, las fluctuaciones serán **amortiguadas** mientras que si el valor absoluto de  $\rho$  es mayor a uno, la fluctuaciones serán **explosivas**.

**Cuadro No. 6.3**  
Soluciones de la ecuación complementaria

Ecuación: $x_t + a_1 x_{t-1} + a_0 x_{t-2} = b_t$		
Polinomio característico: $r^2 + a_1 r + a_0 = 0$		
Caso	Solución general	Converge sí...
Raíces reales y distintas ( $r_1 \neq r_2$ )	$x_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$	$ r_1 ,  r_2  < 1$
Raíces reales e iguales ( $r_1 = r_2 = r$ )	$x_t = C_1 r^t + C_2 t r^t$	$ r  < 1$
Raíces complejas conjugadas ( $p \pm qi$ )	$x_t = \rho^t (C_1 \cos(\theta t) + C_2 \text{sen}(\theta t))$	$\rho < 1$

**Ejemplo 6.9** Considere el siguiente modelo macroeconómico

$$Y_t = C_t + I_t \quad C_t = cY_{t-1} \quad I_t = h(C_t - C_{t-1})$$

donde las variables son expresadas como desviaciones de sus respectivos equilibrios de largo plazo. Al resolver el modelo se llega a la siguiente EED homogénea para  $Y_t$ :

$$Y_t - c(1+h)Y_{t-1} + chY_{t-2} = 0$$

La solución de la EED depende de los valores de  $c$  y  $h$ . Si  $c^2(1+h)^2 > 4ch$ , luego el polinomio característico es resuelto por dos raíces reales y distintas. Por otro lado, si  $c^2(1+h)^2 = 4ch$  la solución de la EED tendrá dos raíces reales e iguales. Por último, si  $c^2(1+h)^2 < 4ch$  las raíces serán complejas conjugadas. Por su parte el lector puede comprobar que el modelo es estable si  $c < 1$  y  $ch < 1$ , lo que se cumple, dada la interpretación económica de estos parámetros. ♦

**Ejemplo 6.10** Sea  $x_t$  una secuencia de datos, luego un *promedio móvil* de  $x_t$  en el período  $t$  puede definirse como

$$y_t = \frac{1}{2}(x_{t+1} + x_{t-1})$$

¿Qué tipo de secuencia cumple con  $y_t = x_t$ ? Dada la construcción de  $y_t$  se tiene que

$$x_{t+1} - 2x_t + x_{t-1} = 0$$

que resulta ser una EED de segundo orden. Conjeturando  $x = r^t$ , el polinomio característico de la EED es

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

y sus raíces son reales e iguales a 1. Por ello, la secuencia que satisface en igualarse a su promedio móvil es (obviamente) una línea recta,

$$x_t = C_1 + C_2 t \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 6.11** Resolver  $x_{t+2} + 4x_t = 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$ .

Claramente el polinomio característico en este caso es resuelto por  $\pm 2i$ . Así,  $p = 0$  y  $q = 2$  por lo que  $\rho = 2$  y  $\theta = \arccos(0) = \arcsen(1) = \pi/2$ . Luego,

$$x_t = 2^t (C_1 \cos(\frac{\pi}{2} t) + C_2 \sin(\frac{\pi}{2} t))$$

Considerando las condiciones iniciales del problema,

$$x_0 = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = C_1 = 1$$

$$x_1 = 2 (C_1 \cos(\frac{\pi}{2}) + C_2 \sin(\frac{\pi}{2})) = 2 C_2 = 0$$

se obtiene la solución definida del mismo, dada por  $x_t = 2^t \cos(\frac{\pi}{2} t)$ .  $\blacklozenge$

### 6.3.2 La solución particular

De manera análoga a la del caso de las EDO (Teorema 4.3), puede demostrarse que si  $x_p$  es una solución particular de una EED de segundo orden, es decir la solución general de (6), luego

$$x_t = C_1 u_t + C_2 v_t + x_p$$

es la solución de (6), donde  $C_1 u_t + C_2 v_t$  es la solución complementaria.

La solución  $x_p$  es determinada a partir del **método de coeficientes indeterminados** o, alternativamente, del método de variación de parámetros<sup>8</sup>. Con respecto al primer enfoque, se aconseja al lector consultar la sección 4.3.2 donde el método fue desarrollado para el caso de EDO. La extensión al caso de EED es inmediata y es ilustrada en los siguientes ejemplos y en el Cuadro No. 6.4.

**Ejemplo 6.12** Hallar la solución particular de  $Y_{t+2} - bY_{t+1} + kY_t = ac^t$

Se plantea como solución

$$Y_t = Ac^t \quad Y_{t+1} = Acc^t \quad Y_{t+2} = Ac^2c^t$$

Reemplazando estos resultados en la EED se obtiene,

$$Ac^2c^t - bAcc^t + kAc^t = A(c^2 - bc + k)c^t = ac^t$$

Luego, la solución particular de la EED es

$$Y_p = \frac{ac^t}{c^2 - bc + k} \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 6.13** Hallar la solución particular de  $x_t - 5x_{t-1} + 6x_{t-2} = 3^t$

De manera análoga a la del ejemplo anterior, se plantea

$$x_t = 9A(3^t) \quad x_{t-1} = 3A(3^t) \quad x_{t-2} = A(3^t)$$

reemplazando estos resultados en la EED se llega a

$$\begin{aligned} 9A(3^t) - 15A(3^t) + 6A(3^t) &= 3^t \\ 0 &= 3^t \quad ??? \end{aligned}$$

¿Qué ocurrió? La respuesta es sencilla: se aprecia que  $x_t = 3^t$  es una solución complementaria de la EED por lo que la solución particular propuesta es proporcional a la misma. Por este motivo, es necesario plantear

$$x_t = 9A(t+2)(3^t) \quad x_{t-1} = 3A(t+1)(3^t) \quad x_{t-2} = A(t)(3^t)$$

<sup>8</sup> Para el caso de las EDO, este método es presentado en el Apéndice A del Capítulo 4.

reemplazando esta nueva conjetura en la EED se obtiene

$$9A(t+2)(3^t) - 15A(t+1)(3^t) + 6At(3^t) = (18A - 15A + 6A)(3^t) = 3^t$$

de modo que  $9A = 1$ . Así, la solución particular de la EED es  $x_t = \frac{1}{9}t 3^t$ .

**Ejemplo 6.14** Determinar la solución particular de  $x_{t+2} + x_{t+1} + x_t = 3t^2$

Dado que el término de la EED responde a un polinomio cuadrático, se plantea como solución particular la siguiente:

$$x_{t+2} = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \quad x_{t+1} = c_0 + c_1(t+1) + c_2(t+1)^2 \quad x_t = c_0 + c_1(t+2) + c_2(t+2)^2$$

Al reemplazar esta posible solución en la EED se obtiene

$$(3c_0 + 3c_1 + 5c_2) + (3c_1 + 6c_2)t + 3c_2 t^2 = 3t^2$$

Resolviendo la igualdad de polinomios se tiene como resultado  $c_0 = 1/3$ ,  $c_1 = -2$  y  $c_2 = 1$ , por lo que la solución particular de la EED es

$$x_t = \frac{1}{3} - 2t + t^2 \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 6.15** Hallar la solución particular de  $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 4^t + t^2 + 3$

Dada la forma funcional del término móvil, es razonable plantear como solución particular

$$x_t = A4^t + c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

Al evaluar esta función en la EED se encuentra que  $A = 1/2$ ,  $c_0 = 4$ ,  $c_1 = 3/2$  y  $c_2 = 1/2$ . Al evaluar estos coeficientes en la conjetura inicial se obtiene la solución particular solicitada.  $\blacklozenge$

**Ejemplo 6.16** Hallar la solución particular de  $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 3 \cdot 5^t + \sin(\pi/2)$

Se plantea como solución

$$x_t = A5^t + c_0 \cos(\frac{\pi}{2}t) + c_1 \sin(\frac{\pi}{2}t)$$

Luego,

$$x_{t+1} = A5^{t+1} + c_0 \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) + c_1 \sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) = 5A5^t - c_0 \sin(\frac{\pi}{2}t) + c_1 \cos(\frac{\pi}{2}t)$$

$$x_{t+2} = A5^{t+2} + c_0 \cos(\frac{\pi}{2}t + \pi) + c_1 \sin(\frac{\pi}{2}t + \pi) = 25A5^t - c_0 \cos(\frac{\pi}{2}t) - c_1 \sin(\frac{\pi}{2}t)$$

Al evaluar estas funciones en la EED se encuentra que

$$12A5^t + (c_0 - 3c_1)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + (3c_0 + c_1)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = 3 \cdot 5^t + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

por lo que  $A = 1/4$ ,  $c_0 = 3/10$  y  $c_1 = 1/10$ . ♦

**Cuadro No. 6.4**  
**Método de los coeficientes indeterminados**

	Plantear $x_n = B(t)$ como primer intento. Se presentan, sin mayor prueba, algunas soluciones tentativas, dependiendo la forma de $b_t$ :	
	<b>Término móvil, <math>b_t</math></b>	<b>Intento inicial para <math>x_n = B(t)</math></b>
<b>Paso 1.</b>	$c\alpha^t$ $c_0 + c_1t + \dots + c_n t^n$ $c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t)$ $\alpha^t (c_0 + c_1t + \dots + c_n t^n)$	$A\alpha^t$ $A_0 + A_1t + \dots + A_n t^n$ $A_1 \cos(\nu t) + A_2 \sin(\nu t)$ $\alpha^t (A_0 + A_1t + \dots + A_n t^n)$
<b>Paso 2.</b>	Verificar si $x_n = B(t)$ (o algún elemento de $B(t)$ ) es solución de la ecuación complementaria $x_t + a_1x_{t-1} + \dots + a_nx_{t-n} = 0$	
<b>Paso 3.</b>	Si el intento inicial <b>no</b> es solución de la ecuación complementaria, luego $x_n = B(t)$ es una forma correcta de la solución particular	
<b>Paso 4.</b>	Si el intento inicial <b>es</b> solución de la ecuación complementaria, luego multiplique $x_n$ por la menor potencia entera de $t$ requerida para producir una función que no sea solución complementaria. Formalmente, si $x_n = B(t)$ no funciona, ensaye $x_n = tB(t)$ ; si no funciona, pruebe con $x_n = t^2B(t)$ y así sucesivamente	

Por su parte, el **método de variación de parámetros**, a diferencia del método anterior, siempre brinda una solución particular a la EED, sin importar la forma funcional que  $b_t$  adopte<sup>9</sup>. El método consiste en que, dadas dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea,  $u$  y  $v$  la solución particular será

$$x_t = C_1(t)u_t + C_2(t)v_t$$

donde los parámetros (que dependen del tiempo)  $C_1$  y  $C_2$  deben ser elegidos de modo que (6) sea satisfecha. Adelantando la igualdad anterior se obtiene que

$$x_{t+1} = C_1(t+1)u_{t+1} + C_2(t+1)v_{t+1} = C_1(t)u_{t+1} + C_2(t)v_{t+1} + [\Delta C_1(t)u_{t+1} + \Delta C_2(t)v_{t+1}]$$

Luego, la expresión entre corchetes debe ser, claramente, igual a cero; esto es

$$\Delta C_1(t)u_{t+1} + \Delta C_2(t)v_{t+1} = 0 \quad \dots(*)$$

<sup>9</sup> Note que el método de coeficientes indeterminados es útil (y aplicable) si el término móvil de la EED es una combinación lineal de funciones como  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\cos(\nu t)$  y demás.

Del mismo modo, considerando (\*), se tiene que

$$x_{t+2} = C_1(t+2)u_{t+2} + C_2(t+2)v_{t+2} = C_1(t)u_{t+2} + C_2(t)v_{t+2} + [\Delta C_1(t)u_{t+2} + \Delta C_2(t)v_{t+2}]$$

Reemplazando estos resultados en (6) (adelantado dos períodos) se tiene que

$$\Delta C_1(t)u_{t+2} + \Delta C_2(t)v_{t+2} + C_1(t)[u_{t+2} + a_1u_{t+1} + a_0u_t] + C_2(t)[v_{t+2} + a_1v_{t+1} + a_0v_t] = b_t$$

Ahora, dado que  $u$  y  $v$  son soluciones de la ecuación complementaria, las expresiones entre corchetes son iguales a cero, por lo que

$$\Delta C_1(t)u_{t+2} + \Delta C_2(t)v_{t+2} = b_t \quad \dots(**)$$

De este modo, juntando (\*) y (\*\*) se obtiene un sistema de dos ecuaciones por ser resuelto para  $\Delta C_1$  y  $\Delta C_2$  que expresado matricialmente es

$$\begin{bmatrix} u_{t+1} & v_{t+1} \\ u_{t+2} & v_{t+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_1(t) \\ \Delta C_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_t \end{bmatrix}$$

Utilizando la **regla de Cramer** la solución del sistema implica que

$$\Delta C_1(t) = \frac{-b_t v_{t+1}}{W(t+1)} \quad \Delta C_2(t) = \frac{b_t u_{t+1}}{W(t+1)}$$

donde  $W(t+1) = u_{t+1}v_{t+2} - v_{t+1}u_{t+2} \neq 0$  es el wronskiano adelantado de  $u$  y  $v$ .

Considerando que (para  $j=1, 2$ )

$$\sum_{i=0}^{t-1} \Delta C_j(i) = C_j(i) - C_j(0) \text{ se tiene que } C_j(i) = C_j(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \Delta C_j(i).$$

Así, si  $C_1(0) = C_1$  y  $C_2(0) = C_2$  son dos constantes arbitrarias, la solución general de (6) es

$$x_t = C_1 u_t + C_2 v_t - u_t \sum_{i=0}^{t-1} \frac{b_i v_{i+1}}{W(i+1)} + v_t \sum_{i=0}^{t-1} \frac{b_i u_{i+1}}{W(i+1)} \quad \dots(9)$$



**Ejemplo 6.17:** Determinar la solución general de  $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = b_t$ .

Las dos soluciones a la ecuación homogénea son  $u_t = 2^t$  y  $v_t = 3^t$ . De este modo, puede definirse a  $W(i+1) = 2^{i+1}3^{i+2} - 2^{i+2}3^{i+1} = 2^{i+1}3^{i+1}$ . Luego, utilizando (9) se desprende que

$$\begin{aligned} x_t &= C_1 2^t + C_2 3^t - 2^t \sum_{i=0}^{t-1} \frac{b_i 3^{i+1}}{2^{i+1}3^{i+1}} + 3^t \sum_{i=0}^{t-1} \frac{b_i 2^t}{2^{i+1}3^{i+1}} \\ &= C_1 2^t + C_2 3^t - 2^t \sum_{i=0}^{t-1} b_i 2^{-(i+1)} + 3^t \sum_{i=0}^{t-1} b_i 3^{-(i+1)} \end{aligned}$$

Consideremos que  $b_t = b$ . Recordando la noción de sumatorias finitas,

$$\sum_{i=0}^{t-1} 2^{-(i+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - (\frac{1}{2})^t}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1 - (\frac{1}{2})^t \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{t-1} 3^{-(i+1)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1 - (\frac{1}{3})^t}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{2} (1 - (\frac{1}{3})^t)$$

Así, la solución de la EED considerando un término constante es

$$x_t = C_1 2^t + C_2 3^t - b 2^t (1 - (\frac{1}{2})^t) + \frac{1}{2} b 3^t (1 - (\frac{1}{3})^t)$$

expresión que, simplificada resulta ser

$$x_t = H_1 2^t + H_2 3^t + \frac{1}{2} b$$

Puede apreciarse que se ha llegado a la misma solución general que la potencialmente obtenida por el método de los coeficientes indeterminados donde  $H_1 = C_1 - b$  y  $H_2 = C_2 + \frac{1}{2}b$  pueden ser interpretadas, sin pérdida de generalidad, como constantes arbitrarias. ♦

**Ejemplo 6.18** Resolver  $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = t$ .

En este caso, las raíces de la ecuación auxiliar son iguales a 1. De este modo, se tiene como soluciones complementarias a  $u_t = 1^t = 1$  y  $v_t = t1^t = t$ . Del mismo modo, el wronskiano adelantado es  $W(i+1) = 1^{i+1}(i+2) - 1^{i+2}(i+1) = 1$  de forma que, con ayuda de (9) se tiene que

$$x_t = C_1 + C_2 t - \sum_{i=0}^{t-1} i(i+1) + t \sum_{i=0}^{t-1} i$$

El lector puede comprobar que se cumple

$$\sum_{i=0}^{t-1} i(i+1) = \frac{1}{3} (t-1)t(t+1) \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{t-1} i(i+1) = \frac{1}{2} (t-1)t$$

Así, la solución general de  $x$  es

$$x_t = C_1 + C_2 t - \frac{1}{6} t(t-1)(t-2)$$

En este ejemplo resulta importante recalcar que tanto  $t$  como  $t^2$  son soluciones de la ecuación complementaria. Bajo el método de los coeficientes indeterminados, ello hubiera implicado plantear como solución particular un polinomio de tercer orden, tras haber comprobado que un polinomio de segundo orden invalidaba el método. Por el contrario, bajo el método de variación de parámetros, la solución general fue determinada directamente.

#### 6.4 Ecuaciones en diferencias ordinarias lineales de orden superior

Lo discutido en las secciones anteriores puede ser generalizado sin mayor complicación, de modo que el lector adquiera la capacidad de resolver una EED lineal de cualquier orden y coeficientes constantes. La EED completa de orden superior es expresada como

$$x_t + a_{n-1}x_{t-1} + \dots + a_2x_{t-n+2} + a_1x_{t-n+1} + a_0x_{t-n} = b_t \quad \dots(10)$$

con una ecuación homogénea igual a

$$x_t + a_{n-1}x_{t-1} + \dots + a_2x_{t-n+2} + a_1x_{t-n+1} + a_0x_{t-n} = 0 \quad \dots(11)$$

Para poder solucionar el caso homogéneo es necesario encontrar  $n$  soluciones linealmente independientes de (11), luego su combinación lineal constituye la solución general de (11). En este caso, la solución presentará  $n$  constantes arbitrarias que podrán ser determinadas a partir de  $n$  condiciones iniciales. Asimismo, el wroskiano de  $n$  funciones puede ser utilizado en el análisis de independencia lineal. Sea  $u_k$  la  $k$ -ésima solución de (11) con  $n \geq k \geq 0$ , luego, las  $n$  soluciones son linealmente independientes si

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_{1(0)} & u_{1(1)} & \dots & u_{1(k)} & \dots & u_{1(n-1)} \\ u_{2(0)} & u_{2(1)} & \dots & u_{2(k)} & \dots & u_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k(0)} & u_{k(1)} & \dots & u_{k(k)} & \dots & u_{k(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n(0)} & u_{n(1)} & \dots & u_{n(k)} & \dots & u_{n(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

En consecuencia, la solución general de (10) es

$$x_t = x_p + x_h = \sum_{i=1}^n C_i u_i + x_p \quad \dots(12)$$

donde  $x_p$ , la solución particular, puede ser determinada mediante el uso del método de los coeficientes indeterminados o del método de variación de parámetros. La ecuación complementaria está asociada al polinomio característico (reemplazando en (11)  $x_{t-n+j}$  por  $r^j$ ),

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0 \quad \dots(13)$$

La solución del polinomio (13) implica la obtención de  $n$  raíces. Si  $m_1$  raíces son reales y distintas,  $m_2$  son raíces reales e iguales entre sí y  $m_3$  raíces son pares de complejas conjugadas, donde se cumple que  $m_1 + m_2 + 2m_3 = n$ , la solución general (11) viene dada por

$$x_t = \sum_{i=1}^{m_1} A_i r_i^t + \sum_{i=1}^{m_2} B_i t^{(i-1)} r^t + \sum_{i=1}^{m_3} \theta_i^t (C_i \cos(\theta_i t) + G_i \sin(\theta_i t)) + x_p \quad \dots(14)$$

donde la primera sumatoria es vinculada con las raíces reales y distintas, la segunda sumatoria se refiere a las raíces reales e iguales y la tercera sumatoria se asocia con las raíces complejas conjugadas de (13).

**Ejemplo 6.19** Resolver  $x_{t+n} + x_{t+n-1} + \dots + x_{t+1} + x_t = 0$ .

La solución de esta ecuación homogénea está asociada con el polinomio característico

$$r^n + r^{n-1} + \dots + r + 1 = 0$$

Por la fórmula de una serie geométrica finita, se aprecia que el lado izquierdo de la ecuación anterior es igual a  $(1 - r^{n+1})/(1 - r)$  por lo que

$$(r^n + r^{n-1} + \dots + r + 1)(1 - r) = (1 - r^{n+1})$$

Por lo que las raíces de la EED satisfacen  $(1 - r^{n+1})$ . Si  $n$  es un número par, se tienen  $n$  raíces complejas conjugadas. Así, la solución general de la EED es

$$x_t = C_1 \cos(\theta_1 t) + C_2 \sin(\theta_1 t) + \dots + C_{n-1} \cos(\theta_{n/2} t) + C_n \sin(\theta_{n/2} t)$$

Por otro lado, si  $n$  es impar, se tendrán  $n - 1$  raíces complejas conjugadas y  $r = 1$ . El lector puede deducir la secuencia solución de la EED en tal caso. ♦

Con respecto a la convergencia de (11) es claro que debe cumplirse

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p = x_{ss} \in R$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_c = 0$$

La convergencia de la solución particular dependen exclusivamente de la forma de  $b$ . Si  $b$  es una secuencia convergente,  $x_p$  lo será. Por su parte de lo analizado en la sección 6.3, la convergencia de  $x_c$  es garantizada si el **módulo de las raíces es menor a la unidad**. Es decir, si  $|r_j|$  y  $\rho_j < 1$ . Para que esto ocurra, el Teorema 6.2 brinda las condiciones relevantes.

**Teorema 6.2 (Schur<sup>10</sup>)** Una condición **necesaria** y **suficiente** para que la solución de (11) sea convergente (estable) es que el módulo de sus raíces sea menor a la unidad, lo que se cumple *si y solo si* los  $n$  determinantes de la sucesión

$$\begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & a_0 \\ a_0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & a_n & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

son (**todos**) positivos (note que en (11),  $a_n = 1$ ).

**Ejemplo 6.20 (Una EED de orden 2)** consideremos la EED de segundo orden,

$$x_t + a_2 x_{t-1} + a_1 x_{t-2} = 0$$

10 Para una demostración del **teorema de Schur**, véase John Chipman, *The Theory of Intersectoral Money Flows and Income Formation*, John Hopkins Press, 1979, pp. 119 - 120.

Aplicando el **teorema de Schur**, la estabilidad de la EED está asegurada si

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 \\ a_0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_1 & a_1 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & a_0 \\ a_0 & 0 & 1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Al calcular los determinantes se obtiene que

$$1 - a_0^2 > 0 \quad \text{y} \quad (1 - a_0^2)(1 + a_1 + a_0)(1 - a_1 + a_0) > 0$$

La segunda condición es satisfecha si  $(1 + a_1 + a_0)(1 - a_1 + a_0)$  es positivo por lo que es necesario que ambos multiplicandos tengan el mismo signo y si la primera condición es cumplida. Supóngase, en primer término, que ambos son negativos. Al sumarlos se obtiene que  $2 + 2a_0 < 0$ , por ende,  $1 + a_0 < 0$ , lo que claramente contradice la primera condición de donde se desprende que  $1 - a_0 > 0$ . Así, la EED es estable si y solo si,

$$1 - a_0 > 0 \quad 1 + a_1 + a_0 > 0 \quad 1 - a_1 + a_0 > 0$$

**Teorema 6.3 (Samuelson<sup>11</sup>)** Dada la ecuación (11) se definen las siguientes sumas ( $a_n = 1$ );

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad s_{n-1} = \sum_{i=0}^n a_i(2i - n), \quad \dots, \\ \dots \quad s_{n-r} = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^r \binom{n-i}{r-j} (-1)^{j+1} \binom{i}{j}, \quad \dots, \quad s_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} a_i$$

Luego, (11) es estable si todos los menores principales (menores complementarios) de la matriz (considerando las primeras  $n$  filas y las primeras  $n$  columnas)

$$S = \begin{bmatrix} s_{n-1} & s_{n-3} & s_{n-5} & \dots & \dots \\ s_n & s_{n-2} & s_{n-4} & \dots & \dots \\ 0 & s_{n-1} & s_{n-1} & \dots & \dots \\ 0 & s_n & s_{n-2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

y  $s_n$  son (**todos**) positivos.

11 Paul Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947.

Ciertamente el teorema de Schur es una herramienta potente en la determinación de la estabilidad de una EED. No obstante, es obvio que su aplicación es casi imposible para ecuaciones de órdenes mayores a 3 ya que implica el cálculo de determinantes de orden  $2n$ . Afortunadamente, un enfoque alternativo y computacionalmente menos engorroso es expuesto en el Teorema 6.3

**Ejemplo 6.21 (Una EED de orden 3)** consideremos la EED de tercer orden<sup>12</sup>,

$$x_t + a_2 x_{t-1} + a_1 x_{t-2} + a_0 x_{t-3} = 0$$

Luego,

$$\begin{aligned} s_3 &= 1 + a_2 + a_1 + a_0 & s_2 &= 3 + a_2 - a_1 - 3a_0 \\ s_1 &= 3 - a_2 - a_1 + 3a_0 & s_0 &= 1 - a_2 + a_1 - a_0 \end{aligned}$$

La matriz  $S$  en este caso es

$$S = \begin{bmatrix} s_2 & s_0 \\ s_3 & s_1 \end{bmatrix}$$

Luego, el Teorema 6.3 nos asegura que la EED es estable si  $s_3 > 0$ ,  $s_2 > 0$ ,  $s_2 s_1 - s_3 s_0 > 0$ , donde  $S_2$  es el primer menor complementario de  $S$  y  $s_2 s_1 - s_3 s_0$  es el segundo (y último) menor complementario de  $S$ . Entonces, las condiciones de estabilidad de una EED de tercer orden son

$$\begin{aligned} 1 + a_2 + a_1 + a_0 &> 0 \\ 3 + a_2 - a_1 - 3a_0 &> 0 \\ a_0^2 + a_0 a_2 - a_1 + 1 &> 0 \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

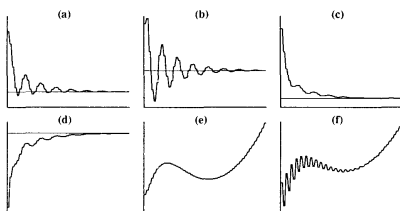
Finalmente, el comportamiento de la secuencia  $x_t$  dependerá, en cierta medida, de las condiciones iniciales del problema que determinan los valores de las constantes  $(A, B, C, G)$ . Si los módulos de las raíces son menores a uno, se seguirá, en general, el comportamiento de aquella raíz asociada al mayor módulo siempre y cuando exista una diferencia sustancial entre esta y el resto de constantes. Por el contrario, si un módulo es mayor a uno, la secuencia  $x$  se verá gobernada por el comportamiento de este miembro y será divergente. A modo de ejemplo, la Figura No. 6.4 ilustra el caso  $n = 6$ ,  $m_1 = m_2 = 2$ ,  $m_3 = 1$ ,

<sup>12</sup> Al aplicar el **teorema de Samuelson** a una EED de segundo orden se llegan exactamente a las mismas condiciones deducidas en el Ejemplo 6.20 con el **teorema de Schur**.

$$y_c = A_1 r_1^t + A_2 r_2^t + B_1 t^r + B_2 t^s + \rho^t (C \cos(\theta t) + G \text{sen}(\theta t))$$

donde los valores de  $r_1, r_2, r$  y  $\rho$  son similares en valor absoluto y las diferencias entre trayectorias se deben básicamente a discrepancias entre las constantes arbitrarias.

**Figura No. 6.4:**  
**Un Ejemplo de EED de orden superior**



Panel (a): converge, módulo de  $r_1, r_2, r$  y  $\rho < 1$ . Las constantes toman valores cercanos:  $A_1 = B_1 = C = G$ .

Panel (b): converge, módulo de  $r_1, r_2, r$  y  $\rho < 1$ . Secuencia adopta raíces complejas:  $C$  o  $G \gg A_1, B_1$ .

Panel (c): converge, módulo de  $r_1, r_2, r$  y  $\rho < 1$ . Secuencia adopta caso de raíces reales:  $C$  y  $G \ll A_1, B_1$ .

Panel (d): igual que (c) pero la constante dominante es negativa.

Panel (e): diverge, módulo de  $r_1, r_2, r$  o  $\rho > 1$ . Las constantes toman valores cercanos:  $A_1 = B_1 = C = G$ .

Panel (f): igual que (e) pero una raíz con módulo menor a la unidad es negativa.

#### 6.4.1 Aplicación: ciclo de inventarios

Lloyd Metzler<sup>13</sup> fue el primer economista en investigar las consecuencias de los esfuerzos de los empresarios para mantener sus niveles de existencias o inventarios a lo largo del ciclo económico. En esta sección se desarrolla una

13 Metzler, Lloyd, "The Nature and Stability of Inventory Cycles", *Review of Economic and Statistics*, August 1941.

economía matemáticamente más compleja que la propuesta por este autor<sup>14</sup>, aunque las conclusiones y la intuición son las mismas<sup>15</sup>.

En esta economía el consumo es una función proporcional y contemporánea del nivel de renta nacional:  $C_t = cY_t$  donde  $c$  es la propensión marginal a consumir. Asimismo, las empresas esperan que las ventas realizadas en el período  $t$  sigan la tendencia definida por

$$V_t = C_{t-1} + \rho(C_{t-1} - C_{t-2}) = cY_{t-1} + \rho(cY_{t-1} - cY_{t-2})$$

donde  $V_t$  representa las ventas esperadas. Esto es, las empresas esperan que las ventas en  $t$  sean las ventas realizadas en el período anterior  $C_{t-1}$  considerando un ritmo de crecimiento de las mismas, dado por  $C_{t-1} - C_{t-2}$ . Se asume, sin pérdida de generalidad, que los empresarios son optimistas, por lo que  $\rho > 0$ .

Por su parte, como parte del planeamiento de la actividad del período, las empresas desean contar con inventarios que cubran una proporción  $k$  de sus ventas. Así, el nivel deseado de inventarios es

$$\hat{Q}_t = kV_t = kc(1 + \rho)Y_{t-1} - ck\rho Y_{t-2}$$

de modo que la inversión en existencias realizada por las empresas en  $t$  es

$$I_t = \hat{Q}_t - Q_{t-1}$$

donde  $Q_{t-1}$  es el nivel de inventarios alcanzado en el período  $t - 1$ . Este puede entenderse como el nivel deseado en  $t - 1$ , menos la variación no deseada de inventarios, esto es, la diferencia entre las ventas ejecutadas y las programadas. De esta forma,

$$Q_{t-1} = \hat{Q}_{t-1} - (C_{t-1} - V_{t-1}) = cY_{t-1} + c(1 + k)(1 + \rho)Y_{t-2} - (1 + k)c\rho Y_{t-3}$$

Finalmente, el producto nacional viene dado por el consumo (igual al nivel de ventas deseado  $V_t$ ) más la inversión en inventarios y un nivel autónomo de inversión  $I_0$ :

$$Y_t = V_t + I_t + I_0$$

14 Ver Giancarlo Gandolfo, *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*, Biblioteca Tecnos de Ciencias Económicas, Tecnos, 1976, pp. 108 - 110.

15 Una versión sumamente simple de este modelo se encuentra en Jeffrey Sachs y Felipe Larraín, *Macroeconomía en la economía global*, Prentice Hall Hispanoamérica, 1994, pp. 521 - 523.



De este modo, combinando las ecuaciones anteriormente mostradas, se llega a la siguiente EED de tercer orden para el producto:

$$Y_t - c[(1+k)(1+\rho)+1]Y_{t-1} + c(1+k)(1+2\rho)Y_{t-2} - (1+k)c\rho Y_{t-3} = I_0$$

Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se deduce que la solución particular debe ser constante por lo que

$$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y_{t-3} = Y_p$$

conjetura que al ser reemplazada en la EED, brinda como solución de largo plazo

$$\begin{aligned} (1 - c[(1+k)(1+\rho)+1] + c(1+k)(1+2\rho))Y_p - (1+k)cY_p &= I_0 \\ (1-c)Y_p &= I_0 \\ Y_p &= \frac{I_0}{1-c} \end{aligned}$$

Por su parte, hallar la solución complementaria de la EED resulta ser un trabajo tedioso, por la cantidad de parámetros con la que cuenta el modelo y por el orden de la misma. No obstante, puede estudiarse la estabilidad de la EED a través del **teorema de Samuelson**. Así, recordando las condiciones de estabilidad derivadas en el Ejemplo 6.21,

$$\begin{aligned} 1 + a_2 + a_1 + a_0 &> 0 \\ 3 + a_2 - a_1 - 3a_0 &> 0 \\ a_0^2 + a_0a_2 - a_1 + 1 &> 0 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} 1 - c[(1+k)(1+\rho)+1] + c(1+k)(1+2\rho) - (1+k)c\rho &> 0 \\ 3 - c[(1+k)(1+\rho)+1] - c(1+k)(1+2\rho) + 3(1+k)c\rho &> 0 \\ (1+k)^2 c^2 \rho^2 + c^2(1+k)\rho[(1+k)(1+\rho)+1] - c(1+k)(1+2\rho) + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Dado que la propensión marginal a consumir es un número menor a la unidad y el parámetro  $\rho$  es positivo, la primera condición se cumple. Por su parte, tras manipulaciones algebraicas de la segunda y tercera condiciones se llega a

$$\begin{aligned} 3 - c(2k+3) &> 0 \\ (1+k)(2+k)\rho c^2 - (1+k)(1+2\rho)c + 1 &> 0 \end{aligned}$$

Aunque no es evidente, típicamente la primera restricción es cumplida plenamente mientras que la segunda depende de la magnitud de  $\rho$ , el parámetro de expectativas. Cuando  $\rho = 0$ ,  $Y_t$  es estable si  $c < 1/(1+k)$ . El lector podrá analizar que si  $\rho = 1$ ,  $c$  tendrá que disminuir en valor para que la estabilidad se mantenga. No obstante, el parámetro  $\rho$  tiende, en la vida real, a ser un número mucho menor que la unidad. Finalmente, la conclusión más importante a la que Metzler llega es que el comportamiento preventivo de los empresarios respecto de las existencias tiene el potencial de generar ciclos económicos, lo que es plausible al determinar una EED de orden superior para el producto.

### 6.5 Sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Dos o más EED que contengan el mismo número de funciones (del tiempo) desconocidas, constituyen un sistema de ecuaciones en diferencias simultáneas. En muchos modelos económicos es necesario tener la capacidad de determinar simultáneamente todas las funciones involucradas en el sistema. En esta sección se discuten los principales puntos vinculados con la resolución de sistemas de EED lineales.

Para que un sistema de EED sea resoluble el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas, y además estas ecuaciones deben ser independientes y consistentes. La definición general de un sistema de EED es la siguiente:

**Definición 6.2** Un Sistema de  $m$  ecuaciones en diferencias de orden  $n$  viene dado por

$$F_1(t, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}; x_{1t-1}, x_{2t-1}, \dots, x_{mt-1}; \dots; x_{1t-n}, x_{2t-n}, \dots, x_{mt-n}) = 0$$

$$F_2(t, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}; x_{1t-1}, x_{2t-1}, \dots, x_{mt-1}; \dots; x_{1t-n}, x_{2t-n}, \dots, x_{mt-n}) = 0$$

$$\vdots$$

$$F_m(t, x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{mt}; x_{1t-1}, x_{2t-1}, \dots, x_{mt-1}; \dots; x_{1t-n}, x_{2t-n}, \dots, x_{mt-n}) = 0$$

donde  $F_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) son funciones dadas y  $x_{jt}$  son funciones desconocidas del tiempo. La **solución** del sistema consiste en las funciones  $x_{jt} = v_{jt}$  que evaluadas en el sistema, lo convierte en  $m$  identidades.

Lamentablemente, no existe un método general o único que nos permita obtener la solución de algún sistema. A continuación se presentan los principales enfoques al respecto para el caso de sistemas lineales. La resolución de sistemas no

lineales no será tema de discusión ya que su solución es, típicamente, numérica y no analítica.

### 6.5.1 Sistemas lineales de primer orden

El caso más sencillo por resolver viene dado por el sistema

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a_{11}x_t + a_{12}z_t + P_{1t} \\z_{t+1} &= a_{21}x_t + a_{22}z_t + P_{2t}\end{aligned}\quad \dots(15)$$

Donde  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) son coeficientes constantes determinados y  $P_{it}$  ( $i = 1, 2$ ) son funciones conocidas. En primer lugar se analizará el sistema homogéneo vinculado con (15), donde  $P_{1t} = P_{2t} = 0$ . Asimismo, se abordarán dos enfoques en su resolución.

El primer enfoque por considerar es el **método de reducción de orden** que consiste simplemente en aplicar las transformaciones apropiadas al sistema de modo que sea reducido a una ecuación aislada. Si  $a_{12} \neq 0$ <sup>16</sup>, la primera ecuación de (15) equivale a

$$z_t = \frac{1}{a_{12}}x_{t+1} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_t \quad \rightarrow \quad z_{t+1} = \frac{1}{a_{12}}x_{t+2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_{t+1} \quad \dots(16)$$

Sustituyendo (16) en la segunda ecuación de (15) se obtiene

$$\frac{1}{a_{12}}x_{t+2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_{t+1} = a_{21}x_t + \frac{a_{22}}{a_{12}}x_{t+1} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}^2}x_t$$

de forma que

$$x_{t+2} - (a_{11} + a_{12})x_{t+1} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_t = 0 \quad \dots(17)$$

Así, se tiene una EED de segundo orden de la forma de (7). Esta EED es resuelta de la manera tradicional (sección 6.3) y la variable  $z_t$  se determina al reemplazar la secuencia solución  $x_t$  en (15). Si las raíces características de (17) son reales y distintas, se sabe que  $x_t = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$  donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias. Sustituyendo esta expresión en (16),

$$z_t = \frac{r_1 - a_{11}}{a_{12}} C_1 r_1^t + \frac{r_2 - a_{11}}{a_{12}} C_2 r_2^t$$

16 Si  $a_{12} = 0$ , se opta por despejar la otra variable o iniciar el procedimiento con la otra ecuación.

Por otro lado, si la ecuación auxiliar de (17) es resuelta por dos raíces iguales (y reales), la solución de  $x_t$  es  $(C_1 + C_2 t)r^t$  por lo que

$$z_t = \left[ \frac{(a_{22} - a_{11})C_1 + (a_{22} + a_{11})C_2}{2a_{12}} + \frac{(a_{22} - a_{11})C_2}{2a_{12}} t \right] r^t$$

Finalmente, si las raíces de (17) son complejas y conjugadas, de la sección 6.3.1 se conoce que  $x_t = \rho^t (C_1 \cos(\theta t) + C_2 \operatorname{sen}(\theta t))$  y, así,

$$z_t = \rho^t \left[ \frac{C_1 \rho \cos(\theta) + C_2 \rho \operatorname{sen}(\theta) - a_{11} C_1}{a_{12}} \cos(\theta t) + \frac{C_2 \rho \cos(\theta) - C_1 \rho \operatorname{sen}(\theta) - a_{11} C_2}{a_{12}} \operatorname{sen}(\theta t) \right]$$

De esta manera, el método de reducción de orden para un sistema de 2 variables y de primer orden implica, básicamente, la resolución de una EED de segundo orden. Este hecho puede ser generalizado: bajo este enfoque, resolver un sistema de  $m$  variables y de primer orden equivale a resolver una EED de orden  $m$ . De la exposición anterior pueden extraerse dos conclusiones importantes. En primer lugar, tanto  $x_t$  como  $z_t$  comparten *las mismas raíces*. Por esta razón si  $x_t$  converge (o diverge),  $z_t$  converge (o diverge) ya sea de manera monótona o fluctuante, por lo que el sistema como un todo converge (o diverge). En segundo lugar, las constantes arbitrarias de  $z_t$  resultan ser combinaciones lineales de las de  $x_t$ , lo que resalta el carácter de mutua dependencia entre las variables del sistema.

**Ejemplo 6.22** En una economía la tasa de crecimiento del producto  $y_t$  y la tasa de crecimiento de la inversión  $i_t$  se relacionan de la siguiente manera

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{2} y_{t-1} + \frac{4}{5} i_{t-1} \\ i_t &= \frac{1}{10} y_{t-1} + \frac{2}{3} i_{t-1} \end{aligned}$$

Si en el período  $t=0$  la tasa de crecimiento del producto fue de 3 por ciento y la tasa de crecimiento de la inversión alcanzó el 5 por ciento, ¿cuáles son las secuencias de crecimiento de producción e inversión de esta economía?

De la primera ecuación del sistema se puede deducir que

$$i_{t-1} = \frac{10}{8} y_t - \frac{5}{8} y_{t-1} \quad \rightarrow \quad i_t = \frac{10}{8} y_{t+1} - \frac{5}{8} y_t$$

Al reemplazar estos resultados en la segunda ecuación del sistema se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{10}{8} y_{t+1} - \frac{5}{8} y_t &= \frac{1}{10} y_{t-1} + \frac{1}{2} y_t - \frac{1}{4} y_{t-1} \\ y_{t+1} - \frac{9}{10} y_t + \frac{3}{25} y_{t-1} &= 0 \end{aligned}$$

Luego, la secuencia que sigue la tasa de crecimiento del producto es

$$y_t = C_1 \left(\frac{2915}{3954}\right)^t + C_2 \left(\frac{202}{1241}\right)^t$$

Considerando la condición inicial  $y_0 = 3$  se tiene que  $C_1 + C_2 = 3$ .

$$i_t = \frac{10}{8} y_{t+1} - \frac{5}{8} y_t \rightarrow i_t = \frac{10}{8} C_1 \left(\frac{2915}{3954}\right)^{t+1} + \frac{10}{8} C_2 \left(\frac{202}{1241}\right)^{t+1} - \frac{5}{8} C_1 \left(\frac{2915}{3954}\right)^t - \frac{5}{8} C_2 \left(\frac{202}{1241}\right)^t$$

$$i_t = \frac{368}{1241} C_1 \left(\frac{2915}{3954}\right)^t - \frac{368}{873} C_2 \left(\frac{202}{1241}\right)^t$$

Luego, teniendo en cuenta que  $i_0 = 5$ ,  $\frac{368}{1241} C_1 - \frac{368}{873} C_2 = 5$ . Así,

$$C_1 = \frac{3385}{388} \quad y \quad C_2 = -\frac{2221}{388} \quad \blacklozenge$$

Cabe preguntarse, ¿cómo resolver un sistema no homogéneo,  $P_1 \neq 0$  y/o  $P_2 \neq 0$ ? El procedimiento es exactamente el mismo. No obstante, puede resultar sumamente tedioso. Sin mayor detalle, a renglón seguido se desarrolla un ejemplo al respecto de modo que el lector saque sus propias conclusiones.

**Ejemplo 6.23** Resolver el sistema

$$x_{t+1} = ax_t + z_t - a^t$$

$$z_{t+1} = x_t + az_t - ta^t$$

Se tiene que

$$z_t = x_{t+1} - ax_t + a^t \rightarrow z_{t+1} = x_{t+2} - ax_{t+1} + a^{t+1}$$

de modo que al reemplazar  $z_t$  en la segunda ecuación del sistema se tiene

$$x_{t+2} - ax_{t+1} + a^{t+1} = x_t + ax_{t+1} - a^2 x_t + a^{t+1} - ta^t$$

$$x_{t+2} - 2ax_{t+1} - (1 - a^2)x_t = -ta^t$$

que es una EED de segundo orden para  $x_t$ . Puede comprobarse que la solución general de esta es igual a

$$x_t = C_1(a-1)^t + C_2(a+1)^t + ta^t$$

por lo que se deduce que

$$z_t = -C_1(a-1)^t + C_2(a+1)^t + (a+1)a^t \quad \blacklozenge$$

Indudablemente, el método expuesto es muy sencillo y útil. Pese a ello, puede resultar poco conveniente al estudiar sistemas de más de dos variables o de órdenes mayores. Un enfoque alternativo, el **método matricial**, tiene la ventaja de ser más directo ya que brinda soluciones de las funciones desconocidas simultáneamente, sin necesidad de reducir el orden del mismo.

El sistema (15) puede ser expresado de manera compacta como

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_t + \mathbf{P}_t \quad \dots(18)$$

donde

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \end{bmatrix}$$

Consideremos, el caso donde el término de cada ecuación del sistema es constante,  $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}$ . Sistemas con términos móviles son típicamente resueltos por el método anterior (ver Ejemplo 6.23). Resolviendo, recursivamente, el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{P} \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_1 + \mathbf{P} = \mathbf{A}^2\mathbf{X}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{P} \\ \mathbf{X}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_2 + \mathbf{P} = \mathbf{A}^3\mathbf{X}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2)\mathbf{P} \\ \mathbf{X}_4 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_3 + \mathbf{P} = \mathbf{A}^4\mathbf{X}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3)\mathbf{P} \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_t &= \mathbf{A}\mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{P} = \mathbf{A}^t\mathbf{X}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^{t-1})\mathbf{P} \end{aligned}$$

Para que el sistema planteado sea estable, los módulos de los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$  deben ser estrictamente menores a la unidad. Bajo este supuesto, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \dots + \mathbf{A}^{t-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^t)(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

puede considerarse que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^t)(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

de modo que la solución particular del sistema es  $\mathbf{X}_{ss} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}$ . Del mismo modo, si se cumple la condición mencionada sobre los valores propios de  $\mathbf{A}$ , luego esta es una matriz *secuencialmente estable*, lo que implica que  $\mathbf{A}^t$  converge a una matriz nula. Así, por el principio de superposición, si  $\mathbf{A}$  es secuencialmente estable, la solución del sistema  $\mathbf{X}_t \rightarrow \mathbf{X}_{ss}$  si  $t \rightarrow \infty$ .

Al igual que la discusión realizada en torno a sistemas lineales de EDO (sección 4.5), las raíces características de cada variable de (18) son los valores propios de  $\mathbf{A}$ . Así, la determinación de la solución homogénea del sistema equivale a resolver

$$|\mathbf{A} - r\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{vmatrix} = 0$$

de donde se obtiene

$$r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = r^2 - \text{tr}(\mathbf{A})r + \det(\mathbf{A}) = 0 \quad \dots(19)$$

que es la ecuación auxiliar de (17)

**Ejemplo 6.24** Considere las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} p_t &= v + m_t - y_t \\ m_{t+1} - m_t &= p_t - y_t \\ y_{t+1} - y_t &= \frac{1}{2}(p_{t+1} - p_t) \end{aligned}$$

donde  $p_t$  es el logaritmo del nivel de precios,  $m_t$  es el logaritmo de la cantidad de dinero en la economía e  $y_t$  es el logaritmo del nivel de producción de la misma. La primera ecuación es el logaritmo de la ecuación cuantitativa, donde  $v$  es el logaritmo de la velocidad de circulación del dinero (constante positiva). La segunda es una función de política que relaciona la tasa de crecimiento de la cantidad de dinero con la producción nominal y la tercera ecuación es una oferta agregada dinámica. Los parámetros del modelo son constantes. Al reemplazar la primera ecuación en las dos restantes se tiene

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= 2m_t - 2y_t + v \\ y_{t+1} - \frac{1}{3}m_{t+1} &= -\frac{1}{3}m_t + y_t \end{aligned}$$

sistema que expresado matricialmente es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema anterior tenga la forma de (18), debe ser premultiplicado por la inversa de la matriz de coeficientes que acompaña a  $[m_{t+1} \ y_{t+1}]'$  (es decir, el sistema debe ser **normalizado**). Así,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ \frac{1}{3}v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando (19),

$$r^2 - \text{tr}(\mathbf{A})r + \det(\mathbf{A}) = r^2 - \frac{7}{3}r + \frac{4}{3} = 0$$

El sistema es resuelto por dos raíces reales y distintas, 1 y 4/3,

$$\begin{bmatrix} m_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 \left(\frac{4}{3}\right)^i \\ H_1 + H_2 \left(\frac{4}{3}\right)^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}v \end{bmatrix}$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $H_1$  y  $H_2$  son constantes arbitrarias. Claramente, el sistema es inestable. Por ello, la solución particular es tan solo indicativa ya que ni  $m_i$  ni  $y_i$  convergerán a ella. ♦

En el ejemplo anterior la respuesta del sistema fue acompañada por cuatro constantes arbitrarias. En el método de reducción de orden se concluyó que en definitiva las constantes arbitrarias de una secuencia solución están mutuamente vinculadas con las de la otra secuencia solución. El método matricial permite obtener una conclusión similar, ya que basta con recordar que, si  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonalizable, luego

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Gamma}^{-1}$$

donde  $\mathbf{\Lambda}$  es la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de  $\mathbf{A}$  (semejante a  $\mathbf{A}$ ) y  $\mathbf{\Gamma}$  es una matriz cuyas columnas son los vectores propios de  $\mathbf{A}$ . Así, la solución complementaria del sistema es

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{X}_0 = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Lambda}^i \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{X}_0 \quad \dots(20)$$

Se aprecia pues que, efectivamente, las constantes de cada solución homogénea se determinan a partir de combinaciones lineales de las condiciones iniciales del problema  $\mathbf{X}_0$ .



**Ejemplo 6.25** Resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= 0.7x_t + 0.3z_t \\ z_{t+1} &= -0.2x_t + 0.2z_t\end{aligned}$$

La matriz de coeficientes de este sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son 0.5 y 0.4 y la matriz conformada por sus vectores propios es

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$X_t = \Gamma \Lambda \Gamma^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})^t & 0 \\ 0 & (\frac{2}{3})^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$$X_t = \begin{bmatrix} 3(x_0 - z_0)(\frac{1}{2})^t - (2x_0 - 3z_0)(\frac{2}{3})^t \\ 2(x_0 - z_0)(\frac{1}{2})^t - (2x_0 - 3z_0)(\frac{2}{3})^t \end{bmatrix} \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 6.26 (Raíces complejas conjugadas)**

El sistema

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= z_t - 1 \\ z_{t+1} &= -x_t - 1\end{aligned}$$

puede ser expresado matricialmente como

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

En primer lugar, la solución particular del sistema es el vector

$$\begin{bmatrix} x_p \\ z_p \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por su parte, las raíces características de la matriz A del sistema son imaginarias,

$$r^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = \pm i \quad \rightarrow \quad r_{1,2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \pm \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

de modo que, la matriz de vectores propios de  $A$  es

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Utilizando (20) se tiene

$$\mathbf{X}_t = \Gamma \Lambda \Gamma^{-1} \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^t & 0 \\ 0 & (-i)^t \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i^t & 0 \\ 0 & (-i)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

donde  $C_1 = \frac{1}{2}(x_0 - iz_0)$  y  $C_2 = \frac{1}{2}(x_0 + iz_0)$ . Al expresar los números complejos de la expresión anterior en su forma polar se desprende que

$$\begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 i^t + C_2 (-i)^t \\ C_1 i^{t+1} + C_2 (-i)^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1 + C_2) \cos(\frac{\pi}{2}t) + (C_1 - C_2) i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) \\ (C_1 + C_2) \cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) + (C_1 - C_2) i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

donde puede apreciarse que las constantes arbitrarias de la solución de  $x_t$  y  $z_t$  son linealmente dependientes. Tomando en cuenta que  $C_1 + C_2 = x_0$  y  $C_1 - C_2 = -iz_0$  se tiene que la solución homogénea del sistema es

$$\begin{bmatrix} x_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\frac{\pi}{2}t) + z_0 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) \\ z_0 \cos(\frac{\pi}{2}t) - x_0 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t) \end{bmatrix} \quad \blacklozenge$$

La discusión realizada en torno al método de resolución matricial es válida para sistemas de  $m$  variables y de primer orden. Así, puede considerarse un sistema de la forma de (18) con las siguientes definiciones

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{mt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_t = \begin{bmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \\ \vdots \\ P_{mt} \end{bmatrix}$$

Al igual que el caso bivariado, si el sistema tiene una solución particular convergente, sus soluciones serán convergentes si los módulos de los vectores propios de  $A$  son menores a la unidad. Por este motivo, es bueno recordar al lector el siguiente resultado del álgebra lineal

**Teorema 6.4 (Condiciones de estabilidad de sistemas de EED)** Si  $A = [a_{ij}]$  es una matriz cualquiera de orden  $m \times m$ , luego si se cumple que

1.  $\sum_{i=1}^m |a_{ii}| < m$
2.  $|\det(A)| < 1$  y
3.  $\sum_{j=1}^m |a_{ij}| < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

los vectores propios de  $A$  tienen módulo menor que 1.

La tercera condición del Teorema 6.4 establece que si la suma de los valores absolutos de los elementos de cada fila son menores a 1, los valores propios de la misma tendrán módulo menor que 1. Dado que los valores propios de  $A$  son los mismos que los de su traspuesta, el Teorema 6.4 aplicado a la traspuesta de  $A$  brinda un criterio distinto que implica la suma de los valores absolutos de los elementos en las columnas de  $A$ .

**Ejemplo 6.27 (Sistemas equivalentes)** En el Capítulo 4 se definió un sistema equivalente como la forma de expresar una EDO de orden superior en un sistema de primer orden. Este concepto también es aplicable a EED. Considérese la EED de orden  $n$ ,

$$x_t + \alpha_{n-1}x_{t-1} + \dots + \alpha_1x_{t-n+1} + \alpha_0x_{t-n} = b_t$$

que puede ser expresada de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \\ \vdots \\ x_{t-n+2} \\ x_{t-n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-2} \\ \vdots \\ x_{t-n+1} \\ x_{t-n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Según lo establecido en el Teorema 6.4, la EED es estable si

$$\sum_{i=1}^n |a_{ii}| = \alpha_{n-1} < n, \quad |\det(A)| = \alpha_0 < 1, \quad \sum_{i=1}^n |a_{ii}| = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i < 1$$

la EED será estable. Estas condiciones pueden ser deducidas directamente del **teorema de Samuelson** (Teorema 6.3). ♦

**Ejemplo 6.28** En el Ejemplo 6.24 se tienen dos secuencias divergentes como solución del sistema. Al aplicar las condiciones de estabilidad del Teorema 6.4 a la matriz de coeficientes del sistema,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

se tiene que ninguna condición es satisfecha,

$$\sum_{i=1}^n |a_{ii}| = \frac{2}{3} > 2, \quad |\det(\mathbf{A})| = \frac{4}{3} > 1, \quad a_{11} + a_{21} = \frac{2}{3} > 1 \\ a_{12} + a_{22} = -\frac{5}{3} > -1$$

por lo que se confirma la inestabilidad del sistema. ♦

### 6.5.2 Sistemas lineales de orden superior

Un sistema lineal de  $m$  variables y de orden  $n$  es definido matricialmente por

$$\mathbf{A}_n \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{X}_{t-1} + \dots + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_{t-n+2} + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_{t-n+1} + \mathbf{A}_0 \mathbf{X}_{t-n} = \mathbf{P}_t \quad \dots(21)$$

donde las  $n$  matrices  $\mathbf{A}_j$  son de orden  $m$  y  $\mathbf{P}_t$  es un vector e orden  $m$  cuyos elementos son los términos de las  $m$  ecuaciones en cuestión. Si el análisis se restringe al caso  $\mathbf{P}_t = \mathbf{P}$ , la solución particular del sistema es

$$\mathbf{X}_p = (\mathbf{A}_n + \mathbf{A}_{n-1} + \dots + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{P}$$

siempre y cuando la suma de las matrices  $\mathbf{A}_j$  sea una matriz no singular. Por su parte, partiendo de una conjetura  $\mathbf{X}_t = \mathbf{H}r^t$  donde  $r$  es una matriz diagonal de orden  $m$  cuyos elementos son las raíces de sistema, la solución homogénea del sistema satisface

$$(\mathbf{A}_n r^n + \mathbf{A}_{n-1} r^{n-1} + \dots + \mathbf{A}_2 r^2 + \mathbf{A}_1 r + \mathbf{A}_0) \mathbf{H} r^{t-n} = 0$$

por lo que las raíces del sistema cumplen con

$$|\mathbf{A}_n r^n + \mathbf{A}_{n-1} r^{n-1} + \dots + \mathbf{A}_2 r^2 + \mathbf{A}_1 r + \mathbf{A}_0| = 0 \quad \dots(22)$$

Nótese que la consecución de las raíces implica resolver un determinante de orden  $m$ , lo que a su vez implica resolver un polinomio característico de orden  $m \times n$ . Ciertamente el largo procedimiento involucrado en la solución de (21)

limita fuertemente su análisis. No obstante, utilizando la noción de sistema equivalente (21) puede ser reducido a un sistema de primer orden como (18) y aplicar el álgebra lineal discutida en la sección anterior. Consideremos un ejemplo para finalizar la discusión.

**Ejemplo 6.29** El sistema

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a(x_t - x_{t-1}) + y_t \\ y_{t+1} &= x_t + a(y_t - x_{t-1})\end{aligned}$$

con  $a \in \mathbb{R}$ , es de segundo orden y tiene dos variables. Matricialmente, este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rezagándolo un período,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene la forma de (21). El sistema es homogéneo por lo que su solución particular es nula. Utilizando (22),

$$\begin{aligned} & \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} r^2 + \begin{bmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \\ & \left| \begin{array}{cc} r^2 - ar + a & -r \\ a - r & r^2 - ar \end{array} \right| = r(r-1)(r-a)(r-a+1) = 0 \end{aligned}$$

Así, se tienen las raíces  $0, 1, a, a-1$ . Si  $a \neq 1$ , el sistema es resuelto por cuatro raíces reales distintas. De este modo, la solución del sistema es

$$\begin{aligned}x_t &= G_1 + G_2 a^t + G_3 (a-1)^t \\ y_t &= H_1 + H_2 a^t + H_3 (a-1)^t\end{aligned}$$

donde las  $G$  y  $H$  son constantes arbitrarias por ser determinadas a partir de las condiciones iniciales del sistema.

¿Qué ocurre si el sistema es reducido de orden a través de un sistema equivalente? Puesto que el sistema es de segundo orden y la idea es obtener uno de primer orden, es necesario realizar un cambio de variable. Así, defínase  $z_{t+1} = x_t$  de modo que el sistema se convierte en

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= a(x_t - z_t) + y_t \\y_{t+1} &= x_t + a(y_t - z_t) \\z_{t+1} &= x_t\end{aligned}$$

que expresado matricialmente es

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a & 1 \\ 1 & a & -a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

Los valores propios de la matriz de coeficientes de este nuevo sistema son 1,  $a$  y  $a - 1$  la matriz conformada con sus vectores propios es

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & a & a-1 \\ 1 & 1/a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, aplicando (20) para algunas condiciones iniciales arbitrarias,

$$\mathbf{X}_t = \Gamma \Lambda^t \Gamma^{-1} \mathbf{X}_0 = \Gamma \Lambda^t \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & a & a-1 \\ 1 & 1/a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^t & 0 & 0 \\ 0 & a^t & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}x_t &= C_1 + C_2 a^{t+1} + C_3 (a-1)^{t+1} \\y_t &= C_1 + C_2 a^{t-1} + C_3 (a-1)^t \\z_t &= C_1 + C_2 a^t + C_3 (a-1)^t = x_{t-1}\end{aligned}$$

que es una respuesta similar a la obtenida anteriormente pero con las constantes identificadas de manera más precisa (note que  $G_1 = H_1 = C_1$ ,  $G_2 = aC_2$ ,  $H_2 = C_2/a$ ,  $G_3 = (a-1)C_3$  y  $H_3 = C_3$ . ♦

**Importante recordar.** Un sistema de  $m$  variables y de orden  $n$  puede ser resuelto resolviendo un determinante de orden  $m$  que implica un polinomio característico de orden  $m \times n$ . Alternativamente pueden incorporarse  $n - 1$  variables adicionales de modo que el sistema sea “reducido” a uno de primer orden con  $2m - 1$  variables, lo que implica resolver un determinante o un polinomio característico de ese orden. Es claro que si  $2m - 1 > m \times n$  la alternativa no es útil. Por último, es bueno mencionar que reducir el orden del sistema puede tener ventajas sobre el otro método en la determinación de las constantes arbitrarias de las secuencias solución.

## 6.6 Ecuaciones en diferencias no lineales

Muchas aplicaciones económicas implican el desarrollo de EED no lineales. Dado el carácter discreto de las mismas siempre es posible resolverlas de manera numérica con la ayuda de una hoja de cálculo. Por este motivo no existe, a diferencia del caso de las EDO, mayor desarrollo teórico sobre las soluciones de una EED no lineal.

En esta sección se discuten brevemente, mediante dos ejemplos, aspectos numéricos del desarrollo de EED no lineales. Asimismo, se motiva concisamente al enfoque cualitativo sobre el comportamiento de este tipo de ecuaciones a través del uso de los **diagramas de fase**.

### 6.6.1 Enfoque numérico

**Ejemplo 6.30 (Crecimiento logístico)** En el capítulo anterior (Ejemplo 5.2) se discutieron rápidamente las implicancias de asumir restricciones naturales al modelar la dinámica evolutiva de una población. En particular, se mencionó que el crecimiento poblacional de una especie es inhibido por la *capacidad de la población*, el máximo número de pobladores que un espacio geográfico puede alojar sin alterar la dirección de su crecimiento. También se concluyó que un modelo logístico recogía de manera satisfactoria este tipo de comportamiento. Desde una perspectiva de tiempo discreto, la ecuación logística de crecimiento para la población  $x_t$  es

$$x_{t+1} = x_t + rx_t \left( 1 - \frac{x_t}{K} \right) \quad \dots(*)$$

donde  $r$  es la tasa natural de crecimiento de  $x_t$  y  $K$  es la capacidad de la población. Sin duda, (\*) es una EED no lineal ya que, al desarrollarla, puede apreciarse

la presencia de un término cuadrático. Por este motivo se considera la posibilidad de resolverla de manera numérica. Para tales efectos considérese  $K = 500$ ,  $r = 0.04$  y  $x_0 = 100$ . Con estos valores, es posible generar la secuencia mostrada en el Panel (a) de la Figura No. 6.5 y puede predecirse, por ejemplo, que en el período 10 la población  $x_t$  será de 135.4. Asimismo, en este caso se tiene una secuencia convergente monótonamente. De hecho, puede notarse que si  $0 < r < 1$  y  $x_t < K$ , luego  $rx_t/K < 1$  por lo que

$$x_{t+1} = x_t + r \frac{x_t}{K} (K - x_t) < x_t + (K - x_t) = K$$

para todo valor de  $t$ . Por ello, si  $x_0 < K$  se deduce que  $x_{t+1} > x_t$ . Luego, la secuencia  $x_t$  es estrictamente monótona, creciente y acotada con el valor  $K$ .

Supóngase ahora que  $r > 1$ . Pueden existir valores de  $t$  para los que  $x_t > K$ ; en tales caso,

$$r \frac{x_t}{K} (K - x_t) < 0$$

y, por ello,  $x_{t+1} < x_t$ . En el Panel (b) de la Figura No. 6.5 se muestra la secuencia generada con los valores anteriores, exceptuando a  $r = 1.5$ . Es bueno indicar que los valores de  $x_t$  se incrementan rápidamente (lo que puede esperarse con un valor elevado de  $r$ ), incluso excediendo el valor de la capacidad poblacional,  $K$ . Luego se presentan pequeñas fluctuaciones amortiguadas alrededor de  $K$  de manera que el límite de  $x_t$  es, efectivamente,  $K$ .

Es posible mostrar que, en (\*),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = K$$

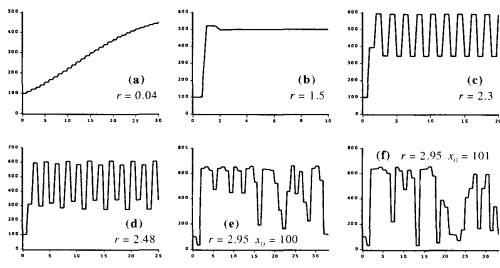
siempre que  $0 < r \leq 2$ . No obstante, si  $r > 2$  no es posible determinar un comportamiento convergente de  $x$ . Por ejemplo, considérese los valores anteriores pero  $r = 2.3$ . Como puede apreciarse en el Panel (c) de la Figura No. 6.5, en lugar de aproximarse a valor de  $K$ ,  $x_t$  fluctúa indefinidamente entre dos valores (344 y 591). En este caso, se dice que la secuencia  $x_t$  exhibe un **ciclo límite** de período 2 ya que fluctúa de manera acotada entre dos valores. Si  $r$  se incrementa, se obtiene un ciclo límite de mayor período. Por ejemplo, el Panel (d) de la Figura No. 6.5 asume que  $r = 2.48$ ; se aprecia que  $x_t$  se aproxima a un ciclo límite de período 4.

Hasta el momento se ha observado que una misma EED no lineal puede generar comportamientos diversos de su secuencia solución ante distintas



parametrizaciones. A pesar de ello, la sucesión de datos de  $x_t$  es previsible en los cuatro casos mencionados. No obstante,  $x_t$  puede comportarse de manera caótica. Una secuencia es **caótica** si presenta un comportamiento errático que es impredecible, a pesar de conocer la EED de donde proviene. En el Panel (e) de la Figura No. 6.5 se presenta  $x_t$  creada con un valor de  $r = 2.95$ . Esta secuencia da la impresión de haber sido generada a partir de números aleatorios ya que no existe un patrón claro que la describa. Más aún, en el Panel (f) de la misma figura se presenta el mismo modelo con un valor inicial ligeramente superior (es,  $K = 500$ ,  $r = 2.95$  y  $x_0 = 101$ , en lugar de  $x_0 = 100$ ). ¿Cuál es el resultado? Una secuencia para  $x_t$  significativamente distinta de la del panel anterior. Esta discusión pretende, simplemente, ilustrar hasta qué punto puede complicarse el análisis por la presencia de no linealidades en una relación dinámica.

**Figura No. 6.5**  
**Soluciones numéricas de la ecuación logística**



**Ejemplo 6.31 (Modelo depredador – presa)** La versión discreta del modelo expuesto en el Ejemplo 5.7 es

$$x_{t+1} = x_t + rx_t y_t - bx_t$$

$$y_{t+1} = y_t + ay_t - sx_t y_t$$

donde  $x_t$  representa la población de un conjunto de depredadores e  $y_t$  es la población de sus presas, por ejemplo, zorros y conejos, respectivamente<sup>17</sup>. Las constantes del modelo tienen una interpretación directa:  $a$  es la tasa natural de crecimiento de los conejos en ausencia de depredadores,  $b$  es la tasa de (de)crecimiento de los zorros en ausencia de alimento,  $s$  es la tasa de mortalidad de los conejos por motivos de depredación y  $r$  es la eficiencia de los zorros en cazar conejos.

El sistema anterior es notoriamente no lineal ante la presencia del término  $x_t y_t$  en ambas ecuaciones. Con el fin de determinar una respuesta numérica del mismo, considérense los siguientes valores:  $a = 0.04$ ,  $s = 0.005$ ,  $b = 0.2$ ,  $r = 0.0005$ . Un primer vistazo a estos valores sugiere que, en neto y a pesar de la presencia de zorros, la población de conejos es creciente ya que  $a > s$ . Del mismo modo, al parecer la población de zorros es decreciente dado el elevado valor de  $b$ . Sin embargo, es difícil obtener una respuesta concluyente sin determinar la evolución de ambas secuencias numéricamente. Tomando como condiciones iniciales 500 conejos y 50 zorros, se obtiene recursivamente las trayectorias mostradas en el primer panel de la Figura No. 6.6.

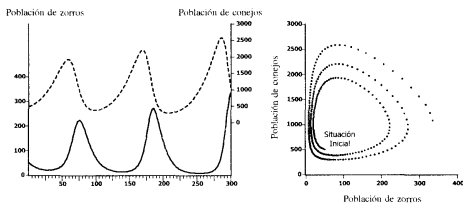
En esta figura, a diferencia de la conclusión apresuradamente obtenida en el párrafo anterior, se aprecia que ambas poblaciones muestran un comportamiento cíclico y yuxtapuesto: la población de conejos se incrementa ante la caída de la población de zorros; este incremento provee a los zorros de alimentos por lo que los depredadores aumentan. Este aumento disminuye la cantidad de conejos que, luego, reduce la población de zorros y así sucesivamente. Es bueno notar que el comportamiento de la cantidad de conejos determina el de la población de zorros.

En el segundo panel se presenta el patrón dinámico que siguen ambas poblaciones en el plano zorros - conejos. Se aprecia que se describe una espiral (discreta) en el sentido contrario de las agujas de un reloj. Ambas poblaciones divergen en número. Se trata, pues, de fluctuaciones explosivas *pero amortiguadas* por el comportamiento rezagado de la otra especie.

---

17 Este tipo de planteamiento data de 1925 y fue propuesto por el biofísico americano Alfred Lotka y el matemático italiano Vito Volterra (por ello, este modelo es conocido como el sistema Lotka-Volterra).

**Figura No. 6.6**  
**Solución numérica del modelo depredador – presa**



### 6.6.2 Enfoque cualitativo

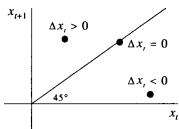
A pesar de que siempre es posible obtener soluciones numéricas de EED no lineales, resulta conveniente analizar desde una perspectiva cualitativa la dinámica intrínseca en una de estas ecuaciones. A diferencia del caso de las EDO, la teoría cualitativa de EED es muy limitada. Por este motivo, el análisis es restringido a la EED

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad \dots(23)$$

que es autónoma y de primer orden. La herramienta fundamental de evaluación es, nuevamente, el **diagrama de fase**. No obstante, existe una discrepancia importante con los diagramas vistos en la sección 5.1.1: en esta ocasión, la dinámica es estudiada en el plano  $(x_t, x_{t+1})$ ; dado que el elemento discreto análogo a  $dx/dt = x'$  es  $\Delta x_t$ , el **diagrama de fase** construido sobre el plano  $(x_t, \Delta x_t)$  es análogo al de la mencionada sección. Si se utilizara  $\Delta x_t$  en lugar de  $x_{t+1}$ , el eje horizontal se convertiría en una recta de 45° en el plano  $(x_t, x_{t+1})$ . Por esta razón, la recta de 45° desempeña el papel de “eje horizontal” utilizado en las EED ya que los puntos por encima (debajo) de dicha recta representan valores crecientes (decrecientes) de  $x_t$ , como puede apreciarse en la Figura No. 6.7.

La representación gráfica de (1) en el plano  $x_t, x_{t+1}$  es denominada **curva de fase**. Teniendo en cuenta la condición de equilibrio (3), es fácil deducir que el equilibrio de (23) se da, gráficamente, en la intersección de la curva de fase con la recta

**Figura No. 6.7**  
**Movimiento en el Plano  $x_t, x_{t+1}$**

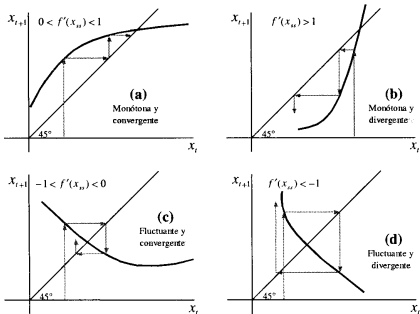


Los puntos por encima de la recta de  $45^\circ$  implican una secuencia creciente de  $x_t$ . Por el contrario,  $x_t$  es decreciente si se encuentra por debajo de la mencionada recta. Finalmente, los puntos sobre la recta de  $45^\circ$  representan equilibrios estacionarios de  $x_t$ , ya que se cumple que  $x_{t+1} = x_t$ .

de  $45^\circ$ ,  $x_t = f(x_t)$ . La Figura No. 6.8 presenta cuatro posibles comportamientos de  $f$  y, por ende, de la trayectoria que  $x_t$  sigue.

En el Panel (a) de la Figura No. 6.8, la **curva de fase** tiene pendiente negativa y, en particular, es menor a la unidad alrededor del punto de equilibrios  $x_{ss}$ , donde  $x_{ss} = f(x_{ss})$ . Si se parte de un punto  $x_0$ , la Curva de Fase determina el valor de la secuencia un periodo en adelante,  $x_1$ . Al proyectar este valor sobre la recta de  $45^\circ$  puede determinarse, a través de  $f$ ,  $x_2$ . Al repetir este proceso un gran número

**Figura No. 6.8**  
**Diagramas de fase discretos**



de veces podrá apreciarse que  $x_t$  será una secuencia creciente y convergente. El lector puede comprobar que en este panel  $x_0 > x_{ss}$ ,  $x_t$  será convergente y decreciente.

En segundo lugar, la **curva de fase** del Panel (b) de la Figura No. 6.8 tiene pendiente mayor a la unidad en  $x_{ss}$ . Al partir de  $x_0 < x_{ss}$  ( $x_0 > x_{ss}$ ) se vislumbra una secuencia para  $x_t$  decreciente (creciente) y divergente. Los dos casos anteriores sintetizan los movimientos monótonos que puede adoptar la solución de (23).

En el Panel (c), la **curva de fase** tiene pendiente negativa pero mayor que  $-1$ . En este caso se da un fenómeno de fluctuación amortiguada:  $x_0$  conduce a  $x_1 > x_0$ ;  $x_1$  lleva a  $x_2 < x_1$ ;  $x_2$  genera  $x_3 > x_2$  y así sucesivamente hasta alcanzar  $x_{ss}$ . Claramente, si  $x_0 > x_{ss}$ , las desigualdades anteriores deben ser invertidas. Finalmente, en el Panel (d) la pendiente de la **curva de fase** es menor que  $-1$  por lo que la solución de la EED fluctúa de manera explosiva.

De la discusión anterior puede desprenderse el siguiente teorema:

**Teorema 6.5** Dada la EED  $x_{t+1} = f(x_t)$  con un valor de estado estacionario  $x_{ss}$  ( $x_{ss} = f(x_{ss})$ ) luego,

- |                            |                                       |
|----------------------------|---------------------------------------|
| Si $0 < f'(x_{ss}) < 1$ ,  | $x_t$ será monótonamente convergente; |
| Si $f'(x_{ss}) > 1$ ,      | $x_t$ será monótonamente divergente;  |
| Si $-1 < f'(x_{ss}) < 0$ , | $x_t$ será fluctuante y convergente;  |
| Si $f'(x_{ss}) < -1$ ,     | $x_t$ será fluctuante y divergente.   |

Se concluye pues que si  $f'(x_{ss}) > 0$ ,  $x_t$  será monótona y si  $|f'(x_{ss})| < 1$ ,  $x_t$  convergerá.

Antes de concluir esta sección es importante discutir dos aspectos. En primer lugar, puede apreciarse que si  $f'(x_{ss}) = -1$ ,  $x_t$  fluctuará de manera uniforme (esto es, la **curva de fase** es ortogonal a la recta de  $45^\circ$  en  $x_{ss}$ ). Por su parte no puede ser concluyente si  $f(x_{ss}) = 1$ .

En segundo término, no debe descartarse la posibilidad de que  $\Delta x_t = 0$  sea satisfecha por más de un valor de  $x_t$ . En tal caso,  $f$  cruzará en más de una ocasión a la recta de  $45^\circ$ . Ante ello, es relevante analizar la estabilidad de la EED desde una perspectiva local y no la visión de estabilidad global adoptada hasta el momento.

**Ejemplo 6.32 (Modelo de Solow)** Considérese el **modelo de Solow** en tiempo discreto (ver Ejemplo 5.16 para el caso continuo), que define la siguiente regla de acumulación de capital

$$k_{t+1} - k_t = sk_t^\alpha - mk_t \quad 0 < \alpha < 1$$

Esta EED posee dos estados estacionarios,  $k_1 = 0$  y  $k_2 = (s/m)^{1/(\alpha-1)}$ . Asimismo, se tiene

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = f'(k_t) = \alpha sk_t^{\alpha-1} - (m-1)$$

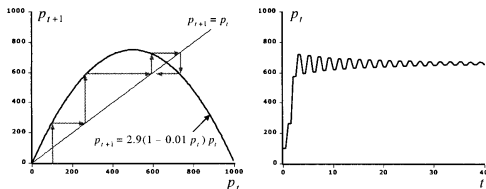
El primer punto de equilibrio es localmente inestable (dado  $\alpha < 1$ ,  $f'(k_1) = \infty$ ) mientras que el segundo es localmente estable ( $f'(k_2) = 0 < (\alpha - 1)m + 1 < 1$ ). Puede concluirse, entonces, que dado un *stock* de capital inicial  $k_0 > 0$ ,  $k \rightarrow k_2$  en la medida que  $t \rightarrow \infty$  de manera monótona. ♦

**Ejemplo 6.33** Considere la siguiente EED

$$p_{t+1} = 2.9(1 - 0.001p_t)p_t$$

que es similar a la ecuación de crecimiento logístico vista en el Ejemplo 6.30. Como se observa en la Figura No. 6.9, la **curva de fase** de esta EED es una parábola cóncava que cruza  $p_{t+1} = 0$  en los puntos,  $p_t = 0$  y  $p_t = 1000$  y tiene como vértice a  $p_t = 500$ .

**Figura No. 6.9**  
Otro ejemplo de crecimiento logístico



El estado estacionario de la EED se da cuando  $p_t = 0$  y  $p_t = 655.17$ . En el primer equilibrio, la pendiente de la curva de fase es mayor que la unidad mientras que en el segundo, esta es de pendiente negativa ya que  $666.67 > 500$  (el punto máximo de la parábola). Más aún, esta pendiente es igual a  $2.9 - 0.058 \times 655.17 = -0.9$  por lo que el segundo estado estacionario es estable y la secuencia  $p_t$ , alrededor de este equilibrio es fluctuante. ♦

**Ejemplo 6.34** En un modelo de acumulación de capital, la tasa de crecimiento relativa del *stock* de capital de la economía  $K_t$  se relaciona con la tasa de crecimiento relativa del producto  $Y_t$  de manera lineal,

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = a + b \frac{\Delta K_t}{K_t}$$

donde  $b$  es la elasticidad de tasas de crecimiento ( $0 < b < 1$ ) y  $a > 0$ . Asimismo, la inversión en capital es definida por el acelerador  $h > 0$ ,

$$K_{t+1} - K_t = hY_t$$

¿Es estable la relación entre producto y capital? Con el fin de responder a la pregunta, defínase una variable auxiliar  $V$  igual a la razón entre producto y capital,

$$V_t = \frac{Y_t}{K_t}$$

La primera ecuación puede ser expresada en términos de  $V_t$ , utilizando la relación promulgada por la segunda ecuación. A saber,

$$\begin{aligned} \frac{Y_{t+1}}{Y_t} - 1 = a + b \frac{K_{t+1} - K_t}{K_t} &\quad \rightarrow \quad \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \frac{K_{t+1}}{Y_t} - 1 = a + bh \frac{Y_t}{K_t} \\ \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} \frac{hY_t + K_t}{Y_t} - 1 = a + bh \frac{Y_t}{K_t} &\quad \rightarrow \quad V_{t+1} \left( h + \frac{1}{V_t} \right) = 1 + a + bhV_t \end{aligned}$$

de donde se deduce la EED no lineal para  $V_t$

$$V_{t+1} = \frac{V_t(1 + a + bhV_t)}{1 + hV_t}$$

Las condiciones de equilibrio son satisfechas en esta EED para el único valor (ya que, por el significado económico que puede asignar a  $V_t$ ,  $V_t > 0$ )

$$V_{ss} = \frac{a}{h(1-b)}$$

Asimismo, se tiene que

$$\frac{dV_{t+1}}{dV_t} = f'(V_t) = \frac{(1+a+2bhV_t)(1+hV_t) - hV_t(1+a+2bhV_t)}{(1+hV_t)^2} = \frac{1+a+bhV_t(2-bhV_t)}{(1+hV_t)^2}$$

Luego, al evaluar el valor de estado estacionario de  $V_t$  en esta expresión se concluye que  $V_t$  es convergente a dicho valor de manera monótona,

$$0 < f'(V_{ss}) = \frac{1-b+ab}{1-b+a} < 1 \quad \blacklozenge$$

## 6.7 El operador de rezago

El último tópico concerniente con EED por discutir es el uso del operador de rezago, muy común y útil en el desarrollo de modelos teóricos y empíricos<sup>18</sup>. Un operador de este tipo **transforma** una secuencia temporal en una nueva. Este aspecto es especialmente relevante ya que al trabajar con modelos dinámicos se presenta tanto variables endógenas como exógenas. Es claro que la solución de cualquier modelo implica expresar al primer grupo de variables en función del segundo, lo que es fácilmente implementado por el mencionado operador.

Supóngase que una secuencia  $x_t$  es transformada en  $y_t$ . Una transformación específica de  $x_t$  es  $y_t = x_{t-1}$ , que es la operación de rezago relevante en esta sección. Si el operador es representado por el símbolo  $L$ , se tiene que  $Lx_t = y_t$ , es decir,

$$Lx_t = x_{t-1}$$

Si el operador es aplicado dos veces,  $L(Lx_t) = L(x_{t-1}) = x_{t-2}$ . Si esta doble aplicación es denotada como  $L^2$ , luego

$$L^2x_t = x_{t-2}$$

---

18 Para el primer punto se recomienda consultar el noveno capítulo de Thomas J. Sargent, *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press, 1987; mientras que para el segundo punto véase el capítulo 2 del libro de James D. Hamilton, *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.



y, en general, para cualquier entero positivo  $n$  se cumple que

$$L^n x_t = x_{t-n}$$

Del mismo modo puede sostenerse que

$$L^{-n} x_t = x_{t+n}$$

es decir, el operador de rezago puede ser utilizado como un *operador de adelanto*. Note que si  $n=0$ ,  $L^0 x_t = x_{t-0} = x_t$ , por lo que  $L^0 = 1$ . Adicionalmente, el operador  $L$  cumple con tres importantes propiedades; a saber,

- |   |                                 |
|---|---------------------------------|
| 1. $L(bx_t) = bLx_t = bx_{t-1}$                     | $L$ es conmutativo              |
| 2. $L(x_t + y_t) = Lx_t + Ly_t = x_{t-1} + y_{t-1}$ | $L$ es distributivo             |
| 3. $Lk = k$   | $k \in \mathbb{R}$ , constante. |

De lo anterior se desprende que  $L(ay_t + bx_t + c) = ay_{t-1} + bx_{t-1} + c$ . Del mismo modo, existe una estrecha relación entre  $L$  y  $\Delta$ , el operador de diferencias introducido a inicios del presente capítulo:

$$\Delta = L^{-1} - 1 \quad (\Delta x_t = (L^{-1} - 1)x_t = L^{-1}x_t - x_t = x_{t+1} - x_t).$$

Un punto adicional es que pueden construirse polinomios del operado de rezago tales como

$$A(L) = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L^j$$

de modo que al aplicarlo a  $x_t$  se tiene

$$A(L)x_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L^j x_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_{t-j}$$

Nótese que  $A(L)$  puede ser el polinomio producto de una multiplicación,  $B(L)C(L)$  o bien el resultado de un cociente,  $B(L)/C(L)$ , sin mayor complicación.

### 6.7.1 Ecuaciones en diferencias de primer orden

La EED

$$x_t - ax_{t-1} = b + cw_t \quad \dots(24)$$

puede ser resuelta mediante el uso de  $L$ . De hecho,

$$(1 - aL)x_t = b + cw_t$$

Al despejar  $x_t$  se obtiene

$$x_t = \frac{1}{1-aL}(b+cw_t) \quad \dots(25)$$

Si  $|a| < 1$ , el polinomio  $1/(1-aL)$  puede ser expandido geoméricamente (ver sección 2.3) como

$$\frac{1}{1-aL} = 1 + aL + a^2L^2 + a^3L^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a^j L^j$$

de forma que (25) equivale a

$$x_t = \frac{b}{1-a} + c \sum_{j=0}^{\infty} a^j w_{t-j} \quad \dots(26)$$

El lector debe notar que (26) es la solución particular de (24) ya que es derivada a partir de la ecuación completa. La *solución general* de (24) es, por consiguiente,

$$x_t = \frac{b}{1-a} + c \sum_{j=0}^{\infty} a^j w_{t-j} + Ha^t \quad \dots(27)$$

donde  $H$  es una constante arbitraria<sup>19</sup>. La secuencia (26) es estable si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} a^j w_{t-j} = 0$$

lo que se cumple si  $|a| < 1$  y  $w_t$  es acotada (ver sección 1.2).

**Ejemplo 6.35** Se sabe que el consumo actual de las familias  $C_t$  depende de sus rentas ( $R_t$ ) pasadas con ponderaciones crecientes (para el consumo actual son más importantes las rentas recientes) tal que

$$C_t = \beta_0 R_t + \beta_1 R_{t-1} + \beta_2 R_{t-2} + \dots + \beta_3 R_{t-2}$$

donde  $\beta_j = \beta \delta^j$  con  $0 < \delta < 1$  y  $\beta > 0$ . Utilizando  $L$  la expresión anterior es

$$C_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j R_{t-j} = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j R_{t-j} = \frac{\beta}{1-\delta L} R_t$$

<sup>19</sup> Note que si  $w_t = 0$ , (4) equivale a la solución del quinto caso del Cuadro No. 6.1.

de tal forma que la renta familiar puede ser expresada en una ecuación sencilla como

$$R_t = (C_t - \delta C_{t-1}) / \beta \quad \blacklozenge$$

Una forma alternativa de expandir el polinomio  $1/(1-aL)$  es

$$\frac{1}{1-aL} = \frac{-(aL)^{-1}}{1-(aL)^{-1}} = \frac{-1}{aL} \left( 1 + \frac{1}{a}L^{-1} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 L^{-2} + \dots \right) = \frac{1}{a}L^{-1} + \left(\frac{1}{a}\right)^2 L^{-2} + \left(\frac{1}{a}\right)^3 L^{-3} + \dots$$

lo que implica que (26) puede ser expresada como

$$x_t = \frac{b}{1-a} - c \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^j w_{t+j} \quad \dots(28)$$

Así, pueden obtenerse dos tipos de soluciones particulares para (24)<sup>20</sup>: la secuencia (26) conocida como **solución hacia atrás** que depende de los valores pasados de  $w_t$  y la secuencia (28) denominada **solución hacia adelante** por la presencia de valores futuros de  $w_t$ .

La solución hacia adelante de (24) es estable si  $|1/a| < 1$ , lo que conlleva a que  $|a| > 1$ . Por este motivo, si  $w_t$  es una secuencia acotada, la solución hacia atrás de  $x_t$  es acotada si  $|a| < 1$  mientras que la solución hacia adelante de  $x_t$  es acotada si  $|a| > 1$ .

**Ejemplo 6.36** El ahorro familiar  $S_t$  está dado por una función lineal y negativa de la diferencia del consumo futuro  $C_{t+1}$  y el consumo actual  $C_t$ , según

$$S_t = -a(C_{t+1} - C_t) \quad a > 0$$

Por su parte, el consumo familiar es igual a una proporción del ingreso  $Y_t$  más lo percibido por intereses, a una tasa constante  $r$ , del ahorro pasado,

$$C_t = bY_t + (1+r)S_{t-1} \quad b, r > 0$$

Si se define a  $\rho = a(1+r)$ , al reemplazar la primer ecuación se obtiene la EED

$$C_{t+1} + \frac{1-\rho}{\rho} C_t = \frac{b}{\rho} Y_t \quad \rightarrow \quad C_t + \frac{1-\rho}{\rho} C_{t-1} = \frac{b}{\rho} Y_{t-1}$$

<sup>20</sup> Véase el Apéndice A.

y utilizado el operador de rezago, la expresión anterior se reduce a

$$\left[1 - \frac{\rho - 1}{\rho} L\right] C_t = \frac{b}{\rho} Y_{t-1}$$

Si  $|\rho - 1| / \rho < 1$ , es decir, si  $\rho > 1/2$ , la solución particular hacia atrás de  $C_t$  es estable por lo que la solución particular viene dada por

$$C_t = \frac{b}{\rho} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right)^j Y_{t-1-j} + H \left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right)^t$$

donde  $H$  es una constante arbitraria. Por otra parte, si  $\rho < 1/2$  la solución hacia adelante de  $C_t$  es estable. Entonces,

$$C_t = -\frac{b}{\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho - 1}\right)^j Y_{t-1-j} + H \left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right)^t \quad \blacklozenge$$

**Ejemplo 6.37 (Demanda por dinero)** Si  $m_t$  denota al logaritmo de la oferta monetaria (determinada por el Banco Central, exógena),  $p_t$  es el logaritmo del nivel de precios y  $p_{t+1}^e$  es el logaritmo del nivel esperado de precios para el período  $t + 1$ , una demanda por saldos reales “a la Phillips-Cagan”<sup>21</sup> se define como una función inversa de la inflación esperada,

$$m_t - p_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t) \quad \alpha < 0 \quad \dots(*)$$

En un contexto de *expectativas adaptativas*,

$$p_{t+1}^e - p_t = \gamma(p_t - p_{t-1}) \quad 0 < \gamma \leq 1$$

la demanda (\*) puede ser expresada como

$$m_t - p_t = \alpha\gamma(p_t - p_{t-1})$$

Al aplicar el operador de rezago a la ecuación anterior se obtiene

$$\left[1 - \frac{\alpha\gamma}{1 + \alpha\gamma} L\right] p_t = \frac{1}{1 + \alpha\gamma} m_t$$

De esta manera, la solución general hacia atrás de  $p_t$ ,

21 Basado en Thomas J. Sargent, *op. cit.*, pp. 192 – 194.

$$p_t = \frac{1}{1+\alpha\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)^j m_{t-j} + H \left( \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)^t$$

es estable si

$$\left| \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right| < 1$$

Como caso particular, si  $m_t$  es constante,  $m_t = m \forall t$ , es fácil deducir de la solución hacia atrás que

$$p_t = H \left( \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)^t + m$$

Por otro lado, dejando de lado el contexto de expectativas adaptativas, supóngase que los agentes económicos cuentan con *previsión perfecta*,

$$p_{t+1}^e = p_{t+1}$$

Bajo este nuevo supuesto, (\*) es igual a

$$m_t - p_t = \alpha(p_{t+1} - p_t) \quad \rightarrow \quad \alpha p_{t+1} + (1-\alpha)p_t = m_t$$

que puede ser reescrita como

$$\left[ L^{-1} + \frac{1-\alpha}{\alpha} L \right] p_t = \frac{1}{\alpha} m_t \quad \rightarrow \quad \left[ 1 - \frac{\alpha-1}{\alpha} L \right] p_t = \frac{1}{\alpha} m_{t-1}$$

Dado que  $\alpha < 0$ ,  $(\alpha-1)/\alpha$  es un número mayor que 1. Por esta razón es deseable determinar la solución hacia delante de  $p_t$ . Así,

$$p_t = \left( \frac{\alpha^{-1}}{1 - (\alpha-1)\alpha^{-1}L} \right) m_{t-1} + H \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^t$$

$$p_t = \frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^j m_{t,j} + H \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^t$$

de modo que  $p_t$  es un promedio ponderado de los valores actual y futuros de  $m_t$ . Finalmente, si  $m_t = m$ ,

$$p_t = H \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right)^t + m \quad \blacklozenge$$

### 6.7.2 Ecuaciones en diferencias de segundo orden

En la sección anterior se ha visto que a partir del polinomio

$$A(L) = 1 - aL$$

pueden derivarse soluciones de una EED de primer orden como (24). En esta sección se discuten las consecuencias de suponer un polinomio  $A(L)$  de orden superior. Especialmente, se desarrollan las implicancias vinculadas con una EED de segundo orden ya que la generalización a una EED de orden  $n$  es inmediata. La EED

$$x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} = b + c w_t \quad \dots(29)$$

puede ser resuelta mediante el uso de  $L$  ya que

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2) x_t = b + c w_t$$

Al despejar  $x_t$  se obtiene la solución particular de (29)

$$x_t = \frac{b}{1 - a_1 L - a_2 L^2} + \frac{c}{1 - a_1 L - a_2 L^2} w_t \quad \dots(30)$$

Luego, el principal reto es determinar una manera adecuada de expandir el polinomio cuadrático. Si  $r_1$  y  $r_2$  son las soluciones de  $1 - a_1 L - a_2 L^2$ , luego

$$1 - a_1 L - a_2 L^2 = (1 - r_1 L)(1 - r_2 L)$$

y se cumple que  $r_1 + r_2 = a_1$  y que  $r_1 r_2 = a_2$ . De este modo, (30) equivale a

$$x_t = \frac{b}{(1 - r_1 L)(1 - r_2 L)} + \frac{c}{(1 - r_1 L)(1 - r_2 L)} w_t \quad \dots(31)$$

Al igual que en la sección 6.3.1, se desprenden tres posibles casos: ambas raíces son reales y distintas, ambas raíces son reales e iguales y ambas raíces son complejas conjugadas.

Si  $r_1$  y  $r_2$  son **raíces reales y distintas**, utilizando fracciones parciales,

$$\frac{1}{(1 - r_1 L)(1 - r_2 L)} = \frac{1}{r_1 - r_2} \left( \frac{r_1}{1 - r_1 L} - \frac{r_2}{1 - r_2 L} \right)$$

Así, (31) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{b}{(1-r_1)(1-r_2)} + \frac{r_1 c}{r_1 - r_2} \frac{1}{1-r_1 L} w_i - \frac{r_2 c}{r_1 - r_2} \frac{1}{1-r_2 L} w_i \\ &= b \sum_{i=0}^{\infty} r_1^i \sum_{j=0}^{\infty} r_2^j + \frac{r_1 c}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} r_1^j w_{i-j} - \frac{r_2 c}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} r_2^j w_{i-j} \end{aligned}$$

De modo que la solución general de  $x_i$  en este caso es

$$x_i = b \sum_{i=0}^{\infty} r_1^i \sum_{j=0}^{\infty} r_2^j + \frac{r_1 c}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} r_1^j w_{i-j} - \frac{r_2 c}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} r_2^j w_{i-j} + C_1 r_1^i + C_2 r_2^i \quad \dots(32)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son las constantes arbitrarias de la solución complementaria. Esta solución es estable si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} r_i^j w_{i-j} = 0 \quad i = 1, 2$$

lo que se cumple si el módulo de **ambas** raíces son menores a la unidad (y  $w_i$  es acotada).

**Ejemplo 6.38** Resuelva  $x_i - 5x_{i-1} + 6x_{i-2} = 4^i$

Se tiene que  $(1-5L+6L^2)x_i = 4^i \rightarrow (1-2L)(1-3L)x_i = 4^i$ . Luego,

$$\frac{1}{(1-2L)(1-3L)} = \frac{1}{2-3} \left( \frac{2}{1-2L} - \frac{3}{1-3L} \right) = \frac{3}{1-3L} - \frac{2}{1-2L}$$

por lo que la solución general de la EED es

$$x_i = 3 \sum_{j=0}^{\infty} 3^j 4^{i-j} - 2 \sum_{j=0}^{\infty} 2^j 4^{i-j} + C_1 2^i + C_2 3^i \quad \blacklozenge$$

Por otra parte, si las raíces son **reales e iguales**,  $r_1 = r_2 = r$ ,

$$\frac{1}{(1-rL)(1-rL)} = (1+rL+r^2L^2+\dots)(1+rL+r^2L^2+\dots) = 1+2rL+3r^2L^2+\dots$$

por lo que

$$\frac{1}{(1-rL)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)r^j L^j$$

Así, de (29) se deduce que

$$(1 - rL)^2 x_t = b + cw_t$$

La solución general de  $x_t$  es, en este caso,

$$x_t = b \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)r^j + c \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)r^j w_{t-j} + C_1 r^t + C_2 t r^t \quad \dots(33)$$

donde  $x_t$  es estable si  $|r| < 1$  y  $w_t$  es acotada.

**Ejemplo 6.39** Resuelva la EED similar a la del Ejemplo 6.18,  $x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2} = t$

Esta EED puede ser expresada como  $(1 - L)^2 x_t = t$  por lo que, de (33),

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)(t-j) + C_1 + C_2 t$$

por lo que

$$x_t = C_1 + C_2 t - \sum_{j=0}^{\infty} j(1+j) + t \sum_{j=0}^{\infty} j$$

que es igual a la solución del Ejemplo 6.18 determinada mediante el uso del método de variación de parámetros. Note, sin embargo, que en este caso las sumatorias no son acotadas. ♦

Finalmente, considere que  $r_1$  y  $r_2$  son **raíces complejas conjugadas**. Utilizando (31), se tiene

$$\frac{1}{r_1 - r_2} \left( \frac{r_1}{1 - r_1 L} - \frac{r_2}{1 - r_2 L} \right) = \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} (r_1^{j+1} - r_2^{j+1}) L^j$$

Por la forma polar de un número complejo, las raíces son definidas como

$$r_1^t = \rho^t (\cos(\theta t) + i \operatorname{isen}(\theta t)) \quad y \quad r_2^t = \rho^t (\cos(\theta t) - i \operatorname{isen}(\theta t))$$

por lo que

$$r_1^t - r_2^t = \rho^t (\cos(\theta t) + i \operatorname{isen}(\theta t) - \cos(\theta t) + i \operatorname{isen}(\theta t)) = \rho^t (2i \operatorname{isen}(\theta t))$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria. Luego,

$$\frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} (r_1^{j+1} - r_2^{j+1}) L^j = \frac{1}{2i \rho \operatorname{isen}(\theta)} \sum_{j=0}^{\infty} 2i \rho^{j+1} \operatorname{sen}(\theta(j+1)) L^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j \operatorname{sen}(\theta(j+1))}{\operatorname{sen}(\theta)} L^j$$



De esta forma, si las raíces del polinomio de rezagos de

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2)x_t = b + cw_t$$

son complejas conjugadas, la solución general de  $x_t$  viene dada por

$$x_t = b \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j \operatorname{sen}(\theta(j+1))}{\operatorname{sen}(\theta)} + c \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j \operatorname{sen}(\theta(j+1))}{\operatorname{sen}(\theta)} w_{t-j} + \rho' (C_1 \cos(\theta t) + C_2 \operatorname{sen}(\theta t)) \quad \dots(33)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son las constantes arbitrarias de la solución complementaria y (33) es estable si  $\rho$  es menor que 1 y  $w_t$  es acotada.

**Ejemplo 6.40** La raíces de la solución homogénea de la EED  $x_t + 4x_{t-2} = t^2$  implican

$$\rho = 2 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Así, de (33) se concluye que la solución general de la EED es

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \cos\left(\frac{\pi}{2} j\right) (t-j)^2 + 2^j \left[ C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t\right) \right]$$

y que es divergente (recuerde que  $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$ ).

Como el lector puede notar, la generalización del análisis anterior a una EED de orden superior puede resultar ser una tarea engorrosa. En el caso que

$$(1 + a_{n-1}L - a_{n-2}L^2 + \dots + a_0L^n)x_t = b + cw_t$$

el polinomio de rezagos tendrá  $n$  raíces, de diversas naturalezas. Si bien es cierto que llegar a una solución analítica con el uso de  $L$  para una EED de orden superior no es el procedimiento más adecuado, el operador confirma las condiciones de estabilidad: el módulo de todas las raíces de la ecuación complementaria debe ser menor a la unidad y  $w_t$  debe ser una secuencia acotada, lo que queda claro al observar que

$$1 + a_{n-1}L - a_{n-2}L^2 + \dots + a_0L^n = (1 - r_1L)(1 - r_2L) \dots (1 - r_nL)$$

## Ejercicios

Con el procedimiento recursivo presentado al inicio del capítulo (ecuación (2)), resolver las siguientes EED lineales de primer orden (considere en todos los casos que  $x_0 = 1$ ):

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| 1. $tx_{t+1} = x_t$                   | 2. $x_{t+1} + 3x_t = (-2)^t$                      |
| 3. $x_{t+1} + x_t = \cos(e^t)$        | 4. $2x_{t+1} + 4x_t = 1$                          |
| 5. $\Delta x_t + tx_t = 0$            | 6. $\Delta x_t + x_t = (-1)^t$                    |
| 7. $x_{t+1} + x_t = (1+t)^{-1}$       | 8. $x_{t+1} = -4t^2 x_t$                          |
| 9. $tx_{t+1} - x_t = t$               | 10. $x_{t+1} + 5x_t / t = t$                      |
| 11. $t^2 x_{t+1} + 3tx_t + 2t^5 = 0$  | 12. $t\Delta x_t - t = -1$                        |
| 13. $2(t^3 + 1)x_{t+1} = -3tx_t$      | 14. $x_{t+1} + x_t = t^2$                         |
| 15. $x_{t+1} - 3x_t = 4t^3$           | 16. $\Delta x_t = \sqrt{t}$                       |
| 17. $x_{t+1} - 3x_t = t^2 + \cos(2t)$ | 18. $x_{t+1} + \sqrt{t^2 - a}x_t = t \quad a < 0$ |
| 19. $x_{t+1} - t2^t = 2^t$            | 20. $x_{t+1} + 2tx_t = t(-1)^{-t^2}$              |
| 21. $\Delta x_t - t^2 x_t = 1$        | 22. $\Delta x_t - x_t + t^3 = 0$                  |

**23. Crecimiento exponencial.** Elabore un modelo de crecimiento poblacional discreto para el Perú si, según datos del Inei, en 1900 la población ascendía a 3.8 millones de habitantes; en 1950, a 7.6, en 1990 a 21.6 y en el año 2000 a 25.7 millones de personas. En primer lugar, considere un comportamiento único de 1900 a 2000. Luego, plantee otro modelo con dos comportamientos distintos: el primero, de 1900 a 1950 y el segundo de 1950 a 1990. Finalmente, plantee tres períodos: de 1900 a 1950, de 1950 a 1990 y de 1990 a 2000.

### 24. Sobre interés simple

- Ud. desea destinar un monto de 1000 en una inversión segura que se compone continuamente. Si el interés que reditúa esta inversión es de 8% anual, ¿cuánto será su capital en 5 años?
- Si desea que una inversión al 8% anual tenga el valor de 10,000 en 10 años, ¿cuánto debe invertir hoy?
- ¿Cuánto tiempo se necesita para que una inversión de  $A$  a una tasa  $r$  duplique su valor? ¿Y para que lo triplique?

**25. Una de física:** La ley de enfriamiento de Newton establece que, en general, la temperatura de un cuerpo en proceso de enfriamiento cambia en razón propor-

cional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura del ambiente. Así, si  $T_t$  es la temperatura del cuerpo en el tiempo  $t$  y la del medio ambiente es  $a$ , plantee una EED para esta ley y resuélvala.

**26. Modelo de crecimiento económico.** Considere el modelo siguiente de crecimiento económico de un país en vías de desarrollo:

$$X_t = \sigma K_t \quad \Delta K_t = \alpha X_t + H_t \quad \Delta N_t = \rho N$$

donde todos los parámetros son positivos,  $X$  es la producción total anual,  $K$  el stock de capital,  $H$  el flujo anual de inversión extranjera y  $N$  el tamaño de la población. Asimismo se tienen como condiciones iniciales  $K_0$  y  $N_0$  para el capital y la población, respectivamente.

- Suponga que la inversión extranjera crece a tasa de crecimiento constante igual a  $\mu$ . Determine la secuencia solución de  $K$ .
- Halle una expresión para la producción per cápita  $x_t = X_t/N_t$ .
- Suponga que  $H = 0$ , es decir, no existe inversión extranjera. Halle a cuánto debe ascender la tasa de ahorro  $\alpha$  para que la producción per cápita crezca con el tiempo.

**27.** Se conocen los valores de las variables  $X_t$  y  $Z_t$ . El supraíndice  $e$  en cada variable denota su valor anticipado. Se sabe que

$$\begin{aligned} X_t^e - X_{t-1}^e &= a(X_t - X_{t-1}^e) & 0 < a < 1 \\ Z_t - Z_{t-1} &= b(Z_t^e - Z_{t-1}) & 0 < b < 1 \end{aligned}$$

Determine la secuencia de  $Z_t$  si  $Z_t^e = c + dX_t^e$  ( $c, d > 0$ ) y

- $X_t$  es una constante.
- $X_t$  se incrementa en cada período en un valor conocido  $r$ .

Resuelva las siguientes EED homogéneas de segundo orden. Evalúe el wronskiano de sus respuestas (sección 6.3.1). Finalmente, estudie la convergencia de cada secuencia.

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 28. $x_{r+2} + 3x_{r+1} - 4x_r = 0$                    | 29. $x_{r+1} + 6x_{r+1} + 5x_r = 0$   |
| 30. $x_r - 2x_{r-1} + x_{r-2} = 0$                     | 31. $x_r + 6x_{r-1} + 9x_{r-2} = 0$   |
| 32. $x_{r+2} + 5x_r = 0$                               | 33. $x_{r+2} + x_r = 0$               |
| 34. $x_{r+2} - x_r = 0$                                | 35. $\Delta^2 x_r = 0$                |
| 36. $\Delta x_{r+1} - a\Delta x_r = 0 \quad (a \in R)$ | 37. $x_{r+2} - 10x_{r+1} + 25x_r = 0$ |
| 38. $x_{r+2} - 4x_{r+1} + 13x_r = 0$                   | 39. $x_{r+1} - 6x_r + 25x_{r-1} = 0$  |
| 40. $8x_{r+1} - 2x_r - \Delta x_{r-1} = 0$             | 41. $9x_{r+2} - 6x_{r+1} + x_r = 0$   |

Resuelva las siguientes problemas de valor inicial

- |                                      |                     |
|--------------------------------------|---------------------|
| 42. $x_{r+2} + 2x_{r+1} - 3x_r = 0$  | $x_0 = 1, x_1 = 5$  |
| 43. $x_{r+2} - 6x_{r+1} - 7x_r = 0$  | $x_0 = 5, x_1 = 3$  |
| 44. $x_{r+2} - 6x_{r+1} + 9x_r = 0$  | $x_0 = 2, x_1 = 1$  |
| 45. $4x_{r+2} + 4x_{r+1} + x_r = 0$  | $x_0 = 1, x_1 = 5$  |
| 46. $x_r + 4x_{r-1} + 5x_{r-2} = 0$  | $x_0 = -3, x_1 = 0$ |
| 47. $x_{r+1} - 6x_r + 13x_{r-1} = 0$ | $x_0 = -1, x_1 = 1$ |
| 48. $8x_{r+2} - 2x_{r+1} - x_r = 0$  | $x_0 = 1, x_1 = 5$  |
| 49. $8x_{r+2} - 2x_{r+1} - x_r = 0$  | $x_0 = 5, x_1 = 1$  |

50. Halle una ecuación en diferencias de segundo orden (lineal y con coeficientes constantes) que tengan como soluciones:

- (a)  $u_r = 5^r, \quad v_r = (-2)^r$   
 (b)  $u_r = 4^r, \quad v_r = r4^r$   
 $u_r = (-1)^r \cos(4r), \quad v_r = (-1)^r \sin(4r)$

51. Con un cambio de variable resuelva

$$tx_r - tx_{r-1} + x_{r-1} - 6tx_{r-2} + 12x_{r-2} + 30 = 0$$

Utilizando los métodos de coeficientes indeterminados, variación de parámetros o el uso del operador de rezago (secciones 6.3.2, 6.3.2 y 6.7, respectivamente), determine la solución general de las siguientes EED de orden superior

52.  $x_{t+2} + 6x_{t+1} + 5x_t = 2(3)^t$
54.  $x_t - 9x_{t-1} + 20x_{t-2} = -3(5)^t$
56.  $x_{t+1} + -4x_t - 5x_{t-1} = -6t^2$
58.  $x_{t+2} + 3x_t = 2t + 2$
60.  $x_{t+1} - 4x_{t-1} = 2\text{sen}(2t) + 3\cos(2t)$
62.  $x_t - 4x_{t-1} + 13x_{t-2} = 2(-1)^t$
64.  $x_t - x_{t-3} = \cos 2t - 2\text{sen}(2t)$
66.  $x_{t+1} - 6x_t + 9x_{t-1} = t + 2^t$
68.  $x_{t+4} + 6x_{t+3} + 14x_{t+2} + 16x_{t+1} + 8x_t = 24$
70.  $x_{t+2} - 2x_{t+1} - 5x_t + 6x_{t-1} = 4^t$
72.  $x_t + 4x_{t-1} + 13x_{t-2} + 3x_{t-3} + 36x_{t-4} = t$
74.  $x_{t+2} - 2ax_{t+1} + x_t = b^t \quad (a, b \in \mathbb{R})$
76.  $x_{t+2} + x_{t+1} + x_t = t^2 + 1$
78.  $x_{t+2} - bx_t = t^3 \quad (b \in \mathbb{R})$
53.  $x_{t+2} + 3x_{t+1} - 4x_t = 5(7)^t$
55.  $x_t + 2x_{t-1} + x_t = (-1)^t$
57.  $x_{t+1} - 6\Delta x_{t-1} = t - 1$
59.  $\Delta x_{t+2} - t^3 + 1 = 0$
61.  $x_{t+2} - x_t = 1 + t + t^2$
63.  $x_t - 6x_{t-1} + 25x_{t-2} = t$
65.  $x_{t+3} + 4x_{t+2} + 7x_{t+1} + 12x_t = (-3)^t$
67.  $x_{t+3} + 7x_{t+2} + 15x_{t+1} + 9x_t = t^2$
69.  $x_t - 2x_{t-1} - 5x_{t-2} + 6x_{t-3} = 3^t$
71.  $x_{t+1} - 2x_t + 4x_{t-1} = t^4 + 3t^2 - 5t$
73.  $x_t - x_{t-1} + 2x_{t-2} = t^3 - t$
75.  $x_{t+2} - x_{t+1} + x_t - x_{t-1} = t$
77.  $x_{t+2} + x_t = t$
79.  $x_{t+3} - x_{t+2} + x_{t+1} - x_t = \cos(t)$

80. Estudie la estabilidad de las soluciones homogéneas de los Ejercicios 58 – 85 haciendo uso del **teorema de Schur** (Teorema 6.2) y/o del **teorema de Samuelson** (Teorema 6.3).

81. **Tributación:** La Sunat debe cobrar una tasa  $w_0$  sobre el nivel de ventas mensuales de las empresas,  $V_t$ . Para ello descompone el pago de impuestos en dos partes:

- Pago anticipado a una tasa  $w_1 < w_0$  de las ventas estimadas en el mes en curso: 
$$V_t^e = 0.5(V_{t-1} + V_{t-2}).$$
- Regularización del saldo en el mes siguiente.

El Ministerio de Economía tiene una política de gasto fiscal que se encuadra en una función lineal decreciente. Se pide hallar la secuencia de las ventas mensuales de las empresas si se tiene como objetivo de política que la recaudación fiscal mensual de la Sunat cubra exactamente el gasto del gobierno.

82. Un alumno de la universidad XYZ está tratando de tomar la decisión de dejar de estudiar para vender dólares en la calle. Para ello, le interesa encontrar la secuencia que el diferencial cambiario  $s_t - S_t$ , donde  $s_t$  es el tipo de cambio informal y  $S_t$  es el tipo de cambio oficial, la cual debe ser explosiva para que deje

de estudiar. Él sabe que el diferencial cambiario es función lineal e inversa del exceso de demanda por dinero ( $L_t - M_t$ ) más una constante. Si la demanda por dinero es

$$L_t = a + b(s_t - S_t) + cr_t,$$

donde  $b$  y  $c$  son negativos y  $r_t$  es la tasa de interés esperada igual a una fracción  $df/c$  del tipo de cambio informal de ayer.

Además, se sabe que la oferta de dinero  $M_t$  es una fracción  $d$  del cambio del gasto del gobierno definido por

$$G_t - G_{t-1} = (S_{t-1})f + h$$

Resuelva la EED para el diferencial cambiario y ayude al alumno a tomar su decisión.

**83.** ¿Cuáles deben ser las condiciones iniciales (en  $t = 0$ ) de  $x$ ,  $y$  y  $z$  para que el sistema

$$\Delta x_t = -x_t - 2z_t, \quad \Delta y_t = -y_t + 4z_t, \quad \Delta z_t = 2x_t + 2y_t - z_t,$$

converja a  $(0, 0, 0)$ ?

**84.** Resolver los siguientes sistemas

- a)  $x_{t+1} = x_t + y_t$  ( $x_0 = 1$ )       $y_{t+1} = -x_t + 3y_t$  ( $y_0 = 1$ )  
 b)  $x_{t+1} = x_t + y_t + 2^t$  ( $x_0 = 1$ )       $y_{t+1} = -x_t + 3y_t$  ( $y_0 = 1$ )  
 c)  $x_{t+1} = x_t + 2y_t + 2t$  ( $x_0 = 1$ )       $y_{t+1} = -2x_t + y_t + 2^t$  ( $y_0 = 1$ )  
 d)  $x_{t+1} = x_t - 2y_t + 12$  ( $x_0 = 2$ )       $y_{t+1} = 6x_t + 9y_t + 2(3)^t$  ( $y_0 = 4$ )

Sin resolver los siguientes sistemas, determine su estabilidad a partir de sus valores propios o aplicando el Teorema 6.3.

85.  $x_{t+1} = 3x_t - 2y_t$        $y_{t+1} = 2x_t - 3y_t$

86.  $x_{t+1} = 2x_t - y_t$        $y_{t+1} = x_t - y_t$

87.  $\Delta x_t = y_t$        $\Delta y_t = 2x_t$

88.  $x_{t+1} = x_t - 4y_t$        $y_{t+1} = 4x_t - 7y_t$

89.  $x_{t+1} = x_t - 3y_t$        $y_{t+1} = 4x_t + 5y_t$

90.  $x_{t+1} = 3x_t - 2y_t$        $y_{t+1} = 4x_t - y_t$

$$91. \quad x_{t+1} = x_t - y_t \quad y_{t+1} = 4x_t - 2y_t$$

$$92. \quad x_{t+1} = -x_t + 2y_t \quad y_{t+1} = -2x_t + y_t$$

$$93. \quad \Delta x_t = 3x_t - 4y_t \quad \Delta y_t = x_t - y_t$$

94. Resuelva los ejercicios (la ecuación complementaria) del 52 al 79 mediante el uso de **sistemas equivalentes**.

95. **La curva de Phillips.** Se cuenta con la *relación de Phillips*, modelo que explica la interacción de la inflación y el desempleo mediante las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$p_t = \alpha - T - \beta U_t + h\pi_t$$

$$\pi_{t+1} - \pi_t = j(p_t - \pi_t)$$

$$U_{t+1} - U_t = -k(m - p_t)$$

donde:  $\alpha, \beta > 0$

$h, j$  = coeficientes de ajuste de expectativas ( $0 < h, j \leq 1$ )

$k$  = factor de ajuste ( $k > 0$ )

$\pi$  = tasa de inflación *esperada*

$p$  = tasa de inflación *real*

$U$  = tasa de desempleo

$m$  = tasa de crecimiento del dinero nominal

Halle las secuencias del desempleo e inflación planteando un sistema de EDO. Discuta la convergencia en todos sus casos ¿Tiene sentido? ¿Qué podemos concluir acerca de la *tasa de crecimiento del dinero nominal* ( $m$ ) con respecto a las secuencias de la inflación real y la esperada?

96. Un comerciante adquiere en una subasta pública un lote de 1000 computadoras, valuadas en 50 mil. Dada la aparición de nuevos modelos en el mercado y la depreciación de los equipos, el valor de realización (valor de venta) de cada computadora disminuye continuamente cada año a una tasa de 10%. Recién en el año 4, el comerciante consigue vender algunas computadoras, de forma tal que en el año 5 el valor de realización de todas las computadoras en *stock* es igual a la mitad del valor de realización inicial. ¿Cuántas computadoras aproximadamente vendió el comerciante en el año 4?

97. Escriba un ejemplo numérico de :

- a) Una EED de segundo orden que represente una trayectoria temporal de equilibrio móvil y divergente.

- b) Una EED de segundo orden que represente una trayectoria temporal convergente y fluctuante, con un valor de equilibrio igual a «5».

98. ¿Para cuál valor de  $a$ , la solución del siguiente sistema diferencial converge sobre  $(0,0)$ ?

$$\begin{aligned}\Delta x_{t+1} &= 3x_t - 2y_t & x_0 &= 4 \\ \Delta y_{t+1} &= 2x_t - 2y_t & y_0 &= a\end{aligned}$$

Considere un sistema en forma matricial.  $A_2 X_{t+2} + A_1 X_{t+1} + A_0 X_t = B$  Normalícelo, resuélvalo expresándolo como un sistema de primer orden y analice sus estabilidad si

99.  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$     $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     $A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$     $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

100.  $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$     $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$     $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$     $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$

101. Dado el sistema

$$X_{t+1} = AX_t + P$$

Comente:

- a) Si  $A$  es una matriz definida positiva, el sistema es estable.  
 b) Si el módulo del mayor valor propio de  $A$  es mayor o igual a uno, el sistema es estable.  
 c) ¿Qué puede comentar del sistema si  $A$  es idempotente?

Analice cualitativamente la estabilidad de las siguientes EED. Ayúdese de un diagrama de fase.

102.  $x_{t+1} = 2x_t$

103.  $x_{t+1} = 0.8x_t$

104.  $x_{t+1} = \cos(x_t)$

105.  $x_{t+1} = x_t^2 + 1$

105.  $x_{t+1} = 2x_t^2 / (3x_t^2 + 5)$

107.  $x_{t+1} = x_t^2 - 1$

108.  $x_{t+1} = \sqrt{x_t}$

109.  $x_{t+1} = x_t^3$

110.  $x_{t+1} = 1/x_t$

111.  $x_{t+1} = (0.5x_t + 1/x_t)$



**Apéndice A. Soluciones hacia atrás y hacia adelante**

Partiendo de la EED

$$A_t - A_{t-1} = q_t$$

pueden aplicarse sumatorias a ambos lados tal que

$$\sum_{i=1}^t (A_i - A_{i-1}) = A_t - A_0 = \sum_{i=1}^t q_i$$

Algunas veces el lado derecho de la ecuación puede converger cuando  $t \rightarrow -\infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$  o en ambos casos. Suponiendo que estos límites son definidos puede escribirse

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} \sum_{i=-T}^t q_i = \sum_{i=-\infty}^t q_i = \lim_{T \rightarrow -\infty} (A_t - A_{-T}) = A_t - A_{-T}$$

de modo que

$$A_t = A + \sum_{i=-\infty}^t q_i \quad (*)$$

Asimismo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=t+1}^T q_i = \sum_{i=t+1}^{\infty} q_i = \lim_{T \rightarrow \infty} (A_T - A_t) = A - A_t$$

por lo que

$$A_t = A - \sum_{i=t+1}^{\infty} q_i \quad (**)$$

En caso de existir, (\*) es llamada la **solución hacia atrás** de la EED de  $A_t$  mientras que (\*\*) es denominada la **solución hacia adelante**. Ambas soluciones satisfacen la EED.

Considere la EED lineal de primer orden

$$x_t - ax_{t-1} = b \quad (a \neq 1)$$

cuya ecuación complementaria es resuelta por  $x_t = Ha^t + b/(1-a)$ .

Ahora, puede utilizarse resolverse una EED del tipo

$$x_t - ax_{t-1} = b + q_t$$

donde  $q_t$  es alguna función definida. Se define a la secuencia  $A_t$  a partir de la función desconocida  $x_t$  como

$$x_t = A_t a^t + \frac{b}{1-a}$$

Esta función soluciona la EED, por lo que

$$A_t a^t + \frac{b}{1-a} - a \left( A_{t-1} a^{t-1} + \frac{b}{1-a} \right) = b + q_t$$

$$a^t (A_t - A_{t-1}) = q_t + b - (1-a) \frac{b}{1-a}$$

$$A_t - A_{t-1} = a^{-t} q_t$$

Esto puede ser resuelto por (\*) o (\*\*). Por ejemplo, considere la solución hacia delante

$$A_t = A - \sum_{i=t+1}^{\infty} a^{-i} q_i$$

de modo que

$$\begin{aligned} x_t &= A_t a^t + \frac{b}{1-a} = \left( A - \sum_{i=t+1}^{\infty} a^{-i} q_i \right) a^t + \frac{b}{1-a} \\ &= A a^t - \sum_{i=t+1}^{\infty} a^{t-i} q_i + \frac{b}{1-a} \end{aligned}$$

Es recomendable que el lector note la similitud de esta solución y la determinada con el uso del operador de rezago.

## Apéndice B. Paralelo entre EDO y EED

A lo largo del capítulo el lector debe haber encontrado una serie de similitudes entre los procedimientos vistos al resolver tanto una EDO como una EED. De hecho, ambos tipos de ecuaciones resuelven el mismo problema: conocido el proceso y el ritmo de variación de una función, recogido en el primer caso por derivadas y en el segundo por las sucesivas diferencias (o rezagos o adelantos) de la función, se trata de obtener la forma de dicha función.

Asimismo, sin mayor preámbulo, la definición más general del operador de diferencias es

$$\Delta x_t = x_{t+h} - x_t$$

En este texto se ha asumido que  $h = 1$  básicamente por la característica discreta y bien definida de las estadísticas y períodos de realización de los fenómenos económicos. La similitud entre EDO y EED es evidente en el límite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta x_t = \lim_{h \rightarrow 0} x_{t+h} - x_t = dx_t \text{ de modo que } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta x_t}{\Delta h} = x'$$

De este modo para un mismo conjunto de coeficientes,

$$\text{la EDO } x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + a_2x'' + a_1x' + a_0x = 0$$

$$\text{y la EED } x_{t+n} + a_{n-1}x_{t+n-1} + a_{n-2}x_{t+n-2} + \dots + a_2x_{t+2} + a_1x_{t+1} + a_0x_t = 0$$

son resueltas, respectivamente, por

$$x = e^{rt} \quad \text{y} \quad x_t = q^t$$

Es claro que si  $q^t = e^{rt}$  o, equivalentemente,  $r = \ln(q)$  ambas soluciones son idénticas.

En otras palabras, puede establecerse como cada EED responde, para valores concretos de  $t$ , a la misma realidad que representaría  $x$  si  $t$  variara de manera continua. Así, si  $r \in R > 0$ , la relación dada por  $q = e^r$  pone de manifiesto que para cada valor de  $r$  existe un valor de  $q$  coincidente con él, siempre y cuando este valor de  $q$  sea válido dentro de la correspondiente EED.

# VII

## Apéndice

### Números complejos

#### 7.1 Definición

En el momento que se observa una expresión de la forma  $x^2$ , se sabe que siempre este componente va a ser mayor que cero. Sin embargo, una duda proviene cuando nos encontramos frente a una igualdad como, por ejemplo,  $x^2 = -1$ . Claramente, la solución de esta ecuación *no pertenece* a los números reales como los conocemos, sino al grupo de los números imaginarios.

La unidad de los números imaginarios,  $i$ , se definen como

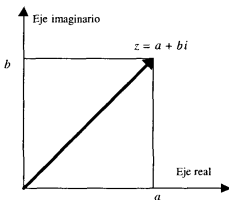
$$i = \sqrt{-1} \text{ para efectos prácticos } i^2 = -1$$

Las expresiones de la forma  $a + bi$  son denominadas **números complejos**. A principios del siglo XIX<sup>1</sup> se reconoció que dicha forma podía concebirse como un par ordenado de números reales  $(a, b)$  o como un vector  $[a \ b]$ . Esta es la aproximación que se le dará de ahora en adelante.

---

<sup>1</sup> **Nota histórica:** El primer indicio de un problema que incluya números imaginarios aparece en el *Stereometrica* de Herón de Alejandría (Egipto) quien, cerca de 50 años d.C., trató de hallar la raíz cuadrada de  $81 - 144$ . En la India, por el año 850, Mahavira escribió "un número negativo no es un cuadrado, no tiene raíz cuadrada". En 1545, el milanés Girolamo Cardano (1501 - 1576), quien llamó a los números complejos "ficticios", indagó

Entonces, se puede definir a un número complejo como el par ordenado de números reales, denotado por  $a + bi$ . Al número  $a$  se le denomina la **parte real del número complejo**, mientras que al número  $b$  se le llama **parte imaginaria**.



Si define a  $z = a + bi$ , las partes reales e imaginarias del mismo son denotadas como  $\text{Re}(z)$  e  $\text{Im}(z)$ , respectivamente. Como caso particular de los número complejos, los números reales pueden ser vistos como de la forma  $a + 0i$ , esto es,  $b = 0$ ; de la misma forma, un número imaginario puro cumple con  $a = 0$ .

Geoméricamente, un número complejo de la forma de  $z$  puede representarse como un punto o un vector en un eje de coordenadas cartesianas (ver figura). En ese caso el eje de las abscisas representa su parte real y el eje de las ordenadas constituye su parte imaginaria. A este plano cartesiano se le denomina **plano complejo**.

Por otro lado, es bueno notar que

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

de modo que se forma un ciclo en las potencias de  $i$  a partir del exponente 4.

en el problema de "dividir 10 en dos partes que multiplicadas den 40". Cardano encontró que ambas partes eran  $5 + (-15)^{1/2}$  y  $5 - (-15)^{1/2}$ , pero concluyó que este tipo de números eran "tan sutiles como inútiles". Por su parte, el noruego Caspar Wessel (1745 – 1818) realizó la primera representación gráfica de los números complejos que fue, lamentablemente, publicada en una revista (en 1799) sin mayor aceptación por los matemáticos.

Uno de los primeros matemáticos en impulsar el desarrollo de estos números fue el francés René Descartes (1596 – 1650), quien inventó los términos "real" e "imaginario". En 1702, el alemán Gottfried von Leibniz (1646 – 1716) describió los números complejos como "un anfibio entre las cosas que son y no son cosas". Luego, el suizo Leonard Euler (1707 - 1783) introdujo la letra  $i$  como el símbolo de la unidad imaginaria.

La teoría de los números complejos fue universalmente aceptada a partir de la influencia ejercida por parte del alemán Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), quien, independientemente del trabajo previo de Wessel, representó los números complejos en un plano.

## 7.2 Operaciones con Números Complejos

La suma y diferencia de números complejos se define por la adición o resta de las partes reales e imaginarias correspondientes, esto es:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por su parte, la multiplicación de números complejos se puede expresar como la expansión de la expresión  $(a + bi)(c + di)$  de acuerdo a las leyes de álgebra, sin olvidar que  $i^2 = -1$ . Así,

$$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

La división de números complejos se desprende de un proceso muy similar al de la racionalización de coeficientes en el álgebra. Para obtener las partes reales e imaginarias del siguiente cociente

$$\frac{a + bi}{c + di}$$

se multiplica el numerador y el denominador por:  $c - di$  y se simplifica:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \times \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 - d^2i^2}$$

de modo que

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i$$

Para efectos prácticos se recomienda no memorizar las fórmulas y evaluar el raciocinio empleado para la comprobación de las mismas.

## 7.3 Números complejos conjugados

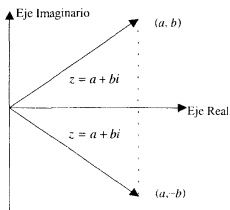
Si  $z = a + bi$  es un número complejo cualquiera, entonces el complejo conjugado (o simplemente conjugado) de  $z$  se define como  $\bar{z} = a - bi$ .

Se ha visto con anterioridad que los complejos conjugados aparecen en la división de números complejos, pero además son fundamentales en la resolución de ecuaciones polinómicas de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

que poseen coeficientes reales. Se puede probar que estas ecuaciones tienen una solución en el sistema de números complejos y si  $z$  es una solución, también lo es su conjugado. En consecuencia, las soluciones con partes imaginarias no nulas ocurren en pares conjugados. Por ejemplo, en la fórmula cuadrática general de la ecuación  $x^2 + x + 2 = 0$  es

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$



lo que comprueba que ambas soluciones,  $x_1$  y  $x_2$ , son complejos conjugados.

Geoméricamente, los complejos conjugados son «espejos» el uno del otro sobre el eje real.

Finalmente, los conjugados de un número complejo cumplen con las siguientes propiedades de fácil comprobación:

1.  $\overline{\overline{z}} = z$
2.  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3.  $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4.  $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
5.  $\overline{z_1 \div z_2} = \overline{z_1} \div \overline{z_2}$

## 7.4 Módulo de los números complejos

Si al número complejo  $z$  se le concibe como un vector, entonces su longitud se le denomina **módulo de  $z$**  y se denota por  $|z|$ . En consecuencia, si  $z = a + bi$ , entonces

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nótese que si  $z$  es un número real, por ejemplo, entonces su módulo equivale a su valor absoluto.

Puede observarse, además, que:

$$z \times \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Así, se desprenden las siguientes propiedades:

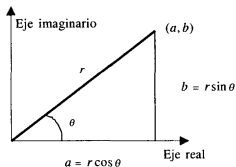
1.  $z \times \bar{z} = |z|^2$
2.  $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
3.  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

## 7.5 Forma polar de un número complejo

Si concibe a un número complejo como un punto  $(a, b)$  en el plano complejo, y si se denomina  $r$  y  $\theta$  como las coordenadas polares de ese punto con  $r \geq 0$  (donde  $r$  es el módulo del complejo y  $\theta$  es el ángulo que el vector forma con el eje de las abscisas,  $\tan\theta = b/a$ ), entonces se concluye que:

$$a = r \cos\theta, \quad b = r \sin\theta$$

Esta situación puede ser vista en la siguiente figura:



En consecuencia,  $z$  puede ser expresada como

$$z = a + bi = (r \cos\theta) + (r \sin\theta)i = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$



con lo que resulta la forma polar de  $z$ ,

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Por otra parte, el ángulo  $\theta$  es llamado **argumento de  $z$**  y se denota por  $\theta = \arg(z)$ . Este no es determinado en forma única. Esto se debe a que es posible adicionar o sustraer cualquier múltiplo de  $2\pi$  desde  $\theta$  para producir otro valor del argumento. Sin embargo, si  $z \neq 0$ , entonces existe un solo valor del argumento que satisface  $-\pi < \theta \leq \pi$ . A este se llama el argumento principal de  $z$ .

### 7.6 Interpretación geométrica de la multiplicación y la división

Ahora, se puede dar una interpretación de la multiplicación y la división de los números complejos utilizando sus formas polares. Así, si se define a

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

Multiplicando, se obtiene

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]$$

que una vez que se recuerdan las identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

se obtiene la forma polar del producto

$$z_1 \times z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

En pocas palabras, el producto de dos números complejos se puede obtener multiplicando su módulo y adicionando sus argumentos.

De la misma forma, se puede probar que, teniendo en cuenta que  $z_2 \neq 0$ , el cociente se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

En pocas palabras, el cociente de dos números complejos se puede obtener dividiendo sus respectivos módulos y restando sus argumentos.

### 7.7 La fórmula de De Moivre

Si  $n$  es un entero positivo y  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , entonces de la fórmula de la multiplicación se obtiene:

$$z^n = \underbrace{z \times z \times z \times \dots \times z}_{n \text{ veces}} = r^n [\underbrace{\cos(\theta + \theta + \dots + \theta)}_{n \text{ términos}} + i \underbrace{\sin(\theta + \theta + \dots + \theta)}_{n \text{ términos}}]$$

que equivale a

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

En otras palabras, un número complejo puede ser elevado a la  $n$ -ésima potencia únicamente elevando su módulo a la  $n$ -ésima potencia y multiplicando su argumento por  $n$ .

A pesar de que definimos la fórmula para cualquier entero positivo, esta fórmula es válida para todos los enteros, sujetos a algunas condiciones. En el caso particular de  $r = 1$  se cumple que

$$z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

que es la fórmula del matemático francés Abraham De Moivre (1667 – 1754).

### 7.8 Raíces $n$ -ésimas de los números complejos

Se define una raíz  $n$ -ésima de un número complejo, diferente de cero,  $z$  como cualquier número complejo  $w$  que satisface la ecuación:

$$w^n = z$$

Una fórmula para las raíces  $n$ -ésima de  $z$  se pueden obtener al expresar  $w$  y  $z$  en sus formas polares:

$$w = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \quad \text{y} \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Por definición, se tiene que

$$\rho^n = r, \quad \cos n\alpha = \cos \theta, \quad \operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen} \theta$$

Debido a que  $\rho$  y  $r$  son dos números reales no negativos, se concluye de estas identidades que  $\rho$  es la raíz  $n$ -ésima no negativa de  $r$ , esto es

$$\rho = \sqrt[n]{r} .$$

Además, de las últimas dos ecuaciones que implican términos trigonométricos, se desprende que:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi$$

donde  $k$  es cualquier número entero. Luego,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

En consecuencia, los valores de  $w = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  que cumplen  $w^n = z$  se dan por:

$$w = \sqrt[n]{r} \left[ \cos \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A pesar de que son valores infinitos de  $k$ , se puede probar que  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  producen **todos** los distintos valores de  $w$  que satisfacen la ecuación antes dada; otros valores de  $k$  serían duplicaciones de los ya antes obtenidos, por el carácter periódico de las funciones sinusoidales. En consecuencia, hay exactamente  $n$  diferentes raíces  $n$ -ésimas de  $z$ .

Se puede observar que cada una de estas  $n$  raíces tiene el mismo módulo,  $\rho$ , y que cada una de las  $n$  raíces corresponde a valores sucesivos de  $k$ , tiene argumentos que se diferencian en  $2\pi/n$  radianes. Esto implica que las  $n$  raíces de  $z$  están igualmente espaciadas alrededor de un círculo de radio  $\rho$  y que si se encuentra una de las  $n$  raíces de  $z$ , el resto de las raíces pueden ser obtenidas rotando esta raíz a través de incrementos sucesivos de  $2\pi/n$  radianes.

Cabe mencionar, finalmente, que si  $z$  tiene un módulo  $r$  y argumento  $\theta$ , entonces su conjugado tiene módulo  $r$  y argumento  $-\theta$ , ya que son simétricos al eje real.

# Bibliografía

Araar, Abdelkrim y Jean-Yves Duclos, *An Atkinson-Gini Family of Social Evaluations Functions*, Canadá, Université Laval, 1998.

Arnol'd, Vladimir I., *Ordinary Differential Equations*, 3a. ed., Springer textbook, 1992.

Arrow, K. J.; H. Chenery; B. S. Minhas y R. M. Solow, "Capital – Labor Substitution and Economic Efficiency", *Review of Economics and Statistics*, XLIII, 1961.

Arrow, Kenneth, "On the Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", en: Kenneth Arrow, *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Amsterdam: North Holland, 1974.

Ayres, Frank, *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales*, Colón, 1969.

Banco Central de Reserva del Perú (BCRP), "La política monetaria del Banco Central de Reserva del Perú", *Notas de estudio No. 6*, 1999.

Barro, Robert y Xavier Sala-I-Martin, "Convergence Across States and Regions", *Brooking Papers on Economic Activity*, No. 1, 1991.

Barro, Robert y Xavier Sala-I-Martin, "Convergence", *Journal of Political Economy*, Vol. 100, No. 2, 1992.

- Barro, Robert y Xavier Sala-I-Martin, *Economic Growth*, McGraw – Hill, 1995.
- Baumol, William, “Productivity Growth, Convergence and Welfare: What the Long Run Data Show?”, *American Economic Review*, vol. 76, No. 5, 1986.
- Beltrán, Arlette y Hanny Cueva, *Evaluación privada de proyectos*, Biblioteca Universitaria, CIUP, Lima, 1999.
- Blake, David y Michael Orszag, “A Closed-Form Formula for Calculating Bond Convexity”, *Journal of Fixed Income*, June 1996.
- Boucekkine, Raouf; Omar Licandro y Christopher Paul, “Differential-Difference Equations in Economics: On the Numerical Solution of Vintage Capital Growth Models”, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1997.
- Brealey, Richard A. y Stewart C. Myers, *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill Inc., 1991.
- Brock, William A. y A.G. Malliaris, *Differential Equations Stability and Chaos in Dynamic Economics*, Advanced Textbooks in Economics, Amsterdam: North-Holland, 1989.
- Burner, Arthur F. y Wesley C. Mitchell, *Measuring Business Cycles*, NBER, 1946.
- Butler, Eammon, *Milton Friedman: su pensamiento económico*, México, Limusa, 1989.
- Campbell, John y Luis Viceira, “Who Should Buy Long-Term Bonds?”, *NBER Working paper No. W6801*, 1998.
- Carson, Dean (ed.), *Banking and Monetary Studies*, Illinois, Irwin, 1984.
- Chiang, Alpha, *Elementos fundamentales de la economía matemática*, McGraw – Hill, 1987.
- Chipman, John, *The Theory of Intersectoral Money Flows and Income Formation*, John Hopkins Press, 1979.

Deaton, Angus y John Muellbauer, *Economics and Consumer Behavior*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

Doldado, J.; M. González – Páramo y M. Roldán, “Convergencia económica entre las provincias españolas”, *Moneda y crédito*, No. 198, 1994.

Dowling, Edward T., *Matemáticas para economistas*, McGraw – Hill, 1982.

Edwards, Charles. H. y David E. Penny, *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*, 2<sup>nd</sup>. ed., Prentice Hall, 2000.

Ezekiel, M., “The Cobweb Theorem”, *Quarterly Journal of Economics*, 52, 1938, pp. 255 – 280

Fabozzi, Frank, *Duration, Convexity and Other Bond Risk Measures*, McGraw – Hill, 1999.

Fabozzi, Frank, Franco Modigliani y Michael Ferri, *Mercado e instituciones financieras*, Prentice – Hall, 1996.

Fernández Baca, Jorge y Janice Seinfeld, *Capital humano, instituciones y crecimiento*, Lima, CIUP, 1995.

Fernández-Baca, Jorge, *Dinero, precios y tipo de cambio*, Biblioteca Universitaria, Lima, CIUP, 2da. ed., 1997.

Fernández-Baca, Jorge, *Microeconomía: teoría y aplicaciones*, Lima: CIUP, Tomo I, 2000.

Gandolfo, Giancarlo, *Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica*, Biblioteca Tecnos de ciencias económicas, Tecnos, 1976.

Gardner, Stephen, *Comparative Economic Systems*, 2<sup>nd</sup> ed., Harcourt Brace College Publishers, 1998.

Haavelmo, Trygve, *A Study in the Theory of Economic Evolution*, Amsterdam, North-Holland, 1964.

Hairer E., S. P. Norsett y G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*, 2a. ed., Springer textbook, 2000.

- Hall, Robert y John Taylor, *Macroeconomía*, Antoni Bosch, 1991.
- Hamilton, James D., *Time Series Analysis*, Princeton University Press, 1994.
- Harvey, Andrew C., *Time Series Models*, 2<sup>nd</sup> ed., Massachusetts, MIT Press, 1993.
- Humphrey, Thomas M., "Algebraic Production Functions and Their Uses Before Cobb-Douglas", *Economic Quarterly*, vol. 83, 1, Federal Reserve of Richmond, 1997.
- Hutchinson, Evelyn, *An Introduction to Population Ecology*, New Haven and London, Yale University Press, 1978.
- Kakwani, Nanak, "Poverty and Economic Growth: With Application to Cote d'Ivoire", LSMS Working Paper 63, The World Bank Group, 1990.
- Kaldor, N., "Capital Accumulation and Economic Growth", en: F.A. Lutz y D.C. Hague, *The Theory of Capital*, St. Martin's Press, 1961.
- Kane, Alex, "Skewness Preferences and Portfolio Choice", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 17, No. 1, 1982.
- Kmenta, J. , "On the Estimation of the CES Production Function", *International Economic Review*, 8, 1967.
- Kolb, Robert, *Inversiones*, Limusa, 1993.
- Kreps, David, *A Course of Microeconomic Theory*, McGraw -Hill, 1995.
- Kuznets, Simon, "National Income: a Summary of Findings", NBER, 1946.
- Lucas, Robert E., "Econometric Policy Evaluation: A Critique", en: Robert Lucas, *Studies in Business Cycles Theory*, Massachusetts, MIT Press, 1981.
- Lucas, Robert E., "On the Mechanics of Economic Development Planning", *Journal of Monetary Economics*, No. 22, 1988.
- Mankiw, Gregory N.; David Romer y David N. Weil, "A Contribution to the Empirics of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 1992.

Medina, Andrés, "Pobreza, crecimiento y desigualdad: Perú 1991 – 1994", en: Instituto Cuánto, *¿Cómo estamos? Análisis de la encuesta de niveles de vida*, Lima, 1996.

Metzler, Lloyd, "The Nature and Stability of Inventory Cycles", *Review of Economic and Statistics*, August 1941.

Modigliani, Franco, "Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations", *American Economic Review*, Vol. 76, 1986.

Murray, J.D., *Mathematical Biology*, Springer - Verlag, 1990.

Nerlove, Marc, "Adaptative Expectations and Cobweb Phenomena", *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 72, 1958, pp. 227 – 240.

Nikaido, Hukukane, *Métodos matemáticos del análisis económico moderno*, Vines – Vives, 1978.

Pearl, Raymond, "The Growth of Populations", *Quarterly Review of Biology*, 2, 1927, pp 532 – 548.

Pratt, John, "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, 32, 1964.

Rebelo, Sergio, "Long Run Policy Analysis and Long Run Growth", *Journal of Political Economy*, vol. 99, No. 3, 1991.

Romer, Paul M., "Increasing Returns and Long Run Growth", *Journal of Political Economy*, vol. 94, No. 5, 1986.

Sachs, Jeffrey y Felipe Larraín, *Macroeconomía en la economía global*, Prentice Hall Hispanoamérica, 1994, pp. 521 – 523.

Sala-I-Martin, Xavier, *Apuntes de crecimiento económico*, Antoni Bosch (ed.), 1994

Samuelson, Paul. *Foundations of Economics Analysis*, Harvard University Press, 1947.

Sargent, Thomas J., *Dynamic Macreconomic Theory*, Harvard University Press, 1987.



- Sargent, Thomas J., *Macroeconomic Theory*, Academic Press, 1979.
- Simmons, George, *Differential Equations: With Applications and Historical Notes*, 2a. ed., McGraw – Hill, 1991.
- Solow, Robert M., “A Contribution to the Theory of Economy Growth”, *Quarterly Journal of Economics*, pp. 65 – 94, 1965.
- Stiglitz, Joseph E., *Economics*, WW Norton and Co., 1993.
- Stutzer, Michael J, “Chaotic Dynamics and Bifurcation in a Macro Model”, Minneapolis, Federal Reserve Bank of Minneapolis, *Staff Report No. 55*, 1980.
- Sydsaeter, Knut y Peter J. Hammond, *Matemáticas para el análisis económico*, Prentice Hall, 1996.
- Sydsaeter, Knut, *Topics in Mathematical Analysis for Economists*, Academic Press, 1981.
- Szpiro, George, “Risk Aversion as a Function of Variance and Skewness”, en: A. Chikan, *Progress in Decision, Utility and Risk Theory*, Kluwer Academic Publisher, 1991.
- Takayama, Akira, *Analytical Methods in Economics*, Harvester Wheatsheaf, 1994.
- Taranto, Mark, “Duration Measures: Historical Perspective”, 1995, en: <http://www.duke.edu/~charvey/Classes/ba350/bondval/duration.html>.
- Tobin, James, “Monetary Policies and the Economy: The Transmission Mechanism”, *Southern Economic Journal*, 1978, pp. 421 – 431.
- Varian, Hal R., *Microeconomía intermedia*, 4a. ed., Antoni Bosch, 1996.
- Vegas Pérez, Ángel y Manuel López Cachero, *Elementos de matemáticas para economistas*, Madrid, Pirámide, 1976.
- Zhang, Changgui, “Summability of Power Series Solutions of  $q$ -Difference Equations”, Université de La Rochelle, 1998.

## APUNTES DE ESTUDIO

1. Portocarrero Suárez, Felipe, *Cómo hacer un trabajo de investigación*, 3a. ed., Lima: CIUP, 1990.
2. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo I, 3a. ed., Lima: CIUP, 1991.
3. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo II, 3a. ed., Lima: CIUP, 1991.
4. Injoque Espinoza, Javier, *WordPerfect 5.1. Fundamentos y orientaciones prácticas*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1992.
5. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo III, Lima: CIUP, 1991.
6. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiese Rebagliati, *Elementos de gramática española*, 2a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1993.
7. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiese Rebagliati, *Técnicas de lectura y redacción. Lenguaje científico y académico*, 2a. ed. aumentada y nuevamente corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 2000.
8. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos de política de la empresa*, Lima: CIUP, 1992.
9. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo IV, Lima: CIUP, 1992.
10. Pipoli de Butrón, Gina (comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, Lima: CIUP, 1992.
11. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo V, Lima: CIUP, 1993.
12. Rivero, Eduardo, *Contabilidad I*, 2a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 2000.

13. Altamirano, Jesús, *Lotus 2.4. Conceptos y consejos prácticos*, Lima: Universidad del Pacífico, 1993.
14. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Colección de casos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1993.
15. Chong, Esteban y otros, *Teoría y práctica de la contabilidad intermedia*, Lima: CIUP, 1994.
16. Wong, David, *Finanzas en el Perú: un enfoque de liquidez, rentabilidad y riesgo*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1995.
17. Mayorga, David y Patricia Araujo, *La importancia de la mercadotecnia estratégica: el caso de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1994.
18. Aliaga Valdez, Carlos, *Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos*, 4a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1999.
19. Ángeles, Julio; Jorge Rubio; Yván Soto y Jorge Toma, *Procesamiento estadístico de datos con Minitab y Harvard Graphics*, Lima: Universidad del Pacífico, 1995.
20. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Casos peruanos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1995.
21. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VI, Lima: CIUP, 1995.
22. Vento Ortiz, Alfredo, *Finanzas aplicadas*, 5a. ed., Lima: CIUP, 2001.
23. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos peruanos de negocios internacionales*, Lima: CIUP, 1995.
24. Muñoz, José Luis, *Análisis e interpretación de estados financieros ajustados por inflación*, Lima: CIUP, 1995.
25. Pipoli de Butrón, Gina (comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, tomo II, Lima: CIUP, 1996.

26. Beltrán, Arlette y Hanny Cueva, *Ejercicios de evaluación privada de proyectos*, 3a. ed., Lima: CIUP, 2000.
27. Aliaga Valdez, Carlos, *Aplicaciones prácticas de matemática financiera: 603 problemas resueltos*, 1a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1998.
28. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VII, Lima: CIUP, 1996.
29. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos sobre la mercadotecnia estratégica de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1997.
30. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VIII, Lima: CIUP, 1997.
31. Seinfeld, Janice y otros, *Introducción a la economía de los recursos naturales y del medio ambiente*, Lima: 2a. ed., CIUP, 1999.
32. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo IX, Lima: CIUP, 1998.
33. Bonifaz, José Luis y Ruy Lama C., *Optimización dinámica y teoría económica*, Lima: CIUP, 1999.
34. Franco Concha, Pedro, *Planes de negocios: una metodología alternativa*, Lima: CIUP, 1999.
35. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo X, Lima: CIUP, 1999.
36. Schuldt, Jürgen, *Dolarización oficial de la economía: un debate en once actos*, Lima: CIUP, 1999.
37. Schwalb, María Matilde y Juan Carlos Casafranca, *Casos ganadores de los Premios MAX/EFFIE*, Lima: CIUP, 2000.
38. Medina, Oswaldo, *El ahoramiento: una interpretación sociológica*, Lima: CIUP, 2000.

39. Espejo Reese, Ricardo, *Ética y empresas: el caso de la banca peruana*, Lima: CIUP, 2001.
40. Malca, Óscar, *Comercio electrónico*, Lima: Universidad del Pacífico, 2001.
41. Lescano, Lucio, *La disciplina del servicio*, Lima: CIUP, 2001.
42. Schwalb, María Matilde; Patricia Araujo y David Mayorga, *Casos ganadores de los Premios Effie 1999*, Lima: Universidad del Pacífico-AFP Integra, 2001.
43. Urrunaga, Roberto; Tami Hiraoka y Antonio Risso, *Fundamentos de economía pública*, Lima: CIUP, 2001.
44. Bonifaz, José Luis y Diego Winkelried, *Matemáticas para la economía dinámica*, Lima: CIUP, 2001.
45. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos de administración general en organizaciones que operan en el Perú*, tomo XI, Lima: CIUP, 2001.
46. Pipoli de Butrón, Gina, *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, tomo II, Lima: CIUP, 2002.
47. Malca, Óscar, *Comercio internacional*, Lima: CIUP, 2002.
48. Schwalb, María Matilde; Patricia Araujo y David Mayorga, *Casos ganadores de los Premios Effie 2000*, Lima: Universidad del Pacífico-Alicorp, 2002.
49. Mayorga, David; María Matilde Schwalb y Patricia Araujo, *Casos ganadores de los Premios Effie 2001*, Lima: Universidad del Pacífico-Alicorp, 2002.
50. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos de administración general en organizaciones que operan en el Perú*, tomo XII, Lima: CIUP, 2002.
51. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos peruanos de comportamiento organizacional*, tomo I, Lima: CIUP, 2003.
52. Siu K., Ricardo y Carlos Andaluz Z., *Cálculo diferencial: teoría y aplicaciones*, Lima: CIUP, 2003.

53. Schwalb, María Matilde; Claudia Ortega y Emilio García (editores), *Casos de responsabilidad social*, Lima: CIUP, 2003.
54. Patricia Araujo; David Mayorga y María Matilde Schwalb, *Casos ganadores de los Premios Effie 2002*, Lima: Universidad del Pacífico, 2003.

SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EN LOS TALLERES GRÁFICOS DE  
**TAREA ASOCIACIÓN GRÁFICA EDUCATIVA**  
PASAJE MARIA AUXILIADORA 156 - BRUSA  
Correo e.: [tareagrafica@terra.com.pe](mailto:tareagrafica@terra.com.pe)  
TELÉF. 424-8104 / 332-3229 FAX 424-1582  
OCTUBRE 2003 LIMA - PERÚ