



**UNIVERSIDAD
DEL PACÍFICO**
FACULTAD DE ECONOMÍA
Y FINANZAS

**ESTIMACIONES ALTERNATIVAS DEL VAR EN PORTAFOLIOS
DE RENTA FIJA CON DISTRIBUCIONES NO NORMALES**

**Trabajo de Investigación presentado para optar al
Grado Académico de Bachiller en Economía**

**Presentado por
Jesús Anderson Tuesta Soto
Piero Alonso La Rosa Gonzales**

Asesor: Kevin Martin Gershy-Damet Vargas
[0000-0001-7884-4260](tel:0000-0001-7884-4260)

Lima, enero 2021

RESUMEN

La normalidad de los retornos en el cálculo del *Value at Risk* ha sido siempre un supuesto polémico, y se ha puesto más en duda luego de la crisis financiera de 2008. En ese sentido, se pretende comparar y hallar la mejor forma de estimar dicha métrica de riesgo levantando el supuesto de normalidad en portafolios de renta fija. Para hacerlo, se emplearán principalmente dos metodologías: estimaciones semiparamétricas y distribuciones estables. Ambas son mejoradas con métodos de predicción de retornos autorregresivos con modelos ARMA, con predicción de correlaciones con la metodología DCC y con predicción de volatilidades con modelos GARCH. Los modelos se llevan a cabo bajo distintas variaciones. La idea es comparar los resultados y posteriormente realizar pruebas de *backtesting*, las cuales permiten mostrar e inferir la fuerza de predicción de cada uno de los métodos, así sus ventajas y debilidades.

Palabras clave: *Value at Risk*, DCC, Nelson-Siegel-Svensson, distribuciones estables, estimaciones no paramétricas y cópulas.

ABSTRACT

The assumption of normal returns in the Value at Risk (VaR) methodology has been always a weak assumption, and more after the 2008 financial crisis. In that sense, the objective of this paper is to seek the better approach to estimate this risk measure without having the normal returns assumption. The methodologies used are the semiparametric estimation and stable distributions. Both of these methods are enhanced with the use of the ARMA's returns projections and the DCC and GARCH conditional estimation of correlations and variances, respectively. All these methods' procedures are estimated with different variations to make a comparison and to conclude which elements are more useful in the VaR estimation. Finally, all the methods are analysed through a backtesting approach to examine their performance.

Key words: *Value at Risk*, DCC, Nelson-Siegel-Svensson, stables distributions, non parametric estimation and copulas.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	ii
ÍNDICE DE FIGURAS	v
ÍNDICE DE TABLAS	vi
ÍNDICE DE ANEXOS	vii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I: REVISIÓN DE LA LITERATURA	2
1. Evidencia teórica	2
2. Evidencia empírica	4
CAPÍTULO II: MARCO ANALÍTICO Y METODOLOGÍA	6
3. Marco analítico microeconómico del VaR	6
4. Método de estimación del VaR	7
4.1. Modelo teórico	7
4.2. Metodologías a emplear	8
5. Metodología	14
5.1. Filtro de medias y variancias ARMA y GARCH	15
5.2. Estimación de cópulas semiparamétricas	16
5.3. Nelson-Siegel-Svensson	17
5.4. Dinamic Condicional Correlation (DCC)	19
5.5. Unión de las diversas metodologías de cópulas	20
5.6. Distribuciones alpha-estables subgaussianas	22
CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE RESULTADOS	24
CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	33

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35
ANEXOS	39

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1: CURVA DE UTILIDAD EN FORMA DE “S”	6
FIGURA 2: DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA EMPÍRICA DEL BONO AMERICANO A 1 AÑO	25
FIGURA 3: VOLATILIDAD PREDICHA DEL PORTAFOLIO POR EL DCC Y RETORNOS DE BONOS AMERICANOS Y ALEMANES	26
FIGURA 4: RETORNOS HISTÓRICOS Y RETORNOS SIMULADOS DEL PORTAFOLIO A TRAVÉS DE LAS CÓPULA GAUSSIANA SEMIPARAMÉTRICA.....	27
FIGURA 5: RETORNOS HISTÓRICOS Y RETORNOS SIMULADOS DEL PORTAFOLIO A TRAVÉS DE LAS DISTRIBUCIONES ALPHA ESTABLES SUBGAUSSIANAS	28
FIGURA 6: RETORNOS HISTÓRICOS Y VAR DE 5% ESTIMADOS DEL PORTAFOLIO A TRAVÉS DE LAS CÓPULAS T-STUDENT Y DISTRIBUCIONES ALPHA ESTABLES SUBGAUSSIANAS.....	32

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1: MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DEL VAR	14
TABLA 2: RESULTADOS DE LA PRUEBA DE KUPIEC Y DE COBERTURA	30

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO 1: DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL ACUMULADA A TRAVÉS DE PSEUDO-OBSERVACIONES	40
ANEXO 2: PROCESO DE ESTIMACIÓN DEL VAR	41
ANEXO 3: CÓPULAS MULTIVARIADAS	43
ANEXO 4 : METODOLOGÍA PARA LA COMPARACIÓN DEL PARÁMETRO ALPHA (α) EN LA DISTRIBUCIONES ALPHA-ESTABLES Y LA ESTIMACIÓN DEL VAR	46
ANEXO 5: ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE LOS RETORNOS DE BONOS A UN AÑO DE PAÍSES PERTENECIENTES AL G7	48
ANEXO 6: COMPARACIONES DE VAR AL 5% ESTIMADOS Y LOS RETORNOS REALIZADOS	49

INTRODUCCIÓN

Durante mucho tiempo, las distribuciones de retornos de activos financieros han sido aproximadas bajo un supuesto de normalidad. A partir de esto, se ha construido mucha teoría financiera, como el Modelo de Portafolio de Markowitz. Sin embargo, las recientes crisis financieras han puesto en tela de juicio los supuestos sobre los que se han forjado dichas teorías. De esta manera, se han desarrollado modelos cada vez más avanzados que permiten levantar algunos de dichos supuestos. Por ejemplo, Jondeau & Rockinger (2006), Zakamouline (2014) y Zakamouline & Koekebakke (2009) han trabajado en la construcción de portafolios óptimos con distribuciones no normales e incluyendo otros momentos adicionales a la media y variancia. Es en esta línea novedosa que el presente trabajo buscará otras formas de estimación del *Value at Risk* (a partir de ahora, VaR), el cual es un percentil de la distribución de retornos (usualmente el percentil 1, 5 o 10) de un portafolio. Este instrumento es interpretado como una máxima pérdida del portafolio con cierto nivel de confianza.

El objetivo de este texto es levantar dichos supuestos y mejorar la modelación de retornos. Es decir, se busca que a partir de estimaciones semiparamétricas y distribuciones estables se presente un mejor modelamiento, comparado con el que se obtiene haciendo uso de métodos clásicos.

El aporte de la metodología empleada en el presente corresponde a la combinación del uso de herramientas que han demostrado resultados eficientes en investigaciones pasadas en esta área de estudio. Asimismo, algunas de dichas herramientas presentan más de una variedad de aplicaciones prácticas a los datos; por lo que la comparación en eficiencia de las diferentes combinaciones entre el uso (o no uso) de dichas herramientas también constituye el carácter novedoso de este artículo. Además, ampliamos la escasa literatura de las estimaciones semiparamétricas para este tipo de cálculos. Lo estándar en la literatura son las estimaciones paramétricas. Asimismo, ampliamos la aplicación de estas metodologías, ya que usualmente son usadas a un conjunto limitado de bonos. En vista de ello, el ejercicio del presente documento permite obtener un VaR en un escenario más realista, como lo es el uso de un portafolio de bonos de países del G7¹.

Dentro del manejo de un portafolio, el VaR es ampliamente utilizado como métrica de riesgo. En el siguiente capítulo se mostrará la revisión de literatura hasta la fecha. El capítulo II corresponde al marco analítico y metodología donde se encuentran las explicaciones más a detalle de las herramientas para la estimación VaR y los pasos a seguir para su cálculo. El capítulo III analiza los resultados y comparaciones de las diferentes metodologías. Finalmente, en el capítulo IV, se muestra las conclusiones y posibles extensiones del trabajo.

¹ Entiéndase Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y EE.UU.

CAPÍTULO I: REVISIÓN DE LA LITERATURA

1. Evidencia teórica

La literatura de estimaciones del VaR en portafolios de renta fija muestra una constante mejora en dos aspectos. La primera son las estimaciones de la forma de la distribución de los retornos; y la segunda, los métodos de predicción de características futuras. Dentro del primero se intentan capturar de forma más realista los diversos momentos de la distribución (media, variancia, asimetría y curtosis). Los métodos de predicción de características futuras se refieren a la mejora de predicción de los dos primeros momentos de las distribuciones, el vector de medias y la matriz de variancias y covarianzas.

Las distribuciones de retornos de activos financieros siempre han sido relevantes para la investigación financiera y son sumamente determinantes para poder inferir nuevos retornos en el futuro. El razonamiento teórico especula desde hace décadas que la distribución normal no era suficiente para poder estimar de manera adecuada una distribución de retornos de renta fija. La principal consecuencia de los supuestos de normalidad son los modelos de equilibrio que generan ecuaciones de valorización como el CAPM. Sin embargo, a aquellos agentes con aversión al riesgo absoluto no creciente (ARA) les importan otros momentos de la distribución como la asimetría y curtosis (Arditti, 1967; Kraus & Litzenberger, 1976).

Además, la distribución no debería ser simétrica, pues los bonos, a diferencia de las acciones, poseen muchos mecanismos que imponen límites al precio. Por ejemplo, mientras mayor sea la proximidad hacia la fecha de maduración, el precio tenderá hacia la par. Por ello, el retorno no puede crecer significativamente (Smyser et al., 1995). Asimismo, el riesgo soberano de un bono genera menor dispersión de los precios. Por otro lado, la convexidad hace que un mismo cambio en el rendimiento al vencimiento genera que el precio suba más de lo que puede caer ante shocks del mismo nivel, sesgando positivamente la distribución (Chiang, 2016). Además, las distribuciones normales multivariadas asumen que los eventos de cola son independientes sin importar la correlación entre los activos. No obstante, en épocas de crisis las correlaciones se incrementan entre muchos activos y muchos de sus retornos caen significativamente de forma conjunta (Assidenou, 2011).

Por ello, se han desarrollado herramientas para mejorar las predicciones, entre los cuales resaltan dos para los retornos de los bonos soberanos: los modelos de predicción de curva de rendimientos de Nelson-Siegel-Svensson (NSS) y los modelos de variancia condicional heterocedástica (GARCH y *Dynamic Conditional Correlation*). Debido a que un portafolio soberano es muy afectado por la curva de bonos cupón cero y que cada uno de estos posee una trayectoria única, es importante la predicción

de la curva completa. Para lograrlo, el NSS usa un sistema de factores o *Principal Component Analysis* (PCA) para reducir la dimensionalidad del problema: en lugar de predecir N series de tiempo, una por cada tenor; solo se predicen 4 series de forma más parsimoniosas. Con esto se obtiene con mayor probabilidad una curva creciente y cóncava más próxima a la real (Nelson & Siegel, 1987). En lo que respecta a la volatilidad, se sabe que el largo plazo de la curva de rendimientos está asociada a una mayor volatilidad y esta disminuye conforme se acerca el horizonte de predicción. Por otro lado, los métodos tradicionales de estimación como el ARMA presentan una mayor variancia en el error de predicción mientras mayor sea el horizonte de proyección. Mientras, el GARCH multivariado solo es capaz de predecir un número limitado de activos debido al aplanamiento demasiado veloz de la función de verosimilitud, lo cual incrementa el número de iteraciones requeridas para alcanzar el óptimo (Tu & Chen, 2018). Ante ello, el NSS resuelve estas limitaciones modelando la variancia en el corto plazo, como función creciente de los coeficientes de nivel y pendiente. Por su parte, la del largo plazo depende únicamente de aquel valor asociado al nivel.

Por otro lado, Engle (2002), presenta un método distinto denominado *Dynamic Conditional Correlation* (DCC). Este es estimado en dos partes y resuelve el problema computacional presentado por los modelos GARCH multivariados, al mismo tiempo que preserva la flexibilidad de los GARCH univariados pese a incorporar dinamismo temporal entre las variables. Este método alternativo permite que las correlaciones entre las variables adquieran dinamismo a través del tiempo. Ambos métodos de predicción (NSS y DCC) permiten que los modelos de distribución de retornos no solo sean estimados históricos, sino que también tengan un elemento dinámico y que sea un buen estimador del futuro.

Finalmente, la literatura ha mostrado que una forma de obtener distribuciones más asemejadas a la realidad consiste en la estimación no paramétricas. Estos son usados para modelar distribuciones, buscando que los datos empíricos den forma a la distribución univariada. Este procedimiento empieza por obtener la distribución individual de cada retorno. Esta nueva distribución de probabilidad empírica acumulada se estima a partir de la data observada y es bastante intuitiva ya que se ajusta rápidamente a la información de los activos. El ANEXO 1 puede servir como ejemplo ilustrativo de una distribución acumulada empírica.

Asimismo, las cópulas, que también son usadas en las estimaciones, son funciones que toman como insumo a las funciones de probabilidad marginales de cada elemento y generan distribuciones de probabilidad conjuntas. Todo esto es posible gracias al teorema de Sklar, que permite el uso de cópulas en funciones de probabilidad marginal continuas (Fama, 1965; Mandelbrott, 1963).

2. Evidencia empírica

El rechazo a las distribuciones normales empíricamente no es nuevo y ha habido pruebas desde Officer (1972). Las principales causas para este rechazo se basan en que las distribuciones normales tienen una cola muy pequeña y no capturan la curtosis de los eventos. Por ejemplo, Gabriel & Lau (2014), en un estudio sobre acciones encontró que los datos presentan una distribución con colas anchas, un caso muy distinto a la distribución normal. Es a partir de esto que se han utilizado otros métodos paramétricos y no paramétricos, los cuales son cada vez más avanzados y precisos para intentar capturar estas características. El contenido de esta literatura está en constante crecimiento debido a los nuevos descubrimientos en el campo de la estadística, con los métodos de estimación y a los avances computacionales, provenientes de la rapidez de los cálculos.

En primer lugar, modelar los retornos mediante una distribución t-student es un método que logra obtener mejores resultados que utilizar la distribución normal, debido a que posee colas mucho más gruesas. Sin embargo, presenta un pobre resultado cuando los países tienen alto riesgo soberano debido a que la curtosis y la asimetría presentada en estos países es mucho mayor a lo que una distribución T-Student es capaz de representar (Smyser et al., 1995). Asimismo, existen algunos métodos mucho más teóricos que intentan estimar los retornos de bonos mediante una distribución normal truncada para evitar el arbitraje. Dichas estimaciones también muestran mejores resultados que las distribuciones normales simples (Nolan, 2013).

No obstante, en este trabajo, se emprenderá el uso de una alternativa paramétrica: las distribuciones estables, las cuales son mucho mejores para capturar los hechos descritos previamente. Esto se debe a que son definidas por cuatro variables: de media, de dispersión, de escala y de asimetría. Por lo tanto, la distribución es mucho más flexible y puede acomodarse de mejor manera a las distintas distribuciones empíricas Kozubowski & Panorska (1999). No obstante, su uso se ha reducido a los modelos univariados, principalmente porque esta distribución no posee una forma funcional analítica. En su lugar, es estimada a partir de iteraciones computacionales, lo cual genera que sea bastante difícil de estimar en mayores dimensiones, aunque cabe resaltar que, en el trabajo de Bonato (2012), se realizó una estimación de la distribución de rendimientos de dos tipos de cambio con resultados favorables.

Por lo tanto, para poder resolver el problema de estimación computacional, se asumirá simetría en las distribuciones estables. Además, se utilizará una forma sub-gaussiana, la cual es mucho más fácil de acceder computacionalmente y permite estimar portafolios de hasta 30 activos. Los resultados de Serrano-Bautista & Mata-Mata (2018) muestran que el método mantiene su superioridad a

distribuciones normales y T-Student. En Malevergne & Sornette (2003), se plantea un modelo estable sub-gaussiano que logra incluir los elementos de predicción de curvas de rendimientos y de DCC.

Otra metodología útil para modelar una estructura multivariada a partir de múltiples retornos y el uso de una estructura de dependencias consiste en usar el método de cópulas paramétricas. Esta inicia al estimar las distribuciones marginales de cada activo del portafolio a través de una estimación paramétrica o no paramétrica, para luego ser unidas por una estructura paramétrica denominada cópula. La evidencia sobre estas estimaciones es mixta. Por ejemplo, en Cherubini et al., (2013) se evalúa si la cópula Gaussiana puede o no modelar la dependencia entre distintos activos financieros. Al final, se llegó a la conclusión de que es razonable para modelar el comportamiento del tipo de cambio de ciertas monedas ante la ausencia de mecanismos regulatorios y la ausencia de alguna crisis persistente. No obstante, esta no aplica para modelar la dependencia de los precios de algunos *commodities* como los metales.

El caso que se aplicará en el presente trabajo es el método de cópulas semiparamétricas. En otras palabras, se estimará las distribuciones marginales de cada activo del portafolio a través de una estimación no paramétrica por pseudo observaciones, las cuales serán unidas por una cópula. Para los métodos de estimación se podrían utilizar los métodos de máxima verosimilitud (ML), los métodos por pasos de inferencia por márgenes (IFM) y máxima verosimilitud canónica (CML). CML es un método mucho más robusto y permite la existencia de ciertos errores de especificación en la forma de las distribuciones, además de ser un método ideado para estimaciones semiparamétricas (Patton, 2002). Estas estimaciones son posibles gracias a una variación del teorema de Sklar y han sido introducidas en la literatura de cópulas a partir de la innovación de cópulas condicionales para poder modelar mejor los efectos de una variable en otra con el objetivo de poder obtener mejores medidas de correlación (Bacry et al., 2012). La metodología semiparamétrica a emplear en el presente documento permite integrar de manera sencilla e intuitiva las herramientas de predicción Nelson-Siegel-Svensson. En adición, no se requiere la misma cantidad de datos que una estimación puramente no paramétrica (Pålsson (1996) .

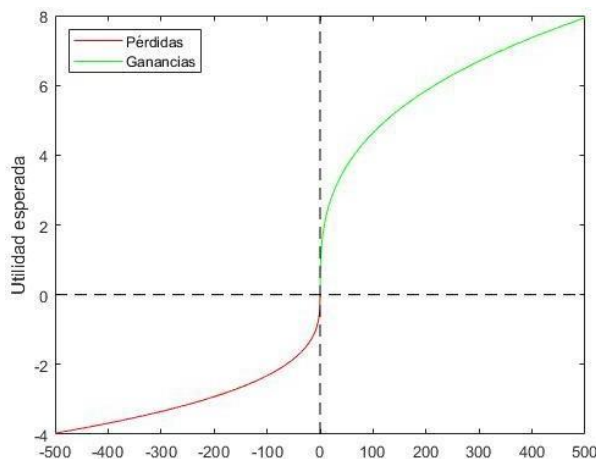
CAPÍTULO II: MARCO ANALÍTICO Y METODOLOGÍA

3. Marco analítico microeconómico del VaR

En esta sección se abordará la importancia de una medida de *Value at Risk* mejor estimada y con una mayor capacidad predictiva. Los inversionistas son, normalmente, aversos al riesgo; lo cual significa que perciben la volatilidad como perjudicial (desviación estándar). En el estudio de Armstrong & Brigo (2019), se concluyó que el coeficiente de aversión relativa al riesgo en los hogares suecos cuando su riqueza es confinada a activos financieros varía entre dos y cuatro². Además, se menciona que estos datos se ajustan también a aquellos obtenidos con información internacional.

Ahondando un poco más en las preferencias de los inversionistas, Kahneman & Tversky (2013) proponen una función de utilidad con forma de “S”, siendo estrictamente cóncava para los valores positivos, y estrictamente convexa para los negativos. En otras palabras, los agentes son aversos al riesgo al tratarse de ganancias y amantes al riesgo cuando de pérdidas se trata. Estos hallazgos son respaldados por Pyle (1971).

FIGURA 1: CURVA DE UTILIDAD EN FORMA DE “S”



Fuente: Elaboración propia, 2020.

²Los coeficientes de aversión relativa al riesgo positivos están asociados a agentes aversos al riesgo; mientras que valores negativos representan el comportamiento de individuos amantes al riesgo. Además, Jondeau & Rockinger (2006) indica que este coeficiente para aquellos individuos aversos al riesgo posee un rango que abarca del 1 al 20, entendiéndose que aquellos valores más elevados representan una mayor aversión al riesgo.

Sin embargo, el sector de interés con esta función de utilidad es el negativo. Dándole un sentido económico, los inversionistas afrontan una desutilidad marginal decreciente conforme aumentan sus pérdidas. En otras palabras, el incremento marginal de pérdidas les afecta cada vez menos a la utilidad de los individuos.

Según Aepli et al. (2017), esto puede deberse a los agentes intermediarios, los cuales reciben una recompensa monetaria en función de las ganancias que ellos puedan generar como resultado de sus movimientos de inversión. Por ello, sus acciones se regirán por sus preferencias personales, a la hora de manejar fondos pertenecientes a terceros. En este sentido, lo “peor” que les podría pasar es que los despidan de sus puestos de trabajo y que su reputación profesional se vea severamente dañada. Después de eso, en teoría, habría poco más que perder, por lo que generalmente se verían incentivados a buscar estrategias de inversión altamente riesgosas que prometan una probabilidad alta de ganancias, la cual iría de la mano con una probabilidad relativamente pequeña de pérdidas catastróficas.

De la misma manera, los agentes intermediarios presentan una utilidad que depende de los costos derivados del esfuerzo en investigación y monitoreo, los cuales son necesarios para minimizar el riesgo de pérdida del portafolio. Dichos intermediarios son propensos a subestimar los verdaderos riesgos de la inversión; por lo tanto, proveen un esfuerzo menor al óptimo (Myerson, 2012).

Por este motivo, es importante que dichos agentes afronten una restricción de riesgo con el fin de prevenir escenarios perjudiciales para ellos mismos. Es en esta línea que se busca reforzar la información completa que los inversionistas manejan, pues la obtención de un VaR más preciso permitiría que estas decisiones se lleven a cabo tomando en cuenta aquellas posibilidades que más se ajusten con la realidad.

4. Método de estimación del VaR

A continuación, se presentará el modelo teórico del presente documento, seguido de las herramientas que se emplearán.

4.1. Modelo teórico

En el presente trabajo, se teoriza que los retornos de un bono conforman una serie estacionaria en media de acuerdo con la evidencia de Kinateder & Papavassiliou (2019) y los resultados de las pruebas de ADF del ANEXO 5. Asimismo, la literatura económica indica que hay evidencia de autocorrelación tanto en media como en variancia para dichas series de retornos de bonos soberanos (Kinateder & Papavassiliou, 2019; Tsuchida et al., 2014). Si bien la teoría de mercados eficientes afirma que los retornos no deberían tener autocorrelación, la evidencia empírica y las ganancias por

el uso constante del análisis técnico nos muestra que si existe autocorrelación hasta cierto nivel (Taylor & Allen, 1992).

Entonces, el retorno puede dividirse en dos partes: un primer componente autorregresivo y otro no autorregresivo. Ahora nos centraremos en el segundo componente de cada una de las series de retornos, este componente libre de autocorrelación (que podría ser modelado como el residuo de una ecuación autorregresiva); estará idénticamente distribuido, por lo que pertenecerá a una sola distribución i.i.d. (Tsuchida et al., 2014). Dicha distribución tiene una media constante en el tiempo, ya que el componente autorregresivo conserva la media de la serie de retornos. Lo que sí se mantiene son las correlaciones entre los componentes no autocorrelacionados y estas son proporcionales a las correlaciones entre los retornos. Debido a lo anteriormente expuesto, se puede afirmar que estas series de componente no autocorrelacionados forman una distribución multivariada dinámica, la cual se transforma conforme transcurre el tiempo. Esto se debe principalmente a que las correlaciones entre los activos financieros (bonos) también sufren cambios a través del tiempo.

4.2. Metodologías a emplear

Antes de iniciar formalmente con las estimaciones que se presentarán en las secciones siguientes, vale la pena mencionar que no se utilizará una sola metodología para la realización del cálculo del VaR. En este sentido, se tiene una metodología principal y una secundaria. La principal se enfoca en el cálculo del Value-at-Risk a partir de las series de retornos libres de autocorrelación (componente no autoregresivo) y en el empleo de una matriz de correlaciones dinámica calculada a partir de la metodología de *Dynamic Conditional Correlation*. Y la secundaria, por su parte, confía más en el uso de la metodología de Nelson-Siegel-Svensson para la modelación de la media: no modela la autocorrelación explícitamente (como en la metodología principal), pues la hipótesis de esta segunda estimación se centra en que la metodología de Nelson-Siegel-Svensson modelará de forma adecuada las series de retornos de cada país. Además, se empleará la matriz de correlaciones histórica, no aquella proveniente de la metodología DCC (como ocurre en la metodología principal).

Una vez realizada esta primera etapa de la metodología principal, o de haber partido de las distribuciones observadas para el caso de la metodología secundaria, se puede proceder con los siguientes pasos para hallar el VaR. El Anexo 2 muestra un diagrama que permite visualizar de mejor manera el esqueleto principal de cada proceso de estimación, tanto de la metodología principal como de la secundaria.

4.2.1. Metodología Principal

En el caso de la primera metodología, se realizará dos estimaciones con los retornos. La forma en que se modelan estos retornos financieros implica que siguen un Autorregresivo de Medias Móviles (ARMA, por sus siglas en inglés) en sus medias; y heterocedasticidad Condicional Autorregresiva Generalizada (GARCH, por sus siglas en inglés) en la variancia (Tsuchida et al., 2014). Con estos procesos, se tendrá una serie predicha (componente autorregresivo) de retornos para cada bono. La serie de desvíos (componente no autorregresivo) es simplemente el factor residual proveniente de la diferencia entre la serie observada y la predicha para cada activo financiero. Estas series libres de autocorrelación servirán como insumo de las cópulas, las cuales son herramientas esenciales para modelar, pues las cópulas semiparamétricas son funciones que utilizan distribuciones marginales y generan la distribución conjunta luego de asumir una estructura paramétrica. En el ANEXO 3, se encuentra más información acerca de las cópulas utilizadas y los detalles concernientes a ellas.

4.2.1.1 Dynamic Conditional Correlation (DCC)

De manera paralela al proceso de estimación de distribuciones empíricas, se estiman las correlaciones dinámicas a través del método DCC (a partir de ahora “matriz de correlaciones dinámica”). Esta herramienta permite mejorar la estimación futura de la distribución de retornos. La matriz de correlaciones dinámica permite que la cópula cambie a lo largo del tiempo. La base teórica detrás del empleo del método DCC se centra en que las correlaciones entre las series libres de autocorrelación de los retornos de activos financieros cambian conforme pasa el tiempo. Por este motivo, el aplicar una estructura de correlaciones estática, invariante al tiempo, sería inadecuado.

Aprovechando la mención de la presencia de correlaciones variantes en el tiempo, la literatura muestra distintos métodos para poder dinamizar las interrelaciones entre cópulas. A continuación, se presentan dichos métodos alternativos para modelar la volatilidad, los cuales no se emplearán en las siguientes secciones, pero vale la pena mencionar. Una de ellas abarca modelos de cambios de régimen que asumen cierta estructura de correlaciones por un periodo. Luego, ante un cambio de régimen a partir de algún evento, la estructura de correlaciones cambia por completo (Lee et al., 2018). En adición, existen modelos de cópulas mixtos que son la combinación convexa de otros modelos de cópulas y generan dinamismo en estas utilizando un proceso autorregresivo de sus estimadores. Por ejemplo, en el Anexo 4 se encuentra la cópula de Clayton, el cual emplea un único parámetro para medir las correlaciones entre las series (α). Este tipo de cópulas modelan el parámetro α siguiendo un proceso autorregresivo que depende de parámetros de otras cópulas.

De los métodos justamente presentados, la línea que se escogió seguir en la metodología principal del presente trabajo es la del uso una matriz de variancias y covarianzas dinámica, proveniente del empleo del DCC. Al comparar con las otras metodologías, esta es mucho más flexible ya que puede realizar cambios en todo el horizonte temporal y no posee un cambio discreto ante algún evento en particular. En comparación con los modelos estáticos, el principal beneficio que el DCC aporta es generar estimaciones dinámicas, las cuales permiten mejorar la predicción condicional y modelar de mejor manera las correlaciones entre variables. Si se compara esta metodología con la cópula de Clayton, la cual solo posee un parámetro para modelar la interrelación de múltiples distribuciones, se puede observar la amplia ventaja de la metodología que emplea una matriz de correlaciones dinámica (de Pooter, 2007).

4.2.1.2 Empleo de cópulas

La matriz del DCC es introducida como insumo para las cópulas. En este caso, se estimarán tres tipos de cópulas, las cuales son la gaussiana, la T-Student y la Arquimediana; las cuales pueden encontrarse con mayor detalle en el Anexo 4. La primera cópula mencionada es la más conocida. Ya se ha explicado sus limitaciones y su estimación tiene como fin usarla como punto de referencia para la comparación entre las diferentes cópulas. La cópula de t-student es más realista, ya que permite colas más gruesas y maneja mejor los eventos de cola. Como las cópulas gaussianas y de t-student requieren como insumo una matriz de correlaciones, se puede optar por introducir la matriz de correlaciones dinámica del DCC o la histórica.

Por su parte, las distribuciones arquimedianas son una familia de cópulas un poco distinta a las mostradas anteriormente, ya que no expresan paramétricamente la matriz de correlaciones como los anteriores casos. Por lo tanto, en este caso no se incluirá la matriz de correlaciones dinámica. La cópula de Clayton es un subtipo de esta familia que se empleará porque permite que existan correlaciones entre activos en los eventos de cola.

La distribución estable sigue un proceso bastante similar al caso de las cópulas, solo que la distribución conjunta se realiza sin distribuciones marginales. El proceso de estimación multivariada se realiza en una sola fase y se estiman todos los parámetros de la distribución. A continuación, a la estructura multivariada también se le introduce las correlaciones dinámicas con el DCC. Finalmente, se procede a utilizar los pesos respectivos y a calcular el VaR como se explica en la siguiente sección.

4.2.1.3 Cálculo del VaR

Después de estimar todas las cópulas explicadas y obtener las distintas distribuciones multivariadas, se procede a utilizar los vectores de pesos, que representan el porcentaje de cada bono dentro del

portafolio. Los pesos son iguales con el fin de mantener una trayectoria estable del portafolio y tienen un uso estándar en la literatura sobre el VaR en Caldeira et al. (2015); Demiguel & Garlappi (2009); Santos et al. (2013); Zaffaroni (2007). Asimismo, empíricamente muchos índices de las bolsas de valores tienen pesos iguales como el Dow Jones, FT30 o Nikkei 225. Así, a pesar de ser sencillo, el portafolio no deja de ser representativo para los inversionistas del mercado.

Luego se realizan iteraciones de las distribuciones multivariadas y son multiplicados por el vector de pesos para construir la distribución univariada de retornos del portafolio. Finalmente, luego de estimar esta última distribución solo se toman los percentiles establecidos para el VaR; los cuales son el 1%, 5% y 10%. Estos valores son los VaR calculados del portafolio, a partir de la metodología principal.

4.2.2. Metodología secundaria

Por otro lado, la metodología secundaria se caracteriza por el empleo de la metodología de Nelson-Siegel-Svensson, la ausencia de filtros del componente autorregresivo y el empleo de una matriz de variancias y covarianzas histórica.

4.2.2.1 Método de *bootstrapping*

Para llevar a cabo el proceso de estimación de los parámetros correspondientes a la curva de rendimientos que proporciona la metodología de Nelson Siegel Svensson, es necesario que se realice tomando como datos de entrada a los rendimientos de bonos cupones cero correspondientes a los vencimientos pertenecientes a la curva. En otras palabras, es menester obtener primero la curva spot (curva de bonos cupones cero) para cada momento observado de la muestra. Esto se debe a que los rendimientos al vencimiento de aquellos bonos que pagan cupones se ven afectados por el “efecto cupón”, el cual consiste en que dos bonos idénticos en todo aspecto excepto en su tasa cupón pueden presentar rendimientos al vencimiento diferentes (Tu & Chen, 2018).

El problema que se presenta es el siguiente: en el mercado, solo se puede observar de forma directa bonos cupones cero con una madurez igual o menor a un año, pues aquellos bonos con mayor madurez sí presentan pagos de cupones. Por este motivo, es necesario calibrar las tasas spot de mayores vencimientos a través de la metodología de *bootstrapping*, el cual consiste en el cálculo de las tasas spot de vencimientos más grandes a partir de la información dada por las tasas correspondientes a aquellos bonos cupón cero con menor madurez que pueden ser directamente observados en el mercado, a través del razonamiento de no arbitraje.

4.2.2.2 Nelson-Siegel-Svensson

El uso de la metodología de Nelson Siegel Svensson provee predicciones acertadas para la estimación de curvas de rendimiento futuras acorde a la literatura (Nelson & Siegel, 1987). En este sentido, su propósito en la metodología secundaria es el de proporcionar estimaciones precisas de los retornos futuros para todos los bonos de diferente tenor de la muestra, tal y como se hace en la investigación de Nolan (2013).

Cabe mencionar que el cálculo de las distribuciones multivariadas con cópulas se llevará a cabo con datos desviados de su media. En este sentido, la curva proyectada por Nelson Siegel Svensson proporciona un vector de medias de cada tenor sobre el cual se centrará la distribución hallada. Por otro lado, al emplearse datos con frecuencia semanal, es menos probable observar retornos condicionales con media cero (a comparación del escenario en que se emplea datos de frecuencia diaria), razón por la cual esta metodología es pieza fundamental en la metodología secundaria.

4.2.2.3 Empleo de cópulas

Con respecto al empleo de cópulas, la metodología secundaria se centrará en la cópula de t-Student, la cual empleará como insumos las series de los bonos proyectados por la metodología de Nelson-Siegel-Svensson y la matriz de variancias y covarianzas histórica, tal y como se mencionó anteriormente. A su vez, a diferencia de la metodología principal, se empleará las series de retornos sin la aplicación de un filtro ARMA, pues ya se estaría implementando la metodología de Nelson-Siegel-Svensson para realizar el desvío de medias antes de la estimación de la cópula de t-Student.

4.2.2.4 Cálculo del VaR de la metodología secundaria

Al igual que en la metodología principal, una vez se tenga la distribución multivariada a partir de la cópula mencionada, se obtienen las distribuciones multivariadas, a las cuales se les realizan iteraciones y son multiplicadas por el vector de pesos equitativos. Posteriormente, se construye la distribución univariada del portafolio para, finalmente, extraer los valores vinculados a los percentiles 1, 5 y 10. De esta forma, se hallará el VaR 1%, 5% y 10% de la muestra.

4.2.3. Horizonte temporal de estimación (*Rolling window*)

Con respecto al horizonte temporal de la base de datos a emplear, se utilizarán datos semanales desde enero del 2010 hasta diciembre de 2019 formando alrededor de 600 observaciones. Para la metodología de estimación se utilizará la metodología de *rolling window*, la cual consiste en utilizar las primeras 300 observaciones y generar la estimación del VaR para la semana 301. Luego se

procede a realizar la predicción del VaR de la semana 302, pero con las observaciones de la semana 2 hasta la 301.

De esta manera, se conserva el periodo de predicción de las estimaciones ($t+1$) y se mantiene la misma cantidad de observaciones para la estimación del modelo.

4.2.4. Comparación de resultados

Los resultados de las estimaciones del VaR serán comparados con puntos de referencia, o *benchmarks*, los cuales, para fines del presente trabajo, son dos. El primero consiste en la estimación de un VaR paramétrico clásico, el cual asume una distribución normal, con medias y variancias históricas (estimaciones promedio de retornos y matriz de correlaciones incondicional y simple). De la misma manera, la segunda consistirá en el cálculo del VaR no paramétrico, el cual se centra en obtener el percentil 5 de un conjunto de observaciones pertenecientes a una ventana móvil, o *rolling window*, de 300 observaciones. Asimismo, es importante recordar que en los *benchmarks* con los que se comparan, no generan un valor fijo del VaR. Esto se debe a que en todo el ejercicio con la metodología del *rolling window*, el promedio de la muestra cambia con el tiempo, pues la muestra es diferente conforme este transcurre, a pesar de tratarse de una estimación basada en el promedio de una muestra. Por lo tanto, su trayectoria es muy parecida a la de una media móvil. La ventaja de los modelos dinámicos es que pueden incluir la información de nuevas observaciones de manera más eficiente que lo hace una media móvil.

Para poder comparar los métodos de estimación se utilizará la prueba de Kupiec, la cual permite ver si el número de violaciones al VaR (cuando una realización excede la máxima pérdida descrita por el VaR) es similar al especificado teóricamente (Christoffersen et al., 2001). Por otro lado, también se comparará estimaciones condicionales del VaR a través una secuencia de pruebas de cobertura. A partir de estos métodos se inferirá la eficacia de los distintos métodos de estimación del VaR (Kupiec, 1995).

Todas las estimaciones y sus variantes son mostradas en la Tabla 1:

TABLA 1: MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DEL VAR

Método de Estimación	Distribución Multivariada	Matriz de Correlaciones
(1) VaR paramétrico	Normal Multivariada	Histórica
(2) Portafolio no paramétrico	Ventana móvil de 300 observaciones	Histórica
(3) Gaussiana con DCC	Marginal no paramétrica y cópula Gaussiana	Dinámica
(4) Gaussiana Simple	Marginal no paramétrica y cópula Gaussiana	Histórica
(5) T-Student con DCC	Marginal no paramétrica y cópula T-Student	Dinámica
(6) T-Student Simple	Marginal no paramétrica y cópula T-Student	Histórica
(7) T-Student con NSS	Marginal no paramétrica y cópula Arquimediana	Histórica
(8) Arquimediana de Clayton	Marginal no paramétrica y cópula Arquimediana	Histórica
(9) Estable Subgaussiana	Estable Sugbaussiana Multivariada	Dinámica

Fuente: Elaboración propia, 2020.

5. Metodología

La metodología del presente trabajo sigue el proceso ya descrito en las secciones anteriores. En primer lugar, los datos con los que se trabajaron fueron de dos bases de datos. Los resultados principales que se presentarán proceden de la metodología principal aplicada sobre la base de datos de bonos a un año sin cupón de los países pertenecientes al G7 (Canadá, Francia, Alemania, Italia, Japón, Reino Unido y EE.UU.). De manera complementaria, se empleó la metodología secundaria para los bonos soberanos rusos de diferentes tenores de 1, 2, 3, 4, 6 y 10 años.

Para la base de datos de la metodología principal, se intenta utilizar bonos líquidos de países desarrollados porque es un ejemplo bastante práctico para el inversionista internacional. Ya que, el G7 es el grupo de los países cuyos volúmenes de negociación es mayor y por lo tanto es una buena aproximación al portafolio promedio de inversores internacionales. Asimismo, por estar ubicados en

lugares diferentes, los bonos de los G7 permiten generar un portafolio diversificado y por lo tanto más representativo de la situación del mercado. Por otro lado, el portafolio de bonos rusos fue escogido por ser parte un país menos líquido y expuesto a shocks diferentes. Asimismo, este ejercicio en un solo país es escogido para aplicar la metodología del Nelson Siegel Svenson (en lo que respecta a la curva de rendimientos de Rusia) y permite una perspectiva distinta a la de diversificación que nos ofrece los bonos del G7.

La siguiente sección introduce de manera más específica cada una de las herramientas de predicción ya descritas, así como el detalle sobre el procesamiento de la información. Para esto, se dividirá en las siguientes subsecciones: El método de estimación de las cópulas semiparamétricas con las distribuciones empíricas como distribuciones marginales; la introducción del DCC para su uso dentro de las cópulas; la introducción de la metodología de Nelson-Siegel-Svensson para mejorar la predicción de la media de retornos; y finalmente la aplicación de la distribución alpha-estable.

5.1. Filtro de medias y variancias ARMA y GARCH

Como se mencionó anteriormente, se intentó remover la autocorrelación de las series de retornos de acuerdo con un proceso ARMA en media y GARCH en variancia. Esto no quiere decir que el orden de ambos procesos será el mismo para todas las distribuciones marginales. En consecuencia, se debe hallar el orden óptimo de cada proceso para cada una de las series. En este sentido, la ecuación correspondiente a una serie modelada por un ARMA(p,q) se detalla a continuación:

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t$$

Por su parte, el proceso de un GARCH(p,q) tiene una estructura muy similar al caso del ARMA(p,q):

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$$

$$e_t^2 = v_t^2 h_t$$

Donde podemos observar que e_t es el error de la estimación ARMA y h_t es la variancia condicional esperada de la serie en el momento t y v_t es un ruido blanco. Los errores (e_t) pueden tener una persistencia en la variancia, por lo tanto, se utiliza el modelo GARCH que permite modelarlos y mejora la estimación de coeficientes del modelo ARMA. Asimismo, la inclusión del modelo GARCH se debe a que una serie de retornos de bonos no es homocedástica, por lo que requiere ser modelada para los parámetros de estimación del ARMA sean más precisos. Como ya se mencionó, se deberá estimar el proceso exacto para cada una de las series, el cual se hallará utilizando como referencia el

criterio de información de Akaike (AIC). En cada caso, se debe elegir el proceso óptimo de cada serie, el cual presenta como resultado el indicador AIC más bajo. Es importante señalar que tanto los valores de p como de q son diferentes para los procesos ARMA y GARCH. Finalmente, el error libre de autocorrelación es el residuo del modelo ARMA, estimado de la siguiente manera.

$$\hat{\epsilon}_t = Y_t - \left(c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} \right)$$

Que es afectado de manera indirecta por el proceso GARCH, ya que afecta las estimaciones de los coeficientes del proceso ARMA y permiten modelar de mejor manera la heterocedasticidad de la serie.

5.2. Estimación de cópulas semiparamétricas

5.2.1. Distribución empírica

La metodología de distribuciones empíricas busca generar de manera no-paramétrica una distribución de las observaciones. Para hacer esto, estiman la función de probabilidad acumulada (empírica) de las observaciones con la siguiente forma.

$$\hat{F}(x) = \Pr(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < x_1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x_1 < X < x_2 \\ \frac{2}{n} & \text{si } x_2 < X < x_3 \\ \dots & \dots \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } x_{n-1} < X < x_n \\ \frac{1}{n} & \text{si } X > x_n \end{cases}$$

A partir de esta función de probabilidad también se genera una función de densidad empírica de la observación y esta es la manera en la que se generará una distribución no paramétrica de los retornos marginales de los bonos. La estimación no paramétrica genera la flexibilidad que los métodos paramétricos no pueden aportar y contienen las mismas propiedades de flexibilidad que otros métodos no paramétricos como los kernels. Se emplea esta metodología porque resulta más sencilla de estimar computacionalmente que un kernel cuando se utiliza junto con cópulas. La ventaja de esta metodología sobre los histogramas clásicos es que estas metodologías convergen de manera más rápida a la distribución real.

5.2.2. Estimaciones de cópulas

Las cópulas se definen como una función $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ porque incluye en su dominio a todas las funciones de probabilidad marginales y genera como resultado la distribución de probabilidad multivariada. Para las estimaciones de las cópulas con las distribuciones empíricas se utilizará la metodología de *inference for the margins* (desde ahora IFR). Esta planea la estimación en dos pasos, ya que un proceso de solo un paso podría generar un esfuerzo computacional excesivo. Siguiendo a Annaert et al. (2015), esta metodología es similar a la estimación de máxima verosimilitud en el sentido que se maximizará la función de log-verosimilitud. Aunque esta optimización se da en dos secciones. En primer lugar, se realiza la estimación de las distribuciones empíricas ($\hat{\theta}$) a partir de los métodos presentados en las secciones anteriores. Luego, se estiman los parámetros de las cópulas (θ_2) maximizando la función de log verosimilitud:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta_2}{\text{ArgMax}} \sum_{t=1}^T \ln (c(F_1(x_{1,t}), F_2(x_{2,t}), \dots, \theta_2, \hat{\theta}))$$

Esta manera es computacionalmente más eficiente y además los parámetros de las cópulas son asintóticamente normales centrados en el parámetro real. Asimismo, como especificamos en la revisión de literatura, esta metodología es más robusta a errores de especificación en la cópula. De esta manera podemos encontrar que la distribución de retornos se distribuye de la siguiente manera:

$$u_{nx1} \sim K(\hat{u}, \hat{\Theta})$$

Donde K es la distribución de los retornos producto de la estimación semiparamétrica. Asimismo, si no se introdujese ninguna otra mejora al modelo, \hat{u} sería el vector de medias de los retornos, el cual es producto de la estimación por distribuciones empíricas. Por su parte, $\hat{\Theta}$ sería la matriz de correlaciones históricas en el caso de las cópulas gaussianas o T-Student; o el factor α en la cópula arquimediana. Mayores detalles y las diferencias en la estimación de cada cópula se pueden observar en el ANEXO 3.

5.3. Nelson-Siegel-Svensson

Esta metodología se divide en dos etapas, en la primera etapa, será necesario estimar los parámetros del modelo y en la segunda se procede a la predicción futura de estos parámetros. Para la primera parte se estima la curva de rendimientos para cada periodo. Es decir, si se posee la información de 100 meses, será necesario efectuar la estimación de 100 curvas de rendimientos. Para realizar ello, se tomará los rendimientos al vencimiento (YTM) de cada tenor observados en cada mes, a fin de poder realizar la estimación de parámetros del método de Nelson-Siegel-Svensson:

$$\hat{y}(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 \tau})}{\lambda_1 \tau} + \beta_{3,t} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_1 \tau}) - e^{-\lambda_1 \tau}}{\lambda_1 \tau} \right) + \beta_{4,t} \left(\frac{(1 - e^{-\lambda_2 \tau}) - e^{-\lambda_2 \tau}}{\lambda_2 \tau} \right)$$

Donde τ es el tenor del bono, los parámetros λ son intertemporales y $\beta_{i,t}$ representa a los factores del modelo. De forma matricial, la ecuación se muestra así:

$$\hat{y} = \Lambda(\lambda, \tau) \beta_t$$

Y de forma más detallada:

$$\begin{aligned} \hat{y}(\tau) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_1}}{\lambda_1/\tau_1} & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_1}}{\lambda_1/\tau_1} - e^{-\lambda_1/\tau_1} & \frac{e^{-\lambda_2/\tau_1}}{\lambda_2/\tau_1} & -\lambda_2/\tau_1 \\ 1 & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_2}}{\lambda_1/\tau_2} & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_2}}{\lambda_1/\tau_2} - e^{-\lambda_1/\tau_2} & \frac{e^{-\lambda_2/\tau_2}}{\lambda_2/\tau_2} & -\lambda_2/\tau_2 \\ 1 & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_3}}{\lambda_1/\tau_3} & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_3}}{\lambda_1/\tau_3} - e^{-\lambda_1/\tau_3} & \frac{e^{-\lambda_2/\tau_3}}{\lambda_2/\tau_3} & -\lambda_2/\tau_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_n}}{\lambda_1/\tau_n} & \frac{e^{-\lambda_1/\tau_n}}{\lambda_1/\tau_n} - e^{-\lambda_1/\tau_n} & \frac{e^{-\lambda_2/\tau_n}}{\lambda_2/\tau_n} & -\lambda_2/\tau_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \\ \beta_{4,t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es importante recalcar que esta notación es para un solo periodo t . Es decir, existirán N bonos en cada periodo de tiempo y un total de T periodos de tiempo. Para poder hallar los factores se utilizará el método de estimación de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y los parámetros intertemporales (λ) se consideran fijos e iguales a valores aleatorios entre 0 y 10, siguiendo la metodología de Jones et al. (1998). De esta manera se estiman los $4T$ factores históricos (β) y luego los parámetros intertemporales son estimados mediante el proceso de minimización de errores de los YTM al cuadrado.

$$(\hat{\lambda}, \hat{\lambda}) = \underset{1 \ 2}{\text{ArgMin}} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N (\hat{y}(\tau) - y(\tau))^2$$

Una vez que se tenga los T vectores de betas históricos, se procede con la segunda etapa de predicción de valores futuros de los factores del modelo de Nelson Siegel Svensson ($\beta_{i,t}$) a través de un modelo VAR (1):

$$\beta_t = A\beta_{t-1} + e_t$$

De forma más detallada:

$$\begin{array}{r}
 \beta_{1,t} \\
 \beta_{2,t} \\
 \beta_{3,t} \\
 [\beta_{4,t}]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{r}
 a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad a_{1,3} \quad a_{1,4} \\
 a_{2,1} \quad a_{2,2} \quad a_{2,3} \quad a_{2,4} \\
 a_{3,1} \quad a_{3,2} \quad a_{3,3} \quad a_{3,4} \\
 a_{4,1} \quad a_{4,2} \quad a_{4,3} \quad a_{4,4}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 \beta_{1,t-1} \\
 \beta_{2,t-1} \\
 \beta_{3,t-1} \\
 [\beta_{4,t-1}]
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 e_{1,t} \\
 e_{2,t} \\
 e_{3,t} \\
 e_{4,t}
 \end{array}$$

De esta manera, se podrá proyectar las curvas de rendimiento futuras con el uso de los factores predichos ($\beta_{i,t}$) y los parámetros intertemporales pre-establecidos (λ). Para mayores periodos de predicción (h) asumimos que la predicción sigue un proceso VAR (1). Una vez que se estiman las YTM futuras (y_t) se puede estimar los retornos de acuerdo con la siguiente fórmula.

$$r_t = -\tau(y_t - y_{t-h})$$

Esto debido a que nos encontramos con bonos cupones cero y τ es el tenor de cada uno de los bonos. h es el periodo de predicción del Nelson Siegel Svensson. Por lo tanto, el retorno del periodo se puede aproximar como la duración (τ) multiplicado por la variación del YTM pronosticado por el modelo. Luego, la expresión matricial que incluye el efecto *pull-to-par* al retorno será.

$$u_{r_t|t-h} = -\tau \otimes y_{t-h} + \tau \otimes y_t + \frac{h}{252} y_{t-h}$$

Donde y_t es el vector de retornos estimado y τ es el vector de tenores asociados a los retornos. Asimismo, el operador \otimes es la multiplicación de Hadamard (multiplicación vectorial de elemento a elemento). El efecto *pull-to-par* es parte del retorno determinístico del bono cupón cero y siguiendo a Lombardi & Veredas (2009), se modela como el periodo de predicción (h) multiplicado por el YTM inicial y se divide entre el número de días hábiles del año (252). De esta manera se estima la media de retornos predichos denominado $u_{r_t|t-h}$.

5.4. Dinamic Conditional Correlation (DCC)

El DCC es un modelo de volatilidad de los retornos. Esta metodología nos permitirá hallar tanto la matriz de correlaciones para las cópulas y para la distribución estable. Para lograrlo, se estimará las variancias del vector de retornos de los bonos.

$$E_{t-1}(var(r_t)) = \Omega_t = D_t^{-1} H_t D_t^{-1} \dots (1)$$

Esta metodología se divide en dos partes, la primera analiza de manera univariada la volatilidad de los retornos estandarizados dentro de la matriz D_t^{-1} , la cual está en su inversa para mantener la notación de Engel (2002). Dicha matriz tiene la siguiente forma:

$$D_t^{-1} = diag\{\sqrt{h_{i,t}}\} = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{1,t}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{h_{N,t}} \end{bmatrix}$$

Donde $h_{i,t}$ se define como la variancia condicional de los retornos de cada bono. Precisamente por ser la variancia condicional de un solo bono estos son estimados a partir de modelos de volatilidad

univariados GARCH. Se probarán distintos métodos de predicción como los GARCH asimétricos (GJR-GARCH), GARCH exponenciales (EGARCH), umbral GARCH (TGARCH), y el GARCH no lineal asimétrico (NAGARCH) todos estos modelos serán comparados y escogidos por el criterio de información de Akaike (AIC).

Luego, para modelar H_t se requiere descomponer las correlaciones. Es decir, cada uno de los elementos de la matriz tienen la forma $p_{i,j,t}$ y pueden ser descompuestos de la siguiente forma:

$$p_{i,j,t} = \frac{q_{i,j,t}}{\sqrt{q_{i,i,t}q_{j,j,t}}}$$

Y luego el conjunto total de elementos de $q_{i,j,t}$ componen la nueva matriz Q_t . Es decir, la matriz tiene la siguiente composición.

$$Q_t = \begin{bmatrix} q_{1,1,t} & \cdots & q_{1,N,t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{N,1,t} & \cdots & q_{N,N,t} \end{bmatrix}$$

Luego, podemos modelar la trayectoria de Q_t como un GARCH multivariado de la forma:

$$Q_t = \bar{Q}(1 - a - b) + a(z_{t-1}z'_{t-1}) + bQ_{t-1}, \quad \text{con } a + b < 1$$

Donde $z_{t-1} = \frac{r_{i,t}}{\sqrt{h_{i,t}}}$ son los retornos estandarizados por volatilidad. Es decir, se reproduce el proceso

de descomposición de los elementos $q_{i,j,t}$ que produce retornos estandarizados. Por lo tanto, para poder incluir nuevos factores en la dinámica es necesario estandarizarlos y estimar z_{t-1} . Además, \bar{Q} es la matriz de variancias y covarianzas incondicionales de z_t .

Finalmente, con la matriz Q_t estimada de elementos $q_{i,j,t}$ se puede reconstruir las correlaciones condicionales $p_{i,j,t}$ que son los elementos de H_t . Finalmente, se puede utilizar la ecuación (1) para reconstruir la matriz Ω_t . De esta manera se ha podido generar una matriz de variancias y covarianzas condicional de los retornos de los bonos. Esta estimación es esencial para el uso de las cópulas y las distribuciones estables. De aquí en adelante se muestra la metodología como si la predicción fuera hacia un periodo futuro ($h=1$), aunque no se pierde la generalidad, ya que los métodos aplicados hacia h periodos futuros son bastante similares. De esta manera se consigue una matriz de variancias y covarianzas de los retornos dinámica a través del tiempo.

5.5. Unión de las diversas metodologías de cópulas.

A manera de repaso de lo visto hasta el momento, tenemos tres fases de la metodología principal que desembocan en una distribución multivariada, las cuales se pueden observar en el ANEXO 2.

- 1) La primera fase utiliza los retornos semanales y utiliza los filtros de los modelos ARMA y GARCH para poder asegurar la no autocorrelación de las series. Es decir, se estiman estos modelos y se trabajan con los errores. A su vez, a estos errores se les denomina retornos “limpios” de la autorregresión. De esta manera aseguramos que los retornos son i.i.d. y podemos modelarlos como pertenecientes a una misma distribución de retornos.
- 2) La segunda metodología utiliza los retornos limpios de autocorrelación para modelar las distribuciones empíricas, obtener las distribuciones marginales que servirán como *input* de las cópulas, las cuales necesitan a su vez una matriz de variancias y covarianzas en caso de la cópula Gaussiana y T-Student.
- 3) La tercera estima la matriz de variancias y covarianzas dinámica como el resultado de la metodología del DCC o a través de la estimación de la misma cópula. Esta matriz modela la estructura de las correlaciones dentro de la distribución multivariada, dependiendo del tipo de cópula que se emplee.

La diferencia con la metodología secundaria es que esta última no utiliza el filtro de medias y variancias, sino en su lugar intenta modelar la media variante de los retornos a partir del modelo de NSS. Para esta metodología secundaria también se puede encontrar un esquema en el ANEXO 2. En la metodología principal la volatilidad es principalmente modelada por los modelos GARCH del filtro y luego las correlaciones entre bonos son modeladas con el DCC.

Finalmente, bajo la metodología principal los retornos proyectados y limpios tanto de su autorregresión en media y heterocedasticidad en variancia a un periodo ($h = 1$) modelados bajo estas metodologías muestran las siguientes distribuciones:

$$u_{t+1, nx1} \sim K(u; \Omega_t)$$

Donde u es la media incondicional estimada a partir de las estimaciones no paramétricas y Ω_t puede ser tanto la estimación condicional del DCC ($E_t[\Omega_{t+1}]$) o la estimación incondicional de la variancia a partir de las cópulas (Ω_t). Este último es dinámico por la metodología de *rolling window* que permite cambiar la matriz de correlaciones pues la muestra cambia en cada estimación. Por otro lado, para la metodología secundaria se modelan los retornos a partir del NSS. Y de manera muy similar a la sección anterior se utiliza una cópula T-Student para modelar la distribución multivariada. Es decir, modelaremos la distribución de la siguiente forma:

$$u_{t+1, nx1} \sim K\left(-\tau \otimes y_{t-1} + \tau \otimes y_t + \frac{1}{252} y_{t-1}; \Omega_t\right)$$

Finalmente, una vez que las distribuciones multivariadas han sido estimadas se utiliza el método de Montecarlo para la estimación del VaR. Por lo tanto, se realizan muchas iteraciones de la distribución

multivariada y son multiplicadas por el vector de pesos escogido $w = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. Esto genera la

estimación de la distribución de retornos del portafolio. Luego de efectuar la simulación de muchas realizaciones de este portafolio se toma el percentil respectivo (uno, cinco y diez), el cual es el valor del VaR.

5.6. Distribuciones alpha-estables subgaussianas

Las distribuciones alpha-estables son formas de modelamiento más flexibles que las distribuciones empleadas hasta ahora. Usualmente una distribución estable se define a partir de cuatro parámetros $X \sim S_\alpha(\Sigma, \beta, \delta)$. Donde α es una medida de estabilidad y de curtosis; Σ es una medida de dispersión; β es una medida de asimetría y δ es el vector de posición, el cual se interpreta como la media. Una metodología alternativa que se ha escogido son las distribuciones alpha-estables subgaussianas. Estas son un subtipo de distribución alpha-estable que asume simetría. Dichas distribuciones mantienen la flexibilidad antes mencionada de los diversos momentos de las distribuciones, a pesar de que se suponga una distribución simétrica ($\beta = 0$) para que las estimaciones sean computacionalmente accesibles. Asimismo, es posible introducir dinamismo en la distribución mediante la matriz de variancias dinámica (Σ_t). Es decir, los retornos limpios de autorregresión en los retornos y heterocedasticidad de la variancia tienen la siguiente distribución en $t+1$.

$$r_{t+1, nx1} \sim S_\alpha(\Sigma_{t+1}, 0, \delta)$$

Por lo tanto, la media de la distribución es similar a la propuesta en la metodología anterior y también el DCC es aplicado a los retornos “limpios”. Las distribuciones alpha-estables subgaussianas se construyen computacionalmente a partir de la siguiente función características.

$$\phi(u) = \exp - \left(\frac{(u \Sigma u)^2}{2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \sec \left(\frac{\pi \alpha}{4} \right) (u \Sigma u)^2$$

Donde se muestran las variables de una distribución alpha-estable subgaussiana (α y Σ), ya que en este tipo de estimaciones se asume que el vector de medias δ es igual a cero. Para lograr esto, se trabaja con una data desviada de medias. Solo para efectos de esta sección, u es un vector unitario que se utiliza para los procesos iterativos computacionales. Es decir, se utiliza para la estimación de la función de probabilidad multivariada.

La estimación de la función de probabilidad de la variable (x) se realiza a través del método de máxima verosimilitud, donde la función de maximización se aproxima por métodos numéricos. Para

poder aplicar este método primero requerimos una forma de estimar la función de probabilidad y se

realiza resolviendo la siguiente integral junto con la función característica (ϕ) numéricamente. La siguiente metodología es ilustrativa para el caso univariado y es similar para mayores dimensiones.

$$f(x, \alpha, \gamma, \beta, u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \phi(t) dt$$

El proceso de estimación trabaja con datos univariados corregidos por heterocedasticidad. Es decir, siguiendo a (Kupiec, 1995), antes de realizar la estimación propia del modelo, se tienen que ajustar los datos por los filtros ARMA y GARCH presentados anteriormente. Luego del ajuste, se toman las observaciones desviadas de la media con la forma $\epsilon_t = r_t - \delta$ y se procede a estimar los parámetros θ que son los parámetros de las distribuciones alpha estables subgaussianas. Siguiendo a Bonato (2010), la función a maximizar obtiene la siguiente ecuación:

$$l(\theta, \epsilon) = \sum_{t=1}^T \log(f(\epsilon, \theta)) \dots (3)$$

Y reemplazando los valores para las distribuciones sub-gaussianas obtenemos.

$$= -\frac{T}{2} \log(|\Sigma|) + \prod_{t=1}^T f(z_t, \alpha) \dots (4)$$

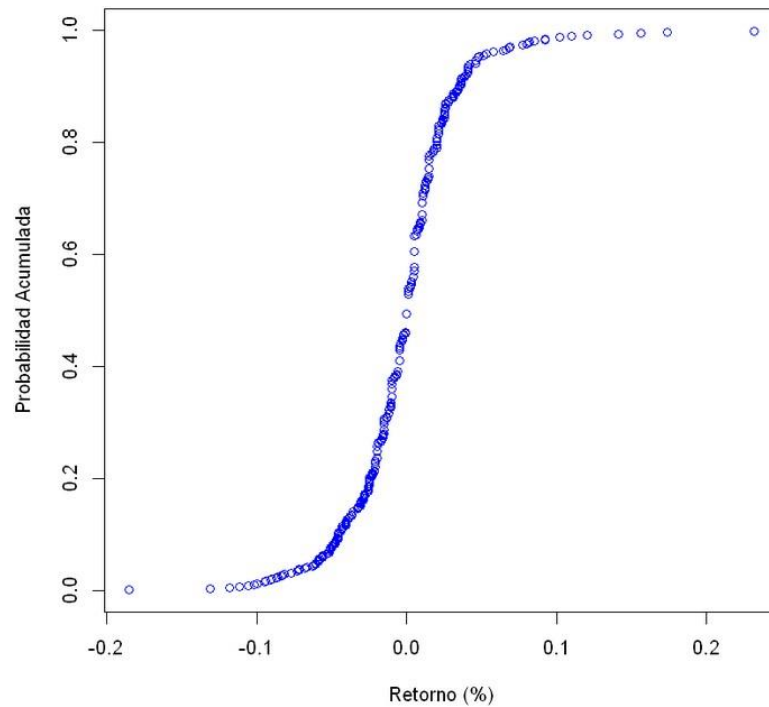
En nuestro caso particular $\theta = (\alpha, \Sigma)$ y $z_t = \Sigma^{-\frac{1}{2}} \epsilon_t$ se distribuye como $S_\alpha(1,0,0)$. Estos estimadores son asintóticamente normales, por lo que cumplen con las mismas propiedades de estimadores clásicos de máxima verosimilitud. Para la estimación conjunta de una distribución estable multivariada, primero se debe verificar que los datos univariados cumplen una distribución estable con valores de estabilidad (α) relativamente iguales. La explicación del método de comparación los valores de estabilidad, así como la explicación más a detalle de la estimación del VaR se encuentra en el ANEXO 4. Es importante notar que una vez que se obtiene la distribución $S_\alpha(\Sigma_{t+1}, 0, \delta)$ el cálculo del VaR es similar a los procesos ya descritos.

CAPÍTULO III: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Los resultados mostrados en esta sección corresponden a la metodología principal y son basados en los datos de los bonos a 1 año sin cupón extraídos de Bloomberg. Los estadísticos descriptivos sobre los retornos pertenecientes a los bonos de los países de la G7 se pueden encontrar en el ANEXO 5. Estos muestran que los bonos de mayor volatilidad son los italianos y muestran bastante similitud con medias muy cercanas al cero. Solo los bonos americanos e italianos tienen una asimetría negativa y todos los demás muestran un cierto sesgo hacia retornos positivos por su asimetría positiva. Si analizamos la curtosis, el bono americano tiene la mayor concentración en la media al tener la menor curtosis. Esto se puede explicar por la alta liquidez de los bonos soberanos americanos.

La primera metodología para aplicar consistió en llevar a cabo los filtros ARMA y GARCH que permiten un mejor trabajo con datos estacionarios y sin características de autorregresividad. Luego, las distribuciones empíricas y las cópulas son esenciales para la primera sección de las estimaciones. Como ya se mencionó, las distribuciones empíricas permiten una mayor flexibilidad en las distribuciones univariadas. Por su parte, el empleo de cópulas es una mejor metodología para poder modelar el elemento de interrelación entre las distribuciones. Como esta estimación se realiza en una ventana móvil, esto significa que en cada ventana se realiza una nueva estimación de una distribución empírica. La siguiente imagen muestra la distribución de probabilidad empírica acumulada de los datos de retornos para una ventana móvil de 300 observaciones del bono americano con tenor de un año.

FIGURA 2: DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD ACUMULADA EMPÍRICA DEL BONO AMERICANO A 1 AÑO

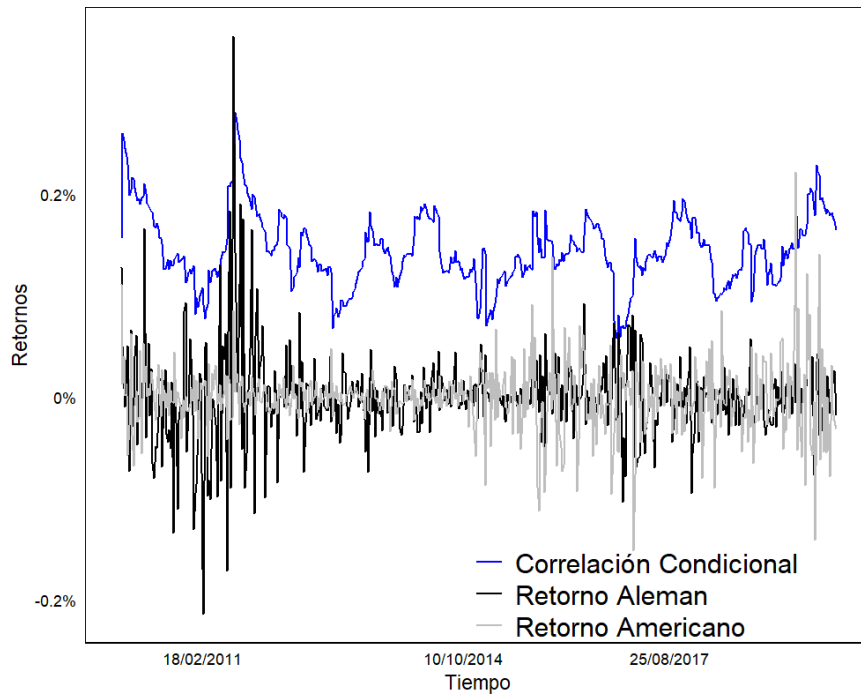


Fuente: Elaboración propia, 2020.

Como se puede observar, los datos parecen estar predominantemente concentrados alrededor de cero. Siendo sus valores extremos algunos retornos semanales menores de -0.2% o retornos de más de 0.2%. Sin embargo, la concentración de la mayoría de los datos se encuentra entre -0.1% y 0.1%. La distribución parece simétrica por tener la media en cero y con probabilidad acumulada cercana a 50%. Asimismo, tanto retornos positivos y negativos son bastante concentrados alrededor del cero. Este tipo de distribución marginal empírica servirá luego para modelar las simulaciones de la cópula. El rango reducido de valores de la distribución se debe al hecho de tratarse de los bonos americanos. Como bien se sabe, los bonos más seguros no tienen mucha volatilidad, pero si mucha liquidez.

Después, se realiza la estimación del modelo DCC para los retornos. Este modelo requiere una larga serie de tiempo para poder ser estimado, al menos 100 observaciones. Esta es la razón por la se han utilizado los datos semanales y ventanas de 300 observaciones. La correlación condicional predicha a partir de los datos responde bastante bien y muestra coherencia con las series observadas. Se puede observar como en el periodo de medianos del 2011, los retornos fueron mayores tanto en los bonos americanos como en los alemanes. Esto generó un incremento en la correlación condicional, el cual esté modelado por el DCC. Por lo tanto, el VaR se ajustará a la nueva matriz de correlaciones de manera más rápida que en la metodología clásica de VaR paramétrico.

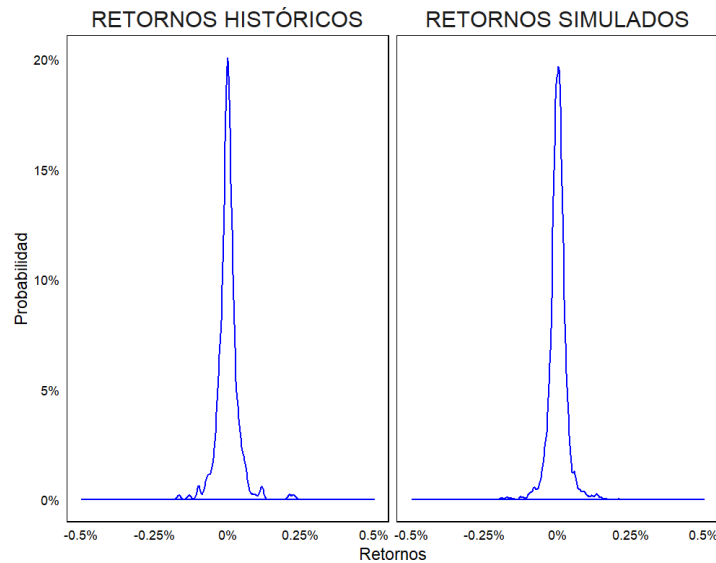
**FIGURA 3: CORRELACIÓN PREDICHA DEL PORTAFOLIO POR EL DCC Y
RETORNOS DE BONOS AMERICANOS Y ALEMANES**



Fuente: Elaboración propia, 2020.

En el siguiente gráfico se pueden observar los resultados de simulación semiparamétrica de la cópula y las distribuciones marginales empíricas junto con los datos que se utilizaron para calibrar el modelo. Se realiza una simulación de 4000 realizaciones para cada periodo predicho. Es decir, para cada estimación del VaR se realiza la simulación y se extrae el percentil 1, 5 o 10.

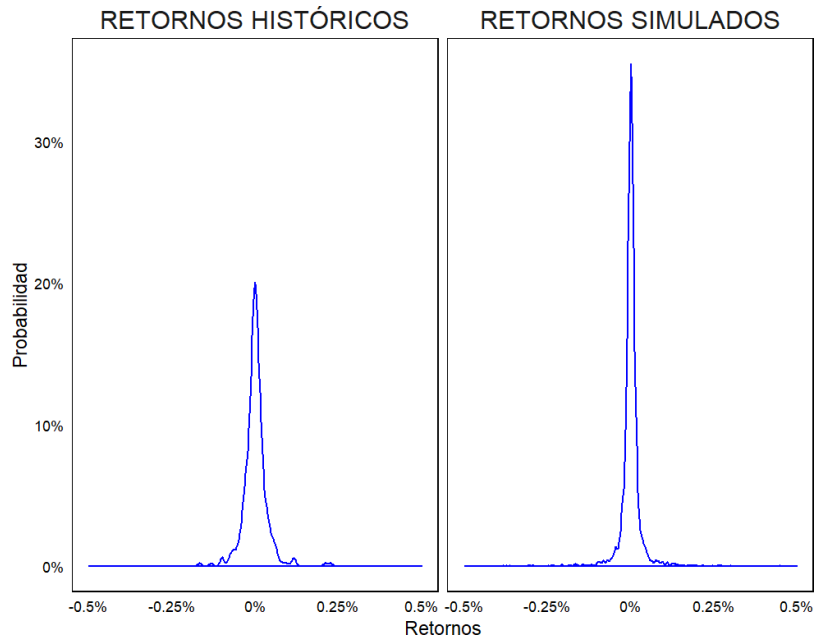
FIGURA 4: RETORNOS HISTÓRICOS Y RETORNOS SIMULADOS DEL PORTAFOLIO A TRAVÉS DE LAS CÓPULA GAUSSIANA SEMIPARAMÉTRICA



Fuente: Elaboración propia, 2020.

Como se puede observar, los resultados simulados se asemejan mucho a los datos reales. Ambos tienen una fuerte acumulación alrededor del cero y se distribuyen simétricamente. Sin embargo, la diferencia se encuentra en las colas. Se puede observar que los eventos extremos son más frecuentes en los datos históricos que en los simulados, en especial alrededor del retorno 0.25%. Los datos históricos muestran cierta acumulación que no puede ser modelada por la cópula. Esta diferencia en modelación puede afectar los resultados de estimación del VaR. Por otro lado, con las herramientas ya establecidas, y de acuerdo con lo descrito en la metodología, se propuso la estimación de la distribución estable. Los resultados de una simulación del portafolio de este procedimiento, así como los datos utilizados, se muestran a continuación.

FIGURA 5: RETORNOS HISTÓRICOS Y RETORNOS SIMULADOS DEL PORTAFOLIO A TRAVÉS DE LAS DISTRIBUCIONES ALPHA ESTABLES SUBGAUSIANAS



Fuente: Elaboración propia, 2020.

Los resultados a simple inspección de la modelación parecen mostrar un mejor resultado bajo la cópula gaussiana que con las distribuciones estables. Esto se debe principalmente a que el nivel de concentración alrededor del cero es mucho más cercano a la distribución histórica en la FIGURA 4. Esto puede ser explicado por cómo los retornos de los bonos de países desarrollados se parecen mucho más a una distribución normal y poseen poca asimetría por ser bonos constantemente negociados.

Finalmente, para poder medir la potencia de cada una de las estimaciones del VaR, se compararán los resultados haciendo uso de pruebas de *backtesting* de Kupiec y de Cobertura. La primera es la más usada por su antigüedad y porque analiza si el porcentaje de excesos realizados (número de veces que el retorno realizado es menor que el VaR) es cercano al valor teórico (10%, 5% o 1%). Para realizar esto se utilizan los resultados de la metodología del VaR y los retornos que se observaron en la realidad. El estadístico para la prueba de Kupiec es el siguiente.

$$Kupiec(\lambda) = -2 \log(\lambda) = -2 \log \left(\frac{q^{N-X} (1-q)^X}{\binom{N}{X} \lambda^X} \right) \sim \chi^2(1)$$

$$\left(1 - \frac{X}{N}\right) \quad \left(\frac{X}{N}\right)$$

Donde q es la probabilidad especificada en el VaR, X es el número de excesos totales y N es el número de observaciones. Asimismo, se utilizarán las pruebas de cobertura, las cuales siguen la misma lógica que la prueba de Kupiec. La diferencia radica en que realiza ajustes que intentan verificar que las realizaciones de los excesos sean independientes. Esta prueba compara, a través del ratio de máxima verosimilitud, si los datos observados se comportan de manera similar a los descritos por el VaR y si las realizaciones son independientes. El estadístico asociado es el siguiente:

$$LR_{CC} = -2 \log \left[\frac{L(q; \hat{Q}; I_1, I_2, \dots, I_t)}{L(I_1, I_2, \dots, I_t)} \right] \cdot X^2 \quad (1)$$

Donde q es la probabilidad especificada en el VaR y \hat{Q}_2 es la matriz de probabilidad condicional. Esta matriz permite asegurar que los excesos del VaR son independientes unas de otras. Por lo tanto, comparamos la distribución teórica con el VaR teórico y la independencia junto con los datos observados a partir del ratio de máxima verosimilitud. Este estadístico también se distribuye como una distribución de Chi-cuadrado con un grado de libertad. Antes de abordar los resultados de las metodologías, conviene analizar primero la implicancia de que se rechace la hipótesis nula de ambas pruebas en las diferentes maneras de hallar el VaR. Una imposibilidad de rechazo de esta implicaría que el número de excesos (entiéndase por el número de veces en las que el retorno es menor que el VaR respectivo en la serie histórica o proyectada) serían los esperados a la hora de analizar el percentil indicado en el VaR. Por ejemplo, si se tuviese una serie de 1000 semanas y el enfoque está sobre el VaR 10%, entonces el número de excesos esperados sería de 100. Aplicándolo al caso en cuestión, en el que se tiene una serie proyectada de 222 semanas, el número esperado en este escenario sería de 22 semanas aproximadamente.

Así, la imposibilidad de rechazo de la hipótesis nula indicaría que el número de excesos de la metodología analizada se aproxima al número esperado indicado por el percentil del VaR en cuestión. En este sentido, un no rechazo a esta hipótesis nula indicaría que el modelo de VaR empleado no se desvía de forma significativa de los valores esperados al inicio del planteo de la prueba. Por el contrario, un rechazo potente a dicha hipótesis nula sería perjudicial para la metodología observada, pues dicho número de excesos sería mucho mayor, o menor, a lo indicado previamente dado el número de observaciones y el percentil del VaR. A continuación, se presentan los resultados de Kupiec y de la prueba de cobertura correspondientes al número de excesos y a los valores de probabilidad de cada metodología para el VaR 10%, el VaR 5% y el VaR 1%. Es importante señalar que, en este caso, los resultados más favorables están vinculados a aquellas metodologías cuyos p-valores sean mayores. Es decir, aquellas cuyos valores sean menores a 0.1 tendrán los resultados menos favorables.

TABLA 2: RESULTADOS DE LA PRUEBA DE KUPIEC Y DE COBERTURA

VaR	Metodología	π_{real}	π_{exp}	Kupiec	Prueba Cobertura
10%	VaR Paramétrico	0.0811	0.10	0.333	0.290
	VaR No Paramétrico	0.1171	0.10	0.407	0.596
	Gaussiano con DCC	0.0991	0.10	0.964	0.843
	Gaussiano Simple	0.0811	0.10	0.333	0.568
	T-Student con DCC	0.1081	0.10	0.691	0.891
	T-Student simple	0.1081	0.10	0.691	0.891
	T-Student con NSS	0.2432	0.10	0.006	0.016
	Arquimediana de Clayton	0.0991	0.10	0.964	0.843
	Estable Subgaussiana	0.0811	0.10	0.333	0.568
5%	VaR Paramétrico	0.0405	0.05	0.504	0.526
	VaR No Paramétrico	0.0541	0.05	0.784	0.879
	Gaussiano con DCC	0.0405	0.05	0.504	0.546
	Gaussiano Simple	0.0360	0.05	0.316	0.448
	T-Student con DCC	0.0450	0.05	0.731	0.587
	T-Student simple	0.0450	0.05	0.731	0.587
	T-Student con NSS	0.0901	0.05	0.733	0.245
	Arquimediana de Clayton	0.0360	0.05	0.316	0.448
	Estable Subgaussiana	0.0180	0.05	0.012	0.040
1%	VaR Paramétrico	0.0225	0.01	0.107	0.243
	VaR No Paramétrico	0.0180	0.01	0.280	0.519
	Gaussiano con DCC	0.0090	0.01	0.880	0.971
	Gaussiano Simple	0.0090	0.01	0.880	0.971
	T-Student con DCC	0.0045	0.01	0.356	0.650
	T-Student simple	0.0000	0.01	0.035	0.107
	T-Student con NSS	0.0000	0.01	0.006	0.024
	Arquimediana de Clayton	0.0090	0.01	0.880	0.971
	Estable Subgaussiana	0.0000	0.01	0.035	0.107

La tabla reporta la comparación del VaR calculado a un nivel de confianza de un 90%, 95% y 99% para un portafolio de bonos rusos, para cada una de las metodologías presentadas en la primera columna. π_{real} (π_{esp}) representa el ratio realizado (esperado) de los excesos en el VaR. Entiéndase como excesos al número de veces que la serie histórica de retornos toma valores por debajo de la serie del VaR en cuestión. La tercera columna recoge el p-valor de la prueba de Kupiec, la cual tiene como hipótesis nula “el modelo del VaR es correcto.” La cuarta columna recoge el p-valor de la prueba de cobertura la cual incorpora una prueba de independencia entre los excesos encontrados. Los valores resaltados son los más altos para su nivel de confianza del VaR.

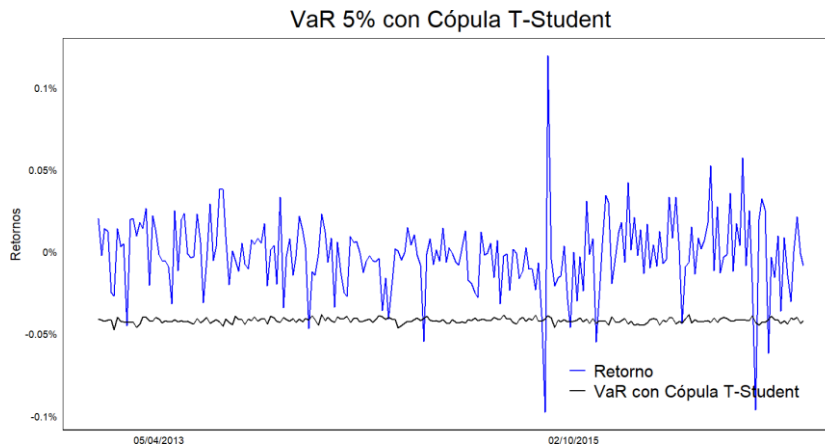
Fuente: Elaboración propia, 2020.

Como se puede observar en la tabla 2, los resultados de la prueba de Kupiec aplicada a las diversas metodologías arrojan resultados diversos. Sin embargo, se ha sombreado de negro las metodologías con mayores p-valores tanto en la prueba de Kupiec como en la prueba de cobertura. Por ejemplo, la metodología utilizada como base de comparación, el cálculo del VaR paramétrico, presenta resultados desfavorables, para dos de los tres percentiles dados en comparación con las mejores metodologías de acuerdo con las comparaciones. A su vez, el ratio realizado de excesos difiere en gran medida del número de excesos teórico. Asimismo, la metodología no paramétrica, que consiste en obtener el percentil 5 de la ventana móvil, mostró un resultado superior al del VaR paramétrico en todos los niveles, pues sus resultados son muy buenos para el percentil 5. Sin embargo, los resultados de estas dos metodologías *benchmark* son consistentemente menores al compararse con los de las cópulas. Por ello, las metodologías presentadas superan el *benchmark* paramétrico y el no paramétrico.

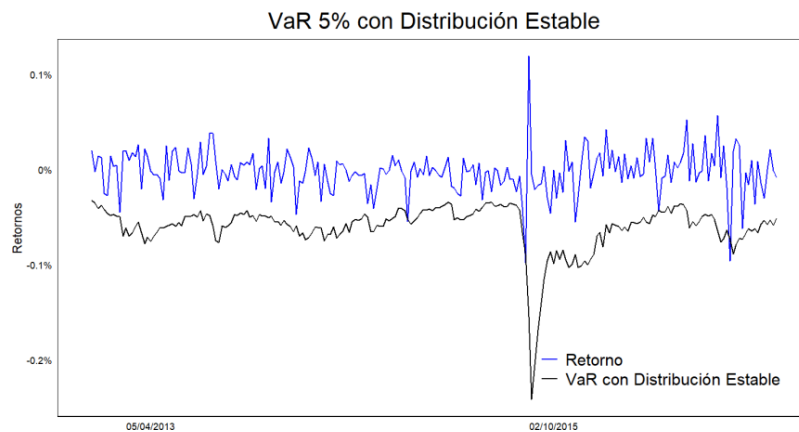
Por otro lado, la metodología de la cópula Gaussiana con DCC presenta muy buenos resultados consistentemente para todos los niveles de cálculo del VaR, lo cual la presenta como la mejor metodología a partir de los datos presentados. Muy probablemente esto sucede porque los retornos de los países desarrollados se alinean mucho más con una distribución normal que los retornos de países emergentes. Luego, las metodologías con cópulas T-Students; la metodología con cópula gaussiana sin DCC; y la cópula arquimediana se encuentran en el siguiente lugar por tener p-valores altos, aunque no son los mejores. Finalmente, para el comparativo entre cópulas con DCC y sin DCC podemos observar que los p-valores parecen ser mayores en las cópulas gaussianas con DCC que sin DCC. Sin embargo, en el caso de la distribución T-Student, los resultados entre usar o no un DCC son muy similares. Por lo tanto, la evidencia de que utilizar el DCC mejora la estimación de las cópulas no es concluyente.

En el caso de la distribución estable subgaussiana se observa que algunos estadísticos apuntan a un rechazo a la hipótesis nula. Estos resultados se pueden explicar en la FIGURA 6 donde comparamos la distribución estable con la cópula T-Student semiparamétrica, se puede observar que la distribución estable exagera cada uno de los incrementos o pérdidas de los retornos. Esto genera que en lugares donde pueda ocurrir un exceso, el VaR se reduzca demasiado, generando que este exceso no ocurra. Por lo tanto, el ratio de excesos para esta metodología es menor comparado con las otras cópulas.

FIGURA 6: RETORNOS HISTÓRICOS Y VAR DE 5% ESTIMADOS DEL PORTAFOLIO A TRAVÉS DE LAS CÓPULAS T-STUDENT Y DISTRIBUCIONES ALPHA ESTABLES SUBGAUSSIANAS



Fuente: Elaboración propia, 2020.



Fuente: Elaboración propia, 2020.

En el caso del VaR con medias NSS se puede observar, en el ANEXO 6, que estas estimaciones son mucho más volátiles que cualquier otra metodología. Las series menos volátiles son los *benchmarks* como el VaR paramétrico o no paramétrico, pues estas no se adaptan bien a los retornos. Sin embargo, en esta ocasión, tanto la alta volatilidad como ruido del VaR genera que el número de excesos no se acerque al valor teórico. Entonces, es menester resaltar que existe un *trade-off* en lo que a volatilidad respecta, pues una serie de VaR constante no daría ninguna información ante variaciones bruscas en los retornos. De la misma forma, y así como ya se ha mencionado, una volatilidad semejante a la serie misma tampoco resulta óptimo. En consecuencia, se puede sugerir la existencia de una volatilidad óptima, la cual es mejor aproximada por el VaR estimado por las cópulas.

CAPÍTULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Después de llevar a cabo todos los ejercicios de simulación y esquematización de resultados, vale la pena realizar un recuento de las principales conclusiones. En primer lugar, las metodologías de las cópulas semiparamétricas resultan ser las mejores para modelar el portafolio de retornos. En este caso en particular, la cópula gaussiana con DCC muestra ser consistentemente la mejor estimación del VaR. Sin embargo, esto puede deberse a la muestra con la que se trabaja, la cual consiste en los países del G7. Por otro lado, volvimos a mostrar que el VaR clásico paramétrico y el VaR No paramétrico no muestran consistentemente ser metodologías competentes con la misma flexibilidad que las cópulas y no tienen una misma fuerza de predicción. Las otras metodologías como la Nelson Sieguel Svenson y la distribución estable resultaron ser menos eficaces por ser más volátiles. De la misma manera, exageran los movimientos del VaR, por lo que el número de excesos observado no se acerca al valor teórico. En particular, la metodología de Nelson-Sieguel-Svensson puede ser empleada como una buena modelación a los retornos de una serie histórica. No obstante, esta capacidad de ajuste de las predicciones en base a la información obtenida hasta el momento es la que le otorga una volatilidad que invalida su competencia de modelar un VaR más preciso.

Una de las recomendaciones que realizamos para futuros estudios relacionados al manejo de riesgo de portafolios a través del uso de metodologías alternativas para hallar el Value at Risk es el de ampliar la base de datos para obtener estadísticos más precisos y poder llevar a cabo una comparación de ajuste con la realidad más acertada. Esto se podría llevar a cabo incrementando el horizonte temporal de las observaciones tomadas como entradas o aumentando la frecuencia de registro de datos. Por ejemplo, mientras que en el presente trabajo se empleó data semanal en un período de 10 años (lo que da un total de 600 observaciones), la investigación de Caldeira et al. (2015) empleó observaciones diarias para un total de 900 observaciones.

Asimismo, para darle un mayor uso provechoso a aquellas metodologías que no cumplieron con el propósito esperado planteado en la hipótesis, es menester mencionar las oportunidades que presenta la metodología de Nelson-Sieguel-Svensson para el análisis de riesgo de un portafolio. Si bien su adición marginal a la metodología de cópulas no funciona en el propósito esperado, se pueden emplear para utilizarse en la generación de las probabilidades condicionales del Value at Risk. Es decir, en toda historia la probabilidad de que suceda un exceso es la misma (sea 10%, 5% o 1%). Sin embargo, una mejor herramienta para las políticas de inversión puede ser el uso de un VaR condicional. Es decir, generar una probabilidad condicional que, dada la situación actual, permita predecir qué tan probable sea una pérdida mayor al VaR en el siguiente periodo. Todo esto usando la metodología de predicción de Nelson-Sieguel-Svensson.

Una posible extensión a este proceso puede ser el de generar una estrategia de inversión a partir del VaR y analizar si realmente es posible generar una estrategia activa de portafolio a través de esta métrica de riesgo. Es decir, es posible encontrar mejores formas de hallar el VaR de un portafolio; sin embargo, si esto no se materializa en mejores estrategias de inversión o la reducción de pérdidas en eventos de cola, entonces esta línea de investigación no tendría una aplicación práctica. Por lo tanto, una posible extensión consiste en generar un método de optimización de portafolio con una regla alineada con el VaR que permite precisamente medir o aproximar la ganancia de una mejor estimación de esta métrica de riesgo. Por ejemplo, la investigación de Gaivoronski & Pflug (2005) propone un método de optimización de un portafolio que tiene como objetivo minimizar el Value-at-Risk asociado. La lógica detrás de este proceso es que los agentes tienen como métrica del riesgo al VaR de su portafolio. Por lo tanto, escogen los pesos de cada activo que minimicen (en valor absoluto) dicha métrica. De esta manera se reducen las posibles pérdidas del portafolio. Una posible extensión que se recomendaría a futuras investigaciones es la aplicación de esta metodología empleando los cálculos del VaR que se proponen en este trabajo.

En conclusión, se puede afirmar que, con los datos que se manejan hasta el momento, ciertas metodologías alternativas nos pueden proporcionar métricas más precisas de lo ya establecido por la literatura, tal y como es el empleo de las cópulas y del DCC. No obstante, la utilidad de las herramientas presentadas debe ser explotada al máximo tanto en la literatura de investigación como en la constante mejora del manejo de portafolio de inversiones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aeppli, M. D., Füss, R., Henriksen, T. E. S., & Paraschiv, F. (2017). Modeling the multivariate dynamic dependence structure of commodity futures portfolios. *Journal of Commodity Markets*, 6(March), 66–87. <https://doi.org/10.1016/j.jcomm.2017.05.002>
- Annaert, J., Claes, A. G. P., de Ceuster, M. J. K., & Zhang, H. (2015). Estimating the long rate and its volatility. *Economics Letters*, 129, 100–102. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2015.02.022>
- Arditti, F. D. (1967). Risk and the Required Return on Equity. *The Journal of Finance*, 22(1), 19–36. <https://www.jstor.org/stable/2977297>
- Armstrong, J., & Brigo, D. (2019). Risk managing tail-risk seekers: VaR and expected shortfall vs S-shaped utility. *Journal of Banking and Finance*, 101, 122–135. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2019.01.010>
- Assidenou, K. E. (2011). Cointegration of Major Stock Market Indices during the 2008 Global Financial Distress. *International Journal of Economics and Finance*, 3(2), 212–222. <https://doi.org/10.5539/ijef.v3n2p212>
- Bacry, E., Dayri, K., & Muzy, J. F. (2012). Non-parametric kernel estimation for symmetric Hawkes processes. Application to high frequency financial data. *The European Physical Journal B*, 85(5), 157. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2012-21005-8>
- Bonato, M. (2012). Modeling fat tails in stock returns: a multivariate Stable-GARCH approach. *Computational Statistics*, 27, 499–512. <https://doi.org/10.1007/s00180-011-0270-4>
- Caldeira, J. F., Moura, G. v., & Santos, A. A. P. (2015). Measuring Risk in Fixed Income Portfolios using Yield Curve Models. *Computational Economics*, 46(1), 65–82. <https://doi.org/10.1007/s10614-014-9438-7>
- Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2013). 5. Estimation and Calibration from Market Data. In *Copula Methods in Finance* (pp. 153–180). <https://doi.org/10.1002/9781118673331.ch5>
- Chiang, I. H. E. (2016). Skewness and coskewness in bond returns. *Journal of Financial Research*, 39(2), 145–178. <https://doi.org/10.1111/jfir.12093>
- Christoffersen, P., Hahn, J., & Inoue, A. (2001). Testing and comparing Value-at-Risk measures. *Journal of Empirical Finance*, 8(3), 325–342. [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(01\)00025-1](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(01)00025-1)

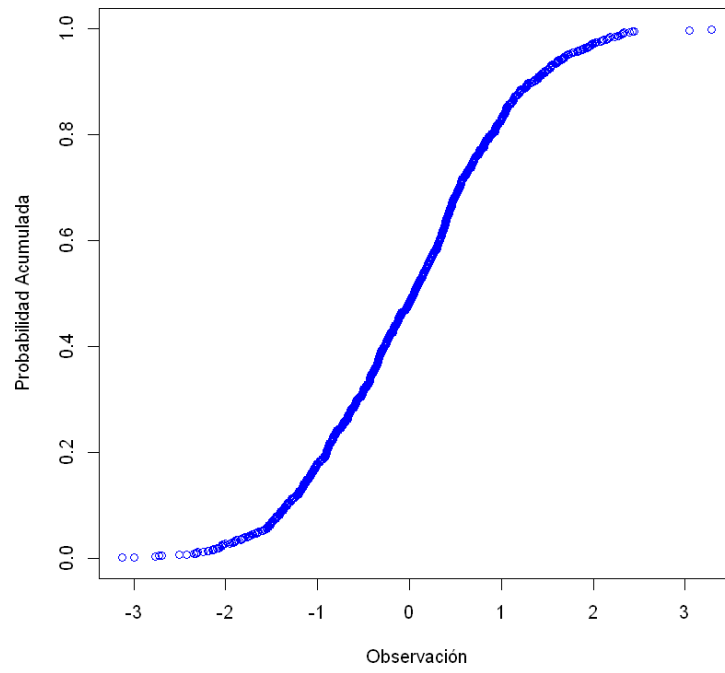
- de Pooter, M. (2007). Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models: In-Sample Fit versus Out-of-Sample Forecasting Performance. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.992748>
- Demiguel, V., & Garlappi, L. (2009). Optimal versus Naive Diversification : How Inefficient Is the 1 / N Portfolio Strategy ? *Oxford University Press*, 22(5), 1915–1953.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3), 339–350. <https://doi.org/10.1198/073500102288618487>
- Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *The Journal of Business*, 38(1), 34–105. <http://links.jstor.org/sici?sici=0021-9398%28196501%2938%3A1%3C34%3ATBOSP%3E2.0.CO%3B2-6>
- Gabriel, C., & Lau, C. (2014). On the distribution of government bond returns: Evidence from the EMU. *Financial Markets and Portfolio Management*, 28(2), 181–203. <https://doi.org/10.1007/s11408-014-0228-y>
- Gaivoronski, A., & Pflug, G. (2005). Value-at-risk in portfolio optimization: properties and computational approach. *The Journal of Risk*, 7(2), 1–31. <https://doi.org/10.21314/jor.2005.106>
- Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). Optimal Portfolio Allocation under Higher Moments. *European Financial Management*, 12(1), 29–55. <https://doi.org/10.1111/j.1354-7798.2006.00309.x>
- Jones, C. M., Lamont, O., & Lumsdaine, R. L. (1998). Macroeconomic news and bond market volatility. *Journal of Financial Economics*, 47(3), 315–337. [https://doi.org/10.1016/S0304-405X\(97\)00047-0](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(97)00047-0)
- Kahneman, D., & Tversky, A. (2013). Chapter 6: Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. In *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making* (Vol. 47, Issue 2, pp. 99–127). https://doi.org/10.1142/9789814417358_0006
- Kinateder, H., & Papavassiliou, V. G. (2019). Sovereign bond return prediction with realized higher moments. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 62, 53–73. <https://doi.org/10.1016/j.intfin.2019.05.002>
- Kozubowski, T. J., & Panorska, A. K. (1999). Multivariate geometric stable distributions in financial applications. *Mathematical and Computer Modelling*, 29(10–12), 83–92. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(99\)00094-1](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(99)00094-1)

- Kraus, A., & Litzenberger, R. H. (1976). Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *The Journal of Finance*, 31(4), 1085–1100. <https://www.jstor.org/stable/2326275>
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *The Journal of Derivatives*, 3(2), 73–84. <https://doi.org/10.3905/jod.1995.407942>
- Lee, Y., Hong, K., & Yang, K. (2018). Sovereign Risk Contagion in East Asia: A Mixture of Time-Varying Copulas Approach. *Emerging Markets Finance and Trade*, 54(7), 1513–1537. <https://doi.org/10.1080/1540496X.2018.1445989>
- Lombardi, M. J., & Veredas, D. (2009). Indirect estimation of elliptical stable distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 53(6), 2309–2324. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2008.04.035>
- Malevergne, Y., & Sornette, D. (2003). Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependences. *Quantitative Finance*, 3(4), 231–250. <https://doi.org/10.2139/ssrn.291140>
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394–419. <http://www.jstor.org/stable/2350970>
- Myerson, R. B. (2012). A model of moral-hazard credit cycles. *Journal of Political Economy*, 120(5), 847–878. <https://doi.org/10.1086/668839>
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 60(4), 473–489. <https://www.jstor.org/stable/2352957>
- Nolan, J. P. (2013). Multivariate elliptically contoured stable distributions: Theory and estimation. *Computational Statistics*, 28(5), 2067–2089. <https://doi.org/10.1007/s00180-013-0396-7>
- Officer, R. R. (1972). The distribution of stock returns. *Journal of the American Statistical Association*, 67(340), 807–812. <https://doi.org/10.1080/01621459.1972.10481297>
- Pålsson, A. M. (1996). Does the degree of relative risk aversion vary with household characteristics? *Journal of Economic Psychology*, 17(6), 771–787. [https://doi.org/10.1016/S0167-4870\(96\)00039-6](https://doi.org/10.1016/S0167-4870(96)00039-6)
- Patton, A. (2002). *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*.
- Pyle, D. H. (1971). ON THE THEORY OF FINANCIAL INTERMEDIATION. *The Journal of Finance*, 26(3), 737–747. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1971.tb01727.x>

- Santos, A. A. P., Nogales, F. J., & Ruiz, E. (2013). Comparing univariate and multivariate models to forecast portfolio value-at-risk. *Journal of Financial Econometrics*, 11(2), 400–441. <https://doi.org/10.1093/jfinec/nbs015>
- Serrano-Bautista, R., & Mata-Mata, L. (2018). Estimación Del Var Mediante Un Modelo Condicional Multivariado Bajo La Hipótesis A-Estable Sub-Gaussiana. *Ensayos Revista de Economía*, 37(1), 43–76. <https://doi.org/10.29105/ensayos37.1-2>
- Smyser, M. W., Hamid, S. S., & Prakash, A. J. (1995). Log-Normality and Arbitrage Free Bounds on the Distribution Range of Zero-Coupon Pure Discount Bond Returns. *Journal of Business Finance & Accounting*, 22(6), 769–788. <https://doi.org/10.1111/j.1468-5957.1995.tb00388.x>
- Taylor, M. P., & Allen, H. (1992). The use of technical analysis in the foreign exchange market. *Journal of International Money and Finance*, 11(3), 304–314. [https://doi.org/10.1016/0261-5606\(92\)90048-3](https://doi.org/10.1016/0261-5606(92)90048-3)
- Tsuchida, N., Giacometti, R., Fabozzi, F., Shin Kim, Y., & Frey, R. (2014). Time Series and Copula Dependency Analysis for Eurozone Sovereign Bond Returns. *The Journal of Fixed Income*, 75–87.
- Tu, A. H., & Chen, C. Y. H. (2018). A factor-based approach of bond portfolio value-at-risk: The informational roles of macroeconomic and financial stress factors. *Journal of Empirical Finance*, 45(December 2017), 243–268. <https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2017.11.010>
- Zaffaroni, P. (2007). Contemporaneous aggregation of GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 28(4), 521–544. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.2006.00522.x>
- Zakamouline, V. (2014). Portfolio performance evaluation with loss aversion. *Quantitative Finance*, 14(4), 699–710. <https://doi.org/10.1080/14697688.2011.620978>
- Zakamouline, V., & Koekebakker, S. (2009). A generalisation of the mean-variance analysis. *European Financial Management*, 15(5), 934–970. <https://doi.org/10.1111/j.1468-036X.2009.00483.x>

ANEXOS

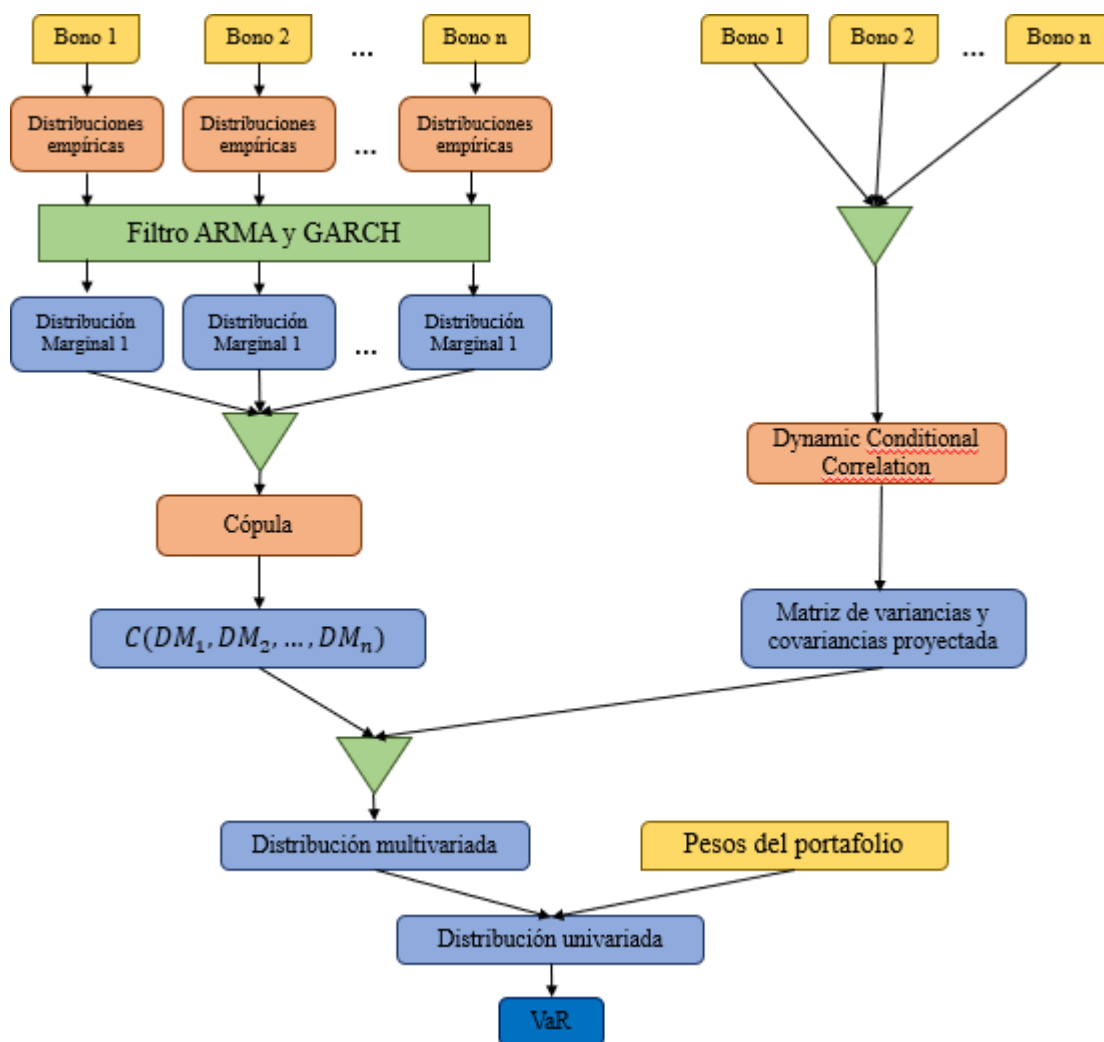
**ANEXO 1: DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL
ACUMULADA A TRAVÉS DE PSEUDO-OBSERVACIONES**



Fuente: Elaboración propia, 2020.

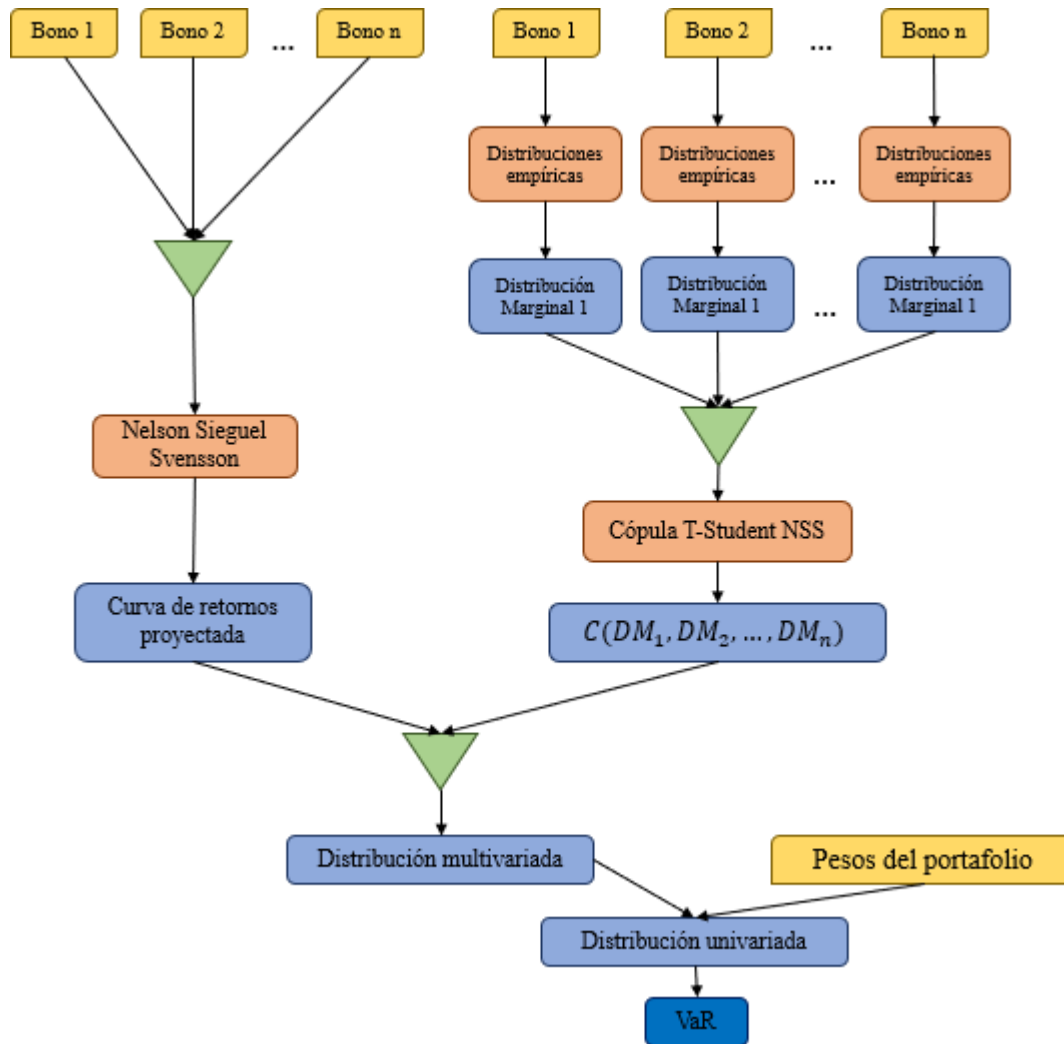
ANEXO 2: PROCESO DE ESTIMACIÓN DEL VAR

2.1 Metodología principal



Fuente: Elaboración propia, 2020.

2.2 Metodología secundaria



Fuente: Elaboración propia, 2020.

ANEXO 3: CÓPULAS MULTIVARIADAS

Cópula Gaussiana

La cópula gaussiana es la más popular cópula y se define de la siguiente manera.

$$C^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

Donde Φ_R es la función de distribución normal acumulada multivariada con matriz de variancias y covarianzas R y Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución normal acumulada univariada. De manera explícita la cópula tiene la forma:

$$C_R^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^n \det(R)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \exp\left(-\frac{1}{2} x' R^{-1} x\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Donde:

n : Son el número de distribuciones marginales utilizadas en la cópula

Φ^{-1} : es la inversa de la función de distribución normal acumulada univariada

R : Es la matriz de variancias y covarianzas

u_i : Representa la función de densidad de probabilidad univariada construida de los kernels

Es importante remarcar que la matriz R puede ser colocada exógenamente a través de distintas estimaciones. Es decir, puede ser una estimación estática con todos los datos. Lo cual generaría una distribución estática para la data utilizada. Por otro lado, también es posible generar una matriz R condicional. Lo cual significa que varía para cada periodo de tiempo, lo cual también significa se obtendrá una cópula semiparamétrica para cada periodo manteniendo los mismos datos de estimación. Esta herramienta es importante al ser conectada con las estimaciones del DCC.

Cópula T-Student

Otra de las cópulas utilizadas es la T-Student, que se define de una manera muy similar a la gaussiana. Con la diferencia que la cópula T-Student está sujeta a grados de libertad que también son estimados en la cópula. Por lo tanto, la forma reducida de una cópula T-Student con matriz de variancias y covarianzas R con ν grados de libertad se define de la siguiente manera:

$$T_{R,\nu}(u_1, u_2, \dots, u_n) = t_{R,\nu}(t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n))$$

Donde $t_{R,v}$ es la función de distribución T-Student acumulada multivariada con matriz de variancias y covarianzas R y v grados de libertad y ϕ^{-1} es la inversa de la función de distribución T-Student acumulada univariada con v grados de libertad. De manera explícita se tiene la siguiente expresión:

$$t_{R,v}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2}) |R|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{v}{2}) (v\pi)^{\frac{n}{2}} (1 + \frac{1}{v} X^T R^{-1} X)^{-\frac{v+n}{2}}} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Donde:

n : Son el número de distribuciones marginales utilizadas en la cópula

$\Gamma(x)$: Es la función gamma que se define $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

t_v^{-1} : es la inversa de la función de distribución T-Student acumulada univariada con v grados de libertad

R: Es la matriz de variancias y covarianzas

u_i : Representa la función de densidad de probabilidad univariada construida de los kernels

Es importante recalcar que la matriz de variancias y covarianzas R también tiene el mismo potencial de generar dinamismo en la cópula que en el caso de la cópula gaussiana.

Cópula Arquimediana de Clayton

La cópula de Clayton es regularmente utilizada en la literatura y es en especial para modelar retornos en escenarios de pérdidas. Tiene una expresión mucho más sencilla que las anteriores cópulas.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left[\sum_{i=1}^n u_i^{-\alpha} - n + 1 \right]^{-\frac{1}{\alpha}}, \text{ con } \alpha > 0$$

Donde:

n : Son el número de distribuciones marginales utilizadas en la cópula

u_i : Representa la función de densidad de probabilidad univariada construida de los kernels

α : Variable de intercorrelación entre variables.

En este tipo de cópulas toda la relación entre las variables se define en la variable α . Si α es igual a uno las variables son por completo independientes y en la medida que $\alpha \rightarrow \infty$ la correlación entre

ambos activos es mayor. Aunque, debido a los límites de α , no modela de manera adecuada la interrelación negativa entre diferentes distribuciones univariadas. Este tipo de estructura no permite

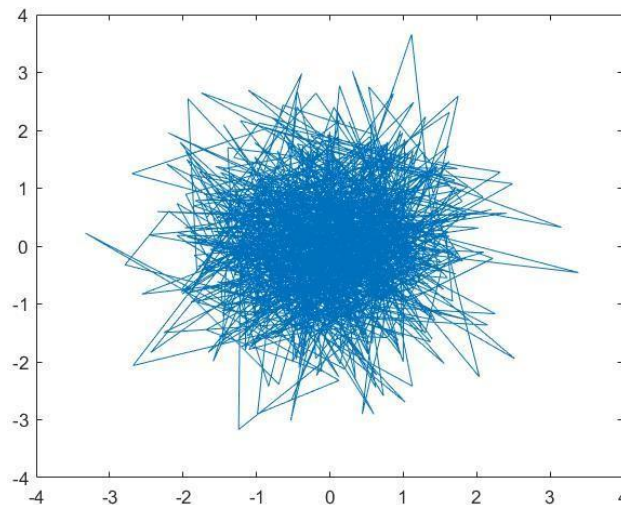
una estimación dinámica de la cópula de manera similar a las cópulas anteriores. Por ello, la estimación de esta cópula será estática y servirá de control para comparar con otros métodos de estimación.

ANEXO 4 : METODOLOGÍA PARA LA COMPARACIÓN DEL PARÁMETRO ALPHA (α) EN LA DISTRIBUCIONES ALPHA-ESTABLES Y LA ESTIMACIÓN DEL VAR

Para realizar la comparación y poder concluir que el parámetro (α) es similar en las distribuciones univariadas se sigue a (Nolan, 2013) se realiza el siguiente método.

- a) Se estiman distribuciones univariadas estables generalizadas con datos corregidos por heterocedasticidad. Es decir, se hallan los α 's estimados de la distribución de retornos de los cupones cero.
- b) Se verifica que los parámetros α de cada una de las distribuciones sean relativamente similares para poder estimar una distribución conjunta con un solo valor de alpha.
- c) Los resultados de las estimaciones también deben mostrar valores de β cercanos a cero.
- d) Realizar un análisis gráfico (*scatter*) entre cada dos variables para asegurarse de que se encuentren un comportamiento elíptico en los datos, la referencia de cómo se ven este tipo de distribuciones se observa en la figura inferior. Básicamente muestran que las observaciones deben estar acumuladas en las medias de las distribuciones y una menor población de observaciones puede encontrarse en sus alrededores.

SCATTER DE DATOS ELÍPTICOS



Fuente: Elaboración propia, 2020.

Luego de probar que los datos son aptos para una distribución estable multivariada subgaussiana se procede con la estimación que también podemos dividir en los siguientes pasos.

- a) Se procede a estimar el α multivariado de la forma:

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i}{d}$$

Donde los α_i son los valores de estabilidad individuales de cada una de las distribución univariadas y son unidas como un promedio simple para estimar α multivariado. Por lo tanto, d es el número de bonos cupones cero usados.

- b) Se centran las distribuciones de retornos en cero al substraerte su vector de medias

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n).$$

- c) Se estima la matriz de dispersión (Σ) a partir de la metodología del DCC, tomando como insumos los datos originales para poder modelar tanto la heterocedasticidad como las correlaciones entre las series. Se puede hacer esto a partir de las investigaciones de Bonato (2012) quien analiza su comportamiento y define que esta matriz se comporta de manera muy similar a una matriz de variancias y covarianzas. Asimismo, Jondeau & Rockinger (2006) también hace uso de esta metodología con mejores la predictibilidad de las estimaciones.
- d) Se estima el nuevo vector de medias de retornos utilizando la metodología de Nelson-Siegen-Svensson antes descrita $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$.
- e) Finalmente, de esta manera se han estimado todas los parámetros importantes y se puede ahora obtener los retornos de una distribución Alpha estable $X \sim S_\alpha(\Sigma, \beta, \delta)$ a través de una estimación de Montecarlo. Por lo tanto, se puede generar de manera numérica la distribución de los retornos multivariados.
- f) Luego, se utiliza el vector de pesos iguales (w_i) que se multiplican con los retornos correspondientes para poder generar la distribución del portafolio de bonos cupones cero. Finalmente, se tomar el percentil respectivo (uno, cinco y diez) y este es el valor del VaR estimado con la metodología de distribuciones alpha-estables.

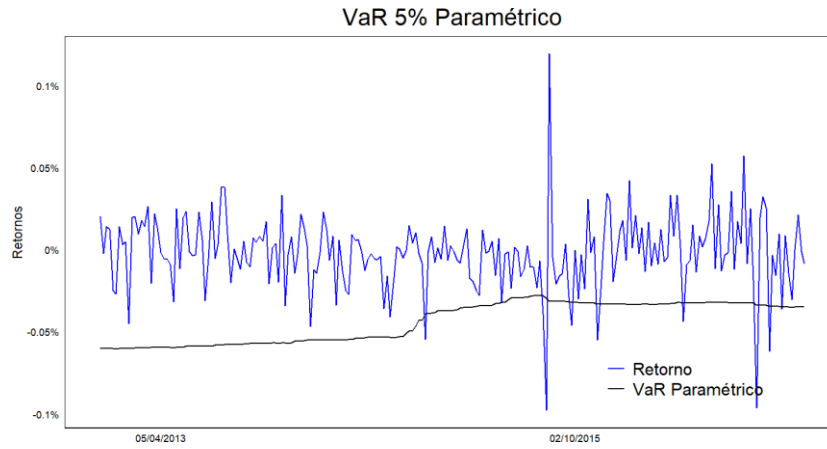
**ANEXO 5: ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE LOS RETORNOS DE BONOS A UN AÑO
DE PAÍSES PERTENECIENTES AL G7**

Estadístico	Alemania	Canada	Francia	Italia	Japón	Reino Unido	EE. UU.
Media	0.003%	-0.002%	0.003%	0.002%	0.001%	0.000%	-0.002%
Mediana	0.002%	-0.002%	0.001%	0.001%	0.000%	0.003%	0.000%
Variancia	0.047%	0.050%	0.053%	0.181%	0.015%	0.053%	0.037%
Asimetría	0.8265	0.6588	1.9185	-0.5733	0.6775	-1.2991	0.4442
Curtosis	9.3315	7.8259	22.5439	16.2872	13.0022	5.3863	6.0719
Estadístico de Prueba ADF	-7.9282*	-7.7976*	-9.9835*	-6.8526*	-6.8656*	-8.7915*	-5.6481*

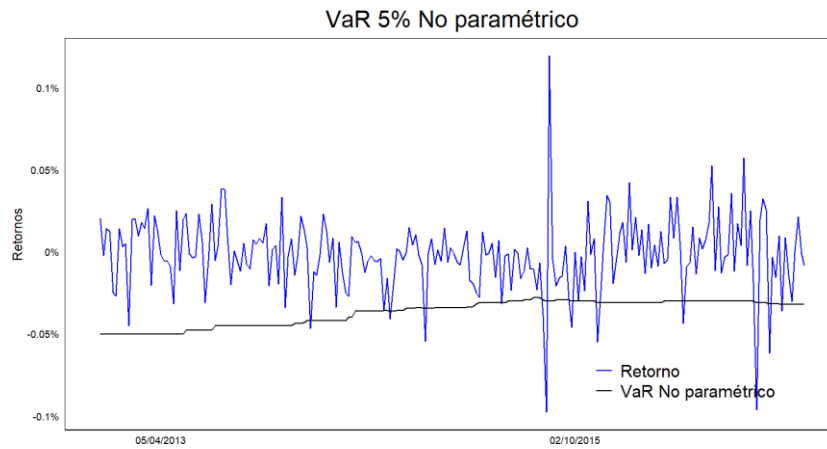
*Se Rechaza la prueba ADF al 5%

Fuente: Elaboración propia, 2020.

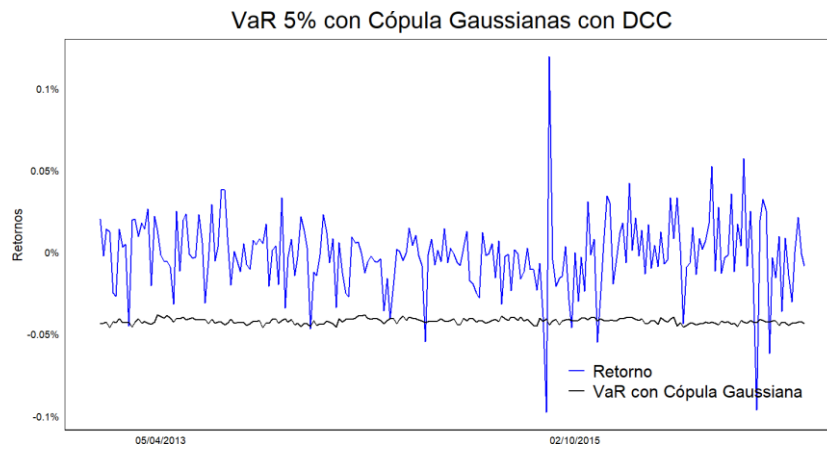
ANEXO 6: COMPARACIONES DE VAR AL 5% ESTIMADOS Y LOS RETORNOS REALIZADOS



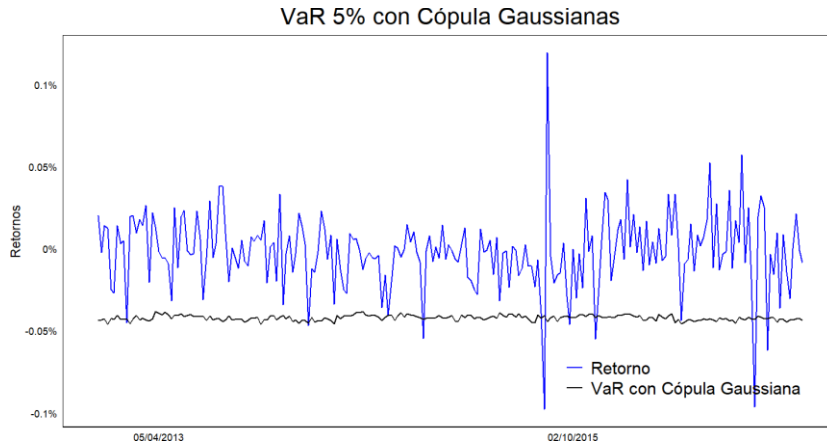
Fuente: Elaboración propia, 2020.



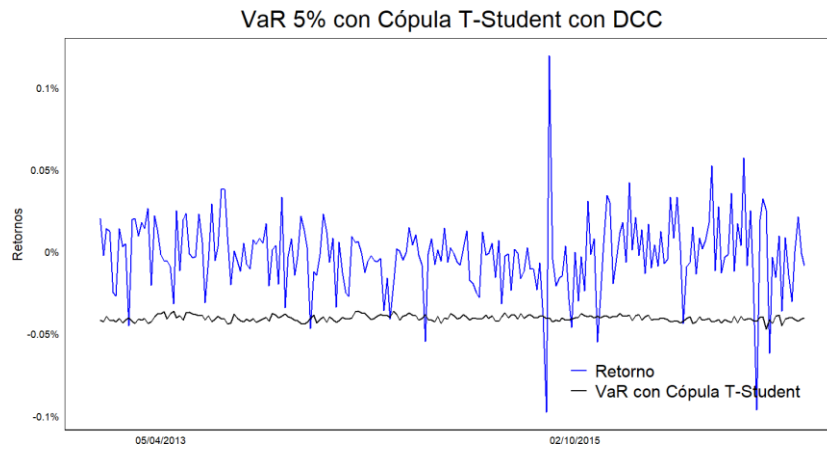
Fuente: Elaboración propia, 2020.



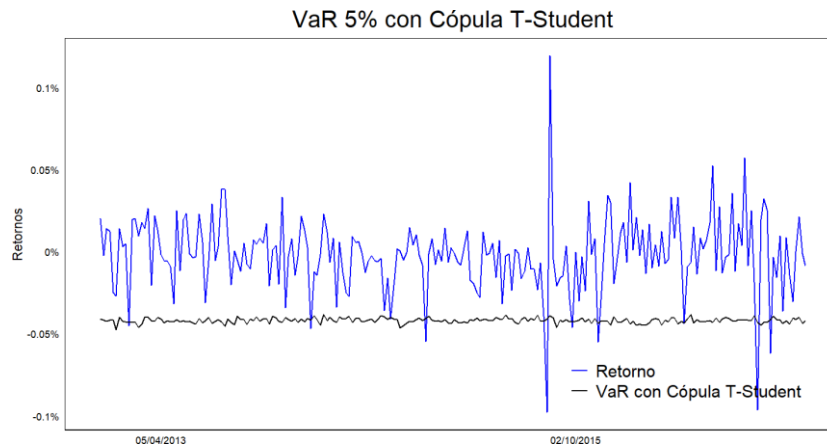
Fuente: Elaboración propia, 2020.



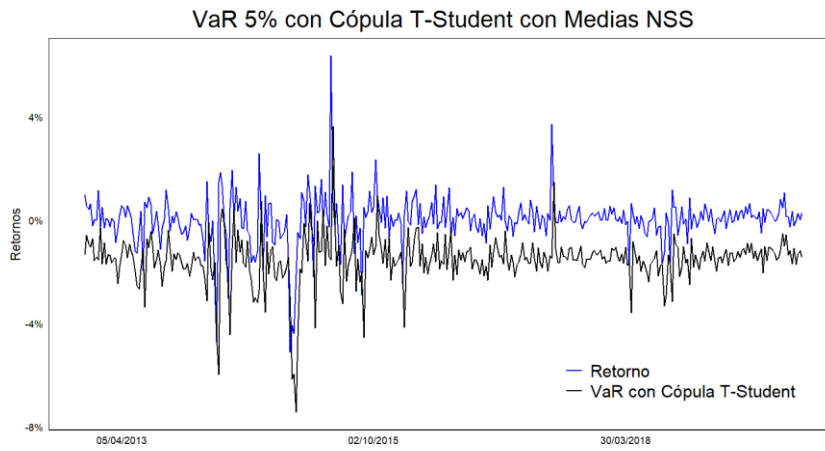
Fuente: Elaboración propia, 2020.



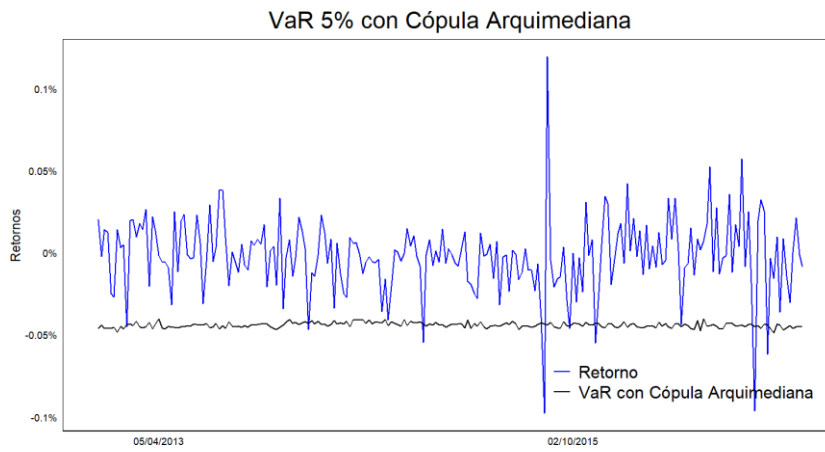
Fuente: Elaboración propia, 2020.



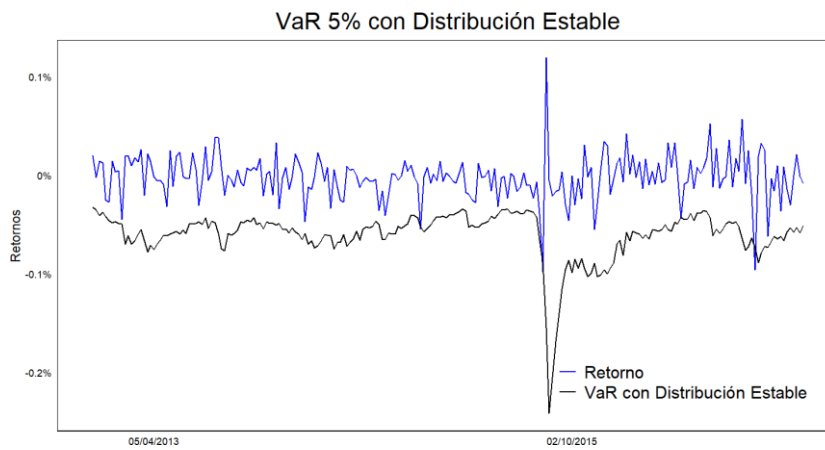
Fuente: Elaboración propia, 2020.



Fuente: Elaboración propia, 2020.



Fuente: Elaboración propia, 2020.



Fuente: Elaboración propia, 2020.