Ricardo Siu Koochoy
Carlos Andaluz Zúñiga

65

APUNTES DE ESTUDIO

Álgebra

UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

Álgebra

Serie: Apuntes de Estudio n° 65

Ricardo Siu Koochoy
Carlos Andaluz Zúñiga

Álgebra

UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
CENTRO DE INVESTIGACIÓN

Centro de Investigación
Avenida Salaverry 2020
Lima 11, Perú

Álgebra
Ricardo Siu Koochoy
Carlos Andaluz Zúñiga
1ª edición: abril 2007, febrero 2011, agosto 2012, agosto 2013
Diseño de la carátula: Icono Comunicadores
ISBN: 978-9972-57-112-1
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú: 2013-11920

BUP-CENDI

Siu K., Ricardo
Álgebra / Ricardo Siu K. ; Carlos Andaluz Z. – Lima :
Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico, 2013. –
(Apuntes de Estudio ; 65)

/ÁLGEBRA / ECUACIONES / LOGARITMOS /

512 (CDU)

Miembro de la Asociación Peruana de Editoriales Universitarias y de Escuelas Superiores (Apesu) y miembro de la Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y el Caribe (Eulac).

Índice

Prólogo

El presente Apuntes de Estudio trata temas del programa del curso Fundamentos de Matemáticas que actualmente se imparte en la Universidad del Pacífico. *Álgebra* ha sido escrito a partir de las clases dictadas en esta universidad por los profesores Ricardo Siu Koochoy, con más de 30 años de experiencia docente, y Carlos Andaluz Zúñiga, con más de 10 años de experiencia docente.

Este libro fue concebido de manera que pueda ser utilizado como texto básico o como texto complementario, y ha sido nuestro objetivo que sea de máximo provecho para los alumnos que tengan el deseo de aprender Álgebra.

Como texto básico, el alumno encontrará conceptos que el profesor podrá profundizar durante las clases y, como texto complementario, hallará ejercicios y problemas en los cuales se aplican los conceptos teóricos. Cabe resaltar que una característica de este libro es que muchos de los ejercicios y problemas han sido resueltos de dos o más formas, de modo que el alumno aprenda a analizarlos desde diversas perspectivas.

Debemos dejar constancia de que, si en la explicación de los temas tratados se ha sacrificado el rigor matemático, ha sido con la finalidad de facilitar su comprensión. Por la misma razón didáctica, se incluye una serie de ejemplos, ejercicios y problemas resueltos y propuestos, muchos de los cuales corresponden a prácticas calificadas y exámenes del curso Fundamentos de Matemáticas, que ayudarán a entender y afianzar la teoría.

Como suele ser usual en los manuales de matemática, muchos ejercicios y problemas abrevan de una larga tradición, algunos son clásicos, otros ejemplares; todos, creemos, útiles. Nuestra compilación de 720 ejercicios y problemas busca constituir un conjunto apropiado para asegurar una formación suficiente en los fundamentos del Álgebra.

En la última sección del libro han sido incluidos problemas de prácticas calificadas y exámenes tomados en la Universidad del Pacífico en los ciclos 2006-0 y 2006-1, así como ejercicios de razonamiento matemático y amenidades.

Los autores

I

Conceptos fundamentales del Álgebra

1. Potencias y raíces

Las cuatro operaciones fundamentales son suma, resta, multiplicación (producto) y división (cociente). A partir de la multiplicación se define la quinta operación aritmética llamada potenciación, la cual permite representar al producto $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ veces}}$ en la forma a^n. Esto es,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

A a^n se le conoce como "potencia enésima de a", siendo sus elementos:

Potencia: a^n

Exponente

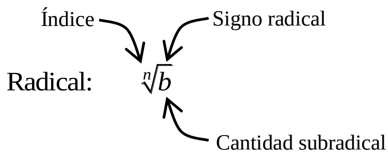
Base

La sexta operación aritmética es la radicación, definida como la operación inversa de la potenciación. Esto es:

$$a^n = b \;\Rightarrow\; a = \sqrt[n]{b},$$

lo que significa que $\sqrt[n]{b}$ es aquel número que multiplicado por sí mismo n veces equivale a b.

A $\sqrt[n]{b}$ se le conoce como la "raíz enésima de b", siendo sus elementos:



2. Propiedades de potencias y raíces

Señalaremos las propiedades más importantes relativas a las potencias y a las raíces.

P1) Producto de potencias de igual base.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Demostración

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \;\cdots\; \cdot a}_{(m+n) \text{ veces}}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

P2) Cociente de potencias de igual base.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)}$$

Demostración

Consideremos el caso $m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m-n \text{ veces}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \overbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}^{m-n \text{ veces}}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

P3) Potencia con exponente 0.

$$\boxed{a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)}$$

Demostración

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Como la división de un número, distinto de cero, entre sí mismo es 1, $\frac{a^m}{a^m} = 1 \Rightarrow a^0 = 1$.

P4) Potencia con exponente negativo.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0)}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
a^{-n} &= a^{0-n} \\
a^{-n} &= \frac{a^0}{a^n} && (\text{P2}) \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} && (\text{P3})
\end{aligned}
$$

P5) Potencia de un producto.

La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.

$$\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
(a\cdot b)^n &= \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ \cdots\ \cdot(a\cdot b)}_{n \text{ veces}} \\
(a\cdot b)^n &= \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \cdots\ \cdot a}_{n \text{ veces}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ \cdots\ \cdot b}_{n \text{ veces}} \\
(a\cdot b)^n &= a^n \cdot b^n
\end{aligned}
$$

P6) Potencia de un cociente.

La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad (b \neq 0)}$$

Se demuestra análogamente a P5).

Observación

O1) Debemos notar que la potencia de una suma no es igual a la suma de las potencias. Esto es:

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n \qquad (\text{ salvo } a=0 \ \vee\ b=0)$$

Por ejemplo:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + \ 0 \ + b^2 \iff 2ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

P7) Potencia de potencia

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$$

Demostración

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{\left(a^m\right)\cdot\left(a^m\right)\cdot\left(a^m\right)\cdot \ \cdots \ \cdot\left(a^m\right)}_{n \text{ veces}}$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{\overbrace{m+m+m+ \ \cdots \ +m}^{n \text{ sumandos}}}$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

Observaciones

O2) Por lo general $\left(a^m\right)^n \neq a^{m^n}$, ya que el exponente de a en el primer caso es $m \cdot n$ y en el segundo, m^n.

Así pues:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6$$
$$2^{3^2} = 2^9$$

O3) Nótese que las expresiones $(-2)^4$ y -2^4 son diferentes, porque en el primer caso, el exponente 4 afecta también al signo negativo $(-2)^4 = (-1)^4(2)^4 = 16,$ no así en el segundo caso $-2^4 = -16.$ La confusión surge a menudo porque no se identifica a la base: en el primer caso la base es -2 y en el segundo, 2.

P8) Conversión de un radical en una potencia.

$$\boxed{\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}}$$

Demostración

Sea

$$\sqrt[n]{b} = b^{x} \qquad (1)$$

Elevando ambos miembros a la enésima potencia:

$$\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n} = \left(b^{x}\right)^{n}$$
$$b^{1} = b^{xn}$$
$$1 = xn$$
$$x = \frac{1}{n} \qquad (2)$$

De (2) en (1):

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

P9) Potencia con exponente fraccionario.

$$\boxed{b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^{m}}}$$

Demostración

$$b^{\frac{m}{n}} = b^{m\cdot\frac{1}{n}}$$
$$b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{m}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^{m}}$$

P10) Raíz de un producto.

La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n}$$
$$\sqrt[n]{ab} = (a)^{1/n}\,(b)^{1/n}$$
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

P11) Raíz de un cociente.
La raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (b \neq 0)}$$

Se demuestra análogamente a P10).

P12) Raíz de raíz.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$

Demostración

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{1/n}}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/m}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{1/mn}$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

P13) Potencia de raíz.

$$\boxed{\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}}$$

Demostración

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \underbrace{\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}\cdot\ \cdots\ \cdot\sqrt[m]{a}}_{n \text{ veces}}$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ \cdots\ \cdot a}^{n \text{ veces}}}$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

3. Expresiones algebraicas. Polinomios

Las expresiones algebraicas son los números y letras relacionados por las operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

$$3x^2 - 2x + 5$$

$$5a^2b^3c - 10a^4b^2c^3 + 20b^4$$

$$2m^{-4}n^{1/3} + 5m^{-2/5}n^3$$

$$4ax^3y^2 + 3bxy^4 - 2cy^5$$

Las expresiones anteriores reciben el nombre de polinomios pues están formadas por monomios. Así pues el polinomio $3x^2 - 2x + 5$ tiene tres monomios: $3x^2$, $-2x$, 5.

Los elementos de todo monomio son

Signo Parte literal

$$+3x^2$$

Coeficiente

Como la única variable es x, se dice que el polinomio mencionado "es un polinomio P de x", lo que se escribe $P(x)$.

En el caso del polinomio $4ax^3y^2 + 3bxy^4 - 2cy^5$, se tienen tres monomios, siendo uno de ellos $\underbrace{4a}_{\text{coeficiente}}\ \underbrace{x^3y^2}_{\text{parte literal}}$. Se acostumbra emplear las primeras letras (a, b, c) para representar a las constantes y las últimas letras (x, y, z) para las variables. Por ello:

$$P(x, y) = 4ax^3y^2 + 3bxy^4 - 2cy^5$$

4. Grados de las expresiones algebraicas

Grado relativo
El grado relativo a una determinada variable es el mayor exponente que afecta a dicha variable.
En $P(x, y, z) = 4x^4y^2 - 3x^2yz^3 + 5x^3yz^4$, se tiene:

$$GR_{(x)} = 4$$
$$GR_{(y)} = 2$$
$$GR_{(z)} = 4$$

Grado absoluto de un monomio
Es la suma de los grados relativos a todas las variables.
En $Q(m, n) = 2a^3m^6n^2$, se tiene:

$$GA_{(Q)} = 6 + 2 \qquad \left(2a^3 \text{ es el coeficiente}\right)$$
$$GA_{(Q)} = 8$$

Grado absoluto de un polinomio
Es el mayor de los grados absolutos de los monomios.

En $R(u, v, w) = \frac{1}{2}u^3v^2w + \frac{2}{3}u^2v^4w^2 + \frac{3}{4}u^4vw^2$, se tiene como grado absoluto de los monomios $3+2+1=6$, $2+4+2=8$ y $4+1+2=7$, respectivamente, de donde:

$$GA_{(R)} = 8$$

5. Polinomios especiales

Se pueden citar los siguientes:

a) Polinomio ordenado con respecto a una variable
$P(x, y, z) = 2x^3y^2z + 3x^2y^3z^2 - 4y^2z^4$ está ordenado en forma descendente respecto de x y, a la vez, ascendentemente respecto de z.

b) Polinomio completo
$Q(m, n) = 5m^4n + 3m^3n - 2m^2n^3 + 4mn^4 - 2$ es un polinomio completo con respecto a m, pero incompleto con respecto a n puesto que falta el término n^2.

c) Polinomio homogéneo es aquel cuyos monomios tienen el mismo grado absoluto
$R(x, y, z) = 2x^4y^2 - 3xy^3z^2 + 4y^5z$ es un polinomio homogéneo de grado 6 ($4+2=1+3+2=5+1$).

d) Polinomios idénticos
Si los polinomios $(2a+b)x + (a-b)$ y $7x+2$ son idénticos:

$$(2a+b)x + (a-b) \equiv 7x + 2$$

se debe cumplir que:

$$\begin{cases} 2a+b=7 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=3 \\ b=1 \end{matrix}$$

e) Polinomios idénticamente nulos

El polinomio $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ es idénticamente nulo si $a = b = c = d = e = 0$.

6. Productos notables

Reciben este nombre aquellos productos cuyo resultado se conoce de antemano (sin necesidad de efectuar la multiplicación). Entre los más útiles destacan:

a) Cuadrado de un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (\text{Trinomio cuadrado perfecto})$$

De lo que se deduce

$$(a-b)^2 = \left[a + (-b)\right]^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (\text{Trinomio cuadrado perfecto})$$

A partir de ellos se obtienen las llamadas Identidades de Legendre:

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$
$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

b) Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

A veces es conveniente escribirlas como:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

c) Producto de una suma por una diferencia

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \qquad (\text{Diferencia de cuadrados})$$

d) Producto de un binomio por un trinomio

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3 \qquad (\text{Suma de cubos})$$

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3 \qquad (\text{Diferencia de cubos})$$

e) Cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2=\left[a+(b+c)\right]^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

En el caso de signo negativo, como por ejemplo

$$(a+b-c)^2=\left[a+b+(-c)\right]^2$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c)$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

Si hubiese dos signos negativos:

$$(a-b-c)^2=\left[a+(-b)+(-c)\right]^2$$

$$(a-b-c)^2=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2a(-c)+2(-b)(-c)$$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

f) Cubo de un trinomio

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$$

A veces conviene expresarlo como

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$$

g) Producto de dos binomios con término común

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$$

h) Identidades de Lagrange

h1) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$

Demostración

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) = a^2\left(x^2+y^2\right)+b^2\left(x^2+y^2\right)$$
$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) = a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$$
$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) = \underbrace{a^2x^2+2abxy+b^2y^2}+\underbrace{a^2y^2-2abxy+b^2x^2}$$
$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) = (ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

h2)

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) =$$
$$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$$

7. División algebraica

Dados el dividendo (D) y el divisor (d), se trata de hallar el cociente (q) y el residuo o resto (r).

Si el residuo es 0, la división es exacta:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \hline 0 & 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array}$$

$$18 = 3(6) \qquad\qquad D = dq$$

Si el residuo es diferente de 0, la división es inexacta:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

$$27 = 4(6) + 3 \qquad\qquad D = dq + r$$

En general:

$$\boxed{D = dq + r}$$

o, si dividimos entre d:

$$\boxed{\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}}$$

Consideremos ahora la división $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de los polinomios:

$$P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 2$$
$$Q(x) = 3x^2 + 4x + 2$$

En toda división de polinomios se cumple que:

i) El grado del cociente es la diferencia de los grados del dividendo y del divisor.

ii) El grado máximo del residuo es uno menos que el grado del divisor.

En la división $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ el grado del cociente será $3-2=1,$ y el residuo tendrá como máximo el grado $2-1=1.$

Así pues:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|rrrrr}
6x^3 & + & 5x^2 & & & + & 2 & & & 3x^2 & + & 4x & + & 2 \\ \cline{10-14}
-6x^3 & - & 8x^2 & - & 4x & & & & & 2x & - & 1 & & \\ \cline{1-5}
 & - & 3x^2 & - & 4x & + & 2 & & & & & & & \\
 & + & 3x^2 & + & 4x & + & 2 & & & & & & & \\ \cline{2-7}
 & & & & & & 4 & & & & & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
q(x) &= 2x-1 \qquad (\text{grado } 1)\\
r &= 4 \qquad\qquad\; (\text{grado } 0)
\end{aligned}
$$

8. Regla de Ruffini

Permite obtener el cociente y el residuo de la división algebraica de un polinomio $P(x)$ entre otro polinomio $Q(x)$ de la forma $ax+b$.

i) Asumamos que $a=1$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 2x^3-3x^2+4x-5\\
Q(x) &= \underset{a}{1}x-2 \equiv ax+b \;\Rightarrow\; a=1
\end{aligned}
$$

Cálculos

$x-2=0 \;\Rightarrow\; x=2$

coeficientes del dividendo

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -3 & 4 & -5 \\
 & & + & + & + \\
2 & \downarrow & 2\cdot 2 & 1\cdot 2 & 6\cdot 2 \\ \hline
 & 2 & 1 & 6 & \multicolumn{1}{|c}{7} \\ \cline{5-5}
\end{array}
$$

$a\cdot$coeficientes del cociente — residuo

El cociente será $q(x)=2x^2+1x+6,$ y el residuo, $r=7.$

ii) Asumamos que $a\neq 1$

$$P(x)=6x^3-3x^2-6x+8$$
$$Q(x)=2x+3\equiv ax+b\ \Rightarrow\ a=2$$

Cálculos

$\underset{a}{2}x+3=0\ \Rightarrow\ x=-\dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\quad -12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\quad 12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}}^{\text{coeficientes del dividendo}}} \\
 & 6 & -3 & -6 & +8 \\
 & & + & + & + \\
-\dfrac{3}{2} & \downarrow & 6\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right) & -12\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right) & 12\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right) \\
\hline
 & 6 & -12 & 12 & \boxed{-10} \\
 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{6\quad -12\quad 12}}_{a\cdot\text{coeficientes del cociente}}} & \text{residuo}
\end{array}$$

Para encontrar los coeficientes del cociente, se debe dividir los coeficientes obtenidos entre el valor de $a\ (a=2)$. Es decir:

$$q(x)=\frac{6}{2}x^2-\frac{12}{2}x+\frac{12}{2}=3x^2-6x+6$$

En cambio, el residuo es

$$r=-10$$

Caso especial

Si el divisor $Q(x)$ tiene la forma $Q(x) = ax^n + b$ y el dividendo contiene únicamente potencias de x^n, es posible emplear el método de Ruffini.

En

$$P(x) = 12x^{16} - 8x^{12} + 6x^4 - 2$$
$$Q(x) = 3x^4 - 2$$

efectuemos el cambio de variable $x^4 = y$, de modo que:

$$P(y) = 12y^4 - 8y^3 + 6y - 2$$
$$Q(y) = 3y - 2 \equiv ay + b \;\Rightarrow\; a = 3$$

Cálculos

$$3y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{2}{3}$$

coeficientes del dividendo

$$\begin{array}{c|ccccc} & 12 & -8 & 0 & 6 & -2 \\ & & & & & \\ \frac{2}{3} & \downarrow & 8 & 0 & 0 & 4 \\ \hline & 12 & 0 & 0 & 6 & \boxed{2} \end{array}$$

3·coeficientes del cociente

residuo

Tendríamos que

$$q(y) = 4y^3 + 2 \;\Rightarrow\; q(x) = 4x^{12} + 2$$
$$r = 2$$

9. Teorema del Resto

Tiene por finalidad obtener el resto de la división de un polinomio $P(x)$ entre un divisor binómico de la forma $ax+b.$

El resto de la división $\dfrac{P(x)}{ax+b}$ es $P(-b/a),$ en donde $-\dfrac{b}{a}$ es el valor de x que resulta de igualar $ax+b$ a cero.

Demostración

De la página P13 se tiene

$$D = dq + r$$

En este caso:

$$P(x) = (ax+b)q(x) + r \qquad\qquad (r \text{ es de grado cero})$$

Si reemplazamos x por $-\dfrac{b}{a}$:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right]q\left(-\frac{b}{a}\right)+r$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 + r$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = r$$

El residuo buscado será $P(-b/a)$.

Se puede emplear la regla de Ruffini para calcular $P(-b/a).$ Por ejemplo, si $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$ el valor de $P(-b/a)$ se obtendrá:

$$ax+b=0 \;\Rightarrow\; x=-\frac{b}{a}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & A & B & C & D \\
-\dfrac{b}{a} & \downarrow & A\left(-\dfrac{b}{a}\right) & A\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2+B\left(-\dfrac{b}{a}\right) & A\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3+B\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2+C\left(-\dfrac{b}{a}\right) \\
\hline
 & A & A\left(-\dfrac{b}{a}\right)+B & A\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2+B\left(-\dfrac{b}{a}\right)+C & \underbrace{\boxed{A\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3+B\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2+C\left(-\dfrac{b}{a}\right)+D}}_{P\left(-\frac{b}{a}\right)}
\end{array}$$

Ejemplo

Calcular el valor de m si $16x^4+8mx^3+4x^2+2mx+m$ es divisible por $2x-1$.

Si son divisibles, el residuo de la división $\dfrac{16x^4+8mx^3+4x^2+2mx+m}{2x-1}$ es cero. A partir de $2x-1=0 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{2}$, al aplicar el teorema del resto se deduce que $P(1/2)=0$.

Podemos calcular $P(1/2)$ de dos formas

Forma 1:

$$P(x)=16x^4+8mx^3+4x^2+2mx+m$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=16\left(\frac{1}{2}\right)^4+8m\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2m\left(\frac{1}{2}\right)+m$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=1+m+1+m+m$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=3m+2$$

Forma 2:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 16 & 8m & 4 & 2m & m \\
\frac{1}{2} & \downarrow & 8 & 4m+4 & 2m+4 & 2m+2 \\
\hline
 & 16 & 8m+8 & 4m+8 & 4m+4 & \boxed{\underbrace{3m+2}_{P\left(\frac{1}{2}\right)}}
\end{array}
$$

Como $P\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 3m+2=0 \Rightarrow m=-\frac{2}{3}$.

10. Cocientes notables

Como en los productos notables, se llaman cocientes notables a aquellas divisiones exactas en las cuales se puede anticipar el cociente (sin necesidad de efectuar la división). Se distinguen tres casos:

Caso 1:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

La división es exacta porque

$$x-a=0 \Rightarrow x=a \Rightarrow P(a)=a^n-a^n=0=r$$

El cociente se obtiene por la regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hspace{12em}}^{n+1 \text{ términos}}} \\
 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a^n \\
a & \downarrow & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & a^n \\
\hline
 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & \boxed{0}
\end{array}
$$

De donde

$$q(x) = 1x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ \cdots \ + a^{n-1} \qquad (n \ \text{términos})$$

Caso 2:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n - a^n}{x+a}, \qquad \text{si } n \text{ es par}$$

La división es exacta porque

$$x + a = 0 \ \Rightarrow \ x = -a \ \Rightarrow \ P(-a) = (-a)^n - a^n$$

Si n es par: $P(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0.$

Según la regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hspace{7cm}}^{n+1 \ \text{términos}}} \\
 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a^n \\
-a & \downarrow & -a & a^2 & \cdots & -a^{n-1} & a^n \\
\hline
 & 1 & -a & a^2 & \cdots & -a^{n-1} & \boxed{0}
\end{array}
$$

Es decir

$$q(x) = 1x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ \cdots \ - a^{n-1} \qquad (n \ \text{términos})$$

Caso 3:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n + a^n}{x+a}, \qquad \text{si } n \text{ es impar}$$

La división es exacta porque

$$x+a=0 \Rightarrow x=-a \Rightarrow P(-a)=(-a)^n+a^n$$

Si n es impar: $P(-a)=(-a)^n+a^n=-a^n+a^n=0.$

Apliquemos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} & \multicolumn{6}{c}{\overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad +a^n}}^{n+1 \text{ términos}}} \\ & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & +a^n \\ -a & \downarrow & -a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & -a^n \\ \hline & 1 & -a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & \boxed{0} \end{array}$$

Luego:

$$q(x)=1x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1} \qquad (n \text{ términos})$$

Se deja al lector la demostración de que los siguientes cocientes no son notables:

$$\frac{x^n-a^n}{x+a}, \qquad \text{si } n \text{ es impar}$$

$$\frac{x^n+a^n}{x+a}, \qquad \text{si } n \text{ es par}$$

$$\frac{x^n+a^n}{x-a}$$

Ejemplo:

Calculemos el número de términos del desarrollo de

$$\frac{x^2\sqrt[3]{x}-y\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{y}}$$

Reescribamos el cociente

$$\frac{x^{7/3}-y^{7/4}}{x^{1/3}-y^{1/4}}=\frac{\left(x^{1/3}\right)^7-\left(y^{1/4}\right)^7}{x^{1/3}-y^{1/4}}=\frac{m^7-n^7}{m-n}$$

El cociente es notable (Caso 1) y su desarrollo tendrá siete términos.

11. Factorización

El término “factor” se menciona, por ejemplo, en la propiedad: “El orden de los factores no altera el producto”. Así pues:

$$3\times 5=5\times 3=15$$

De donde, 3 y 5 son factores de 15.

Factorizar el número 15 es escribirlo como el producto de dos o más factores primos:

$$15=3\times 5$$

En consecuencia, factorizar un polinomio es expresarlo como un producto indicado de dos o más factores primos racionales y enteros.

Métodos de factorización

a) Factor común monomio
Factorizar $P=10x^3y^2-5x^2y^4+20x^4y^5$.

El máximo común divisor de los términos es el monomio $5x^2y^2$

$$P=5x^2y^2\left(2x-y^2+4x^2y^3\right)$$

El resultado contiene seis factores en total:

$$5,\ \ x,\ \ x,\ \ y,\ \ y,\ \ 2x - y^2 + 4x^2y^3$$

b) Factor común polinomio
Factorizar $Q = 6m^2n^2\left(m+2n\right) - 4m^3n\left(m+2n\right)$.

El máximo común divisor de los sumandos es el polinomio $2m^2n\left(m+2n\right)$

$$Q = 2m^2n\left(m+2n\right)\left[3n-2m\right]$$

c) Agrupación de términos
Factorizar $R = ac + ad + bc + bd$.

Agrupamos los dos primeros y los dos últimos términos.

$$R = \left(ac+ad\right)+\left(bc+bd\right)$$
$$R = a\left(c+d\right)+b\left(c+d\right)$$
$$R = \left(a+b\right)\left(c+d\right)$$

d) Diferencia de cuadrados
Factorizar $P = 25x^4y^6 - 36m^8n^2$.

Se emplea la identidad $a^2 - b^2 = \left(a+b\right)\left(a-b\right)$

$$P = \underbrace{\left(5x^2y^3\right)^2}_{a^2} - \underbrace{\left(6m^4n\right)^2}_{b^2}$$
$$P = \left(5x^2y^3 + 6m^4n\right)\left(5x^2y^3 - 6m^4n\right)$$

e) Trinomio cuadrado perfecto
Factorizar $Q = m^4 - 6m^2n^3 + 9n^6$

Se utiliza la identidad $a^2 - 2ab + b^2 = \left(a-b\right)^2$

$$Q = m^4 - 6m^2n^3 + 9n^6$$

$$Q = \underbrace{\left(m^2\right)^2}_{a^2} - 2\underbrace{\left(m^2\right)}_{a}\underbrace{\left(3n^3\right)}_{b} + \underbrace{\left(3n^3\right)^2}_{b^2}$$

$$Q = \left(m^2 - 3n^3\right)^2$$

f) Suma o diferencia de cubos
Factorizar $R = 8c^3d^6 - 27e^9$

Se utiliza la identidad $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$$R = 8c^3d^6 - 27e^9$$

$$R = \underbrace{\left(2cd^2\right)^3}_{a^3} - \underbrace{\left(3e^3\right)^3}_{b^3}$$

$$R = \left(2cd^2 - 3e^3\right)\left(4c^2d^4 + 6cd^2e^3 + 9e^6\right)$$

Factorizar $S = 8c^3d^6 + 27e^9$

Se utiliza la identidad $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

$$R = 8c^3d^6 + 27e^9$$

$$R = \underbrace{\left(2cd^2\right)^3}_{a^3} + \underbrace{\left(3e^3\right)^3}_{b^3}$$

$$R = \left(2cd^2 + 3e^3\right)\left(4c^2d^4 - 6cd^2e^3 + 9e^6\right)$$

g) Aspa simple
Permite factorizar trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

Factorizar $P = x^2 \underset{(a)}{+} 1x \underset{(b)}{-} 6$ $\qquad (a):+ \quad (b):-$

Los factores de P son de la forma $\left(x \underset{(a)}{+} \ ?\right)\left(x \underset{(a)(b)}{-} \ ?\right)$

Los números que faltan colocar deberán sumar 1 y dar como producto -6.

$$P=(x+3)(x-2)$$

Factorizar $Q=8x^2\underset{(a)}{-}2x\underset{(b)}{-}15$

Los factores de Q son de la forma $(4x\quad)(2x\quad)$ ó $(8x\quad)(x\quad)$. Los signos que faltan colocar son $\underset{(a)}{-}$ y $\underset{(a)(b)}{+}$.

Finalmente

$$Q=(4x+5)(2x-3)$$

h) Divisores binómicos

Se emplea cuando el polinomio por factorizar contiene factores binómicos de la forma $ax+b.$ Debe recordarse que si $ax+b$ es un factor de $P(x),$ entonces $P(-b/a)=0$ y recíprocamente, si $P(-b/a)=0,$ entonces $(ax+b)$ es un factor de $P(x)$ y $-b/a$ se llama "cero de $P(x)$"

Dado $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ \cdots\ +a_2x^2+a_1x+a_0,$ para poder factorizarlo habrá que encontrar ceros del polinomio (están entre los divisores de a_0 y los números formados al dividir los divisores de a_0 entre los divisores de a_n). Cada cero encontrado corresponde a un factor binómico.

Factorizar $R=2x^4+3x^3-20x^2-27x+18$

Divisores de $a_0=+18:\pm 1,\,2,\,3,\,6,\,9,\,18$

Divisores de $a_n=2:\pm 1,\,2$

Posibles ceros de $P(x)$: $\dfrac{\pm 1,\,2,\,3,\,6,\,9,\,18}{\pm 1,\,2}=\pm 1,\,2,\,3,\,6,\,9,\,18,\,\dfrac{1}{2},\,\dfrac{3}{2},\,\dfrac{9}{2}$

Búsqueda de factores (dividir por el método de Ruffini)

$$
\begin{array}{r|rrrrr l}
 & 2 & 3 & -20 & -27 & 18 & \\
-2 & \downarrow & -4 & 2 & 36 & -18 & \\
\hline
 & 2 & -1 & -18 & 9 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \Rightarrow (x+2) \text{ es factor} \\
\cline{6-6}
3 & \downarrow & 6 & 15 & -9 & & \\
\cline{1-5}
 & 2 & 5 & -3 & \multicolumn{1}{|r}{0} & & \Rightarrow (x-3) \text{ es factor} \\
\cline{5-5}
\end{array}
$$

Luego:

$$R=(x+2)(x-3)\left(2x^2+5x-3\right)$$

$$R=(x+2)(x-3)(2x-1)(x+3)$$

$$R=2\left(x-1/2\right)(x+2)(x+3)(x-3)$$

12. Operaciones con fracciones algebraicas

Cuando se efectúan operaciones con números, el orden que se sigue es:

Primero: sumas y restas

Segundo: multiplicaciones y divisiones

Ese mismo orden se debe seguir cuando se efectúan operaciones con fracciones algebraicas, debiéndose tener en cuenta que antes de sumar o restar conviene simplificar cada uno de los sumandos y antes de multiplicar o dividir conviene factorizar cada uno de los términos.

Ejemplo

$$P=\left[\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-\frac{3b}{a}-\frac{2a^2b+3b^3}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\div\left(\frac{2a-b}{a^2+ab}\right)$$

$$P=\left[\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-\frac{3b}{a}-\frac{2a^2b+3b^3}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\left[\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2a\left(a+b\right)}{\left(a+b\right)^2}-\frac{3b}{a}-\frac{2a^2b+3b^3}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\left[\frac{2a+b}{a-b}+\frac{2a}{a+b}-\frac{3b}{a}-\frac{2a^2b+3b^3}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\left[\frac{\left(2a+b\right)a\left(a+b\right)+2a^2\left(a-b\right)-3b\left(a^2-b^2\right)-\left(2a^2b+3b^3\right)}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\left[\frac{2a^3+2a^2b+a^2b+ab^2+2a^3-2a^2b-3a^2b+3b^3-2a^2b-3b^3}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\left[\frac{4a^3-4a^2b+ab^2}{a\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\left[\frac{\cancel{a}\left(4a^2-4ab+b^2\right)}{\cancel{a}\left(a^2-b^2\right)}\right]\times\left(\frac{a^2+ab}{2a-b}\right)$$

$$P=\frac{\left(2a-b\right)^2}{\left(a+b\right)\left(a-b\right)}\times\frac{a\left(a+b\right)}{2a-b}$$

$$P=\frac{a\left(2a-b\right)}{a-b}$$

13. Descomposición de una fracción algebraica en fracciones parciales

Según el acápite anterior,

$$\frac{3}{x+2}+\frac{-2}{x-1}=\frac{3(x-1)-2(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$
$$\frac{3}{x+2}+\frac{-2}{x-1}=\frac{x-7}{x^2+x-2}$$

De lo que se trata ahora es de descomponer la fracción algebraica $\frac{x-7}{x^2+x-2}$, vale decir, expresarla como la suma de las fracciones $\frac{3}{x+2}$ y $\frac{-2}{x+1}$, a las cuales se les denomina fracciones parciales.

El requisito para poder descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones parciales es que la fracción dada sea propia (grado del numerador menor que el grado del denominador). En el caso de una fracción impropia, se deberá efectuar la división y expresarla como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\overset{\text{polinomio}}{q(x)}+\underset{\text{fracción propia}}{\frac{r(x)}{Q(x)}}$$

Ejemplo

Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3x^3+4x^2-4x-9}{x^2+x-2}$$

Dividimos

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
3 & 4 & -4 & -9 & 1 & 1 & -2 \\ \cline{5-7}
-3 & -3 & 6 & & 3 & 1 & \\ \cline{1-3}
 & 1 & 2 & -9 & & & \\
 & -1 & -1 & 2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 1 & -7 & & &
\end{array}$$

De donde $q(x)=3x+1,\;\; r(x)=x-7,$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3x^3+4x^2-4x-9}{x^2+x-2}$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=3x+1+\frac{x-7}{x^2+x-2} \qquad (\alpha)$$

El siguiente paso es descomponer $Q(x)$ en factores lineales $(ax+b)$ y en factores cuadráticos (ax^2+bx+c) con discriminante $\Delta=b^2-4ac<0.$ Así pues:

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Por cada factor lineal repetido n veces $(ax+b)^n$, corresponderá la suma de n fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\;\cdots\;+\frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

Si $n=1,$ solamente corresponderá la fracción parcial $\dfrac{A_1}{ax+b}$.

Por cada factor cuadrático repetido n veces $(ax^2+bx+c)^n$, corresponderá la suma de n fracciones parciales:

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\;\cdots\;+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

Si $n=1,$ solamente corresponderá la fracción parcial $\dfrac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c}$.

En el ejemplo, se han obtenido dos factores lineales: $x+2$ (con $n=1$) y $x-1$ (con $n=1$), por ello:

$$\frac{x-7}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

De donde:

$$\frac{x-7}{(x+2)(x-1)}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

Es decir:

$$x-7\equiv A(x-1)+B(x+2)$$

Para calcular A y B existen dos métodos:

Método I

Como los polinomios $x-7$ y $A(x-1)+B(x+2)$ son idénticos, tienen el mismo valor numérico para cualquier valor particular que se asigne a su variable:

Si $x=1$:

$$1-7=A(1-1)+B(1+2)\ \Rightarrow\ -6=3B\ \Rightarrow\ B=-2$$

Si $x=-2$:

$$-2-7=A(-2-1)+B(-2+2)\ \Rightarrow\ -9=-3A\ \Rightarrow\ A=3$$

Método II

Como los polinomios $x-7$ y $A(x-1)+B(x+2)$ son idénticos, los coeficientes de sus términos semejantes son iguales, entonces:

$$x-7 \equiv A(x-1)+B(x+2)$$
$$x-7 \equiv Ax-A+Bx+2B$$
$$x-7 \equiv (A+B)x+(-A+2B)$$

Igualamos los coeficientes de los términos respectivos

$$\begin{cases} 1 = A+B \\ -7 = -A+2B \end{cases} \Rightarrow \ A=3,\ \ B=-2$$

Reemplazando finalmente en (α)

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 3x+1+\frac{x-7}{x^2+x-2}$$
$$\frac{3x^3+4x^2-4x-9}{x^2+x-2} = 3x+1+\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-1}$$

14. Racionalización. Factor de racionalización

Racionalizar el denominador de una fracción algebraica es expresarla como otra fracción equivalente cuyo denominador sea racional. Por ejemplo, racionalizar $\dfrac{4x}{\sqrt{y}}$ es expresarla como $\dfrac{4x\sqrt{y}}{y}$.

Es decir, dado $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ conviene multiplicar ambos términos de la fracción por $FR(x)$ (factor de racionalización): $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\cdot\dfrac{FR(x)}{FR(x)}$ de modo que $Q(x)\cdot FR(x)$ sea una expresión racional. El factor de racionalización variará de acuerdo con la forma de $Q(x)$, distinguiéndose tres casos usuales:

Caso 1

$Q(x)$ sólo contiene monomios.

Racionalizar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{3a^3b^2c}{4\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{c^5}}$

El FR será $\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}\sqrt[4]{c^3}$ porque al multiplicarlo por $Q(x)$ se obtiene la expresión racional $4abc^2$.

Entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{3a^3b^2c}{4\sqrt{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[4]{c^5}}\cdot\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}\sqrt[4]{c^3}}=\frac{3a^{7/2}b^{8/3}c^{7/4}}{4abc^2}$$

Caso 2

$Q(x)$ contiene alguno de los binomios $a\pm\sqrt{b}$ y el FR será $a\mp\sqrt{b}.$

Racionalizar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{12}{3-\sqrt{5}}$

El FR será $3+\sqrt{5}$ porque al multiplicarlo por $Q(x)$ se obtiene la expresión racional $3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=4$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{12}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{12\left(3+\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{12\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}=3\left(3+\sqrt{5}\right)$$

Caso 3

$Q(x)$ contiene alguno de los binomios $a\pm\sqrt[3]{b}$ y el FR será el trinomio $a^2\mp a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}$ porque:

$$\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^2-a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a^3+b$$
$$\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)=a^3-b$$

Racionalizar $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{4\left(x^2-y^4\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y^2}}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{4\left(x^2-y^4\right)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{4\left(x^2-y^4\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}\right)}{x-y^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{4\left(x-y^2\right)\left(x+y^2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}\right)}{x-y^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=4\left(x+y^2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{y^4}\right)$$

Ejercicios resueltos

1. Simplificar $E=\dfrac{5^n+5^{n+1}+5^{n+2}}{5^{n-2}}$.

Forma 1

$$E=\frac{5^{n-2}\left(5^2+5^3+5^4\right)}{5^{n-2}}=25+125+625=775$$

Forma 2

$$E=\frac{5^{n+2}\left(5^{-2}+5^{-1}+1\right)}{5^{n-2}}=5^4\left(5^{-2}+5^{-1}+1\right)$$
$$E=625\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{5}+1\right)$$
$$E=625\left(\frac{31}{25}\right)$$
$$E=775$$

Forma 3

$$E=\frac{5^n}{5^{n-2}}+\frac{5^{n+1}}{5^{n-2}}+\frac{5^{n+2}}{5^{n-2}}=5^2+5^3+5^4$$
$$E=775$$

Forma 4

Si se pudiese asumir que el resultado es constante para cualquier n, por ejemplo para $n=0$, se debería obtener el resultado

$$E=\frac{5^0+5^1+5^2}{5^{-2}}=\frac{31}{\frac{1}{25}}$$
$$E=775$$

2. Calcular $E=m^{n^{m+1}}+n^{m^{1-n}}$ si se sabe que $m^n=\dfrac{1}{3}$ y $n^m=-2$.

Encontremos n^{m+1}

$$n^{m+1} = n^m \cdot n = -2n$$

Entonces

$$m^{n^{m+1}} = m^{-2n} = \left(m^n\right)^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{1/9} = 9$$

De otro lado

$$m^{1-n} = \frac{m^1}{m^n} = \frac{m}{1/3} = 3m \;\Rightarrow\; n^{m^{1-n}} = n^{3m} = \left(n^m\right)^3 = \left(-2\right)^3 = -8$$

De donde

$$E = 9 - 8 = 1$$

3. Simplificar $16^{8^{-3^{-1}}} - 0.25^{-4^{-2^{-1}}}$.

Piden calcular $D = M - S$.

$$M = 16^{8^{-3^{-1}}}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; 8^{-3^{-1}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 16^{8^{-3^{-1}}} = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$M = 4$$

$$S = \left(\frac{1}{4}\right)^{-4^{-2^{-1}}}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 4^{-2^{-1}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{4}\right)^{-4^{-2^{-1}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{4}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$S = 2$$

$$D = M - S = 4 - 2 = 2$$

4. Si se sabe que $\sqrt[n]{2\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{16^n}}}} = 512$, calcular $A = 625^{-16^{-(8n)^{-1}}}$.

Forma 1

Escribamos

$$\sqrt[n]{2\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{16^n}}}} = 2^9$$
$$\sqrt[n]{2 \cdot 2^{2/3} \cdot 2^{3/6} \cdot 2^{4n/12}} = 2^9$$
$$\sqrt[n]{2^{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{n}{3}}} = 2^9$$
$$\sqrt[n]{2^{\frac{13+2n}{6}}} = 2^9$$
$$2^{\frac{13+2n}{6n}} = 2^9$$

De donde

$$\frac{13+2n}{6n} = 9$$
$$13 + 2n = 54n$$
$$52n = 13$$
$$n = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Entonces

$$A = 625^{-16^{-(8n)^{-1}}} = 625^{-16^{-(2)^{-1}}} = 625^{-16^{\frac{-1}{2}}} = 625^{\frac{-1}{\sqrt{16}}} = 625^{\frac{-1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{1}{5}$$

Forma 2

Del dato:

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 4\sqrt{8\sqrt{16^n}}}} = 2^9$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{2^5\sqrt{8\sqrt{16^n}}}} = 2^9$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt{2^{10}\cdot 8\sqrt{16^n}}}} = 2^9$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt{2^{13}\sqrt{16^n}}}} = 2^9$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2^{26}\cdot 16^n}}}} = 2^9$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2^{26n}\cdot 2^{4n}}}}} = 2^9$$

$$\sqrt[12n]{2^{26+4n}} = 2^9$$

$$2^{\frac{26+4n}{12n}} = 2^9$$

$$\frac{26+4n}{12n} = 9 \;\Rightarrow\; 26+4n = 108n \;\Rightarrow\; 104n = 26 \;\Rightarrow\; n = \frac{1}{4}$$

Igual que antes, $A = \dfrac{1}{5}$.

Forma 3

Del dato:

$$\sqrt[n]{2\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{16^n}}}} = 2^9$$

Elevemos ambos miembros de la ecuación a la potencia n:

$$2\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{16^n}}} = 2^{9n}$$

$$\sqrt[3]{4\sqrt{8\sqrt{16^n}}} = 2^{9n-1}$$

Elevemos ambos miembros de la ecuación al cubo:

$$4\sqrt{8\sqrt{16^n}} = 2^{27n-3}$$
$$\sqrt{8\sqrt{16^n}} = 2^{27n-5}$$

Elevemos ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$8\sqrt{16^n} = 2^{54n-10}$$
$$\sqrt{16^n} = 2^{54n-13}$$

Al elevar nuevamente al cuadrado resulta:

$$16^n = 2^{108n-26}$$
$$2^{4n} = 2^{108n-26}$$

De donde

$$108n - 26 = 4n$$
$$104n = 26$$
$$n = \frac{1}{4}$$

Finalmente $A = \dfrac{1}{5}$.

5. Si $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, calcular

$$E = (a+b+c)^4 - 4(ab+ac+bc)\left[(a+b+c)^2 - (ab+ac+bc)\right]$$

Tenemos que

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{2} + 2(ab+ac+bc)$$
$$(a+b+c)^2 = 2 + 2(ab+ac+bc)$$

Cambiemos de variables

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=P \\ ab+ac+bc=Q \end{array}\right\} \Rightarrow \ P^2=2+2Q \qquad (\alpha)$$

La expresión E toma la forma

$$E=P^4-4Q\left[P^2-Q\right]$$
$$E=P^4-4P^2Q+4Q^2$$
$$E=\left(P^2-2Q\right)^2 \qquad (\beta)$$

De (α) $P^2-2Q=2,$ en (β)

$$E=(2)^2=4$$

6. Si

$$x^2+2y^2=a+b$$
$$2xy=a-b,$$

a) encontrar el valor de $E_{(x,y)}=x^4+4y^4,$ si se conoce que $ab=12.$

b) encontrar en términos de a y b el valor de $F_{(x,y)}=\left(x^2+2y^2\right)^3-8x^3y^3.$

a)

$$E = x^4 + 4y^4$$
$$E = \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - 4x^2y^2$$
$$E = \left(x^2 + 2y^2\right)^2 - \left(2xy\right)^2$$
$$E = \left(a+b\right)^2 - \left(a-b\right)^2$$
$$E = \left[\left(a+b\right)+\left(a-b\right)\right]\cdot\left[\left(a+b\right)-\left(a-b\right)\right]$$
$$E = \left[2a\right]\cdot\left[2b\right]$$
$$E = 4ab$$
$$E = 4\left(12\right) = 48$$

b)

$$F_{(x,y)} = \left(x^2 + 2y^2\right)^3 - 8x^3y^3$$
$$F_{(x,y)} = \left(x^2 + 2y^2\right)^3 - \left(2xy\right)^3$$
$$F_{(x,y)} = \left(a+b\right)^3 - \left(a-b\right)^3$$
$$F_{(x,y)} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - \left(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\right)$$
$$F_{(x,y)} = 6a^2b + 2b^3$$

7. Si la suma de los cuadrados de cuatro números más el doble producto del tercero por el cuarto más el doble producto de los otros dos, es igual al doble producto de la suma de los dos primeros y la suma de los otros dos, encontrar el cociente del doble de la suma de los dos primeros y el triple de la suma de los otros dos.

Sean $x,\ y,\ z \wedge u$ los cuatro números, entonces se tendrá que:

$$x^2+y^2+z^2+u^2+2(zu)+2(xy)=2(x+y)(z+u)$$
$$\underbrace{x^2+2xy+y^2}_{(x+y)^2}+\underbrace{z^2+2zu+u^2}_{(z+u)^2}=2(x+y)(z+u)$$
$$(x+y)^2-2(x+y)(z+u)+(z+u)^2=0$$
$$\left[(x+y)-(z+u)\right]^2=0$$
$$x+y-(z+u)=0$$
$$x+y=z+u$$

Como se pide $\dfrac{2(x+y)}{3(z+u)}$, el resultado es $\dfrac{2(x+y)}{3(x+y)}=\dfrac{2}{3}$.

8. La suma de tres números es igual a la constante $2m$ y la suma de los productos de estos tres números, tomados de 2 en 2, es m^2. Si el valor de la expresión formada por la diferencia de la suma de los cuadrados de la suma de cada número con m y la suma de los tres números es igual a 40, hallar el valor entero de m.

Sean $x, y \wedge z$ los tres números, entonces:

$$\begin{cases} x+y+z = 2m & (1) \\ xy+xz+yz = m^2 & (2) \\ (x+m)^2+(y+m)^2+(z+m)^2-(x+y+z) = 40 & (3) \end{cases}$$

De (1) elevemos al cuadrado

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=4m^2$$

De (2)

$$x^2+y^2+z^2+2m^2=4m^2$$
$$x^2+y^2+z^2=2m^2 \qquad (4)$$

Desarrollemos (3)

$$(x+m)^2+(y+m)^2+(z+m)^2-(x+y+z)=40$$
$$x^2+y^2+z^2+2m(x+y+z)+3m^2-(x+y+z)=40$$

De (1) y (4)

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{2m^2}+2m\underbrace{(x+y+z)}_{2m}+3m^2-\underbrace{(x+y+z)}_{2m}=40$$

$$2m^2+4m^2+3m^2-2m-40=0$$

$$9m^2-2m-40=0$$

$$(9m-20)(m+2)=0$$

De donde $m=\dfrac{20}{9}$ ó $m=-2.$

Como $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m=-2.$

9. Si $x-x^{-1}=1,$ encontrar $x^{12}+x^{-12}.$

Forma 1

Como

$$x-\frac{1}{x}=1 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1^2 \Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=1 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=3 \qquad (1)$$

Entonces

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3 \Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=3^2 \Rightarrow x^4+2+\frac{1}{x^4}=9 \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=7 \qquad (2)$$

De (2)

$$x^4+\frac{1}{x^4}=7 \Rightarrow \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2=7^2 \Rightarrow x^8+2+\frac{1}{x^8}=49 \Rightarrow x^8+\frac{1}{x^8}=47 \qquad (3)$$

De lo anterior deducimos que

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)=7(47)$$

$$x^{12}+\frac{1}{x^4}+x^4+\frac{1}{x^{12}}=329$$

$$x^{12}+\frac{1}{x^{12}}=329-\underbrace{\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)}_{7}$$

$$x^{12}+\frac{1}{x^{12}}=322$$

Forma 2

Sabemos que $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$, entonces

$$\left(x^4\right)^3+\left(x^{-4}\right)^3=\left(x^4+x^{-4}\right)\left[\left(x^4\right)^2-x^4x^{-4}+\left(x^{-4}\right)^2\right]$$

$$x^{12}+x^{-12}=\left(x^4+x^{-4}\right)\left(x^8-1+x^{-8}\right)$$

$$x^{12}+x^{-12}=(7)(47-1)=322$$

Forma 3

Sabemos que

$$\left(x^6+x^{-6}\right)^2=x^{12}+2+x^{-12}\ \Rightarrow\ x^{12}+x^{-12}=\left(x^6+x^{-6}\right)^2-2 \qquad (1)$$

Además

$$\left(x^2+x^{-2}\right)\left(x^4+x^{-4}\right)=x^6+x^{-6}+x^2+x^{-2}$$

$$x^6+x^{-6}=\left(x^2+x^{-2}\right)\left(x^4+x^{-4}\right)-\left(x^2+x^{-2}\right) \qquad (2)$$

De (2) y de los resultados obtenidos en la primera forma de solución

$$x^6 + x^{-6} = (3)(7) - (3) = 18$$

De (1) y del resultado anterior

$$x^{12} + x^{-12} = 18^2 - 2 = 324 - 2 = 322$$

10. Si $x + \frac{1}{x} = 3,$ encontrar el valor de $E = x^7 - \frac{1}{x^7}.$

Forma 1

Calculemos

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = x^7 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^7}$$

$$= \underbrace{\left(x^7 - \frac{1}{x^7}\right)}_{E} - \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$E = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (\alpha)$$

Como

$$x + \frac{1}{x} = 3 \;\Rightarrow\; \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \;\Rightarrow\; x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \;\Rightarrow\; x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \qquad (1)$$

Entonces

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \;\Rightarrow\; \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 7^2 \;\Rightarrow\; x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 49 \;\Rightarrow\; x^4 + \frac{1}{x^4} = 47 \qquad (2)$$

Además

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2=7-2=5\ \Rightarrow\ x-\frac{1}{x}=\sqrt{5} \qquad (3)$$

De manera que

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=\sqrt{5}(7+1)=8\sqrt{5} \qquad (4)$$

Si sustituimos (2), (3) y (4) en (α), obtenemos

$$E=47\left(8\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}=377\sqrt{5}$$

Forma 2

Encontremos

$$\begin{aligned}\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)&=x^7+x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^7}\\&=\underbrace{\left(x^7-\frac{1}{x^7}\right)}_{E}+\left(x-\frac{1}{x}\right)\\E&=\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right) \qquad (\beta)\end{aligned}$$

Como

$$x+\frac{1}{x}=3\ \Rightarrow\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^3=3^3\ \Rightarrow\ x^3+\frac{1}{x^3}+3x\cdot\frac{1}{x}\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{3}=27\ \Rightarrow\ x^3+\frac{1}{x^3}=18 \qquad (1)$$

Además

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}=3^2 \;\Rightarrow\; x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = x^2-2+\frac{1}{x^2}=7-2=5 \;\Rightarrow\; x-\frac{1}{x}=\sqrt{5} \qquad (2)$$

Entonces

$$\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)=7(3)\left(\sqrt{5}\right)=21\sqrt{5} \qquad (3)$$

Si reemplazamos (1), (2) y (3) en (β)

$$E=21\sqrt{5}\cdot(18)-\sqrt{5}$$

$$E=377\sqrt{5}$$

Forma 3

Hallemos

$$\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^7+x^5-\frac{1}{x^5}-\frac{1}{x^7}$$

$$\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x^7-\frac{1}{x^7}\right)+\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)$$

$$\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=E+\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)$$

$$E=\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right) \qquad (\gamma)$$

Se sabe que

$$\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$$

Por lo encontrado en (1) y (2) (Forma 2)

$$\left(x^6-\frac{1}{x^6}\right)=18\left(8\sqrt{5}\right)=144\sqrt{5} \qquad (1)$$

Además

$$\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)+\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)=18(3)\left(\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}$$
$$\left(x^5-\frac{1}{x^5}\right)=55\sqrt{5} \qquad (2)$$

Si reemplazamos (1) y (2) en (γ)

$$E=144\sqrt{5}(3)-55\sqrt{5}$$
$$E=377\sqrt{5}$$

11. La suma de dos números reales es 5 y la suma de sus potencias cuartas, 97. Encontrar la diferencia de dichos números.

Forma 1

Sean los números x e y:

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ x^4+y^4 &= 97 \end{cases}$$

Sabemos que los coeficientes del desarrollo de $(x+y)^4$ aparecen en el triángulo de Pascal,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Es decir:

$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^4 = x^4+y^4+4xy\left(x^2+y^2\right)+6x^2y^2$$
$$(x+y)^4 = x^4+y^4+4xy\left((x+y)^2-2xy\right)+6(xy)^2$$

Reemplacemos valores

$$(5)^4 = 97+4xy\left((5)^2-2xy\right)+6(xy)^2$$
$$625 = 97+100(xy)-8(xy)^2+6(xy)^2$$
$$2(xy)^2-100(xy)+528=0$$
$$(xy)^2-50(xy)+264=0$$

$$(xy-44)(xy-6)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} xy=44 \\ xy=6 \end{cases}$$

Si $xy=44 \quad \wedge \quad x+y=5 \;\Rightarrow\; t^2-5t+44=0 \;\Rightarrow\; t \notin \mathbb{R} \quad (\text{discriminante} < 0)$

Si
$xy=6 \quad \wedge \quad x+y=5 \;\Rightarrow\; t^2-5t+6=0 \;\Rightarrow\; (t-3)(t-2)=0 \;\Rightarrow\; t \in \{2,\ 3\}$

De donde

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \Rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 &= 2 \Rightarrow y_2 = 3 \end{aligned}$$

La diferencia pedida es $3-2=1$ ó $2-3=-1$.

Forma 2

Datos

$$\begin{cases} x+y &= 5 \\ x^4+y^4 &= 97 \end{cases}$$

Se pide $E = x - y$

Tenemos

$$\begin{aligned} E^2 &= (x-y)^2 \\ E^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \\ E^2 &= (x+y)^2 - 4xy \\ E^2 &= 25 - 4xy \Rightarrow xy = \frac{25-E^2}{4} \qquad (\alpha) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} x+y &= 5 \\ x^2+y^2+2xy &= 25 \\ x^2+y^2 &= 25-2xy \\ x^4+y^4+2x^2y^2 &= 625-100xy+4x^2y^2 \end{aligned}$$

$$x^4+y^4-2x^2y^2+100xy=625$$
$$97-2(xy)^2+100(xy)=625$$
$$2(xy)^2-100(xy)+528=0$$
$$(xy)^2-50(xy)+264=0 \qquad (\beta)$$

(α) en (β)

$$\left(\frac{25-E^2}{4}\right)^2-50\left(\frac{25-E^2}{4}\right)+264=0$$
$$\left(25-E^2\right)^2-200\left(25-E^2\right)+16\cdot 264=0$$
$$625-50E^2+E^4-5000+200E^2+4224=0$$
$$E^4+150E^2-151=0$$
$$\left(E^2-1\right)\left(E^2+151\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} E^2=1 \\ E^2=-151 \end{cases}$$

Como E es real, $E=\pm 1$.

12. Si el polinomio $P_{(x)}=\left(a^2-b^2\right)x^3+2b(a-b)x^2+4abx+b(2b-a)$ es divisible entre $Q_{(x)}=(a+b)x+(b-a)$, verificar que $a^2+b^2=ab$.

Forma 1

Si $P_{(x)}$ es divisible entre $Q_{(x)}$, se puede escribir $P_{(x)}=Q_{(x)}q_{(x)}$, siendo $q_{(x)}$ el cociente de la división.

Como $P_{(x)}=Q_{(x)}q_{(x)}$ se cumple para cualquier x y $Q_{(x)}=(a+b)x+(b-a)$ se anula para $x=\dfrac{a-b}{a+b}$, entonces $P_{(x)}$ también se debe anular para ese valor de x.

Es decir, $P_{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}=0.$

Reemplacemos en el dato:

$$P_{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}=\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+2b\left(a-b\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+4ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3+2b\left(a-b\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+4ab\left(\frac{a-b}{a+b}\right)+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\frac{\left(a-b\right)^4}{\left(a+b\right)^2}+2b\frac{\left(a-b\right)^3}{\left(a+b\right)^2}+\frac{4ab\left(a-b\right)}{a+b}+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\frac{a-b}{\left(a+b\right)^2}\left[\left(a-b\right)^3+2b\left(a-b\right)^2+4ab\left(a+b\right)\right]+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\frac{a-b}{\left(a+b\right)^2}\left[a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+2a^2b-4ab^2+2b^3+4a^2b+4ab^2\right]+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\frac{a-b}{\left(a+b\right)^2}\left[a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right]+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\frac{a-b}{\left(a+b\right)^2}\left(a+b\right)^3+b\left(2b-a\right)$$

$$0=\left(a-b\right)\left(a+b\right)+b\left(2b-a\right)$$

$$0=a^2-b^2+2b^2-ab$$

$$a^2+b^2=ab$$

Forma 2

De acuerdo con la regla de Ruffini

$$Q_{(x)}=\left(a+b\right)x+b-a=0\ \Rightarrow\ x=\frac{a-b}{a+b}$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a^2-b^2 & 2b(a-b) & 4ab & 2b^2-ab \\
\begin{array}{c} a-b \\ \hline a+b \end{array} & \downarrow & (a-b)^2 & (a-b)^2 & a^2-b^2 \\
\hline
 & a^2-b^2 & a^2-b^2 & (a+b)^2 & \multicolumn{1}{|c}{R}
\end{array}
$$

$$R = 2b^2 - ab + a^2 - b^2 = 0 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = ab$$

13. Factorizar $E = 28x^9y^5 - 35x^7y^7 + 7x^5y^9$.

$$E = 7x^5y^5\left(4x^4 - 5x^2y^2 + y^4\right)$$
$$E = 7x^5y^5\left(4x^2 - y^2\right)\left(x^2 - y^2\right)$$
$$E = 7x^5y^5\left(2x - y\right)\left(2x + y\right)\left(x - y\right)\left(x + y\right)$$

14. Factorizar $E = 4x^2y^2 - \left(x^2 + y^2 - z^2\right)^2$.

$$E = \left(2xy\right)^2 - \left(x^2 + y^2 - z^2\right)^2$$
$$E = \left[2xy + \left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right]\left[2xy - \left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right]$$
$$E = \left[\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - z^2\right]\left[z^2 - \left(x^2 - 2xy + y^2\right)\right]$$
$$E = \left[\left(x + y\right)^2 - z^2\right]\left[z^2 - \left(x - y\right)^2\right]$$
$$E = \left(x + y + z\right)\left(x + y - z\right)\left(z + x - y\right)\left(z - x + y\right)$$

15. Factorizar $16x^6y^5 - 54x^3y^5 - 16x^6y^3 + 54x^3y^3$.

Forma 1

Factor común monomio: $x^3y^3\left[16x^3y^2 - 54y^2 - 16x^3 + 54\right]$

Agrupación de términos: $x^3y^3\left[16x^3\left(y^2 - 1\right) - 54\left(y^2 - 1\right)\right]$

Factor común polinomio: $x^3y^3\left[\left(y^2-1\right)\left(16x^3-54\right)\right]$

Diferencia de cuadrados y factor común: $2x^3y^3\left[(y+1)(y-1)\left(8x^3-27\right)\right]$

Diferencia de cubos: $2x^3y^3\,(y+1)(y-1)(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)$

Forma 2

Agrupación de términos: $16x^6y^3\left(y^2-1\right)-54x^3y^3\left(y^2-1\right)$

Factor común monomio y polinomio: $2x^3y^3\left(y^2-1\right)\left(8x^3-27\right)$

Diferencia de cuadrados y de cubos:
$2x^3y^3\,(y+1)(y-1)(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)$

Forma 3

Agrupación de términos: $2x^3y^5\left(8x^3-27\right)-2x^3y^3\left(8x^3-27\right)$

Factor común monomio y polinomio: $2x^3y^3\left(8x^3-27\right)\left(y^2-1\right)$

Diferencia de cuadrados y de cubos:
$2x^3y^3\,(y+1)(y-1)(2x-3)\left(4x^2+6x+9\right)$

16. Factorizar $E=a^2+b^2-4c^2+2ab+a+b-2c.$

Forma 1

Reordenemos el polinomio

$$E=\underbrace{a^2+2ab+b^2}-4c^2+\left(a+b-2c\right)$$

$$E=\underbrace{\left(a+b\right)^2-4c^2}+\left(a+b-2c\right) \qquad (1)$$

$$E=\left[\left(a+b\right)+2c\right]\left[\left(a+b\right)-2c\right]+\left(a+b-2c\right)$$
$$E=\left(a+b-2c\right)\left(a+b+2c+1\right)$$

Forma 2

De (1)

$$E=(a+b)^2-4c^2+(a+b-2c)$$

O mejor aún

$$E=(a+b)^2+(a+b)-4c^2-2c$$
$$E=(a+b)^2+(a+b)-2c(2c+1)$$

Factoricemos por el método del aspa simple

$$E=\left[(a+b)+\cdots\ \right]\left[(a+b)-\cdots\ \right]$$
$$E=\left[(a+b)+(2c+1)\right]\left[(a+b)-2c\right]$$

17. Si $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=25,$ encontrar el valor de la expresión:

$$E=(a+b+c+d+e)^2+(a-b+c-d+e)^2+2(a+c-e)^2+2(b-d)^2-8ac$$

Forma 1

Agrupemos convenientemente

$$E=\left[(a+c+e)+(b+d)\right]^2+\left[(a+c+e)-(b+d)\right]^2+2(a+c-e)^2+2(b-d)^2-8ac$$
$$E=2\left[(a+c+e)^2+(b+d)^2\right]+2(a+c-e)^2+2(b-d)^2-8ac$$
$$E=2\left[a^2+c^2+e^2+2ac+2ae+2ce+b^2+2bd+d^2\right]+$$
$$2\left[a^2+c^2+e^2+2ac-2ae-2ce\right]+2\left[b^2-2bd+d^2\right]-8ac$$
$$E=4\left[a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right]$$
$$E=4[25]$$
$$E=100$$

Forma 2

Sea $x=a+c+e,\;\; y=b+d,$ entonces:

$$E=\underbrace{\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2}+2\left(x-2e\right)^2+2\left(y-2d\right)^2-8ac$$

$$E=\underbrace{2\left(x^2+y^2\right)}+2\left(x^2-4ex+4e^2\right)+2\left(y^2-4dy+4d^2\right)-8ac$$

$$E=4x^2+4y^2+8e\left(e-x\right)+8d\left(d-y\right)-8ac$$

$$E=4x^2+4y^2+8e\left[e-\left(a+c+e\right)\right]+8d\left[d-\left(b+d\right)\right]-8ac$$

$$E=4x^2+4y^2-8ae-8ce-8bd-8ac$$

$$E=4\left[\underbrace{x^2+y^2}-2ae-2ce-2bd-2ac\right]$$

$$E=4\left[\underbrace{\left(a+c+e\right)^2+\left(b+d\right)^2}-2ae-2ce-2bd-2ac\right]$$

$$E=4\left[a^2+c^2+e^2+2ac+2ae+2ce+b^2+d^2+2bd-2ae-2ce-2bd-2ac\right]$$

$$E=4\left[a^2+c^2+e^2+b^2+d^2\right]$$

$$E=4\left[25\right]$$

$$E=100$$

18. Factorizar $x^3y^3+ax^2y^2+bx^2y^2+cx^2y^2+abxy+acxy+bcxy+abc.$

Forma 1

Separemos los cuatro términos que contienen a $"c"$ de los otros

$$= \underbrace{x^3y^3 + ax^2y^2 + bx^2y^2 + abxy} + \underbrace{cx^2y^2 + acxy + bcxy + abc}$$

$$= xy\left(x^2y^2 + axy + bxy + ab\right) + c\left(x^2y^2 + axy + bxy + ab\right)$$

$$= \left(x^2y^2 + axy + bxy + ab\right)(xy + c)$$

$$= \left[xy(xy + a) + b(xy + a)\right](xy + c)$$

$$= (xy + a)(xy + b)(xy + c)$$

Forma 2

Agrupemos por parejas formadas por un monomio que contiene a $"a"$ y por otro que no contiene a $"a"$

$$= \underbrace{x^3y^3 + ax^2y^2} + \underbrace{bx^2y^2 + abxy} + \underbrace{cx^2y^2 + acxy} + \underbrace{bcxy + abc}$$

$$= x^2y^2(xy + a) + bxy(xy + a) + cxy(xy + a) + bc(xy + a)$$

$$= (xy + a)\left(x^2y^2 + bxy + cxy + bc\right)$$

$$= (xy + a)\left[xy(xy + b) + c(xy + b)\right]$$

$$= (xy + a)(xy + b)(xy + c)$$

19. Factorizar $\left(x^6 - 2x^3 + 1\right)^2 - \left(x^9 - 1\right)\left(x^3 - 1\right) + 3\left(x^3 - 1\right)^2$.

$$= \left[\left(x^3 - 1\right)^2\right]^2 - \left(x^3 - 1\right)\left(x^6 + x^3 + 1\right)\left(x^3 - 1\right) + 3\left(x^3 - 1\right)^2$$

$$= \left(x^3 - 1\right)^4 - \left(x^3 - 1\right)^2\left(x^6 + x^3 + 1\right) + 3\left(x^3 - 1\right)^2$$

$$= \left(x^3 - 1\right)^2\left[\left(x^3 - 1\right)^2 - \left(x^6 + x^3 + 1\right) + 3\right]$$

$$= \left(x^3 - 1\right)^2\left[x^6 - 2x^3 + 1 - x^6 - x^3 - 1 + 3\right]$$

$$= \left(x^3 - 1\right)^2\left(-3x^3 + 3\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= -3\left(x^3-1\right)^2\left(x^3-1\right) \\
&= -3\left(x^3-1\right)^3 \\
&= -3\left(x-1\right)^3\left(x^2+x+1\right)^3 \\
&= 3\left[\left(-1\right)^3\left(x-1\right)^3\right]\left(x^2+x+1\right)^3 \\
&= 3\left[\left(-1\right)\left(x-1\right)\right]^3\left(x^2+x+1\right)^3 \\
&= 3\left(1-x\right)^3\left(x^2+x+1\right)^3
\end{aligned}
$$

20. Factorizar $m^2\left(m^2+3n^2\right)^2-n^2\left(n^2+3m^2\right)^2$.

Forma 1

Desarrollemos la expresión

$$
\begin{aligned}
&= m^2\left(m^4+6m^2n^2+9n^4\right)-n^2\left(n^4+6m^2n^2+9m^4\right) \\
&= m^6+6m^4n^2+9m^2n^4-n^6-6m^2n^4-9m^4n^2 \\
&= m^6-n^6+6m^4n^2-6m^2n^4+9m^2n^4-9m^4n^2 \\
&= \left(m^2-n^2\right)\left(m^4+m^2n^2+n^4\right)+6m^2n^2\left(m^2-n^2\right)+9m^2n^2\left(n^2-m^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(m^2-n^2\right)\left(m^4+m^2n^2+n^4+6m^2n^2-9m^2n^2\right) \\
&= \left(m^2-n^2\right)\left(m^4-2m^2n^2+n^4\right) \\
&= \left(m^2-n^2\right)\left(m^2-n^2\right)^2 \\
&= \left(m^2-n^2\right)^3 \\
&= \left(m+n\right)^3\left(m-n\right)^3
\end{aligned}
$$

Forma 2

Por diferencia de cuadrados

$$=\left[m\left(m^2+3n^2\right)\right]^2-\left[n\left(n^2+3m^2\right)\right]^2$$
$$=\left[m\left(m^2+3n^2\right)+n\left(n^2+3m^2\right)\right]\left[m\left(m^2+3n^2\right)-n\left(n^2+3m^2\right)\right]$$
$$=\left[m^3+3m^2n+3mn^2+n^3\right]\left[m^3-3m^2n+3mn^2-n^3\right]$$
$$=\left(m+n\right)^3\left(m-n\right)^3$$

21. Factorizar $\left(x+y+z\right)\left(xy+xz+yz\right)-xyz.$

Desarrollemos la expresión:

$$=x^2y+x^2z+xyz+xy^2+xyz+y^2z+xyz+xz^2+yz^2-xyz$$
$$=\overset{(1)}{x^2y}+\overset{(2)}{xy^2}+\overset{(1)}{x^2z}+\overset{(3)}{xz^2}+\overset{(4)}{y^2z}+\overset{(4)}{yz^2}+\overset{(3)}{xyz}+\overset{(2)}{xyz}$$
$$=x^2y+x^2z+xy^2+xyz+xz^2+xyz+y^2z+yz^2$$
$$=x^2\left(y+z\right)+xy\left(y+z\right)+xz\left(y+z\right)+yz\left(y+z\right)$$
$$=\left(y+z\right)\left(x^2+xy+xz+yz\right)$$
$$=\left(y+z\right)\left[x\left(x+y\right)+z\left(x+y\right)\right]$$
$$=\left(y+z\right)\left(x+y\right)\left(x+z\right)$$

22. Factorizar $E=x\left(x+c\right)\left(x+2c\right)\left(x+3c\right)-24c^4.$

Forma 1

Ordenemos el polinomio así

$$E=\underbrace{x\left(x+3c\right)}\underbrace{\left(x+c\right)\left(x+2c\right)}-24c^4$$
$$E=\left(x^2+3cx\right)\left(x^2+3cx+2c^2\right)-24c^4$$
$$E=\left(x^2+3cx\right)^2+2c^2\left(x^2+3cx\right)-24c^4$$

Factoricemos según el método del aspa simple

$$E=\left[\left(x^2+3cx\right)+\cdots\right]\left[\left(x^2+3cx\right)-\cdots\right]$$
$$E=\left[x^2+3cx+6c^2\right]\left[x^2+3cx-4c^2\right]$$

O mejor aún

$$E=\left[x^2+3cx+6c^2\right]\left[x+4c\right]\left[x-c\right]$$

Forma 2

Efectuemos las operaciones indicadas

$$E=\left(x^2+cx\right)\left(x^2+5cx+6c^2\right)-24c^4$$
$$E=x^4+5cx^3+6c^2x^2+cx^3+5c^2x^2+6c^3x-24c^4$$
$$E=x^4+6cx^3+11c^2x^2+6c^3x-24c^4$$

Completemos cuadrados $x^4+6cx^3=\left(x^2+3cx\right)^2-9c^2x^2$

$$E=\left(x^2+3cx\right)^2-9c^2x^2+11c^2x^2+6c^3x-24c^4$$
$$E=\left(x^2+3cx\right)^2+2c^2x^2+6c^3x-24c^4$$
$$E=\left(x^2+3cx\right)^2+2c^2\left(x^2+3cx\right)-24c^4$$

Si hacemos $x^2+3cx=y$

$$E=y^2+2c^2y-24c^4$$
$$E=\left(y+6c^2\right)\left(y-4c^2\right)$$
$$E=\left(x^2+3cx+6c^2\right)\left(x^2+3cx-4c^2\right)$$
$$E=\left(x^2+3cx+6c^2\right)\left(x+4c\right)\left(x-c\right)$$

Forma 3

Al efectuar las operaciones indicadas se obtiene

$$E = x^4 + 6cx^3 + 11c^2x^2 + 6c^3x - 24c^4$$

Apliquemos el método de Ruffini con los divisores del término independiente $\left(-24c^4\right)$: $\pm c,\ \pm 2c,\ \pm 3c,\ \pm 4c,\ \pm 6c,\ \cdots$

	1	$6c$	$11c^2$	$6c^3$	$-24c^4$	
c	$\downarrow$	c	$7c^2$	$18c^3$	$24c^3$	
	1	$7c$	$18c^2$	$24c^3$	0	$\Rightarrow (x-c)$ es factor
$-4c$	$\downarrow$	$-4c$	$-12c^2$	$-24c^3$		
	1	$3c$	$6c^2$	0		$\Rightarrow (x+4c)$ es factor

El cociente es $1x^2 + 3cx + 6c^2$, de donde finalmente obtenemos

$$E = (x-c)(x+4c)\left(x^2 + 3cx + 6c^2\right)$$

23. Factorizar $E = 4x^5 + 4x^4 - 29x^3 - 11x^2 + 52x - 20.$

Divisores del término independiente (-20):

$$a = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 5,\ \pm 10,\ \pm 20$$

Divisores del coeficiente del término de mayor grado (4):

$$b = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$$

Debemos probar con los valores de a (enteros) y los de $\dfrac{a}{b}$ (fraccionarios)

	4	4	-29	-11	52	-20		
1	$\downarrow$	4	8	-21	-32	20		
	4	8	-21	-32	20	0		$\Rightarrow (x-1)$ es factor
2	$\downarrow$	8	32	22	-20			
	4	16	11	-10	0			$\Rightarrow (x-2)$ es factor
$1/2$	$\downarrow$	2	9	10				
	4	18	20	0				$\Rightarrow (x-1/2)$ es factor

$$E=(x-1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[4x^2+18x+20\right]$$
$$E=(x-1)(x-2)\left(\frac{2x-1}{2}\right)\left[2(2x+5)(x+2)\right]$$
$$E=(x-1)(x-2)(2x-1)(2x+5)(x+2)$$

24. Demostrar que la expresión $E=\dfrac{n^5-5n^3+4n}{n+2}$ es divisible entre 24 para todo número n que pertenezca a los enteros.

Forma 1

Escribamos $E=\dfrac{n\left(n^4-5n^2+4\right)}{n+2}=\dfrac{n\left(n^2-4\right)\left(n^2-1\right)}{n+2}$. Al simplificar se obtiene $E=n(n-2)(n-1)(n+1)=(n-2)(n-1)n(n+1)$, que corresponde al producto de cuatro números consecutivos. En todo grupo de cuatro números consecutivos, uno de ellos debe ser múltiplo de 2; otro, múltiplo de 3 y otro de ellos, múltiplo de 4, entonces $E=\overset{\circ}{2}\cdot\overset{\circ}{3}\cdot\overset{\circ}{4}=\overset{\circ}{24}$.

Forma 2

a) Asumamos que n es un número par: $n=2k,\ k\in\mathbb{Z}$. Reemplazándolo:

$$E=\frac{(2k)^5-5(2k)^3+4(2k)}{2k+2}$$
$$E=\frac{(2k)\left[(2k)^4-5(2k)^2+4\right]}{2k+2}$$
$$E=\frac{k\left[16k^4-20k^2+4\right]}{k+1}$$
$$E=\frac{4k\left[4k^4-5k^2+1\right]}{k+1}$$
$$E=\frac{4k\left(4k^2-1\right)\left(k^2-1\right)}{k+1}$$
$$E=\frac{4k(2k+1)(2k-1)(k+1)(k-1)}{k+1}$$
$$E=4k(2k+1)(2k-1)(k-1)$$
$$E=2(2k)(2k+1)(2k-1)(k-1)$$
$$E=(2k)(2k+1)(2k-1)(2)(k-1)$$
$$E=(2k)(2k+1)(2k-1)(2k-2)$$
$$E=(2k-2)(2k-1)(2k)(2k+1),$$

que es el producto de cuatro números consecutivos y se aplica el mismo razonamiento anterior.

b) Completemos la demostración asumiendo que n es un número impar: $n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$, c)

$$E=\frac{n\left(n^4-5n^2+4\right)}{n+2}$$

$$E=\frac{(2k+1)\left[(2k+1)^4-5(2k+1)^2+4\right]}{(2k+1)+2}$$

$$E=\frac{(2k+1)\left\{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2-5\right]+4\right\}}{2k+3}$$

$$E=\frac{(2k+1)\left\{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2-4-1\right]+4\right\}}{2k+3}$$

$$E=\frac{(2k+1)\left\{(2k+1)^2\left[(2k+1)^2-4\right]+4-(2k+1)^2\right\}}{2k+3}$$

$$E=\frac{(2k+1)\left\{(2k+1)^2\left[(2k+1)-2\right]\left[(2k+1)+2\right]+\left[2-(2k+1)\right]\left[2+(2k+1)\right]\right\}}{2k+3}$$

$$E=\frac{(2k+1)\left\{(2k+1)^2(2k-1)(2k+3)+(1-2k)(2k+3)\right\}}{2k+3}$$

$$E=(2k+1)\left\{(2k+1)^2(2k-1)+(1-2k)\right\}$$

$$E=(2k+1)(2k-1)\left\{(2k+1)^2-1\right\}$$

$$E=(2k+1)(2k-1)(2k+2)(2k)$$

$$E=(2k-1)(2k)(2k+1)(2k+2)$$

25. Si $a+b+c=0,$ calcular el valor de k para que se cumpla:

$$E=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=k(a-b)(a+2b)(2a+b)$$

Forma 1

Dado que $(a-b)$ figura en los dos miembros, conviene factorizar $(b-c)^3+(c-a)^3$ para que aparezca $(a-b)$ como factor común.

Suma de cubos:

$$\begin{aligned}(b-c)^3+(c-a)^3&=\left[(b-c)+(c-a)\right]\left[(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2\right]\\&=\left[b-a\right]\left[b^2-2bc+c^2-bc+ab+c^2-ac+c^2-2ac+a^2\right]\\&=(b-a)\left(b^2+3c^2+a^2-3bc-3ac+ab\right)\end{aligned}$$

Entonces:

$$E=(a-b)^3+(b-a)\left(b^2+3c^2+a^2-3bc-3ac+ab\right)$$
$$E=(a-b)\left[(a-b)^2-\left(b^2+3c^2+a^2-3bc-3ac+ab\right)\right]$$
$$E=(a-b)\left[a^2-2ab+b^2-\left(b^2+3c^2+a^2-3bc-3ac+ab\right)\right]$$
$$E=(a-b)\left[-3ab-3c^2+3bc+3ac\right]$$
$$E=3(a-b)\left[bc-ab+ac-c^2\right]$$
$$E=3(a-b)\left[-b(a-c)+c(a-c)\right]$$
$$E=3(a-b)(a-c)(c-b) \qquad (1)$$

De la condición

$$a+b+c=0 \;\Rightarrow\; c=-a-b \qquad (2)$$

Reemplacemos (2) en (1)

$$E=3(a-b)\left(a-(-a-b)\right)(-a-b-b)$$
$$E=-3(a-b)(2a+b)(a+2b)$$

De donde deducimos que $k=-3$.

Forma 2

Expresemos el primer miembro de la expresión dada en términos de a y b, según

$$c = -a - b$$

$$E = (a-b)^3 + \left[b - (-a-b)\right]^3 + \left[(-a-b) - a\right]^3$$
$$E = (a-b)^3 + (a+2b)^3 + (-2a-b)^3$$
$$E = (a-b)^3 + \underbrace{(a+2b)^3 - (2a+b)^3}$$
$$E = (a-b)^3 + \underbrace{\left[(a+2b)-(2a+b)\right]\cdot\left[(a+2b)^2 + (a+2b)(2a+b) + (2a+b)^2\right]}$$
$$E = (a-b)^3 + \left[-a+b\right]\cdot\left[a^2 + 4ab + 4b^2 + 2a^2 + 5ab + 2b^2 + 4a^2 + 4ab + b^2\right]$$
$$E = (a-b)^3 - (a-b)\left(7a^2 + 13ab + 7b^2\right)$$
$$E = (a-b)\left[(a-b)^2 - \left(7a^2 + 13ab + 7b^2\right)\right]$$
$$E = (a-b)\left[-6a^2 - 15ab - 6b^2\right]$$
$$E = -3(a-b)\left(2a^2 + 5ab + 2b^2\right)$$
$$E = -3(a-b)(2a+b)(a+2b)$$

De donde se concluye que $k = -3$.

Forma 3

Desarrollemos el primer miembro de la expresión dada

$$E = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$$
$$E = \cancel{a^3} - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3ac^2 + 3a^2c - \cancel{a^3}$$
$$E = -3\left[a^2b - ab^2 + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c\right]$$
$$E = -3\left[ab(a-b) + b^2c - a^2c - bc^2 + ac^2\right]$$
$$E = -3\left[ab(a-b) - c\left(a^2 - b^2\right) + c^2(a-b)\right]$$

$$E = -3(a-b)\left[ab - c(a+b) + c^2\right]$$
$$E = -3(a-b)\left[c^2 - (a+b)c + ab\right]$$
$$E = -3(a-b)(c-a)(c-b)$$
$$E = -3(a-b)(-a-b-a)(-a-b-b)$$
$$E = -3(a-b)(-2a-b)(-a-2b)$$
$$E = -3(a-b)(2a+b)(a+2b)$$

En consecuencia

$$k = -3$$

26. Comprobar que la siguiente expresión es independiente de los valores de a y b:

$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)} + \frac{b-2a}{b-a} + \frac{7a}{3(a+b)}$$

Se tiene

$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a-b)(a+b)} + \frac{2a-b}{a-b} + \frac{7a}{3(a+b)}$$
$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 3(2a-b)(a+b) + 7a(a-b)}{3(a+b)(a-b)}$$
$$E = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 6a^2 + 3ab - 3b^2 + 7a^2 - 7ab}{3(a+b)(a-b)}$$
$$E = \frac{a^2 - b^2}{3(a^2 - b^2)}$$
$$E = \frac{1}{3}$$

La expresión valdrá $\dfrac{1}{3}$ para todo valor de a y b con la condición de que $a^2 - b^2 \neq 0,$ es decir, siempre que $a \neq \pm b.$

27. Simplificar $E = \dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{x}{ab}\right)(a+b+x)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{x^2}{a^2b^2}}.$

Forma 1

$$\begin{aligned}
&= \frac{\dfrac{a+b-x}{ab}(a+b+x)}{\dfrac{b^2+a^2+2ab-x^2}{a^2b^2}}\\
&= \frac{ab\left[(a+b)-x\right]\left[(a+b)+x\right]}{a^2+2ab+b^2-x^2}\\
&= \frac{ab\left[(a+b)-x\right]\left[(a+b)+x\right]}{(a+b)^2-x^2}\\
&= \frac{ab\left[(a+b)^2-x^2\right]}{(a+b)^2-x^2}\\
&= ab
\end{aligned}$$

Forma 2

Multipliquemos el numerador y el denominador de la fracción E por a^2b^2

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab(a+b-x)(a+b+x)}{b^2+a^2+2ab-x^2}\\
&= \frac{ab\left[(a+b)-x\right]\left[(a+b)+x\right]}{a^2+b^2+2ab-x^2}
\end{aligned}$$

$$=\frac{ab\left[(a+b)^2-x^2\right]}{a^2+b^2+2ab-x^2}$$
$$=\frac{ab\left[a^2+b^2+2ab-x^2\right]}{a^2+b^2+2ab-x^2}$$
$$=ab$$

28. Simplificar $\left[\frac{xy}{(x-y)(x^3+y^3)}+\frac{x-y}{x^3+y^3}\right]\div\left[\frac{4}{x+y}-\frac{1}{x^2-y^2}\right].$

$$=\frac{xy+(x-y)(x-y)}{(x-y)(x^3+y^3)}\div\frac{4(x-y)-1}{x^2-y^2}$$
$$=\frac{x^2-xy+y^2}{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{4x-4y-1}$$
$$=\frac{1}{4x-4y-1}$$

29. Simplificar $\dfrac{\dfrac{a^5-a^3b^2}{a^3+b^3}}{\dfrac{a^4-2a^3b+a^2b^2}{a^2-ab+b^2}}\cdot\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\div\dfrac{a^2+ab}{a-b}.$

$$=\frac{\dfrac{a^3(a^2-b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}}{\dfrac{a^2(a^2-2ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}}\cdot\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{a-b}{a(a+b)}$$

$$=\frac{a(a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)^2}\cdot\frac{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{a-b}{a(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+b^2}{a-b}$$

30. Simplificar $\dfrac{(a+b)(b-1)}{(a-b)(a^2+b^2)}+\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{2}{b^2-a^2}+\dfrac{(a-b)(b-1)}{(a+b)(a^2+b^2)}$.

$$E=\frac{(a+b)(b-1)}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{a+b}-\frac{2}{b^2-a^2}+\frac{(a-b)(b-1)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$E=\frac{(a+b)(b-1)}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{a+b}+\frac{2}{a^2-b^2}+\frac{(a-b)(b-1)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$
$$E=\frac{(a+b)(b-1)}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{a+b}+\frac{2}{(a-b)(a+b)}+\frac{(a-b)(b-1)}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

Agrupemos la primera fracción con la última y la segunda con la tercera

$$E=\frac{(a+b)(b-1)}{(a-b)(a^2+b^2)}+\frac{(a-b)(b-1)}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{1}{a+b}+\frac{2}{(a-b)(a+b)}$$
$$E=\frac{b-1}{a^2+b^2}\left[\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right]+\frac{1}{a+b}\left[1+\frac{2}{a-b}\right]$$
$$E=\frac{b-1}{a^2+b^2}\left[\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\right]+\frac{1}{a+b}\left[\frac{a-b+2}{a-b}\right]$$
$$E=\frac{b-1}{a^2+b^2}\left[\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)(a+b)}\right]+\frac{a-b+2}{(a+b)(a-b)}$$
$$E=\frac{2(b-1)}{(a-b)(a+b)}+\frac{a-b+2}{(a+b)(a-b)}$$
$$E=\frac{2b-2+a-b+2}{(a+b)(a-b)}$$
$$E=\frac{b+a}{(a+b)(a-b)}$$
$$E=\frac{1}{a-b}$$

31. Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$, hallar el valor de $E=2\frac{bd+ad}{(ad-ac)}\frac{c}{b}$.

Escribamos E de la forma siguiente

$$E=2\frac{d(a+b)}{a(d-c)}\frac{c}{b} \qquad (1)$$

Como la expresión contiene a "$a+b$" y a "$d-c$", convendrá escribir el dato de la siguiente forma

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$$
$$\frac{a+b}{ab}=\frac{c-d}{cd}$$

De donde

$$\frac{a+b}{c-d}=\frac{ab}{cd} \qquad (2)$$

(2) en (1)

$$E=2\frac{d}{a}\left(-\frac{ab}{cd}\right)\frac{c}{b}=-\frac{2abcd}{abcd}=-2$$

32. Si $\frac{x-z}{z-y}+\frac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$, hallar el valor de $E=\left(\frac{z-x}{2y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{2x}\right)^2$.

De la condición se deduce que

$$\frac{x-z}{z-y}+\frac{z^2}{(x+y)(z-y)}=1$$
$$(x-z)(x+y)+z^2=(x+y)(z-y)$$
$$x^2+xy-xz-yz+z^2=xz-xy+yz-y^2$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz=0$$
$$(x+y-z)^2=0$$
$$x+y-z=0 \Rightarrow \begin{cases} z-x=y & (1) \\ x+y=z & (2) \\ z-y=x & (3) \end{cases}$$

Reemplacemos (1), (2) y (3) en E

$$E=\left(\frac{z-x}{2y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2z}\right)^2+\left(\frac{z-y}{2x}\right)^2$$
$$E=\left(\frac{y}{2y}\right)^2+\left(\frac{z}{2z}\right)^2+\left(\frac{x}{2x}\right)^2$$
$$E=\frac{3}{4}$$

33. Si a, b y c están relacionados por la igualdad $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b+a}=0,$ calcular el valor de la expresión $\frac{c+a}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}.$

Del dato

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b-c}=-\frac{1}{b-a}-\frac{1}{b+a}$$
$$\frac{b-c+b+c}{b^2-c^2}=\frac{-b-a-b+a}{b^2-a^2}$$
$$\frac{2b}{b^2-c^2}=\frac{-2b}{b^2-a^2}$$
$$b^2-c^2=-\left(b^2-a^2\right)$$
$$b^2-c^2=-b^2+a^2$$
$$2b^2=a^2+c^2 \qquad (\alpha)$$

La expresión que se debe calcular es

$$E=\frac{c+a}{a+b}+\frac{c+a}{b+c}$$
$$E=(c+a)\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right]$$
$$E=(c+a)\left[\frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)}\right]$$
$$E=(c+a)\left[\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}\right]$$
$$E=\frac{ac+2bc+c^2+a^2+2ab+ac}{ab+ac+b^2+bc}$$
$$E=\frac{2ac+2bc+2ab+\left(a^2+c^2\right)}{ac+bc+ab+b^2} \qquad (\beta)$$

(α) en (β)

$$E=\frac{2ac+2bc+2ab+\overbrace{\left(a^2+c^2\right)}^{2b^2}}{ac+bc+ab+b^2}$$
$$E=\frac{2\left(ac+bc+ab+b^2\right)}{ac+bc+ab+b^2}=2$$

34. Calcular el valor de la expresión

$$E=\frac{b-a}{b-x}\cdot\frac{b+x}{b+a}+\frac{a-b}{a-x}\cdot\frac{a+x}{a+b}$$

si se conoce que $2x^{-1}=a^{-1}+b^{-1}$.

Del dato deducimos que

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad\Rightarrow\quad\frac{2}{x}=\frac{b+a}{ab}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{2ab}{a+b}$$

Forma 1

$$E=\frac{1}{a+b}\left[\frac{(b-a)(b+x)}{b-x}-\frac{(b-a)(a+x)}{a-x}\right]$$

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{b+x}{b-x}-\frac{a+x}{a-x}\right]$$

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{(b+x)(a-x)-(a+x)(b-x)}{(b-x)(a-x)}\right]$$

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{ab-bx+ax-x^2-\left(ab-ax+bx-x^2\right)}{(b-x)(a-x)}\right]$$

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{2x(a-b)}{(b-x)(a-x)}\right]$$

Escribamos el resultado anterior como

$$E=-2\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}\left[\frac{x}{(x-b)(x-a)}\right]$$

Reemplacemos el valor de x

$$E=-2\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}\left[\frac{\dfrac{2ab}{a+b}}{\left(\dfrac{2ab}{a+b}-b\right)\left(\dfrac{2ab}{a+b}-a\right)}\right]$$

Multipliquemos el numerador y el denominador de la fracción entre corchetes por $(a+b)^2$, lo que equivale a multiplicar el numerador por dicha expresión y cada uno de los dos factores del denominador por $(a+b)$:

$$E=-2\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}\left[\frac{2ab(a+b)}{\left[2ab-b(a+b)\right]\left[2ab-a(a+b)\right]}\right]$$

$$E=-2\cdot\frac{(a-b)^2}{1}\left[\frac{2ab}{(ab-b^2)(ab-a^2)}\right]$$

$$E=-2\cdot\frac{(a-b)^2}{1}\left[\frac{2ab}{b(a-b)a(b-a)}\right]$$

$$E=-4\cdot\frac{(a-b)^2}{(a-b)(b-a)}$$

$$E=4\cdot\frac{(a-b)^2}{(a-b)(a-b)}=4$$

Forma 2

Si partimos de

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{b+x}{b-x}-\frac{a+x}{a-x}\right]$$

De la condición tendremos que

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{b+\dfrac{2ab}{a+b}}{b-\dfrac{2ab}{a+b}}-\frac{a+\dfrac{2ab}{a+b}}{a-\dfrac{2ab}{a+b}}\right]$$

Multipliquemos por $(a+b)$ el numerador y el denominador de cada una de las dos fracciones que se restan y que están entre los corchetes

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{\cancel{b}(a+b)+2a\cancel{b}}{\cancel{b}(a+b)-2a\cancel{b}}-\frac{\cancel{a}(a+b)+2\cancel{a}b}{\cancel{a}(a+b)-2\cancel{a}b}\right]$$

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{3a+b}{b-a}-\frac{3b+a}{a-b}\right]$$

$$E=\frac{1}{a+b}[3a+b+3b+a]$$

$$E=\frac{1}{a+b}\left[4(a+b)\right]=4$$

Forma 3

Del dato deducimos que

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{2ab}{a+b}\quad\Rightarrow\quad a+b=\frac{2ab}{x}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{a}{x}=\dfrac{a+b}{2b}\\[2ex]\dfrac{b}{x}=\dfrac{a+b}{2a}\end{cases}$$

Si partimos de

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{b+x}{b-x}-\frac{a+x}{a-x}\right]$$

Dividamos entre x el numerador y el denominador de cada una de las dos fracciones que se restan y que están entre los corchetes

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{\dfrac{b}{x}+1}{\dfrac{b}{x}-1}-\frac{\dfrac{a}{x}+1}{\dfrac{a}{x}-1}\right]$$

Reemplacemos las expresiones obtenidas de la condición

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{\frac{a+b}{2a}+1}{\frac{a+b}{2a}-1}-\frac{\frac{a+b}{2b}+1}{\frac{a+b}{2b}-1}\right]$$

Multipliquemos por $2a$ el numerador y el denominador de la primera fracción que aparece entre corchetes y por $2b$ el numerador y el denominador de la segunda fracción

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{a+b+2a}{a+b-2a}-\frac{a+b+2b}{a+b-2b}\right]$$

$$E=\frac{b-a}{a+b}\left[\frac{3a+b}{b-a}-\frac{a+3b}{a-b}\right]$$

$$E=\frac{1}{a+b}\left[3a+b+a+3b\right]$$

$$E=\frac{1}{a+b}\cdot 4\left(a+b\right)=4$$

35. Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{x^3-16}{x\left(x-2\right)^3}$.

Forma 1

Se sabe que

$$\frac{x^3-16}{x\left(x-2\right)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{\left(x-2\right)^2}+\frac{D}{\left(x-2\right)^3}$$

$$\frac{x^3-16}{x\left(x-2\right)^3}=\frac{A\left(x-2\right)^3+Bx\left(x-2\right)^2+Cx\left(x-2\right)+Dx}{x\left(x-2\right)^3}$$

Es decir

$$x^3-16=A\left(x-2\right)^3+Bx\left(x-2\right)^2+Cx\left(x-2\right)+Dx$$

Si $x=0 \Rightarrow -16=A(-2)^3 \Rightarrow A=2$

Si $x=2 \Rightarrow 8-16=0+0+0+2D \Rightarrow D=-4$

Si $x=1 \Rightarrow 1-16=A(-1)^3+B(1)(-1)^2+C(1)(-1)+D(1)$

Si $x=-1 \Rightarrow -1-16=A(-3)^3+B(-1)(-3)^2+C(-1)(-3)+D(-1)$

Se llega a

$$-15=-A+B-C+D \Rightarrow -15=-2+B-C-4 \Rightarrow B-C=-9 \qquad (1)$$
$$-17=-27A-9B+3C-D \Rightarrow -17=-54-9B+3C+4 \Rightarrow 3B-C=-11 \qquad (2)$$

De $(2)-(1)$ resulta

$$2B=-2 \Rightarrow B=-1 \Rightarrow C=8$$

La respuesta es

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}-\frac{4}{(x-2)^3}$$

Forma 2

A partir de

$$\frac{x^3-16}{x(x-2)^3}=\frac{A(x-2)^3+Bx(x-2)^2+Cx(x-2)+Dx}{x(x-2)^3}$$

Se tiene que

$$x^3-16=A\left(x^3-6x^2+12x-8\right)+B\left(x^3-4x^2+4x\right)+C\left(x^2-2x\right)+Dx$$

Coeficientes de

$x^3:\ 1 = A + B \qquad (1)$

$x^2:\ 0 = -6A - 4B + C \qquad (2)$

$x^1:\ 0 = 12A + 4B - 2C + D \qquad (3)$

$TI:\ -16 = -8A \Rightarrow A = 2 \Rightarrow$ De (1) $B = -1 \Rightarrow$ De (2) $C = 8 \Rightarrow$ De (3) $D = -4$

Entonces

$$\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)^3}$$

36. Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{2x^3 + x^2 + 2m^2x - m^2}{x^4 - m^4}$.

Escribamos

$$\frac{2x^3 + x^2 + 2m^2x - m^2}{(x+m)(x-m)\left(x^2+m^2\right)} = \frac{A}{x+m} + \frac{B}{x-m} + \frac{Cx+D}{x^2+m^2}$$

Entonces

$$2x^3 + x^2 + 2m^2x - m^2 = A(x-m)\left(x^2+m^2\right) + B(x+m)\left(x^2+m^2\right) + (Cx+D)\left(x^2-m^2\right)$$

Si $x = m$:

$$2m^3 + m^2 + 2m^2(m) - m^2 = B(m+m)\left(m^2+m^2\right)$$
$$4m^3 = 4m^3B$$
$$B = 1$$

Si $x = -m$:

$$-2m^3 + m^2 - 2m^3 - m^2 = A(-m-m)\left(m^2+m^2\right)$$
$$-4m^3 = -4m^3A$$
$$A = 1$$

Si $x=0$:

$$\begin{aligned}-m^2 &= 1(-m)\left(m^2\right)+1(m)\left(m^2\right)+(D)\left(-m^2\right)\\ -m^2 &= -m^2 D\\ D &= 1\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de x^3 :

$$\begin{aligned}2 &= A+B+C\\ C &= 2-1-1\\ C &= 0\end{aligned}$$

De donde la descomposición es:

$$\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x^2+m^2}$$

37. Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{\left(a^2+b^2\right)ab}{\left(x^2-a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$.

Apliquemos el método de los coeficientes

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)ab}{(x+a)(x-a)\left(x^2+b^2\right)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x-a}+\frac{Cx+D}{x^2+b^2}$$

$$=\frac{A(x-a)\left(x^2+b^2\right)+B(x+a)\left(x^2+b^2\right)+(Cx+D)(x+a)(x-a)}{(x+a)(x-a)\left(x^2+b^2\right)}$$

De donde:

$$\left(a^2+b^2\right)ab = A\left(x^3-ax^2+b^2x-ab^2\right)+B\left(x^3+ax^2+b^2x+ab^2\right)+C\left(x^3-a^2x\right)+\cdots$$
$$\cdots+D\left(x^2-a^2\right)$$
$$\left(a^2+b^2\right)ab = \left(A+B+C\right)x^3+\left(-aA+aB+D\right)x^2+\left(b^2A+b^2B-a^2C\right)x+\cdots$$
$$\cdots+\left(-ab^2A+ab^2B-a^2D\right)$$

Coeficiente de x^3 : $0 = A+B+C \qquad (\alpha)$

Coeficiente de x^2 : $0 = -Aa+Ba+D \qquad (\beta)$

Coeficiente de x^1 : $0 = Ab^2+Bb^2-Ca^2 \qquad (\gamma)$

Término Independiente: $\left(a^2+b^2\right)ab = -Aab^2+Bab^2-Da^2 \qquad (\delta)$

De (α) $A+B=C$

En (γ) $0=(A+B)b^2-Ca^2=Cb^2-Ca^2=C\left(b^2-a^2\right) \Rightarrow C=0$

En (α) $A+B=0 \Rightarrow B=-A$

En (β) $0=-Aa-Aa+D \Rightarrow D=2Aa$

En (δ)

$$\left(a^2+b^2\right)ab = -Aab^2-Aab^2-2Aa\left(a^2\right)$$
$$\left(a^2+b^2\right)ab = -2Aa\left(a^2+b^2\right)$$
$$A=-\frac{b}{2} \Rightarrow B=-A=\frac{b}{2} \Rightarrow D=2Aa=-ab$$

La descomposición es $\dfrac{-b}{2(x+a)}+\dfrac{b}{2(x-a)}-\dfrac{ab}{x^2+b^2}$

38. Descomponer en fracciones parciales

$$E=\frac{2(a+b)x^3-\left(2a^2+3b\right)x^2+2b(3a+b)x-3a^2b}{x^4-ax^3+bx^2-abx}.$$

Factoricemos el denominador

$$\begin{aligned}x^4-ax^3+bx^2-abx&=x\left[x^3-ax^2+bx-ab\right]\\&=x\left[x^2(x-a)+b(x-a)\right]\\&=x(x-a)\left(x^2+b\right)\end{aligned}$$

Entonces

$$E=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-a}+\frac{Cx+D}{x^2+b}$$
$$E=\frac{A(x-a)\left(x^2+b\right)+Bx\left(x^2+b\right)+(Cx+D)x(x-a)}{x(x-a)\left(x^2+b\right)}$$

Se debe cumplir que

$$2(a+b)x^3-\left(2a^2+3b\right)x^2+2b(3a+b)x-3a^2b\ =\ \cdots$$
$$=A(x-a)\left(x^2+b\right)+Bx\left(x^2+b\right)+(Cx+D)x(x-a)$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3a^2b = A(-a)b \ \Rightarrow \ A = 3a \qquad (\alpha)$$

$$\begin{aligned} x = a \quad \Rightarrow \quad 2(a+b)a^3 - \left(2a^2+3b\right)a^2 + 2b(3a+b)a - 3a^2b &= Ba\left(a^2+b\right) \\ 2a^3b + 2ab^2 &= Ba\left(a^2+b\right) \\ 2ab\left(a^2+b\right) &= Ba\left(a^2+b\right) \\ B &= 2b \end{aligned}$$

Además, el coeficiente de x^3, que es $2(a+b)$, debe coincidir con el de x^3 en el desarrollo del segundo miembro de la expresión (α). Es decir:

$$2(a+b) = \underset{3a}{A} + \underset{2b}{B} + C$$

$$2(a+b) = 3a + 2b + C$$

$$C = -a$$

Por último, si $x = -a$ entonces

$$2(a+b)\left(-a^3\right) - \left(2a^2+3b\right)a^2 + 2b(3a+b)(-a) - 3a^2b =$$

$$= 3a(-2a)\left(a^2+b\right) + 2b(-a)\left(a^2+b\right) + \left(a^2+D\right)(-a)(-2a)$$

$$-2a^4 - 2a^3b - 2a^4 - 3a^2b - 6a^2b - 2ab^2 - 3a^2b =$$

$$= -6a^4 - 6a^2b - 2a^3b - 2ab^2 + 2a^4 + 2a^2D$$

$$-6a^2b = 2a^2D$$

$$D = \frac{-6a^2b}{2a^2} = -3b$$

La descomposición es

$$\frac{3a}{x} + \frac{2b}{x-a} + \frac{-ax-3b}{x^2+b}$$

$$\frac{3a}{x} + \frac{2b}{x-a} - \frac{ax+3b}{x^2+b}$$

39. Si $\dfrac{x^3+n}{x^4-4x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{D}{x-2}$, en donde $A=B+C+D$, hallar la constante “ n ”.
Forma 1

Efectuemos las operaciones

$$\frac{x^3+n}{x^4-4x^2}=\frac{Ax(x+2)(x-2)+B(x+2)(x-2)+Cx^2(x-2)+Dx^2(x+2)}{x^2(x+2)(x-2)}$$

Entonces

$$x^3+n=Ax\left(x^2-4\right)+B\left(x^2-4\right)+Cx^2(x-2)+Dx^2(x+2)$$

Si $x=2 \Rightarrow 8+n=A(0)+B(0)+C(0)+D(4)(4) \Rightarrow D=\dfrac{n+8}{16}$ (1)

Si
$x=-2 \Rightarrow -8+n=A(0)+B(0)+C(4)(-4)+D(0) \Rightarrow C=\dfrac{8-n}{16}$ (2)

Si $x=0 \Rightarrow 0+n=A(0)+B(-4)+C(0)+D(0) \Rightarrow B=\dfrac{n}{-4}=\dfrac{-n}{4}$ (3)

Si $x=1 \Rightarrow$

$$1+n=-3A-3B-C+3D$$
$$1+n=-3(B+C+D)-3B-C+3D \qquad \text{(según la condición dada)}$$
$$1+n=-6B-4C$$
$$1+n=-6\left(\frac{-n}{4}\right)-4\left(\frac{8-n}{16}\right) \qquad \text{(de (2) y (3))}$$
$$4+4n=6n-8+n$$
$$n=4$$

Forma 2

De (1)

$$x^3+n=Ax\left(x^2-4\right)+B\left(x^2-4\right)+Cx^2\left(x-2\right)+Dx^2\left(x+2\right)$$
$$x^3+n=x^3\left(A+C+D\right)+\ \cdots$$

De donde

$$1=A+C+D$$
$$1=A+\frac{8-n}{16}+\frac{8+n}{16}$$
$$1=A+1$$

$$A=0$$

Reemplacemos en el dato:

$$A=B+C+D$$
$$0=-\frac{n}{4}+\frac{8-n}{16}+\frac{8+n}{16}$$
$$0=-4n+8-n+8+n$$
$$4n=16$$
$$n=4$$

Forma 3

Si $A=B+C+D$:

$$\frac{x^3+n}{x^4-4x^2}=\frac{B+C+D}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{x-2}$$

Como tenemos cuatro incógnitas $\left(A,\ B,\ C\ \text{y}\ n\right)$, demos cuatro valores diferentes a x para formar un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+n}{-3} = \frac{B+C+D}{1} + \frac{B}{1} + \frac{C}{3} + \frac{D}{-1} \qquad (\alpha)$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1+n}{-3} = \frac{B+C+D}{-1} + \frac{B}{1} + \frac{C}{1} + \frac{D}{-3} \qquad (\beta)$$

$$x=3 \quad \Rightarrow \quad \frac{27+n}{81-36} = \frac{B+C+D}{3} + \frac{B}{9} + \frac{C}{5} + \frac{D}{1} \qquad (\gamma)$$

$$x=-3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-27+n}{81-36} = \frac{B+C+D}{-3} + \frac{B}{9} + \frac{C}{-1} + \frac{D}{-5} \qquad (\delta)$$

De $(\alpha)+(\beta)$

$$\frac{-2n}{3} = 2B + \frac{4C}{3} - \frac{4D}{3} \;\Rightarrow\; -2n = 6B + 4(C-D)$$

De $(\gamma)+(\delta)$

$$\frac{2n}{45} = \frac{2B}{9} - \frac{4C}{5} + \frac{4D}{5} \;\Rightarrow\; 2n = 10B - 36(C-D)$$

De las dos últimas ecuaciones

$$C-D = \frac{-2n-6B}{4} = \frac{10B-2n}{36}$$

entonces

$$-18n - 54B = 10B - 2n$$
$$16n = -64B$$
$$B = -\frac{n}{4}$$

De (α)

$$-\frac{1}{3}-\frac{n}{3}=2\underset{-\frac{n}{4}}{B}+\frac{4C}{3}\;\Rightarrow\;-\frac{1}{3}-\frac{n}{3}=-\frac{n}{2}+\frac{4C}{3}\;\Rightarrow\;-2-2n=-3n+8C$$

$$\Rightarrow\; C=\frac{n-2}{8}$$

De (β)

$$\frac{1}{3}-\frac{n}{3}=-D-\frac{D}{3}\;\Rightarrow 1-n=-3D-D\;\Rightarrow\;1-n=-4D$$

$$\Rightarrow\; D=\frac{n-1}{4}$$

De (γ)

$$\frac{27+n}{45}=\frac{B+C+D}{3}+\frac{B}{9}+\frac{C}{5}+\frac{D}{1}$$

$$27+n=15(B+C+D)+5B+9C+45D$$

$$27+n=20B+24C+60D$$

$$27+n=20\left(-\frac{n}{4}\right)+24\left(\frac{n-2}{8}\right)+60\left(\frac{n-1}{4}\right)$$

$$27+n=-5n+3n-6+15n-15$$

$$48=12n$$

$$n=4$$

40. Descomponer la fracción $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+2}+x}$ en fracciones parciales con el cambio de variable $x+2=z^3$ y expresar el resultado en términos de z.

Sustituyamos $x=z^3-2$ en la fracción donde

$$\frac{z^3-2}{\sqrt[3]{z^3}+z^3-2}=\frac{z^3-2}{z^3+z-2}$$

Como la fracción obtenida es impropia, debemos efectuar previamente la división indicada

$$\frac{z^3-2}{z^3+z-2}=\frac{z^3+z-2-z}{z^3+z-2}=1-\frac{z}{z^3+z-2}$$

Factoricemos el denominador de la fracción propia obtenida

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & \downarrow & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$z^3+z-2=(z-1)\left(z^2+z+2\right)$$

Entonces

$$\frac{z}{z^3+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z+2}$$
$$z=A\left(z^2+z+2\right)+(Bz+C)(z-1)$$

Si $z=1 \Rightarrow 1=A(4)+0 \Rightarrow A=\frac{1}{4}$

Si $z=0 \Rightarrow 0=A(2)+C(-1) \Rightarrow C=2A=\frac{1}{2}$

Coeficiente de z^2 : $\quad 0=A+B \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$

Entonces

$$\frac{z}{z^3+z-2}=\frac{1/4}{z-1}+\frac{-\frac{1}{4}z+\frac{1}{2}}{z^2+z+2}$$
$$=\frac{1}{4(z-1)}+\frac{-z+2}{4\left(z^2+z+2\right)}$$

De donde

$$\frac{z^3-2}{z^2+z-2}=1-\frac{1}{4(z-1)}+\frac{z-2}{4\left(z^2+z+2\right)}$$

Ejercicios propuestos

41. Simplificar $\sqrt[n-1]{\frac{ab^n}{\sqrt[n]{ab}}}$.

    R.: $b\sqrt[n]{ab}$

42. Calcular el valor de m de modo tal que el monomio $\frac{a\sqrt{a^{m-2}}}{\sqrt[3]{a^{m+2}}}$ sea de tercer grado.

    R.: 22

43. Resolver $\left(a^{x-1}\right)^{x+4}=\left(a^{x-2}\right)^{x+3}$.

    R.: -1

44. ¿Qué valor toma x en $m^2\sqrt[x]{m^{5+2x}}=\sqrt[x]{m^{17}}$?

    R.: 3

45. Calcular $x^2 - 3x + 2,$ si $x^{-3x^{-0,5}} = 0{,}125.$

R.: 6

46. Calcular $\sqrt[4]{x}$ si $x^{2x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

R.: 0,5

47. Calcular el valor numérico de $E = \sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$, para $x = 2.$

R.: 2

48. Si $E = \sqrt{13 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots}}}}$, calcular el valor de $E^2 - 5E + 4.$

R.: 0

49. Simplificar $3x \cdot \sqrt[5]{\dfrac{1}{(3x)^3}\sqrt[4]{\dfrac{1}{(3x)^5}\sqrt[3]{\dfrac{1}{(3x)^7}\sqrt{\dfrac{1}{(3x)^9}}}}}$.

R.: $(3x)^{-1/24}$

50. Encontrar $\dfrac{n}{m}$, si se sabe que $\dfrac{\sqrt[3]{a^{m-2}b^4}}{\sqrt[5]{a^{n-1}b^m}}$ tiene grado absoluto 5 y grado relativo 4 con respecto a "a".

R.: $-\dfrac{176}{15}$

51. Calcular la suma de coeficientes del polinomio homogéneo siguiente

$$mx^{p^5+7}y^{2p^2+3} + qx^{2p^2+17}y^{25} + x^m y^q$$

R.: 51

52. Dados los polinomios:

$$P(x,y)=x^{m^2+3}y^{n-5}+2x^{m^2+1}y^n-x^{m^2-4}y^n$$
$$Q(x,y)=x^{2m}y^{n^2-12}-3x^{2m+1}y^{n^2-20}+x^{2m+6}y^{n^2},$$

si el polinomio $P(x,y)$ es de grado 19 respecto a "x" y el grado del polinomio $Q(x,y)$ respecto a "x" es 11 unidades menor que su grado respecto a "y", hallar el grado absoluto de P.

R.: 22

53. ¿Cuántos términos tiene el polinomio completo y ordenado en forma ascendente: $P(x)=ax^{a-6}+(a-1)x^{a-5}+(a-2)x^{a-4}+\cdots$?

R.: 6

54. Si $ax^3+bx^2+cx+d\equiv(x+2)^2(x+3)^3(x-1)$, calcular $a+b+c+d$.

R.: 0

55. Determinar el grado de homogeneidad de un polinomio completo de dos variables cuya suma de grados es 90.

R.: 9

56. Simplificar $\sqrt[7]{x+\sqrt{x^2-y^{14}}}\cdot\sqrt[7]{x-\sqrt{x^2-y^{14}}}$.

R.: y^2

57. Simplificar

$$S=\left(\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}\right)\left(\sqrt[3]{(a+b)^2}-\sqrt[3]{a^2-b^2}+\sqrt[3]{(a-b)^2}\right)$$

R.: $2a$

58. Si $a+b+c=0$, calcular $E=\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ac}+\dfrac{c^2}{ab}$.

R.: 3

59. Efectuar $P=(x+y+z)^3-(x-y+z)^3-6y\left[(x+z)^2-y^2\right]$.

R.: $8y^3$

60. Si el polinomio $P(x)=x^3+2x^2+ax+b$ se divide entre $x-1$, el resto es 2 y si se divide entre $x-2$ el resto es 18. Encontrar los valores de a y b.

R.: $a=3$, $b=-4$.

61. $P(x)$ es un polinomio entero en x que dividido entre el producto $(x+1)(x-1)(x+3)$ deja como resto x^2+2x-3. Calcular los restos que dejará al dividirlo separadamente entre x^2-1 y $x+3$.

R.: $2x-2$ y 0

62. $P(x)$ es un polinomio entero en x que dividido entre el producto $(x^2+4x-5)(x^2-9)$ da como resto $3x^3-5x-8$. Calcular los restos que se obtendrían al dividir separadamente $P(x)$ entre $x-1$, $x+3$, $x-3$ y $x+5$.

R.: -10, -74, 58, -358

63. Los restos de la división de un polinomio entero en x entre los binomios $x+1$, $x-1$ y $x-2$, son 5, -1 y -1, respectivamente. Encontrar el resto de la división entre $(x^2-1)(x-2)$.

R.: x^2-3x+1

64. Calcular el resto de la división $\dfrac{(x-3)^{2n}+(x-2)^{n}-1}{(x-3)(x-2)}$.

R.: 0

65. Calcular el resto de dividir $\dfrac{\left(x^2+x+3\right)^{21}-\left(x^2+x+5\right)^{17}-2x^2-2x+8}{x^2+x+4}$.

R.: 14

66. Simplificar $\dfrac{x^{2n-1}+x^{2n-2}+x^{2n-3}+\cdots+x^2+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+x^2+x+1}$.

R.: x^n+1

67. Encontrar la relación que debe cumplirse entre los valores de a y b, de tal manera que la expresión

$$\frac{x^{a+b}y^{ab}-y^{a^3+b^3+ab}}{(xy)^{ab}-y^{a^2+b^2}}$$

sea un cociente notable.

R.: $ab=1$

68. Determinar la suma de los factores de x^9-y^4.

R.: $2x^{4.5}$

69. Un factor de $x^3\left(z-y^2\right)+y^3\left(x-z^2\right)+z^3\left(y-x^2\right)+xyz(xyz-1)$ es

i) $x-z$ ii) x^2-z iii) $x-z^2$ iv) $x-y^2$ v) $x-y$

R.: iii)

70. El número de factores no repetidos de x^4+2x^3-2x-1 es
i) 4 ii) 3 iii) 2 iv) 1 v) 0

R.: iii)

71. Encontrar el factor de mayor grado al factorizar $a^5 - 9a^3 + a^2 - 9$.

R.: $a^2 - a + 1$

72. Encontrar la suma de factores de $a^4 + 2a^2 + 9$.

R.: $2a^2 + 6$

73. ¿Cuántos factores se obtienen al factorizar $a^4 + a^2 + 1$?

R.: 2

74. Encontrar el número de factores de $x^3y^2 + y^3z^2 - x^3z^2 - y^5$.

R.: 4

75. Factorizar $x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3$.

R.: $\left(x^2 + y^2 + xy\right)^2$

76. No es factor de la expresión $x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$
i) $x-1$ ii) $x+1$ iii) $x+3$ iv) $x-3$ v) $x+2$

R.: ii)

77. Sumar los factores de $6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10$.
R.: $5x + 2y + 7$

78. Factorizar $x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 16x + 10$ y dar la suma de sus factores.

R.: $2x^2 + 5x + 7$

79. Encontrar el factor de mayor grado de $6x^3+14x^2-8$.

R.: $3x^2+4x-4$

80. Encontrar la suma de los factores de menor grado al factorizar

$$\left(x^2+x-2\right)^2+5x^2+5x-10$$

R.: $2x+1$

81. ¿Cuántos factores diferentes tiene la expresión $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$?

R.: 1

82. Factorizar x^5+x+1 y encontrar la suma de sus factores.

R.: x^3+x+2

83. Factorizar $8x^6-12x^5-46x^4+39x^3-79x^2+126x+90=0$.

R.: $(2x+1)(2x-3)(2x+5)(x-3)\left(x^2+2\right)=0$

84. Factorizar $25x^4-45x^3-476x^2+396x-80$.

R.: $(5x-2)^2(x+4)(x-5)$

85. Simplificar $S=\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2}{x^2-8x+15}-\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

R.: $\dfrac{1}{x-2}$

86. Simplificar $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$.

R.: $\dfrac{a+b-c}{a-b+c}$

87. Simplificar $E=\dfrac{\left[\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)^2\right]-4\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]^2}{\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+\left(\dfrac{y}{x}\right)^3\right]^2-\left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^3-\left(\dfrac{y}{x}\right)^3\right]^2}$.

R.: 4

88. Simplificar $S=\dfrac{x^4-(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}+\dfrac{x^2-\left(x^2-1\right)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

R.: 1

89. Efectuar $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

R.: $a+b+c$

90. Simplificar $\left[(x+1)^{-1}-(x-1)^{-1}\right]\cdot\left[(x+1)^{-1}+(x-1)^{-1}\right]^{-1}$.

R.: $-\dfrac{1}{x}$

91. Calcular $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left[1-\dfrac{1-\left(a^2+x^2\right)}{2ax}\right]$.

R.: $\dfrac{a^3}{2a-2}$

92. Simplificar $\dfrac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

R.: $\sqrt{1-x}$

93. Si $\dfrac{10x^2-6x-22}{x^3-2x^2-5x+6}\equiv\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x-3}$, calcular $A+B+C$.

R.: 10

94. Una de las fracciones parciales de $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+x^2-x-1}$ es

i) $\dfrac{1}{x-1}$ ii) $\dfrac{2}{x-1}$ iii) $\dfrac{-1}{x-1}$ iv) $\dfrac{-2}{x-1}$ v) $\dfrac{3}{x-1}$

R.: i)

95. Descomponer $\dfrac{3x^3-x^2+5}{x^4-x^2-2}$ y sumar los numeradores resultantes.

R.: $3x-1$

96. Hallar $A+2B-C$ si $\dfrac{x^2+3x+1}{x\left(x^2+x-2\right)}\equiv\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$.

R.: 3

97. Encontrar la raíz cuadrada de $2x-1-2\sqrt{x^2-x-6}$.

R.: $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}$

98. Encontrar el valor de $E=\sqrt{2+2\sqrt{2+\ \cdots\ +2\sqrt{2+2\sqrt{2+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}}}$.

R.: $\sqrt{3}+1$

99. Racionalizar $E=\dfrac{10}{\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}+2}$.

R.: $2+\sqrt[3]{12}$

100. Racionalizar $\dfrac{1}{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{6}+\sqrt[6]{4}}$.

R.: $\sqrt[6]{81}-\sqrt[6]{54}+\sqrt[6]{24}-\sqrt[6]{16}$

II

Ecuaciones

1. Ecuación

Es una igualdad condicional que se cumple para determinado(s) valor(es) de una(s) incógnitas. Resolver una ecuación en $\mathbb{R}$ consiste en encontrar dicho(s) valor(es) real(es).

$2 = 2,$ es una igualdad absoluta dado que se cumple siempre.

$\underbrace{4x-2}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{2}_{\text{segundo miembro}}$, es una ecuación que se cumple solo para $x = 1.$

1.1. Clasificación de las ecuaciones

1.1.1. Según el grado

$3x^2 - 4x + 5 = 0$ es de segundo grado.

1.1.2. Según los coeficientes

$2x^3 - x^2 + 4 = 0$ es de coeficientes numéricos.

$ax^4 - bx^3 + cx - d = 0$ es de coeficientes literales.

1.1.3. Según las soluciones

a) Compatibles

Si admiten por lo menos una solución y pueden ser:

- Determinadas, si admiten un número finito de soluciones. $3x^2+5x-2=0$ tiene dos soluciones $x_1=-2$ y $x_2=1/3$.
- Indeterminadas, si admiten un número infinito de soluciones. $3x^2+5x=x(3x+5)$ tiene como solución a cualquier valor real de x.

b) Incompatibles
Si no admiten solución, por ejemplo: $3x^2-2=3x^2+2$.

1.2. Principios fundamentales para resolver ecuaciones

i) Si a ambos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número, las soluciones de la ecuación resultante son las mismas que las de la ecuación original.

$$2x=8 \;\rightarrow\; x_1=4$$
$$2x+4=12 \;\rightarrow\; x_1=4$$

ii) Si a ambos miembros de una ecuación se les multiplica o divide por un mismo número (diferente de cero), las soluciones no varían.

$$100x^2+300x=0 \;\rightarrow\; x_1=0 \text{ y } x_2=-3$$
$$x^2+3x=0 \;\rightarrow\; x_1=0 \text{ y } x_2=-3$$

iii) Si a ambos miembros de una ecuación se les multiplica por una misma expresión que contiene a la incógnita, se pueden introducir soluciones (extrañas).
a)

$$x=2 \;\rightarrow\; x_1=2$$

Multipliquemos ambos miembros por $x-1$:

$$(x-1)x=(x-1)2$$
$$(x-1)x-2(x-1)=0$$
$$(x-1)(x-2)=0 \;\rightarrow\; x_1=2 \text{ y } x_2=1 \text{ (extraña)}$$

La solución extraña se obtiene de igualar a cero el factor $x-1$, por el cual se multiplicó ambos miembros de la ecuación original.

b)

$$x = 4 \;\rightarrow\; x_1 = 4$$

Multipliquemos ambos miembros por $x - 4$:

$$(x-4)x = (x-4)4$$
$$(x-4)x - 4(x-4) = 0$$
$$(x-4)(x-4) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = x_2 = 4$$

c)

$$x = 2 \;\rightarrow\; x_1 = 2$$

Multipliquemos ambos miembros por $x^2 + 1$:

$$(x^2+1)x = (x^2+1)2$$
$$(x^2+1)x - 2(x^2+1) = 0$$
$$(x^2+1)(x-2) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 2$$

No se introdujeron soluciones extrañas reales porque el factor $x^2 + 1$, por el cual se multiplicó ambos miembros de la ecuación original no es igual a cero para ningún valor real de x.

iv) Si a ambos miembros de una ecuación se les divide entre una expresión que contiene a la incógnita, se pueden eliminar soluciones.

a)

$$x^2 = 4x \;\rightarrow\; x_1 = 4 \;\text{ y }\; x_2 = 0$$

Dividamos entre x ambos miembros de la ecuación:

$$x = 4 \;\rightarrow\; x_1 = 4 \;\; (\text{se eliminó la solución } x_2 = 0)$$

La solución eliminada corresponde a la que se obtiene al igualar a cero el factor x, que fue cancelado.

b)

$$x(x-2)=2(x-2) \;\rightarrow\; x_1 = x_2 = 2$$

Dividamos entre $x-2$ ambos miembros de la ecuación:

$$x = 2 \;\rightarrow\; x_1 = 2$$

La solución eliminada corresponde a la que se obtiene al igualar a cero el factor x, que fue cancelado.

c)

$$\left(x^2+1\right)x = \left(x^2+1\right)2 \;\rightarrow\; x_1 = 2$$

Dividamos entre x^2+1 ambos miembros de la ecuación:

$$x = 2 \;\rightarrow\; x_1 = 2$$

No se eliminó ninguna solución real porque el factor x^2+1, por el cual se dividió ambos miembros de la ecuación original, no es igual a cero para ningún valor real de x.

v) Si a ambos miembros de una ecuación se les eleva a una misma potencia par, se pueden introducir soluciones (extrañas).

a)

$$x = -5 \;\rightarrow\; x_1 = -5$$

Elevemos al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$x^2 = (-5)^2 = 25 \;\rightarrow\; x_1 = -5 \text{ y } x_2 = 5 \;\text{(extraña)}$$

b)

$$x^2 = 25 \;\rightarrow\; x_1 = -5 \text{ y } x_2 = 5$$

Elevemos al cuadrado ambos miembros de la ecuación

$$\left(x^2\right)^2 = (25)^2 = 625$$

$$x^4 - 625 = 0$$

$$\left(x^2 + 25\right)\left(x^2 - 25\right) = 0$$

$$\left(x^2 + 25\right)(x+5)(x-5) = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -5 \ \text{ y } \ x_2 = 5$$

2. Ecuación de primer grado con una incógnita

Es aquella que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ una vez aplicados los principios fundamentales anteriormente referidos. A toda ecuación de primer grado se le denomina ecuación lineal.

La solución de $ax + b = 0$ es $x = -b/a$.

Ejemplo:

$$2\left[3x - 2(4 - 3x)\right] = 5(x+2)$$

$$2\left[3x - 8 + 6x\right] = 5x + 10$$

$$2\left[9x - 8\right] = 5x + 10$$

$$18x - 16 = 5x + 10$$

$$18x - 5x = 16 + 10$$

$$13x = 26$$

$$x = 2$$

3. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Son aquellos conjuntos de ecuaciones con dos o más incógnitas que se cumplen simultáneamente para los mismos valores de las incógnitas.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones se satisfacen para $x = 3$ e $y = 1$.

3.1. Igualación

Se despeja la misma incógnita de las ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas

$$\begin{cases} 2x-3y=3 & \rightarrow\; y=\dfrac{2x-3}{3} \\ 3x+4y=13 & \rightarrow\; y=\dfrac{13-3x}{4} \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{3} &= \frac{13-3x}{4} \\ 8x-12 &= 39-9x \\ 17x &= 51 \\ x &= 3 \;\Rightarrow\; y=1 \end{aligned}$$

3.2. Sustitución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones para reemplazarla en la(s) otra(s).

De $2x-3y=3 \;\rightarrow\; y=\dfrac{2x-3}{3}$

En $3x+4y=13$:

$$\begin{aligned} 3x+4\left(\frac{2x-3}{3}\right) &= 13 \\ 9x+8x-12 &= 39 \\ 17x &= 51 \\ x &= 3 \;\Rightarrow\; y=1 \end{aligned}$$

3.3. Reducción

$$\begin{cases} ax+b\,y=c & \rightarrow \text{ se multiplica por } e \\ dx+e\,y=f & \rightarrow \text{ se multiplica por } b \end{cases}$$

$$\begin{cases} aex + bey = ce \\ dbx + eby = fb \end{cases}$$

Restándolas

$$aex - bdx = ce - bf$$

De donde:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \Rightarrow y = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Ejemplo:

Resolver

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6x - 9y = 12 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3, se obtiene

$$6x - 9y = 12.$$

Al coincidir con la segunda ecuación, se dice que una es redundante de la otra. El sistema de dos ecuaciones es compatible indeterminado ya que se redujo a una ecuación: $6x - 9y = 12$, que se cumple para un número infinito de soluciones: $(5, 2)$, $(8, 4)$, $(11, 6)$, etc.

Ejemplo

Resolver

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6x - 9y = 13 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 3 y mantenemos la segunda

$$\begin{cases} 6x-9y=12 \\ 6x-9y=13 \end{cases}$$

Restándolas

$$0=-1 \qquad (\text{absurdo})$$

El sistema es incompatible.

Resolver

$$\begin{cases} 2x-y+3z=5 & (1) \\ 3x+2y-2z=4 & (2) \\ 4x-3y+3z=11 & (3) \end{cases}$$

Conviene eliminar la incógnita y dado que su coeficiente en la ecuación (1) es -1:

$$\begin{array}{rr} 2\mathrm{EC}(1): & 4x-2y+6z=10 \\ \mathrm{EC}(2): & 3x+2y-2z=\ \ 4 \\ \hline & 7x+4z=\ 14 \quad (4) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \text{-}3\mathrm{EC}(1): & -6x+3y-9z=-15 \\ \mathrm{EC}(3): & 4x-3y+3z=\ \ 11 \\ \hline & -2x-6z=\ -4 \quad (5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} 3\mathrm{EC}(4): & 21x+12z=\ 42 \\ 2\mathrm{EC}(5): & -4x-12z=-8 \\ \hline & 17x=34 \quad (6) \end{array}$$

De $\mathrm{EC}(6)$:

$$x = 2$$

En $\mathrm{EC}(4)$:

$$z = 0$$

En $\mathrm{EC}(1)$:

$$y = -1$$

El sistema es compatible determinado y tiene una solución (terna): $(2, -1, 0)$

4. Ecuación de segundo grado con una incógnita

Es aquella que se puede expresar de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

A toda ecuación de segundo grado se le denomina ecuación cuadrática.

4.1. Deducción de las soluciones de la ecuación cuadrática

Dividamos ambos miembros de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

entre $a(\neq 0)$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Finalmente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

4.2. Discusión de las raíces

Las dos raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A la expresión b^2-4ac se le denomina discriminante:

$$\Delta=b^2-4ac$$

De donde:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La naturaleza de las raíces dependerá del signo del discriminante:

i) Si $\Delta>0,$ las raíces serán números reales y diferentes.

ii) Si $\Delta=0,$ las raíces serán números reales e iguales.

iii) Si $\Delta<0,$ las raíces serán números complejos conjugados (Los números $a+bi$ y $a-bi,$ $a\in\mathbb{R},$ $b\in\mathbb{R},$ $i^2=-1,$ se llaman complejos conjugados).

4.3. Propiedades de las raíces

i) Suma de las raíces

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ii) Producto de las raíces

$$P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

iii) Diferencia de las raíces

Si $x_1 < x_2$:

$$D = x_2 - x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$D = x_2 - x_1 = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$D = x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

4.4. Reconstrucción de una ecuación de segundo grado.

Sea $ax^2+bx+c=0$ la ecuación pedida que admite por raíces a x_1 y x_2. Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre a:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

De acuerdo con el acápite anterior

$$x^2-Sx+P=0$$

Ejemplo

Si las raíces de la ecuación son $x_1=1+\sqrt{2}$ y $x_2=1-\sqrt{2}$, entonces:

$$S=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)=2$$
$$P=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)=1-2=-1$$

La ecuación pedida será

$$x^2-2x-1=0$$

o, en general:

$$kx^2-2kx-k=0 \qquad (k\neq 0)$$

5. Sistemas de ecuaciones cuadráticas

Resolver un sistema de ecuaciones cuadráticas consiste en hallar un conjunto de valores de las incógnitas tal que las ecuaciones se satisfagan simultáneamente.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3(x+2)^2+(y+2)=8 & (1) \\ (x-1)^2-2(y+2)=6 & (2) \end{cases}$$

Empleemos el método de sustitución

De (2)

$$y+2=\frac{(x-1)^2-6}{2}$$

En (1)

$$3(x+2)^2+\frac{(x-1)^2-6}{2}=8$$

Efectuando operaciones se obtiene:

$$7x^2+22x+3=0$$

$$(7x+1)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{1}{7} \Rightarrow y_1=-\dfrac{213}{49} \\ x_2=-3 \Rightarrow y_2=3 \end{cases}$$

Ejercicios resueltos

101. Clasificar la siguiente ecuación

$$\frac{x}{2x-4}-\frac{2}{3}=\frac{7-2x}{3x-6}$$

Restricciones:

$$2x-4\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 2$$
$$3x-6\neq 0 \;\Rightarrow\; x\neq 2$$

Multipliquemos por $6(x-2)$

$$\frac{x}{2(x-2)}-\frac{2}{3}=\frac{7-2x}{3(x-2)}$$
$$3x-4(x-2)=2(7-2x)$$
$$3x-4x+8=14-4x$$
$$3x=6$$
$$x=2$$

Sin embargo, x no puede tomar el valor 2. La ecuación es incompatible.

102. Clasificar la siguiente ecuación

$$\frac{2}{x+2}+\frac{1}{3-x}=\frac{x-8}{x^2-x-6}$$

Restricciones

$$x\neq -2,\;3$$

Tenemos

$$\frac{2}{x+2}+\frac{1}{3-x}=\frac{x-8}{(x-3)(x+2)}$$

Por $(x-3)(x+2)$

$$2(x-3)-(x+2)=x-8$$
$$2x-6-x-2=x-8$$
$$x-8=x-8$$

Que se verifica para todo valor real de x, de manera que considerando las restricciones, las raíces de la ecuación son $x\in\mathbb{R}-\{-2,\;3\}$.

La ecuación es compatible indeterminada.

103. Resolver la siguiente ecuación

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}=\frac{38}{23}$$

Forma 1

Simplifiquemos

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{\frac{x+1}{x}}=1+\frac{x}{x+1}=\frac{2x+1}{x+1}$$

Entonces

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2x+1}{x+1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{x+1}{2x+1}}=1+\frac{1}{\frac{3x+2}{2x+1}}=1+\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{5x+3}{3x+2}$$

De donde

$$\frac{5x+3}{3x+2}=\frac{38}{23}$$

$$115x+69=114x+76$$

$$x=7$$

Forma 2

Si

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}=\frac{38}{23}=1+\frac{15}{23}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}=\frac{15}{23}=\frac{1}{23/15}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=\frac{23}{15}=1+\frac{8}{15}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=\frac{8}{15}=\frac{1}{15/8}$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}=\frac{15}{8}=1+\frac{7}{8}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}=\frac{7}{8}=\frac{1}{8/7}$$

$$1+\frac{1}{x}=\frac{8}{7}=1+\frac{1}{7}$$

$$x=7$$

104. Resolver

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Multipliquemos ambos miembros por abc:

$$a(x-a)+b(x-b)+c(x-c)=2(bc+ac+ab)$$
$$ax-a^2+bx-b^2+cx-c^2=2bc+2ac+2ab$$
$$(a+b+c)x=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$
$$(a+b+c)x=(a+b+c)^2$$
$$x=a+b+c$$

105. Resolver para x:

$$\frac{m}{n}\left(\frac{x-m}{x}\right)+\frac{n}{m}\left(\frac{x-n}{x}\right)=1$$

Multipliquemos los dos miembros por mnx

$$m^2(x-m)+n^2(x-n)=mnx$$
$$m^2x-m^3+n^2x-n^3=mnx$$
$$m^2x+n^2x-mnx=m^3+n^3$$

$$x\left(m^2-mn+n^2\right)=m^3+n^3$$
$$x=m+n$$

106. Resolver
$$\frac{x-2a+3b}{x+4a-6b}+\frac{x}{x-4a+6b}=\frac{x+28a-42b}{x+4a-6b}+\frac{x+6a-9b}{x-4a+6b}$$

Sea $2a-3b=p$, entonces:

$$\frac{x-p}{x+2p}+\frac{x}{x-2p}=\frac{x+14p}{x+2p}+\frac{x+3p}{x-2p}$$

Al multiplicar ambos miembros por $(x+2p)(x-2p)$:

$$(x-p)(x-2p)+x(x+2p)=(x+14p)(x-2p)+(x+3p)(x+2p)$$
$$x^2-3px+2p^2+x^2+2px=x^2+12px-28p^2+x^2+5px+6p^2$$
$$18px=24p^2$$
$$x=\frac{24p^2}{18p}$$
$$x=\frac{4}{3}p$$
$$x=\frac{4}{3}(2a-3b)$$
$$x=\frac{8}{3}a-4b$$

107. Resolver

$$\frac{x^3+mx^2+nx+p}{x^3+ax^2+bx+p}=\frac{x^2+mx+n}{x^2+ax+b}$$

Forma 1

Cambiemos de variable

$$x^2+mx+n=R$$
$$x^2+ax+b=S$$

Entonces

$$\frac{x\left(x^2+mx+n\right)+p}{x\left(x^2+ax+b\right)+p}=\frac{x^2+mx+n}{x^2+ax+b}$$

$$\frac{xR+p}{xS+p}=\frac{R}{S}$$

$$xRS+pS=xRS+pR$$

$$pS=pR$$

$$S=R$$

$$x^2+ax+b=x^2+mx+n$$

$$ax-mx=n-b$$

$$\left(a-m\right)x=n-b$$

$$x=\frac{n-b}{a-m}$$

Forma 2

Multipliquemos el numerador y el denominador del segundo miembro por x:

$$\frac{x^3+mx^2+nx+p}{x^3+ax^2+bx+p}=\frac{x^3+mx^2+nx}{x^3+ax^2+bx}$$

Permutemos

$$\frac{x^3+mx^2+nx+p}{x^3+mx^2+nx}=\frac{x^3+ax^2+bx+p}{x^3+ax^2+bx}$$

$$\frac{x^3+mx^2+nx}{x^3+mx^2+nx}+\frac{p}{x^3+mx^2+nx}=\frac{x^3+ax^2+bx}{x^3+ax^2+bx}+\frac{p}{x^3+ax^2+bx}$$

$$1+\frac{p}{x^3+mx^2+nx}=1+\frac{p}{x^3+ax^2+bx}$$

De donde:

$$x^3 + mx^2 + nx = x^3 + ax^2 + bx$$
$$x^2 + mx + n = x^2 + ax + b$$
$$(a-m)x = n-b$$
$$x = \frac{n-b}{a-m}$$

108. Resolver para x

$$\frac{x-1}{x+a-b} = \frac{1-x}{x-a+b} + 2$$

y dar como respuesta $x-(a+b)^2$.

Forma 1

$$\frac{x-1}{x+a-b} - \frac{1-x}{x-a+b} = 2$$
$$(x-1)\left[\frac{1}{x+(a-b)} + \frac{1}{x-(a-b)}\right] = 2$$
$$(x-1)\cdot\frac{x-(a-b)+x+(a-b)}{x^2-(a-b)^2} = 2$$
$$(x-1)\cdot\frac{2x}{x^2-(a-b)^2} = 2$$
$$x(x-1) = x^2-(a-b)^2$$
$$x^2 - x = x^2 - (a-b)^2$$
$$x = (a-b)^2$$

Entonces $x-(a+b)^2 = (a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab.$

Forma 2

$$\frac{x-1}{x+(a-b)} = \frac{1-x}{x-(a-b)} + 2$$

Multipliquemos ambos miembros por $x^2-(a-b)^2$:

$$(x-1)\left[x-(a-b)\right]=(1-x)\left[x+(a-b)\right]+2x^2-2(a-b)^2$$
$$(x-1)\left[x-(a-b)+x+(a-b)\right]=2x^2-2(a-b)^2$$
$$(x-1)[2x]=2\left[x^2-(a-b)^2\right]$$
$$x(x-1)=x^2-(a-b)^2$$

Expresión idéntica a la obtenida en la forma 1.

Entonces:

$$x=(a-b)^2 \;\Rightarrow\; x-(a+b)^2=(a-b)^2-(a+b)^2=(2a)(-2b)=-4ab$$

109. Resolver para x :

$$\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-b}{a+b}=\frac{x-a}{a+b}+\frac{x+b}{b-a}$$

Forma 1

Transponiendo términos

$$\frac{x+a}{a-b}-\frac{x+b}{b-a}=\frac{x-a}{a+b}-\frac{x-b}{a+b}$$
$$\frac{x+a}{a-b}+\frac{x+b}{a-b}=\frac{x-a}{a+b}-\frac{x-b}{a+b}$$
$$\frac{2x+a+b}{a-b}=\frac{b-a}{a+b}$$
$$(2x+a+b)(a+b)=(a-b)(b-a)$$
$$2ax+2bx+a^2+ab+ab+b^2=ab-a^2-b^2+ab$$
$$2ax+2bx=-2\left(a^2+b^2\right)$$
$$(a+b)x=-\left(a^2+b^2\right)$$
$$x=-\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Forma 2

Multipliquemos los dos miembros por a^2-b^2 :

$$\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-b}{a+b}=\frac{x-a}{a+b}+\frac{x+b}{b-a}$$
$$(a+b)(x+a)+(a-b)(x-b)=(a-b)(x-a)-(a+b)(x+b)$$
$$(a+b)(x+a)+(a+b)(x+b)=(a-b)(x-a)-(a-b)(x-b)$$
$$(a+b)(2x+a+b)=(a-b)(x-a-x+b)$$
$$2x(a+b)+(a+b)^2=(a-b)(b-a)$$
$$2x(a+b)=-(a+b)^2-(a-b)^2$$
$$2x(a+b)=-\left[(a+b)^2+(a-b)^2\right]$$
$$x=-\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{2(a+b)}$$
$$x=-\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

110. Resolver para x

$$\frac{(a+x)(a-b)}{a+b}+\frac{(a-x)(a+b)}{a-b}=\frac{(x-a)(a^2-6ab+b^2)}{a^2-b^2}$$

Forma 1

Efectuemos las operaciones

$$\frac{(a+x)(a-b)^2+(a-x)(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{(x-a)(a^2-6ab+b^2)}{a^2-b^2}$$

Igualamos los numeradores

$$(a+x)(a^2-2ab+b^2)+(a-x)(a^2+2ab+b^2)=(x-a)(a^2-6ab+b^2)$$

$$a^3-2a^2b+ab^2+a^2x-2abx+b^2x+a^3+2a^2b+ab^2-a^2x-2abx-b^2x=$$
$$a^2x-6abx+b^2x-a^3+6a^2b-ab^2$$

$$a^2x-2abx+b^2x=3a^3-6a^2b+3ab^2$$

$$x(a^2-2ab+b^2)=3a(a^2-2ab+b^2)$$

$$x=3a$$

Forma 2

Multipliquemos ambos miembros por a^2-b^2

$$\begin{aligned}
(a+x)(a-b)^2+(a-x)(a+b)^2&=(x-a)\left(a^2-6ab+b^2\right)\\
(a+x)(a-b)^2&=(x-a)\left(a^2-6ab+b^2\right)-(a-x)(a+b)^2\\
(a+x)(a-b)^2&=(x-a)\left(a^2-6ab+b^2\right)+(x-a)(a+b)^2\\
(a+x)(a-b)^2&=(x-a)\left[\left(a^2-6ab+b^2\right)+\left(a^2+2ab+b^2\right)\right]\\
(a+x)(a-b)^2&=(x-a)\left[2a^2-4ab+2b^2\right]\\
(a+x)(a-b)^2&=(x-a)\left[2(a-b)^2\right]\\
a+x&=2x-2a\\
x&=3a
\end{aligned}$$

111. Resolver para x:

$$\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x} \qquad (a\neq 0,-1,1)$$

Forma 1

Aplicamos la siguiente propiedad de las proporciones geométricas

$$\frac{P}{Q}=\frac{R}{S} \Rightarrow \frac{P+Q}{Q-P}=\frac{R+S}{S-R}$$

$$\frac{\left(a^3-1\right)+\left(a^3+1\right)}{\left(a^3+1\right)-\left(a^3-1\right)}=\frac{a\left(x-1\right)+a^2-x+a\left(x-1\right)-a^2+x}{a\left(x-1\right)-a^2+x-\left[a\left(x-1\right)+a^2-x\right]}$$

$$\frac{2a^3}{2}=\frac{2a\left(x-1\right)}{-2a^2+2x}$$

$$a^3=\frac{a\left(x-1\right)}{x-a^2}$$

$$a^2=\frac{x-1}{x-a^2} \qquad \left(a\neq 0\right)$$

$$a^2x-a^4=x-1$$

$$x\left(a^2-1\right)=a^4-1$$

$$x=\frac{a^4-1}{a^2-1}$$

$$x=a^2+1 \qquad \left(a\neq\pm 1\right)$$

Forma 2

Escribamos

$$\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a^3+1-2}{a^3+1}=1-\frac{2}{a^3+1}$$

De otro lado

$$\frac{a\left(x-1\right)+a^2-x}{a\left(x-1\right)-a^2+x}=\frac{a\left(x-1\right)-a^2+x+2a^2-2x}{a\left(x-1\right)-a^2+x}$$

$$=1+\frac{2a^2-2x}{a\left(x-1\right)-a^2+x}$$

Al igualar las expresiones obtenidas

$$1-\frac{2}{a^3+1}=1+\frac{2a^2-2x}{a\left(x-1\right)-a^2+x}$$

$$-\frac{1}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}=\frac{a^2-x}{ax-a-a^2+x}$$

$$=\frac{a^2-x}{a(x-a)+(x-a)}$$

$$-\frac{1}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}=\frac{a^2-x}{(x-a)(a+1)}$$

$$-\frac{1}{a^2-a+1}=\frac{a^2-x}{x-a} \qquad (a\neq -1)$$

$$-x+a=a^4-a^3+a^2-a^2x+ax-x$$

$$a(a-1)x=a^3(a-1)+a(a-1)$$

$$a(a-1)x=a(a-1)\left(a^2+1\right)$$

$$x=a^2+1 \qquad (a\neq 0,1)$$

Forma 3

Factoricemos las expresiones

$$\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{a(x-1)+a^2-x}{a(x-1)-a^2+x}$$

$$\frac{(a-1)\left(a^2+a+1\right)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}=\frac{ax-a+a^2-x}{ax-a-a^2+x}$$

$$\frac{(a-1)\left(a^2+a+1\right)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}=\frac{a(x+a)-(x+a)}{a(x-a)+(x-a)}$$

$$\frac{(a-1)\left(a^2+a+1\right)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}=\frac{(x+a)(a-1)}{(x-a)(a+1)}$$

$$\frac{a^2+a+1}{a^2-a+1}=\frac{x+a}{x-a} \qquad (a\neq \pm 1)$$

$$\frac{a^2-a+1+2a}{a^2-a+1}=\frac{x-a+2a}{x-a}$$

$$1+\frac{2a}{a^2-a+1}=1+\frac{2a}{x-a}$$

$$\frac{2a}{a^2-a+1}=\frac{2a}{x-a}$$

$$\frac{1}{a^2-a+1}=\frac{1}{x-a} \qquad (a\neq 0)$$

$$x-a=a^2-a+1$$

$$x=a^2+1$$

112. Resolver

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}=a$$

Forma 1

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-4a}=a\sqrt{x}-a\sqrt{x-4a}$$

$$\sqrt{x-4a}+a\sqrt{x-4a}=a\sqrt{x}-\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x-4a}\,(1+a)=\sqrt{x}\,(a-1)$$

Al elevar al cuadrado

$$(x-4a)(1+a)^2=x(a-1)^2 \qquad (\alpha)$$

$$\frac{x-4a}{x}=\left(\frac{a-1}{1+a}\right)^2 \qquad (\beta)$$

$$1-\frac{4a}{x}=\left(\frac{a-1}{1+a}\right)^2 \qquad (\gamma)$$

$$\frac{4a}{x}=1-\left(\frac{a-1}{1+a}\right)^2$$

$$x=\frac{4a}{1-\left(\frac{a-1}{1+a}\right)^2}$$

$$x=\frac{4a}{\dfrac{(1+a)^2-(a-1)^2}{(1+a)^2}}$$

$$x=\frac{4a(1+a)^2}{4a}$$

$$x=(1+a)^2$$

Forma 2

A partir de (α):

$$(x-4a)\left(1+2a+a^2\right)=x\left(a^2-2a+1\right)$$

$$x+2ax+a^2x-4a-8a^2-4a^3=a^2x-2ax+x$$

$$4ax=4a^3+8a^2+4a$$

$$x=a^2+2a+1$$

$$x=(a+1)^2$$

Forma 3

Por propiedad de proporciones

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}=\frac{a}{1}$$

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4a}+\left[\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}\right]}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}-\left[\sqrt{x}+\sqrt{x-4a}\right]}=\frac{a+1}{1-a}$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{-2\sqrt{x-4a}}=\frac{a+1}{1-a}$$

$$-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4a}}=\frac{a+1}{1-a}$$

Al elevar al cuadrado:

$$\frac{x}{x-4a}=\left(\frac{a+1}{1-a}\right)^2$$

$$\frac{x-4a}{x}=\left(\frac{1-a}{a+1}\right)^2$$

$$1-\frac{4a}{x}=\left(\frac{1-a}{a+1}\right)^2$$

$$1-\frac{4a}{x}=\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$

Este último resultado coincide con $(\gamma) \Rightarrow x=(1+a)^2$.

Forma 4

Reescribamos la expresión

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-4a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}=a$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}+2\sqrt{x-4a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}=a$$

$$1+\frac{2\sqrt{x-4a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}=a$$

$$\frac{2\sqrt{x-4a}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}=a-1$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x-4a}}=\frac{1}{a-1}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x-4a}}-\frac{\sqrt{x-4a}}{2\sqrt{x-4a}}=\frac{1}{a-1}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x-4a}}=\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x-4a}}=\frac{2+a-1}{2(a-1)}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-4a}}=\frac{a+1}{a-1}$$

Al elevar al cuadrado

$$\frac{x}{x-4a}=\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$$

$$\frac{x-4a}{x}=\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2$$

Este resultado coincide con $(\beta) \Rightarrow x=(1+a)^2$.

113. Un profesor desea premiar a sus alumnos con vales. Si quisiera entregar 5 vales a cada uno, le faltarían 3 vales. Si le diera 4 vales a cada uno, le sobrarían 7 vales. Encuentre el número de vales que posee el profesor.

Forma 1

Sea x el número de alumnos.
En el primer caso el profesor repartiría $5x-3$ vales y en el segundo caso, $4x+7.$ Como ambos números son iguales:

$$5x-3=4x+7$$
$$x=10$$

Por lo tanto, el profesor posee $5(10)-3=47$ vales.

Forma 2

En un caso, reparte 4 vales a cada uno y le sobran 7 vales.
Si decidiera repartir 5 vales a cada alumno, es decir 1 vale adicional por alumno, debería "juntar" los 7 vales sobrantes con los 3 vales que no posee. Es decir, debería tener $7+3=10$ vales adicionales, de donde se deduce que son $10/1=10$ alumnos.
El número de vales que posee el profesor es $4\times 10+7=47$ vales.

114. En la capilla de una escuela los alumnos están agrupados en bancas de 9 asientos. Si se les ubica en bancas de 8 asientos, ocuparán 2 bancas más. ¿Cuántos alumnos están presentes?

Forma 1

Sea x el número de bancas de 9 asientos ocupadas por los alumnos.
El total de alumnos será $9x.$
Si las bancas fueran de 8 asientos, ocuparían $x+2$ bancas.
El total de alumnos será $8(x+2).$
Entonces:

$$9x=8(x+2)$$
$$9x=8x+16$$
$$x=16$$

Por lo tanto, el número de alumnos es $9(16)=144$.

Forma 2

Asumamos que los alumnos están sentados en bancas de 9 asientos cada una. Si se debieran sentar en bancas de 8 asientos, habría que pedirle a un alumno de cada banca que se reagrupe en las dos bancas de 8 asientos. Esos $2\times 8=16$ asientos corresponderán a 16 alumnos excedentes de las bancas de 9 asientos. Entonces hubo 16 filas de 9 bancas ocupadas inicialmente.
Por lo tanto, son $16\times 9=144$ alumnos.

115. Alberto dictó 35 horas de clase más que Beatriz y 50 horas más que César. Si ellos recibieron 15, 16 y 12 pesos por hora, respectivamente, ¿cuánto recibió Alberto en total si entre los tres recibieron 2,925 pesos?

Forma 1

A partir del siguiente cuadro:

	Nº de horas	Pago por hora
Alberto	$x+35$	15
Beatriz	x	16
César	$x-15$	12

Tenemos

$$
\begin{aligned}
15(x+35)+16(x)+12(x-15) &= 2,925 \\
15x+525+16x+12x-180 &= 2,925 \\
43x &= 2,580 \\
x &= 60
\end{aligned}
$$

Alberto trabajó $60+35=95$ horas a 15 pesos/hora y recibió $95(15)=1,425$ pesos.

Forma 2

Supongamos que César trabaja 0 horas, Alberto trabaja 50 horas y Beatriz, 15 horas.
En total recibirían $0\times12+50\times15+15\times16=0+750+240=990$ pesos.
Como recibieron 2,925 pesos, hay una diferencia total de $\mathrm{DT}=2{,}925-990=1{,}935$ pesos.
Por cada hora adicional que trabaje César, Alberto y Beatriz trabajarán una hora adicional cada uno.
Por cada hora adicional que trabaja cada uno de ellos, recibirían $\mathrm{DU}=12+15+16=43$ pesos adicionales.
De donde, el número de horas adicionales que trabajará cada uno de ellos será $\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DU}}=\frac{1{,}935}{43}=45$ horas.
Alberto trabajó $50+45=95$ horas a 15 pesos/hora y recibió $95(15)=1{,}425$ pesos.

116. Una persona compra 10 docenas de libros y recibe uno de regalo por cada 2 docenas que compra. Vende las $2/5$ partes de ellos ganando la tercera parte del costo en cada libro y luego vende el resto perdiendo la tercera parte del costo en cada libro. Si al final de la venta tiene una pérdida neta de S/.70, ¿cuánto cuesta cada libro?

Compró 10 docenas que equivalen a 120 libros.

Recibe $\frac{10}{2}=5$ libros adicionales de regalo.

En total, recibió $120+5=125$ libros.

Vende $\frac{2}{5}\times125=50$ libros.

Si C es el costo del libro, vende cada uno en $C+\frac{C}{3}=\frac{4}{3}C$.

Recaudación 1: $50\times\frac{4C}{3}=\frac{200C}{3}$.

Vende el resto, $125-50=75$ libros a $C-\dfrac{C}{3}=\dfrac{2C}{3}$ cada uno.

Recaudación 2: $75\times\dfrac{2C}{3}=50C.$

Inversión o costo total: $120C.$

Utilidad: $\text{Recaudación 1} + \text{Recaudación 2} - \text{Costo} = -70$

$$\begin{aligned} \frac{200C}{3}+50C-120C &= -70 \\ 200C+150C-360C &= -210 \\ 10C &= 210 \\ C &= 21 \end{aligned}$$

Cada libro costó 21 soles.

117. Leonor es 5 años mayor de lo que dice ser. Ella dice que es 12 años más joven que su esposo. Su esposo, hombre veraz, dice que ella tenía tres cuartos de la edad de él cuando se casaron hace 20 años. ¿Qué edades tienen?

Forma 1

Edad actual de Leonor (según ella): $x-12$

Edad actual verdadera de Leonor: $(x-12)+5=x-7$

Hace 20 años, edad del esposo: $x-20$

Hace 20 años, edad de Leonor: $(x-7)-20$

Entonces:

$$\begin{aligned} x-27 &= \frac{3}{4}(x-20) \\ x &= 48 \end{aligned}$$

El tiene 48 años y Leonor, 41 años.

Forma 2

Hace 20 años, el esposo de Leonor tenía $4k$ años y Leonor, $3k$ años.

Actualmente, el esposo tiene $4k+20$ años y Leonor, $3k+20$ años.

La diferencia verdadera de edades es $12-5=7$ años.

Entonces:

$$4k+20=3k+20+7$$
$$k=7$$

Las edades actuales son $4k+20=28+20=48$ años, el esposo y Leonor, $3k+20=21+20=41$ años.

118. Tres hermanos tienen 6, 20 y 30 años. ¿Dentro de cuántos años la suma de las edades de los dos más jóvenes será igual a la edad del mayor?

Forma 1
Las edades de los hermanos dentro de x años serán $6+x$, $20+x$ y $30+x$.
Se debe cumplir que

$$(6+x)+(20+x)=(30+x)$$
$$26+2x=30+x$$
$$x=4$$

Dentro de 4 años.

Forma 2
La suma de las edades de los dos hermanos más jóvenes es 26 y el mayor tiene 30 años. Como se diferencian en $30-26=4$ años y cada año que transcurra la suma de las edades de los dos más jóvenes aumenta en $1+1=2$ años y la edad del mayor aumenta en 1 año, entonces la diferencia se acorta en $2-1=1$ año. Por lo tanto, deben transcurrir $4/1=4$ años.

119. Un envase de cerveza y su etiqueta cuestan 30 pesos. ¿Cuánto cuesta el envase y cuánto la etiqueta si aquel cuesta 22 pesos más que esta?

Forma 1

Sea x el costo del envase y $30-x,$ el costo de la etiqueta.

Según el dato:

$$\begin{aligned} x-(30-x)&=22 \\ 2x-30&=22 \\ 2x&=52 \\ x&=26 \end{aligned}$$

De manera que el envase cuesta 26 pesos y la etiqueta, 4 pesos.

Forma 2

Supongamos que tanto el envase como la etiqueta cuestan $30/2=15$ pesos. Para que el costo total se mantenga en 30 pesos, por cada peso de más que cuesta el envase, la etiqueta deberá costar un peso menos. De este modo, por cada peso que se aumente y que se disminuya la diferencia entre los costos será de 2 pesos.

Si se pretende que la diferencia entre los costos sea 22 pesos, habrá que variar los costos supuestos en $22/2=11$ pesos.

Entonces:

$$\begin{aligned} &\text{costo del envase} &= \quad 15+11 &\quad= \quad 26 \text{ pesos} \\ &\text{costo de la etiqueta} &= \quad 15-11 &\quad= \quad 4 \text{ pesos} \end{aligned}$$

Forma 3

Para que se cumpla que el envase cueste 22 pesos más que la etiqueta, asumamos que el envase cuesta 22 pesos y la etiqueta, 0 pesos.

Como la suma supuesta es $22+0=22$ pesos y debiera ser 30 pesos, habrá que aumentar conjuntamente los costos en $30-22=8$ pesos.

Para que la diferencia entre los costos se mantenga, habrá que aumentar los costos, tanto del envase como el de la etiqueta en $8/2=4$ pesos.

Según ello:

$$\begin{aligned}\text{costo del envase} &= 22+4 = 26 \text{ pesos}\\ \text{costo de la etiqueta} &= 0+4 = 4 \text{ pesos}\end{aligned}$$

120. Dos negociantes de vinos ingresan por la frontera portando uno de ellos 64 botellas de vino y el otro, 20. Como no tienen suficiente dinero para pagar los derechos de aduana, el primero paga con 5 botellas de vino y S/.40 más, y el otro, con 2 botellas de vino y recibe S/.40 de vuelto. ¿A cómo deberán vender cada botella de vino para ganar un 20%?

Sea C el costo de cada botella antes de la frontera.

El que introdujo 64 botellas, entregó $5C+40$ soles como derecho de aduana.

El que ingresó 20 botellas, dio $2C-40$ soles como derecho de aduana.

Por cada botella, el derecho de aduana fue:

$$\frac{5C+40}{64}=\frac{2C-40}{20}$$

De donde:

$$\begin{aligned}100C+800 &= 128C-2,560\\ 28C &= 3,360\\ C &= 120 \text{ soles}\end{aligned}$$

En total, el costo de cada botella más los derechos de aduana por botella fue $C+\frac{5C+40}{64}=120+\frac{640}{64}=130$ soles.

Si desean ganar el 20%, deberán vender cada botella en $1.2\times 130=156$ soles.

121. La promoción de cierta empresa consiste en que por la compra de n docenas de cuadernos, se regalan r unidades. Si la docena cuesta a soles y se vende cada artículo en b soles, ¿cuántas docenas se compraron si se ganó c soles en total?

Sea x el número de docenas de cuadernos comprados.

Para calcular el número u de unidades obtenidas de regalo:

n docenas ---------- r unidades

x docenas ---------- u unidades

De donde $u = \frac{rx}{n}$ unidades.

El total de cuadernos recibidos es $12x + \frac{rx}{n}$ unidades.

Ingreso: $b\left[12x + \frac{rx}{n}\right]$.

Costo: $a(x)$.

Utilidad: $C = b\left[12x + \frac{rx}{n}\right] - ax.$

Entonces:

$$C = 12bx + \frac{brx}{n} - ax$$

$$x = \frac{C}{12b + \frac{br}{n} - a}$$

$$x = \frac{Cn}{12bn + br - an}.$$

122. Un padre de familia repartió 3,900 pesos entre sus tres hijos. Si el primero recibió el triple de lo que recibió el segundo, y este la mitad de lo que le correspondió al tercero, hallar lo que recibió cada uno de ellos.

Forma 1

Sea x pesos lo que recibió el primer hijo, $x/3$ pesos lo que recibió el segundo y $2x/3$ pesos lo que recibió el tercero.
Según el enunciado:

$$x+\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}=3,900$$
$$2x=3,900$$
$$x=1,950$$

Entonces, el primero recibió 1,950 pesos, el segundo, $x/3=650$ pesos y el tercero, $2x/3=1,300$ pesos.

Forma 2

Asumamos que el segundo hijo recibe 10 pesos.
El primer hijo habrá recibido $3\times10=30$ pesos y el tercero, $2\times10=20$ pesos.
Como $30+10+20=60$ pesos, por cada 60 pesos que se hayan repartido, el primero recibió $\frac{1}{2}\times60$, el segundo recibió $\frac{1}{6}\times60$ y el tercero, $\frac{1}{3}\times60$:

$$\text{Cuota del primer hijo} = \frac{1}{2}\times3,900=1,950$$
$$\text{Cuota del segundo hijo} = \frac{1}{6}\times3,900=650$$
$$\text{Cuota del tercer hijo} = \frac{1}{3}\times3,900=1,300$$

123. A nació 6 años antes que B. En 1970, la suma de las edades era la cuarta parte de la suma de las edades en 1985. ¿En qué año será el doble de la correspondiente a 1985?

Forma 1

Según los datos, A tiene 6 años más que B.
Sean $x+6$ y x las edades de A y B, respectivamente, en el año 1970.
Cuando transcurran 15 años (en 1985) sus edades serán $x+6+15=x+21$, y $x+15$.
De acuerdo con el enunciado del problema:

$$\begin{aligned}
(x+6)+x &= \frac{1}{4}\left[(x+21)+(x+15)\right] \\
4(2x+6) &= 2x+36 \\
8x+24 &= 2x+36 \\
6x &= 12 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

En 1970, A tenía $2+6=8$ años y B, 2 años.
En 1985, A tenía $8+15=23$ años y B, $2+15=17$ años.
Si deben transcurrir t años para que la suma de las edades sea el doble de la correspondiente a 1985, tendremos:

$$\begin{aligned}
(23+t)+(17+t) &= 2\left[23+17\right] \\
40+2t &= 2\left[40\right] \\
40+2t &= 80 \\
2t &= 40 \\
t &= 20
\end{aligned}$$

El año solicitado será $1985+20=2005$.

Forma 2

A es 6 años mayor que B.
Al transcurrir 15 años para ambos $(1985-1970)$, $2\times 15=30$ años equivaldrá al triple $(4-1)$ de la suma de las edades que tenían en el año 1970. Significa que en el año 1970, las edades sumaban $30/3=10$ años. Como A es 6 años mayor que B, $10-6=4$ equivale al doble de la edad de B en 1970. B tenía 2 años y A, 8 años en 1970. En 1985, A tendrá 23 años y B, 17 años. Sus edades suman 40 años. Para que en un futuro sus edades sumen $40\times 2=80$ años, deberán transcurrir $40/2=20$ años para cada uno. Será en el año $1985+20=2005$.

124. Un transportista pidió 12 dólares por el transporte de $7\,\mathrm{m}^3$ de piedra y otro, 9 dólares por $5\,\mathrm{m}^3$. Resultando caros y desiguales los precios, se les ofreció un aumento igual para los dos en el importe total y en los volúmenes de piedra, siendo el número de dólares aumentados igual al de m^3 aumentados. Aceptada la condición, cada transportista cobró la misma cantidad por m^3. ¿Qué cantidad fue esta?

Sea x tanto el aumento en el importe como el aumento en la cantidad de piedras de cada transportista.

Entonces, lo que cobraron por cada m^3 de piedra fue $\dfrac{12+x}{7+x}$ y $\dfrac{9+x}{5+x}$.

De donde

$$\frac{12+x}{7+x}=\frac{9+x}{5+x}$$
$$60+17x+x^2=63+16x+x^2$$
$$x=3$$

Cada transportista cobró $\dfrac{12+3}{7+3}=1.5\dfrac{\text{dólares}}{\mathrm{m}^3}$.

125. Un comerciante tenía una determinada suma de dinero. El primer año gastó 300 soles y aumentó a lo que quedaba un sexto de este resto. Al año siguiente ganó 500 soles y perdió un sexto de la cantidad acumulada. El tercer año ganó 600 soles, más un cuarto de lo acumulado. Si el capital resultante es 2,000 soles, ¿cuál fue el capital inicial?

Forma 1

Sea x el capital inicial expresado en soles.

El primer año terminó con

$$\left(x-300\right)+\frac{1}{6}\left(x-300\right)=\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(x-300\right)=\frac{7}{6}\left(x-300\right)=\frac{7}{6}x-350$$

El segundo año terminó con

$$\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{7}{6}x-350+500\right)=\frac{5}{6}\left(\frac{7}{6}x+150\right)=\frac{35}{36}x+125$$

El tercer año terminó con

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{35}{36}x+125+600\right)=\frac{5}{4}\left(\frac{35}{36}x+725\right)$$

De donde

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}\left(\frac{35}{36}x+725\right)&=2,000\\ \frac{35}{36}x+725&=1,600\\ \frac{35}{36}x&=875\\ x&=\frac{36\times 875}{35}\\ x&=900\ \text{ soles}\end{aligned}$$

Forma 2

Si el tercer año terminó con 2,000 soles, habiendo agregado $\frac{1}{4}$ a lo que le quedaba $\left(q_1\right)$: $2,000<>\frac{5}{4}q_1 \Rightarrow q_1=1,600.$

Entonces, antes de haber ganado 600 soles tenía $q_2=1,600-600=1,000$ soles.

Si terminó el segundo año con 1,000 soles, habiendo perdido $\frac{1}{6}$ de lo que tenía (q_3); $1{,}000 <> \frac{5}{6}q_3 \;\Rightarrow\; q_3 = 1{,}200.$

Entonces, antes de haber ganado 500 soles tenía $q_4 = 1{,}200 - 500 = 700$ soles.

Si terminó el primer año con 700 soles, habiendo aumentado $\frac{1}{6}$ a lo que le quedaba (q_5): $700 = \frac{7}{6}q_5 \;\Rightarrow\; q_5 = 600.$

Antes de haber gastado 300 soles, tuvo un capital inicial de $C = 600 + 300 = 900$ soles.

Forma 3

Sea x_3 la cantidad con la que empezó el tercer año:

$$2{,}000 = \frac{5}{4}(x_3 + 600)$$
$$x_3 = 1{,}000$$

Sea x_2 la cantidad con la que empezó el segundo año:

$$1{,}000 = \frac{5}{6}(x_2 + 500)$$
$$x_2 = 700$$

Sea x_1 la cantidad inicial:

$$700 = \frac{7}{6}(x_1 - 300)$$
$$x_1 = 900 \text{ soles}$$

126. Un comerciante tenía una determinada suma de dinero. El primer año gastó 1,000 soles y aumentó a lo que le quedaba un tercio de este resto. El

segundo y tercer años repitió estas operaciones. Si el capital resultante es el doble del inicial, ¿cuál fue este?

Forma 1
Sea C soles el capital inicial
Al gastar S/.1,000, le quedó $C-1{,}000$ soles.

Al aumentar $C-1000$ en su tercera parte, le quedó $\frac{4}{3}\left(C-1{,}000\right)$.

Si estas operaciones se repiten dos veces más, le quedará:

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}\left(C-1{,}000\right)-1{,}000\right]-1{,}000\right\} &= \frac{4}{3}\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{4C}{3}-\frac{7{,}000}{3}\right]-1{,}000\right\}\\ &= \frac{4}{3}\left\{\frac{16C}{9}-\frac{28{,}000}{9}-1{,}000\right\}\\ &= \frac{4}{3}\left\{\frac{16C}{9}-\frac{37{,}000}{9}\right\}\\ &= \frac{64C}{27}-\frac{148{,}000}{27}\end{aligned}$$

De acuerdo con el enunciado:

$$\begin{aligned}\frac{64C}{27}-\frac{148{,}000}{27} &= 2C\\ 64C-148{,}000 &= 54C\\ 10C &= 148{,}000\\ C &= 14{,}800\end{aligned}$$

Forma 2

Sea $2C$ el capital resultante.
En el tercer año, antes de aumentar el resto en su tercera parte, tenía $\frac{3}{4}\left(2C\right)=\frac{3C}{2}$ porque $x+\frac{x}{3}=\frac{4}{3}x \Rightarrow \frac{3}{4}\left(\frac{4x}{3}\right)=x.$

En el tercer año, antes de gastar S/.1,000 tenía $\frac{3C}{2}+1{,}000.$

Si se repitieron estas operaciones en el segundo y en el primer año, tuvo al comienzo:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{3C}{2}+1,000\right]+1,000\right\}+1,000 &= \frac{3}{4}\left\{\frac{9C}{8}+750+1,000\right\}+1,000\\ &= \frac{3}{4}\left\{\frac{9C}{8}+1,750\right\}+1,000\\ &= \frac{27C}{32}+\frac{9,250}{4}\end{aligned}$$

Según el enunciado:

$$\frac{27C}{32}+\frac{9,250}{4}=C$$

Por 32:

$$\begin{aligned}27C+74,000 &= 32C\\ 5C &= 74,000\\ C &= 14,800\end{aligned}$$

127. Un tonel contiene agua y alcohol con una concentración de 90%. Otro tonel contiene agua y alcohol con una concentración de 80%. Se sacan ciertas cantidades de cada tonel de modo que se obtienen 50 litros de agua y alcohol con una concentración de 84%. ¿Cuántos litros se sacaron del primer tonel?

Forma 1

Sea x litros la cantidad que se sacó del tonel I.

Como la concentración de alcohol es de 90%, saldrán $0.9x$ litros de alcohol.

Para conseguir 50 litros de mezcla, debemos sacar $50-x$ litros del tonel II.

Como la concentración de alcohol es de 80%, contendrá $0.8(50-x)$ litros de alcohol.

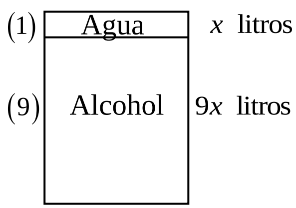
Si la mezcla es de 50 litros y la concentración es de 84%, contendrá $0.84\times 50=42$ litros de alcohol.

Entonces:

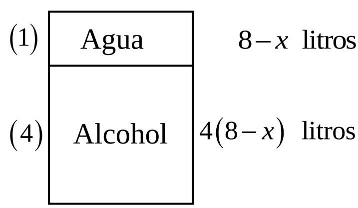
$$0.9x+0.8(50-x)=42$$
$$0.1x=42-40$$
$$x=20 \text{ litros}$$

Forma 2

Las cantidades que se deberán retirar de los toneles I y II serán las siguientes (considérese que deben ser $0.84(50)=42$ litros de alcohol y $50-42=8$ litros de agua en total)



(I)



(II)

En (I)

$$90\%=\frac{9}{10}=\frac{\text{alcohol}}{\text{alcohol + agua}} \Rightarrow \text{ 9 partes de alcohol + 1 parte de agua}$$

En (II)

$$80\% = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{\text{alcohol}}{\text{alcohol + agua}} \Rightarrow \text{ 4 partes de alcohol + 1 parte de agua}$$

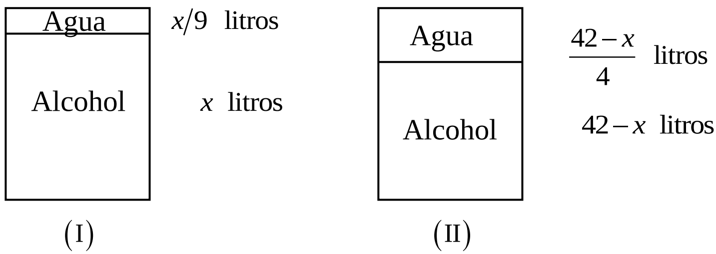
Como debe haber 42 litros de alcohol en la mezcla

$$9x + 4(8 - x) = 42$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

Del tonel I se deberán retirar $x + 9x = 10x$ litros en total. Es decir $10(2) = 20$ litros.

Forma 3

Si se quieren 42 litros de alcohol en la mezcla, deberán retirarse las siguientes cantidades de los toneles I y II:



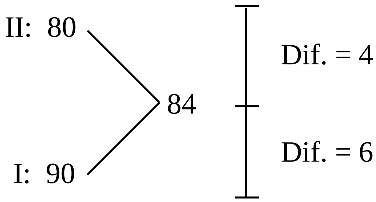
Para obtener 8 litros de agua en la mezcla:

$$\frac{x}{9}+\frac{42-x}{4}=8$$
$$36\left(\frac{x}{9}+\frac{42-x}{4}\right)=36(8)$$
$$4x+378-9x=288$$
$$5x=90$$
$$x=18$$

Del tonel I se deberán retirar $x+\frac{x}{9}=\frac{10}{9}x$ litros en total. O sea, $\frac{10}{9}(18)=20$ litros.

Forma 4

Concentración:



Del tonel II se deberán retirar $6x$ litros y del tonel I, $4x$ litros.

Entonces:

$$6x+4x=50$$
$$10x=50$$
$$x=5$$

Del tonel I se deberán retirar $4(5)=20$ litros.

128. ¿Cuántos litros de agua debo añadir a 60 litros de una mezcla de agua y alcohol al 60% para que la concentración de alcohol se reduzca al 40%?

Forma 1

La mezcla original contiene 60 litros, de los cuales $60\%\times 60=36$ litros son de alcohol.

Si se añaden x litros de agua a la mezcla original, se mantendrán los 36 litros de alcohol en una mezcla final de $60+x$ litros en total.

Si la concentración debe ser del 40%:

$$\begin{aligned}\frac{36}{60+x}&=0.4\\ 36&=24+0.4x\\ 0.4x&=12\\ x&=30 \text{ litros}\end{aligned}$$

Forma 2

Inicialmente, en 60 litros de mezcla se tienen 36 litros de alcohol.

Si se agregan x litros de agua, el alcohol se diluye, la capacidad total será $60+x$ litros y la concentración disminuye a 40%. Los 36 litros de alcohol constituirán el 40% de la capacidad final. Es decir:

$$\begin{array}{lcl}36 \text{ litros} & <> & 40\% \text{ de la capacidad final}\\ T \text{ litros} & <> & 100\% \text{ de la capacidad final}\end{array}$$

Entonces $T=90$ litros. Esto significa que debieron añadirse

$x=T-60=90-60=30$ litros de agua

129. En una familia, el padre gana 120 pesos por hora y la madre recibe 110 pesos por hora. Al cabo de 25 días de trabajo, el padre recibió 14,500 pesos más que la madre, dado que laboró 4 horas más por día que ella. Determinar cuántas horas trabajó en total el padre.

Forma 1

Sea x el número de horas al día que trabaja el padre y $x-4$, la madre.
Al cabo de 25 días, el padre ganará $25(120x)$ y la madre, $25\left[110(x-4)\right]$.
De donde:

$$\begin{aligned}25(120x)-25(110)(x-4)&=14,500\\3,000x-2,750x+11,000&=14,500\\250x&=3,500\\x&=14\end{aligned}$$

El padre trabajó en total $25(14)=350$ horas.

Forma 2

Calculemos cuánto más recibió el padre que la madre por cada día trabajado: $14,500\div 25=580$ pesos.
Esa diferencia se explica porque el padre trabajó 4 horas más por día que la madre y porque percibe 10 pesos más por hora que ella. Si le disminuimos a los 580 pesos el importe de 4 horas de trabajo del padre ($4\times 120=480$ pesos), obtendríamos $580-480=100$ pesos que corresponden a $100/10=10$ horas de trabajo comunes del padre y de la madre.
Por lo tanto, el padre trabajó $10+4=14$ horas al día, y $25\times 14=350$ horas en total.

130. La velocidad de grabación en formato VHS de cierta videograbadora es variable y el tiempo máximo de grabación de la cinta T-120 es 2 horas (SP), 4 horas (LP) o 6 horas (EP). Si los modos EP y SP serán utilizados para grabar íntegramente una película de 2 horas 40 minutos de duración en una cinta completa, ¿cuánto tiempo después de iniciada la película debe hacerse el cambio de EP a SP?

Forma 1

En una hora de grabación en el modo EP se puede grabar 1/6 de la cinta y en el modo SP, 1/2 cinta, puesto que los tiempos máximos de grabación son 6 y 2 horas, respectivamente.

Consideremos que de las 2 horas 40 minutos o $2\tfrac{2}{3}$ horas se graban t horas en el modo EP y $\left(2\tfrac{2}{3}-t\right)$ horas en el modo SP. Entonces:

$$t\left(\frac{1}{6}\right)+\left(2\tfrac{2}{3}-t\right)\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Por 6:

$$\begin{aligned} t+(8-3t)&=6\\ 2t&=2\\ t&=1 \end{aligned}$$

Se debe pasar a SP al cabo de 1 hora de grabación en EP.

Forma 2

Asumamos que las 2 horas 40 minutos de grabación se realizaron en el modo EP. Como cada hora de grabación en este modo se avanza la sexta parte de la cinta, en las 2 horas 40 minutos se habrá avanzado $2\tfrac{2}{3}\times\frac{1}{6}$ de la cinta, es decir $\frac{8}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$ de la cinta. Faltaría grabarse $5/9$ de la cinta. Como por cada hora de grabación en el modo SP se avanza la mitad de la cinta, si se grabase en este modo en lugar del modo EP la cinta avanzaría $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ más.

El número de horas de grabación en el modo SP se calcula dividiendo lo que falta grabarse en la cinta entre lo que avanza adicionalmente cada hora:

$$\#\ \text{horas en el modo SP}=\frac{5/9}{1/3}=\frac{5}{3}=1\ \text{hora}\ 40'$$

Entonces, el número de horas en el modo EP será

$$2\ \text{h}\ 40' - 1\ \text{h}\ 40' = 1\ \text{hora}$$

131. La oferta semanal de cierta fábrica consiste en obsequiar un pantalón por cada docena que le compren y una camisa por cada 8 camisas que le compren. Un comerciante pagó S/.52,896 y llevó en total 734 pantalones y 848 camisas. Determinar los precios unitarios si se sabe que el del pantalón excede en S/.40 al de la camisa.

Forma 1

Sabemos que por cada 12 pantalones pagados, recibe 13 pantalones.
Como $734 = 13 \times 56 + 6,$ recibió 56 pantalones de regalo y pagó solamente por $734 - 56 = 678$ pantalones.
Además, por cada 8 camisas pagadas, recibe 9 camisas.
Como $848 = 9 \times 94 + 2,$ recibió 94 camisas de regalo y pagó solamente por $848 - 94 = 754$ camisas.
Si x es el precio de cada camisa y $x + 40,$ el de cada pantalón, tendremos:

$$\begin{aligned} 754(x) + 678(x + 40) &= 52,896 \\ 754x + 678x + 27,120 &= 52,896 \\ 1,432x &= 25,776 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada camisa costó S/.18 y cada pantalón, S/.58.

Forma 2

Se pagó S/.52,896 por 754 camisas y por 678 pantalones.
Como cada pantalón costó S/.40 más que cada camisa, consideremos que se rebaje el precio de cada pantalón en S/.40 para que cueste igual que una camisa. El monto total pagado disminuiría en $678 \times 40 = 27,120$ soles, es decir habría pagado $52,896 - 27,120 = 25,776$ soles por $754 + 678 = 1,432$ prendas al precio de una camisa, cada una.
Entonces, cada camisa costó $25,776/1,432 = 18$ soles, y cada pantalón, 58 soles.

132. Se cuenta con 96 cajas de vino de 1, 2 y 4 litros. El número de litros de vino contenido en las cajas de 2 litros es el mismo que el contenido en las cajas de 4 litros. Averiguar si el número de litros de vino contenido en las

cajas de 1 litro excede a la tercera parte de los 156 litros que corresponde a la capacidad total.

Forma 1

Si el número de litros contenido en las cajas de 2 litros es el mismo que el contenido en las cajas de 4 litros, se deduce que hay doble número de cajas de 2 litros que de 4 litros.
Consideremos:

Capacidad por caja (litros)	Número de cajas
1	$96-3x$
2	$2x$
4	x
	96

La capacidad total será:

$$\begin{aligned} 1(96-3x)+2(2x)+4x &= 156 \\ 96-3x+4x+4x &= 156 \\ 5x &= 60 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Habrá $96-3(12)=60$ cajas de 1 litro con capacidad total de 60 litros que sí exceden a $\frac{1}{3}(156)=52$ litros.

Forma 2

Consideremos dos presentaciones de cajas de vino:

Presentación	Contenido	Total de cajas
A	1 caja $\times$ 1 litro = 1 lt.	1
B	1 caja $\times$ 4 litros + 2 cajas $\times$ 2 litros = 8 lts.	$1+2=3$

La presentación B asegura que haya doble número de cajas de 2 litros que de 4 litros.

Si suponemos que los 156 litros corresponden a la presentación A, tendremos 156 cajas de 1 litro. Sin embargo, el número de cajas debiera ser 96 y habrá una diferencia total $DT = 156 - 96 = 60$ cajas que debería disminuirse. Para mantener la capacidad total, debemos cambiar 8 presentaciones A por 1 presentación B. El número de cajas disminuiría en $DU = (8 \times 1) - (1 \times 3) = 5$ cajas por cada cambio que se haga de 8 presentaciones A por una presentación B.
Entonces, el número de cambios que debería hacerse es $DT/DU = 60/5 = 12.$ Habrá $156 - (12 \times 8) = 60$ cajas de vino de la presentación de 1 litro con capacidad total de 60 litros que sí exceden a lo dado.

Forma 3

A partir del cuadro

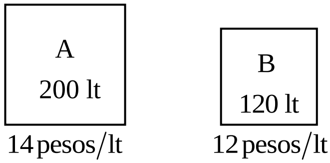
Presentación	Contenido	Total de cajas
A	1 caja $\times$ 1 litro = 1 lt.	1
B	1 caja $\times$ 4 litros + 2 cajas $\times$ 2 litros = 8 lts.	$1 + 2 = 3$

Asumamos que las 96 cajas son de la presentación B, habría $96/3 = 32$ presentaciones B con un total de $32 \times 8 = 256$ litros que exceden a la capacidad total de 156 litros en $DT = 256 - 156 = 100$ litros.
Para que no varíe el total de cajas, cambiemos una presentación B por 3 presentaciones A. El número de litros que disminuirá será $(1 \times 8) - (3 \times 1) = 5$ litros. Entonces, el número de cambios que deberá hacerse será $DT/DU = 100/5 = 20.$ Como en cada cambio aparecen 3 presentaciones A, habrá $20 \times 3 = 60$ cajas de vino en la presentación de 1 litro con capacidad total de 60 litros que sí exceden a $\frac{1}{3} \times 156 = 52$ litros.

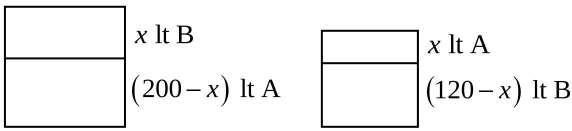
133. Un tonel de 200 litros de capacidad está lleno de vino A de 14 pesos el litro y otro tonel contiene 120 litros de vino B de 12 pesos el litro. ¿Cuántos litros deberán intercambiarse para que la diferencia en los precios de ambos toneles sea 1,200 pesos?

Forma 1

Consideremos



Sea x el número de litros de vino que se deberá intercambiar. Entonces tendremos:



El importe del primer tonel será:

$$\begin{aligned} &= (200-x)14+(x)12 \\ &= 2{,}800-14x+12x \\ &= 2{,}800-2x \end{aligned}$$

El importe del segundo tonel será:

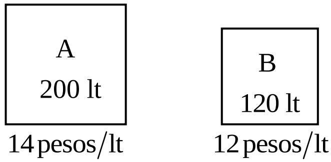
$$\begin{aligned} &= (120-x)12+(x)14 \\ &= 1{,}440-12x+14x \\ &= 1{,}440+2x \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} 2{,}800-2x-(1{,}440+2x) &= 1{,}200 \\ 4x &= 160 \\ x &= 40 \text{ litros} \end{aligned}$$

Forma 2

A partir de



La diferencia entre los importes es $200(14)-120(12)=1,360$ pesos. Como debiera ser solamente de 1,200 pesos, hay una diferencia total de $\mathrm{DT}=1,360-1,200=160$ pesos.
Por cada litro que se intercambie, el importe del primer tonel disminuirá en $14-12=2$ pesos y el del segundo aumentará en $14-12=2$ pesos. Se producirá una diferencia unitaria de $\mathrm{DU}=2-(-2)=4$ pesos.
De donde, el número de litros de vino que se deberá intercambiar será $\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DU}}=\frac{160}{4}=40$ litros.

134. Se adquirieron 50 paquetes promocionales de un cantante consistentes en 5 CD y 2 DVD o 3 CD y 4 DVD. Si la diferencia entre el número de CD y el de DVD es 78, ¿cuántos DVD se adquirieron?

Forma 1
Sean x y $50-x$ los números de paquetes promocionales de 5 CD + 2 DVD y de 3 CD + 4 DVD, respectivamente.
El total de CD será $5x+3(50-x)=2x+150$ y el de DVD, $2x+4(50-x)=200-2x$.
Como difieren en 78, tendremos:

$$(2x+150)-(200-2x)=78$$
$$4x=128$$
$$x=32$$

El total de DVD comprados será $200-2(32)=136$.

Forma 2

Supongamos que los 50 paquetes promocionales consisten en 5 CD y 2 DVD, cada uno. Como en cada paquete hay 3 CD más que DVD, en total habrá $3 \times 50 = 150$ CD más que DVD.
Como la diferencia real es solamente de 78, habrá que disminuirla en $\mathrm{DT} = 150 - 78 = 72$.
Para ello, habrá que intercambiar paquetes de 5 CD + 2 DVD por paquetes de 3 CD + 4 DVD.
En los primeros paquetes hay 3 CD más que DVD y en los segundos, 1 CD menos que DVD. Entonces en cada cambio, la diferencia entre CD y DVD disminuye en $\mathrm{DU} = 3 - (-1) = 4$.
El total de cambios será $\mathrm{DT}/\mathrm{DU} = 72/4 = 18$, con lo cual el número de los primeros paquetes será $50 - 18 = 32$ y el de los segundos, 18.
El total de DVD comprados será $(32 \times 2) + (18 \times 4) = 136$.

135. Un padre de familia propone entregarle 240 pesos de propina a su hijo por resolver 20 problemas o 480 pesos por resolver 35 problemas. ¿Cuántos problemas resolvió el hijo si recibió 336 pesos?

Forma 1

Sea C la cantidad fija que el padre entrega al hijo por resolver problemas y sea P la cantidad adicional que le entrega por cada problema que resuelva. Entonces:

$$\begin{cases} 240 = C + 20P \\ 480 = C + 35P \end{cases}$$

Restándolas:

$$240 = 15P$$
$$P = 16 \;\Rightarrow\; C = 240 - 20(16) = -80$$

Si x es el número de problemas que resuelve, el hijo recibirá $-80 + 16x$.
Como el hijo recibió 336 pesos:

$$336 = -80 + 16x$$
$$16x = 416$$
$$x = 26 \text{ problemas}$$

Forma 2

Comparemos las dos situaciones presentadas.
Por 20 problemas resueltos recibe 240 pesos.
Por 35 problemas resueltos recibe 480 pesos.
Se desprende que por $35 - 20 = 15$ problemas resueltos adicionales, recibe $480 - 240 = 240$ pesos más. De donde, por cada problema resuelto adicional recibirá $240/15 = 16$ pesos más.
Si restamos $336 - 240 = 96$ pesos más recibirá por resolver $96/16 = 6$ problemas adicionales a los 20 ya resueltos.
Entonces, el hijo resolvió $20 + 6 = 26$ problemas.

136. 7,500 soles fueron colocados a una tasa de interés desconocida y 2,500 soles, a una tasa de interés mayor en 2 puntos porcentuales. La suma de los intereses anuales es 500 soles. ¿A qué tasa fue colocada la segunda suma de dinero?

Forma 1

Sean $i\%$ e $(i+2)\%$ las tasas anuales de interés a las que fueron colocados S/.7,500 y S/.2,500, respectivamente.
El interés anual total será:

$$\frac{7,500i}{100} + \frac{2,500(i+2)}{100} = 500$$
$$75i + 25(i+2) = 500$$
$$75i + 25i + 50 = 500$$
$$100i = 450$$
$$i = 4.5$$

La segunda suma de dinero fue colocada al $(4.5+2)\% = 6.5\%$ anual.

Forma 2

Supongamos que S/7,500 fueron colocados al 2% anual y S/.2,500, al $(2+2)\% = 4\%$ anual.
El interés anual total supuesto será:

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{100}\times 7,500 + \frac{4}{100}\times 2,500 \\
&= 150 + 100 \\
&= 250 \text{ soles}
\end{aligned}$$

La diferencia entre el interés real y el supuesto será:

$$\text{DT} = 500 - 250 = 250 \text{ soles}$$

Por cada punto porcentual (1%) en que se incrementen las tasas supuestas del 2% y 4%, el interés anual aumentará en:

$$\text{DU} = \frac{1}{100}\times 7,500 + \frac{1}{100}\times 2,500 = 100 \text{ soles}$$

Entonces, las tasas supuestas deberán aumentar en:

$$\frac{\text{DT}}{\text{DU}} = \frac{250}{100} = 2.5 \text{ puntos porcentuales}$$

De donde, la segunda suma de dinero fue colocada al $4\% + 2.5\% = 6.5\%$ anual.

137. Se compraron 444 libros de aritmética, geometría y lenguaje por $8,658. Si los precios unitarios fueron $22, $18 y $15, respectivamente, y por cada 3 libros de aritmética se compraron 2 libros de geometría, ¿cuántos libros de lenguaje se compraron?

Forma 1

Sean $3k$ y $2k$ los números de libros comprados de aritmética y geometría, respectivamente. De lenguaje debieron comprarse $444-(3k+2k)=444-5k$ libros.
El gasto total fue:

$$\begin{aligned} 3k(22)+2k(18)+(444-5k)(15) &= 8,658 \\ 66k+36k+6,660-75k &= 8,658 \\ 27k &= 1,998 \\ k &= 74 \end{aligned}$$

El número de libros de lenguaje comprados fue
$444-5(74)=444-370=74$.

Forma 2

Consideremos libros de lenguaje a $15 cada uno y paquetes de libros (A – G) formados por 3 de aritmética y 2 de geometría, a un precio de $3\times 22+2\times 18=102$ soles cada paquete.
Tendremos

Materia	Nº de libros	Precio ($)
L	1	15
A – G	5	102
Total	444	8,658

Supongamos 444 libros de L y 0 libros de A – G.
El importe total supuesto sería $444\times 15=\$6,660$.
Existe una diferencia total en el importe total de $\mathrm{DT}=8,658-6,660=1,998$ dólares.
Si cambiamos 5 libros de L por un paquete de A – G, el número total de libros no se alterará pero el importe aumentará en $\mathrm{DU}=102-(5\times 15)=27$ dólares.
El número de cambios que deberá efectuarse será:

$$\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DU}}=\frac{1,998}{27}=74$$

Por lo tanto, el número de libros de lenguaje comprados será $444-(5\times 74)=74.$

138. Un ferrocarril recorre 280 kilómetros con 275 pasajeros. Se cobró $4'942,000$ pesos en total y el precio por boleto y por kilómetro es 100 pesos en primera clase, 75 pesos en segunda y 55 pesos en tercera. Si por cada 7 pasajeros en segunda, viajan 18 en tercera, encontrar el número de pasajeros en cada clase.

Forma 1

Sean $7x,\ 18x$ y $275-25x,$ las cantidades de pasajeros en segunda, tercera y primera clase, respectivamente.
La recaudación por kilómetro recorrido será

$$\begin{aligned}(275-25x)100+7x(75)+18x(55) &= 27,500-2,500x+525x+990x\\ &= 27,500-985x\end{aligned}$$

La recaudación total por los 280 kilómetros recorridos será

$$\begin{aligned}280(27,500-985x) &= 4'942,000\\ 27,500-985x &= 17,600\\ 985x &= 9,850\\ x &= 10\end{aligned}$$

Entonces viajaron $275-25(10)=25$ pasajeros en primera clase, $7(10)=70$ en segunda y $18(10)=180$ en tercera.

Forma 2

Calculamos la recaudación por kilómetro recorrido:

$$\frac{4'942,000}{280}=17,650\,\frac{\text{pesos}}{\text{km}}$$

Asumamos que por cada 7 pasajeros en segunda y por cada 18 pasajeros en tercera, viajan x pasajeros en primera. La recaudación supuesta por kilómetro recorrido será:

$$\begin{array}{rcc} x \text{ pasajeros} \cdot 100 \text{ pesos} & = & 100x \\ 7 \text{ pasajeros} \cdot \ 75 \text{ pesos} & = & 525 \\ 18 \text{ pasajeros} \cdot \ 55 \text{ pesos} & = & 990 \\ \hline x+25 \text{ pasajeros} & & 100x+1515 \text{ pesos} \end{array}$$

Deberán ser iguales la razón de pasajeros y la razón de recaudación:

$$\frac{x+25}{275}=\frac{100x+1515}{17,650}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} 706(x+25) &= 11(100x+1515) \\ 706x+17650 &= 1100x+16665 \\ 394x &= 985 \\ x &= 2.5 \end{aligned}$$

Por cada 2.5 pasajeros en primera clase, hay 7 pasajeros en segunda clase y 18 pasajeros en tercera clase.

$$\text{Número de veces } = \frac{275}{2.5+7+18} = \frac{275}{27.5} = 10$$

Entonces viajaron 25 pasajeros en primera clase, 70 pasajeros en segunda y 180 pasajeros en tercera.

Forma 3

Recaudación por kilómetro recorrido: $\frac{4'942,000}{280} = 17,650$ pesos.

Consideremos grupos A, formados por 7 pasajeros de segunda clase y 18 pasajeros de tercera clase: 25 personas que pagan $7(75)+18(55)=1515$ pesos por kilómetro recorrido.

Si deben viajar 275 personas, consideremos $\frac{275}{25}=11$ grupos A.

Los 11 grupos A pagarían un total de $11\times 1,515 = 16,665$ pesos.

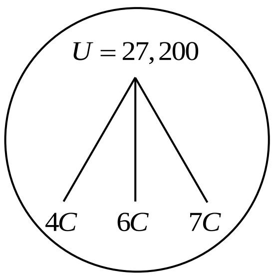
Habría que cubrir una diferencia de $17,650-16,665=985$ pesos $=$ DT.

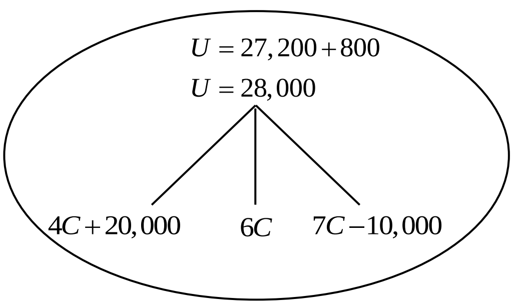
Si cambiamos 1 grupo A de 25 personas por 25 personas de primera clase, se recaudaría $\mathrm{DU} = (25 \times 100) - 1{,}515 = 985$ pesos más en cada cambio. El número de cambios necesarios sería $\dfrac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DU}} = \dfrac{985}{985} = 1$.
Significa que viajan 25 personas en primera y $11 - 1 = 10$ grupos A, es decir $10 \times 7 = 70$ personas en segunda y $10 \times 18 = 180$ personas en tercera clase.

139. Tres socios aportan capitales para un negocio, y obtienen al final del mismo 6,400, 9,600 y 11,200 dólares, respectivamente, por concepto de utilidades. Si el primero hubiera aportado 20,000 dólares más y el tercero, 10,000 dólares menos, la utilidad se hubiera incrementado en 800 dólares y de esta manera, al tercero le hubieran correspondido 2,400 dólares más de utilidad que al primero. Encontrar los capitales aportados inicialmente.

Forma 1

Las utilidades de 6,400, 9,600 y 11,200 dólares (suma = 27,200) equivalen a $4 \times 1{,}600$, $6 \times 1{,}600$ y $7 \times 1{,}600$. Esto significa que los aportes respectivos están en la relación de 4, 6 y 7, respectivamente.
Analicemos dos situaciones de reparto proporcional:





En este segundo caso:

$$(7C-10,000)k-(4C+20,000)k=2,400,$$

donde

$$k=\frac{28,000}{(4C+20,000)+6C+(7C-10,000)}$$
$$k=\frac{28,000}{17C+10,000}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}(7C-10,000-4C-20,000)k&=2,400\\(3C-30,000)k&=2,400\\k&=\frac{2,400}{3C-30,000}\end{aligned}$$

Igualándolos

$$\begin{aligned}\frac{28,000}{17C+10,000}&=\frac{2,400}{3C-30,000}\\\frac{70}{17C+10,000}&=\frac{6}{3C-30,000}\\102C+60,000&=210C-2'100,000\\108C&=2'160,000\\C&=20,000\end{aligned}$$

Los capitales aportados inicialmente serán $4(20,000)$, $6(20,000)$ y $7(20,000)$, es decir, 80,000, 120,000 y 140,000 dólares.

Forma 2

En la primera situación

$$\left.\begin{array}{lll} C_1 & \rightarrow & U_1 = 6,400 \\ C_2 & \rightarrow & U_2 = 9,600 \\ C_3 & \rightarrow & U_3 = 11,200 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{\text{Total}} = 27,200$$

$$C_{\text{Total}} = C_1 + C_2 + C_3$$

En la segunda situación

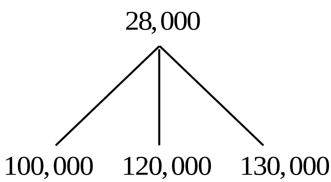
$$\left.\begin{array}{lll} C_1 + 20,000 & \rightarrow & U_1 = 6,400 + \Delta U_1 \\ C_2 & \rightarrow & U_2 = 9,600 + \Delta U_2 \\ C_3 - 10,000 & \rightarrow & U_3 = 11,200 + \Delta U_3 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{\text{Total}} = 27,200 + 800$$

$$C_{\text{Total}} = C_1 + C_2 + C_3 + 10,000$$

Comparemos las dos situaciones: un aumento de 10,000 dólares en el capital invertido supone un aumento de 800 dólares en la utilidad total, esto significa que se obtienen 800 dólares de utilidad por cada 10,000 dólares aportados.
De la primera situación:

$$\begin{array}{lll} U_! = 6,400 & \Rightarrow & C_1 = \dfrac{6,400}{800} \times 10,000 = 80,000 \\ U_2 = 9,600 & \Rightarrow & C_2 = \dfrac{9,600}{800} \times 10,000 = 120,000 \\ U_3 = 11,200 & \Rightarrow & C_3 = \dfrac{11,200}{800} \times 10,000 = 140,000 \end{array}$$

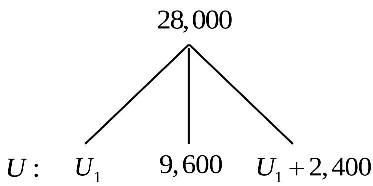
Se comprueba que el tercer socio recibe 2,400 dólares más que el primero:



$$\Delta U = \left(130,000 - 100,000\right) \times \frac{28,000}{350,000}$$
$$\Delta U = 30,000 \times \frac{1}{125}$$
$$\Delta U = 2,400$$

Forma 3

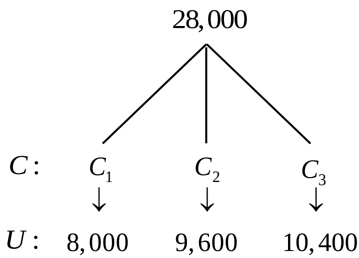
Asumamos que en la segunda situación el reparto de utilidades es como sigue



Entonces:

$$28,000 = U_1 + 9,600 + U_1 + 2,400$$
$$2U_1 = 16,000$$
$$U_1 = 8,000$$

De donde:



La utilidad del primer socio aumenta de 6,400 a 8,000 ante un aumento de 20,000 en el capital, entonces $\frac{\Delta C}{\Delta U} = \frac{20,000}{1,600} = 12.5 \frac{\text{dólar de capital}}{\text{dólar de utilidad}}$ y la utilidad del segundo socio no varía al no haber aumento de capital.

La utilidad del tercer socio disminuye de 11,200 a 10,400 dólares ante una disminución de 10,000 dólares en el capital, entonces $\frac{\Delta C}{\Delta U}=\frac{-10,000}{-800}=12.5\frac{\text{dólar de capital}}{\text{dólar de utilidad}}$.
Entonces:

$$
\begin{array}{llll}
U_! = 6,400 & \Rightarrow & C_1 = 6,400\times 12.5 & = 80,000 \\
U_2 = 9,600 & \Rightarrow & C_2 = 9,600\times 12.5 & = 120,000 \\
U_3 = 11,200 & \Rightarrow & C_3 = 11,200\times 12.5 & = 140,000
\end{array}
$$

140. Un asunto fue sometido a la votación de 1,000 personas y se perdió. En una segunda votación, se ganó el caso al cambiar de opinión 300 personas por una diferencia de votos igual al 250% del número de votos que se opusieron. Si en ambas votaciones el 10% del total de votantes se abstuvo, ¿en qué razón se encuentra la mayoría de la segunda votación a la de la primera? (resolverlo con una incógnita)

Forma 1

Asumamos que solamente cambian de opinión algunos de los que habían votado por el "no" en la primera votación, es decir que todos los que habían votado por el "sí" en la primera votación mantuvieron su decisión inicial.
Consideremos

	1ª votación	2ª votación
Sí	$900-x$	$900-x+300$
No	x	$x-300$
Abstención	100	100
	1,000	1,000

La diferencia en el número de votos en la segunda votación es:

$$[900-x+300]-[x-300]=1,500-2x$$

Según el enunciado:

$$1{,}500 - 2x = 2.5(x - 300)$$
$$4.5x = 2{,}250$$
$$x = 500$$

Entonces:

	1ª votación	2ª votación
Sí	400	700
No	500	200
Abstención	100	100
	1,000	1,000

Relación de mayorías: $700/500 = 7/5$.

Forma 2

En la segunda votación, la diferencia de los votos por el sí y los votos por el no fue 2.5 veces el número de los votos por el no (x), entonces:

$$\#\ \text{votos sí} - \underbrace{\#\ \text{votos no}}_{x} = 2.5\ \times \underbrace{\#\ \text{votos no}}_{x}$$
$$\#\ \text{votos sí} - x = 2.5x$$
$$\#\ \text{votos sí} = 3.5x$$

Luego:

	1ª votación	2ª votación
Sí	$3.5x - 300$	$3.5x$
No	$x + 300$	x
Abstención	100	100
	1,000	1,000

De donde:

$$3.5x + x = 900$$
$$4.5x = 900$$
$$x = 200$$

votos sí en la 2ª votación: $3.5(200) = 700$

votos no en la 1ª votación: $200+300=500$
Por lo tanto, la relación pedida es $700/500=7/5$.

141. Las edades de dos hermanos son a y b años $(a>b)$. ¿Dentro de cuántos años se cumplirá que la suma de b veces la edad del mayor con a veces la edad del menor será $(a+b)$ veces la suma de las edades que tenían hace $(a-b)$ años?

Sea x los años que deben transcurrir para que se cumpla el enunciado:

	Presente	Futuro
Mayor	a	$a+x$
Menor	b	$b+x$

Por otro lado, como hace $(a-b)$ años, cada hermano tenía $(a-b)$ años menos, la suma de sus edades hace $(a-b)$ años fue $a+b-2(a-b)$.
Entonces:

$$b(a+x)+a(b+x)=(a+b)\left[(a+b)-2(a-b)\right]$$
$$ab+bx+ab+ax=(a+b)(3b-a)$$
$$x(a+b)+2ab=3ab-a^2+3b^2-ab$$
$$x(a+b)=3b^2-a^2$$
$$x=\frac{3b^2-a^2}{a+b}$$

142. Alberto tiene hoy cuatro veces los años que tenía Bernardo cuando él tenía 13 años. Si Bernardo tiene hoy 22 años, ¿dentro de cuántos años la edad del mayor será a la del menor como 10 es a 9?

Forma 1

	Antes	Hoy
Alberto	13	$4x$
Bernardo	x	22

Han transcurrido $4x-13$ ó $22-x$ años

$$4x-13=22-x$$
$$5x=35$$
$$x=7$$

Las edades actuales de Alberto y Bernardo son 28 y 22 años, respectivamente.

Si transcurriesen y años, se debería cumplir que

$$\frac{28+y}{22+y}=\frac{10}{9}$$
$$252+9y=220+10y$$
$$y=32 \text{ años}$$

Forma 2

	Antes	Hoy
Alberto	13	$4x$
Bernardo	x	22

La diferencia de edades entre Alberto y Bernardo es $13-x$ ó $4x-22$.

Es decir

$$13-x=4x-22$$
$$5x=35$$
$$x=7$$

Las edades actuales de Alberto y Bernardo son 28 y 22 años, respectivamente.

La diferencia de sus edades será $28-22=6$ años en todo momento.

Sus edades futuras serán z y $z-6$ y se requiere que

$$\frac{z}{z-6}=\frac{10}{9}$$
$$10z-60=9z$$
$$z=60$$

Alberto deberá tener 60 años, es decir deberán transcurrir $60-28=32$ años.

Forma 3

Según la Forma 2, Alberto tiene 28 años y Bernardo, 22 años. Es decir, los separan 6 años de edad. Si se quiere que las edades estén en la relación de 10 a 9:
Si Alberto tuviese 10 años y Bernardo, 9, la diferencia sería de 1 año. Como la diferencia de sus edades es 6 años, entonces Alberto deberá tener $6\times 10=60$ años.
Es decir, deberán transcurrir $60-28=32$ años.

143. Hace a años la edad de Alberto era el doble de la edad de Blas. ¿Dentro de cuántos años la razón de las edades será de 7 a 6, si la suma de las edades es a la diferencia como 7 es a 1?

Forma 1

Si hace a años, la edad de Alberto era $2x$ años, la edad de Blas era x años. Actualmente tendrán $2x+a$ y $x+a$ años, respectivamente. Adicionalmente se cumple que:

$$\frac{(2x+a)+(x+a)}{(2x+a)-(x+a)}=\frac{7}{1}$$
$$\frac{3x+2a}{x}=\frac{7}{1}$$
$$7x=3x+2a$$
$$4x=2a$$
$$x=\frac{a}{2}$$

Dentro de k años tendrán $2x+a+k$ y $x+a+k$ años y se deberá cumplir que:

$$\frac{2x+a+k}{x+a+k}=\frac{7}{6}$$

Reemplacemos $x=\frac{a}{2}$:

$$\frac{2\left(\frac{a}{2}\right)+a+k}{\left(\frac{a}{2}\right)+a+k}=\frac{7}{6}$$

$$\frac{2a+k}{1.5a+k}=\frac{7}{6}$$

$$10.5a+7k=12a+6k$$

$$k=1.5a$$

Deberán transcurrir $1.5a$ años.

Forma 2

Elaboremos la siguiente tabla, considerando que las edades futuras (dentro de x años) serán $7k$ y $6k$.

	Hace a años	Hoy	Dentro de x años
Alberto	$7k-x-a$	$7k-x$	$7k$
Blas	$6k-x-a$	$6k-x$	$6k$

Se pide encontrar x en función de a. Del dato:

$$\frac{(7k-x)+(6k-x)}{(7k-x)-(6k-x)}=\frac{7}{1}$$
$$\frac{13k-2x}{k}=\frac{7}{1}$$
$$13k-2x=7k$$
$$6k=2x$$
$$k=\frac{x}{3}$$

Hace a años, Alberto tenía $7k-x-a=\frac{7x}{3}-x-a=\frac{4x}{3}-a$ años, mientras que Blas tenía $6k-x-a=6\left(\frac{x}{3}\right)-x-a=x-a$ años.

Del dato:

$$\frac{4x}{3}-a=2(x-a)$$
$$4x-3a=6x-6a$$
$$2x=3a$$
$$x=1.5a$$

Forma 3

Sean x e y las edades actuales de Alberto y Blas, respectivamente. Según el dato:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{7}{1}$$
$$7x-7y=x+y$$
$$6x=8y$$
$$y=\frac{3}{4}x$$

	Hace a años	Hoy	Dentro de x años
Alberto	$x-a$	x	$x+k$
Blas	$\frac{3}{4}x-a$	$\frac{3}{4}x$	$\frac{3}{4}x+k$

Se pide encontrar el valor de k en función de a.

Del dato:

$$x-a=2\left(\frac{3}{4}x-a\right)$$
$$4x-4a=6x-8a$$
$$2x=4a$$
$$x=2a \qquad (\alpha)$$

Además:

$$\frac{x+k}{\frac{3}{4}x+k}=\frac{7}{6}$$
$$6x+6k=\frac{21}{4}x+7k$$
$$k=\frac{3}{4}x \qquad (\beta)$$

(α) en (β)

$$k=\frac{3}{4}(2a)$$
$$k=1.5a$$

144. Si un hombre tuviese 27 años menos, el tiempo que hubiera permanecido durmiendo sería la quinta parte del tiempo que hubiera permanecido despierto si es que tuviese 27 años más. Si en el transcurso de su vida duerme en promedio 8 horas diarias, ¿cuántos años lleva durmiendo?

Forma 1

Si duerme 8 horas diarias, duerme $\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$ del día y está despierto $\frac{2}{3}$ del día.

Sea x la edad (en años) actual del hombre.

$x-27:$ edad hace 27 años.

$\frac{1}{3}(x-27):$ número de años que hubiese permanecido dormido.

$x+27:$ edad dentro de 27 años.

$\frac{2}{3}(x+27):$ años que hubiera permanecido despierto.

Entonces:

$$\frac{1}{3}(x-27)=\frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}(x+27)\right]$$

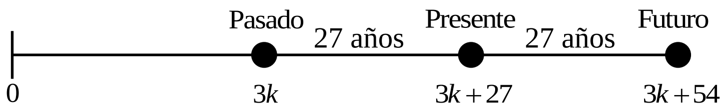
por 15:

$$\begin{aligned}
&5(x-27)=2(x+27)\\
&5x-135=2x+54\\
&3x=189\\
&x=63 \quad \text{años}
\end{aligned}$$

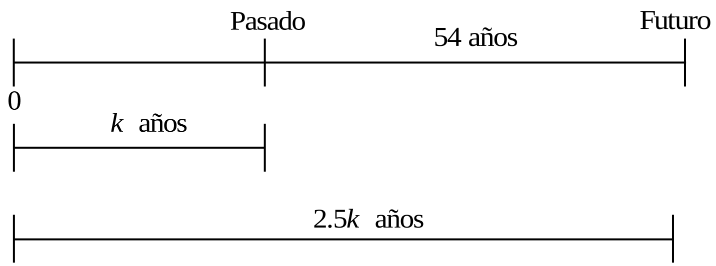
Lleva durmiendo $\frac{1}{3}(63)=21$ años.

Forma 2

Consideremos que el hombre tiene 27 años menos (pasado). Asumamos que ha estado durmiendo un total de k años. Su edad será $3k$ ya que la tercera parte del día la pasa durmiendo.



Según el enunciado del problema, cuando el hombre tenga 27 años más (futuro), habrá estado despierto $5k$ años. Como está despierto el doble del tiempo que duerme, habrá dormido $\frac{5k}{2} = 2.5k$ años. Entonces habrá dormido:



En esos 54 años habrá dormido $\frac{1}{3}\times 54 = 18$ años. Quiere decir que

$$
\begin{aligned}
2.5k - k &= 18 \\
1.5k &= 18 \\
k &= 12
\end{aligned}
$$

Su edad actual será $3(12) + 27 = 63$ años y habrá dormido $\frac{1}{3}\times 63 = 21$ años.

145. Un peatón parte de A con dirección a B con una velocidad de 5 km/h. Después de recorrer 4 km es alcanzado por un auto que partió de A con un retraso de $28'$. Luego de que el peatón ha recorrido 6 km más, encuentra por

segunda vez al auto que regresaba de B, en donde había descansado $20'$. ¿Qué distancia separa ambas ciudades?

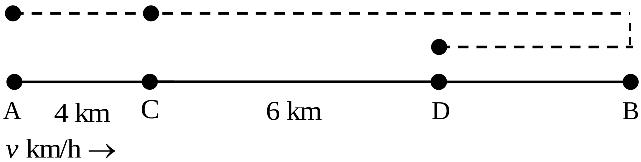
Tenemos:

El peatón emplea:

$$t_{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{v} = \frac{4\ \mathrm{km}}{5\ \mathrm{km/h}} = 0.8\ \text{horas} = 48'$$

$$t_{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{CD}}{v} = \frac{6\ \mathrm{km}}{5\ \mathrm{km/h}} = 1.2\ \text{horas} = 72'$$

Además



El auto emplea $t_{AC} - 28' = 48' - 28' = 20'$ en recorrer 4 km, entonces:

$$v_{\text{auto}} = \frac{e}{t} = \frac{4\ \mathrm{km}}{20'} = \frac{4\ \mathrm{km}}{\frac{1}{3}\ \text{hora}} = 12\ \mathrm{km/h}$$

El auto emplea

$$t_{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{CD}}{v_{\text{auto}}} = \frac{6\ \mathrm{km}}{12\ \mathrm{km/h}} = \frac{1}{2}\ \text{hora} = 30'$$

El auto emplea $72' - 20' = 52'$ en recorrer $\mathrm{CD} + \mathrm{DB} + \mathrm{BD}$, es decir $52' - 30' = 22'$ en recorrer dos veces el tramo BD. El tramo BD lo recorre en $11'$, es decir:

$$\mathrm{BD} = v_{auto} \times 11'$$

$$\mathrm{BD} = 12 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \times \frac{11}{60} \ \text{horas}$$

$$\mathrm{BD} = 2.2 \ \mathrm{km}$$

Finalmente, la distancia que separa A de B será:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD} + \mathrm{DB}$$

$$\mathrm{AB} = 4 + 6 + 2.2$$

$$\mathrm{AB} = 12.2 \ \mathrm{km}$$

146. Se puede recorrer un camino en 6 horas con una cierta velocidad y podría ser recorrido en 2 horas menos si la velocidad aumentara en 2 km/h. Encontrar la longitud del camino.

Forma 1

Sea e km la longitud del camino.
Si la velocidad es $v \ \mathrm{km/hora}$, se hará el recorrido en 6 horas. Entonces, $e = v(6)$.
Si la velocidad aumenta a $v + 2 \ \mathrm{km/hora}$, se requerirá de un tiempo $6 - 2 = 4$ horas. De donde $e = (v+2)(4)$.
Igualemos e:

$$6v = 4(v+2)$$

$$6v = 4v + 8$$

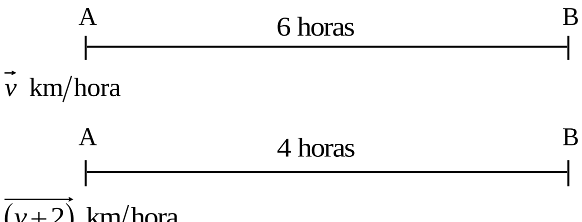
$$2v = 8$$

$$v = 4 \ \mathrm{km/hora}$$

Finalmente, la longitud del camino será $e = 4(6) = 24$ km.

Forma 2

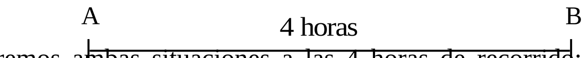
Tenemos



En el primer caso, podemos averiguar dónde se encontraba el móvil a las 4 horas de recorrido.

$e = vt$

$\text{CB} = v(2) = 2v$



Comparemos ambas situaciones a las 4 horas de recorrido; en el segundo caso avanzó una distancia mayor CB que corresponde a 4 horas de recorrido a $2\,\text{km/hora}$ mayor, esto es 8 km. Por lo tanto:

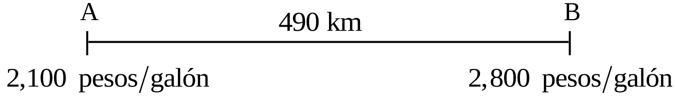
$$\text{CB} = 2v = 8 \ \Rightarrow \ v = 4\,\text{km/hora}$$

Finalmente, la longitud AB será $(4+2)4 = 24$ km.

147. El galón de gasolina cuesta 2,100 y 2,800 pesos en las ciudades A y B, distantes 490 km entre sí. Si el transporte de un galón de gasolina, desde A o B, por una distancia de 700 km cuesta el valor de un galón de gasolina en el punto de embarque respectivo, ¿cuán distante de B estará la ciudad en la que el galón de gasolina costará igual ya sea que proceda de A o de B?

Forma 1

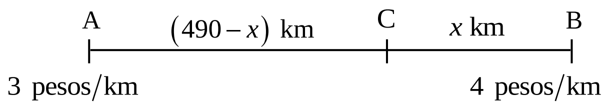
Consideramos:



El costo de transporte de un galón de gasolina desde A es 2,100 pesos por trasladarlo 700 km. El costo unitario será $2{,}100/700 = 3\,\text{pesos/km}$.

En el caso del transporte desde B, el costo unitario será $2{,}800/700 = 4$ pesos/km.

Entonces:



El costo total de un galón de gasolina en la ciudad C si se le traslada desde A será $2{,}100 + 3(490 - x) = 3{,}570 - 3x$ pesos.

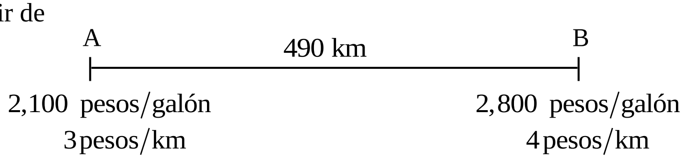
El costo total de un galón de gasolina en la ciudad C si se le traslada desde B será $2{,}800 + 4x$ pesos.

Igualemos ambos costos:

$$3{,}570 - 3x = 2{,}800 + 4x$$
$$7x = 770$$
$$x = 110 \text{ km}$$

Forma 2

A partir de



El costo de un galón de gasolina en B, adquirido en B, es 2,800 pesos.

Si compráramos un galón de gasolina en A y lo trasladáramos hasta B, el costo total sería $2{,}100 + 3(490) = 3{,}570$ pesos.

La diferencia en los costos sería $\mathrm{DT} = 3{,}570 - 2{,}800 = 770$ pesos.

Por cada kilómetro que se retrocede desde B, un galón de gasolina costará 3 pesos menos y el otro costará 4 pesos más.

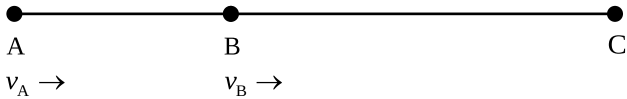
La diferencia unitaria será $\mathrm{DU} = 3 + 4 = 7$ pesos.

De donde el número de kilómetros que habrá que retroceder desde B será $\dfrac{\mathrm{DT}}{\mathrm{DU}} = \dfrac{770}{7} = 110.$

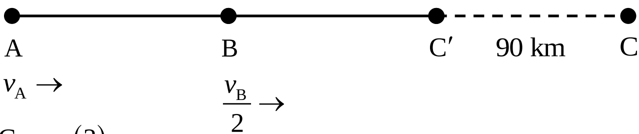
148. Dos móviles parten simultáneamente, y en el mismo sentido, de dos ciudades separadas cierta distancia y se encuentran al cabo de tres horas. Sin embargo, podrían encontrarse 1.5 horas antes y 90 km antes en caso de que uno de ellos redujera su velocidad a la mitad. Encontrar las velocidades de ambos móviles.

Forma 1

Consideremos:
i) los móviles se encuentran en C al cabo de 3 horas



ii) Para que se encuentren en C' al cabo de 1.5 horas, el móvil B deberá disminuir su velocidad.



De i) $AC = v_A(3)$

De ii) $AC = AC' + C'C = v_A(1.5) + 90$

Entonces:

$$\begin{aligned} 3v_A &= 1.5v_A + 90 \\ 1.5v_A &= 90 \\ v_A &= 60 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Asimismo:

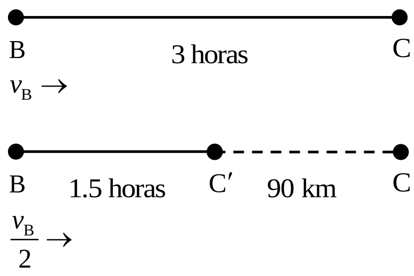
$$\begin{aligned} \mathrm{BC} = 3v_\mathrm{B} &= \mathrm{BC}' + \mathrm{C}'\mathrm{C} \\ 3\mathrm{v}_\mathrm{B} &= 1.5\left(\frac{v_B}{2}\right) + 90 \\ 3v_\mathrm{B} &= 0.75v_\mathrm{B} + 90 \\ 2.25v_\mathrm{B} &= 90 \\ v_\mathrm{B} &= 40 \text{ km/h} \end{aligned}$$

Forma 2

Si el encuentro en el segundo caso se produjo 1.5 horas antes y 90 km antes, significa que el móvil A, que no modificó su velocidad, recorrió 90 km en 1.5 horas en el primer caso. De donde:

$$\begin{aligned} v_\mathrm{A} &= \frac{90 \text{ km}}{1.5 \text{ hora}} \\ v_\mathrm{A} &= 60 \text{ km/h} \end{aligned}$$

En cuanto al móvil B:



Averigüemos cuánto deja de recorrer por disminuir su velocidad a la mitad y por recorrer menor tiempo e igualémoslo a 90 km.
Si $\mathrm{BC} = 4k$, y solamente recorre la mitad de las 3 horas, recorre $2k$ y deja de recorrer $2k$. Además, si recorría $2k$ a cierta velocidad, cuando reduzca la velocidad a la mitad, dejará de recorrer k. En total, los 90 km no recorridos equivalen a $2k + k = 3k$. De ahí, $3k = 90 \;\Rightarrow\; k = 30$.

Finalmente, $v_{\text{B}} = \dfrac{\text{BC}}{t} = \dfrac{4k}{3} = \dfrac{4(30)}{3} = 40$ km/h.

149. Si un ciclista va a 10 kilómetros por hora, llega a su destino a las 3 de la tarde. Si fuera a 15 kilómetros por hora, llegaría a la 1 p.m.
a) ¿a qué hora salió el ciclista?
b) ¿qué velocidad deberá llevar para llegar a las 2 p.m.?

Forma 1

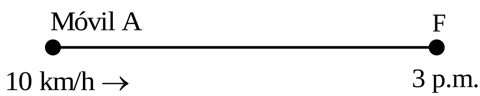
Tenemos que el espacio recorrido es el mismo en ambos casos. Supongamos que si va a 10 km/h demora t horas en llegar a su destino: $e = 10t.$ Entonces, si va a 15 km/h demorará 2 horas menos, es decir $t-2$ horas: $e = 15(t-2)$. Igualémoslos:

$$\begin{aligned} 10t &= 15(t-2) \\ 10t &= 15t - 30 \\ 5t &= 30 \\ t &= 6 \end{aligned}$$

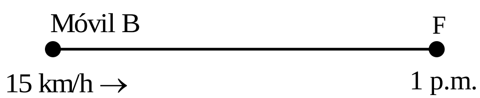
Si demoró 6 horas y llegó a las 3 p.m., entonces salió a las 9 a.m. Por otro lado, debe recorrer $e = 10t = 10(6) = 60$ km y si pretende llegar a las 2 p.m., demoraría 5 horas y su velocidad deberá ser $v = e/t = 60 \text{ km}/5 \text{ horas} = 12$ km/h.

Forma 2

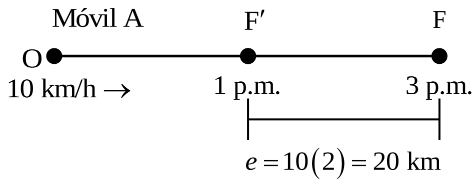
Consideremos las siguientes gráficas:
Primer caso:



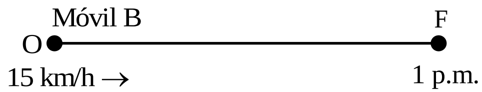
Segundo caso:



Si en el primer caso el móvil A va a 10 km/h y llega a F a las 3 p.m., a la 1 p.m. se encontrará a $2\times10=20$ km de F:

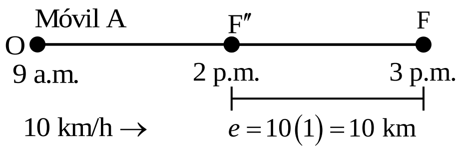


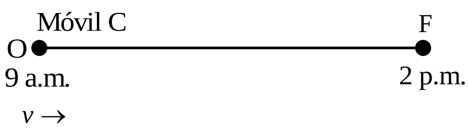
Comparémoslo con el segundo caso:



A la 1 p.m., el móvil B avanzó 20 km más que lo que avanzó el móvil A. Ello debido a que la velocidad del móvil B es 5 km/h más que la velocidad de B.
Podemos averiguar el tiempo transcurrido desde que el móvil B salió de O y le aventajó 20 km al móvil A: $t=20/5=4$ horas.

Entonces, si el móvil B llegó a la 1 p.m. y demoró 4 horas, habrá salido a las 9 a.m.
Por otro lado, analicemos el caso del móvil C que deberá llegar a las 2 p.m. a su destino:





A las 2 p.m., el móvil C aventajó 10 km al móvil A al cabo de 5 horas porque salió a las 9 a.m.
Por lo tanto, la diferencia de velocidades entre los móviles C y A es $10\text{ km}/5\text{ horas}=2$ km/h, y se deduce que la velocidad del móvil C es $v_C=v_A+2=10+2=12$ km/h.

150. Juana lleva una ventaja de 220 metros a Juan. Calcular cuántos metros recorrerá Juan para alcanzarla si se sabe que en un minuto da 3 pasos mientras que Juana da 4 y que Juan le descuenta 30 cm por cada 50 cm que avanza ella en cada paso.

Forma 1

Del último dato deducimos que la longitud del paso de Juana es 50 cm y la de Juan, $50+30=80\,\text{cm}$
En un minuto, Juan avanza $3\times 80=240\,\text{cm}$ y Juana, $4\times 50=200\,\text{cm}$
Sea t el tiempo en minutos que deberá transcurrir para que Juan alcance a Juana. Juan habrá recorrido $240t$ cm y Juana, $200t$ cm.
Para que Juan recupere los $220\text{ m}=22{,}000\text{ cm}$ que Juana le aventaja:

$$\begin{aligned}240t &= 200t+22{,}000\\ 40t &= 22{,}000\\ t &= 550'\end{aligned}$$

Entonces, Juan deberá recorrer $240(550)\text{ cm}=1{,}320\text{ m}$.

Forma 2

En cada paso, Juan le descuenta 30 cm a Juana.
En cada minuto, Juan da 3 pasos y le descontará $3\times 30=90\,\text{cm}$ a Juana, pero como ella da 4 pasos (1 paso más) de 50 cm de longitud, el descuento efectivo será $90-50=40\,\text{cm}$.
Para que Juan recupere la ventaja de 220 metros, deberán transcurrir

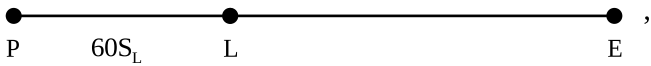
$$t=\frac{220\text{ m}}{0.40\text{ m/minuto}}=550'$$

Como la longitud del paso de Juan es 80 cm, el espacio recorrido por Juan será $550\times(3\times 0.80)=1{,}320\text{ m}$.

151. Una liebre lleva una ventaja inicial de 60 de sus saltos a un perro. La liebre da 4 saltos mientras el perro da 3, pero el perro en 5 saltos avanza tanto como la liebre en 8. ¿Cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar a la liebre?

Forma 1

Del último dato se deduce que las longitudes de los saltos del perro y de la liebre están en relación inversa de 5 a 8. Es decir, consideremos que en cada salto el perro avanza $8x$ y la liebre, $5x$.
En cada unidad de tiempo, el perro da 3 saltos y avanza $3(8x)=24x$; en cambio, la liebre da 4 saltos y avanza $4(5x)=20x$.
A partir de:



asumamos que transcurren t unidades de tiempo para que el perro alcance a la liebre en el punto E.
El espacio recorrido por el perro será $\mathrm{PE}=t(24x)$ y el espacio recorrido por la liebre será $\mathrm{LE}=t(20x)$.
Del gráfico:

$$\mathrm{PE}=\mathrm{PL}+\mathrm{LE}$$
$$t(24x)=60\mathrm{S}_\mathrm{L}+t(20x)$$

Como cada salto de liebre S_L mide $5x$, tendremos:

$$24tx=60(5x)+20tx$$
$$4tx=300x$$
$$t=75 \text{ unidades de tiempo}$$

De donde, el número de saltos que deberá dar el perro será $3t=3(75)=225$ saltos.

Forma 2

Sabemos que el perro avanza en 5 saltos lo mismo que la liebre en 8 saltos. Por lo tanto, el salto del perro equivale a $8/5=1.6$ veces el salto de la liebre $=1.6\mathrm{S}_\mathrm{L}$.

Por otro lado, cuando el perro da 3 saltos avanza $3 \times 1.6 = 4.8$ veces el salto de la liebre $= 4.8\mathrm{S_L}$, mientras que la liebre da 4 saltos $= 4\mathrm{S_L}$ y de este modo el perro recorta la ventaja en $4.8\mathrm{S_L} - 4\mathrm{S_L} = 0.8\mathrm{S_L}$.
Si queremos averiguar cuántos saltos debe dar el perro para alcanzar a la liebre, que lo aventaja $60\mathrm{S_L}$, podemos establecer una regla de tres:

El perro da 3 saltos $\rightarrow$ se acerca $0.8\mathrm{S_L}$
El perro dará x saltos $\rightarrow$ se acercará $60\mathrm{S_L}$

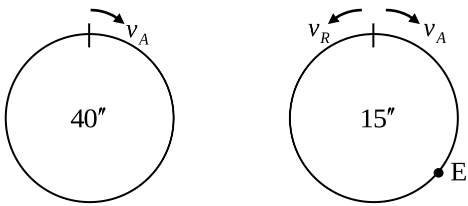
De donde:

$$x = \frac{3(60\mathrm{S_L})}{0.8\mathrm{S_L}}$$
$$x = 225 \text{ saltos}$$

152. Alberto recorre una trayectoria circular en $40''$. Raúl la recorre en sentido contrario y se encuentra con Alberto cada $15''$. ¿En qué tiempo recorre Raúl una vuelta?

Forma 1

Sean v_A y v_R las velocidades de Alberto y Raúl, respectivamente y e, la longitud de la trayectoria circular.



Deducimos que

$$e = v_A(40)$$
$$e = v_A(15) + v_R(15)$$

De donde

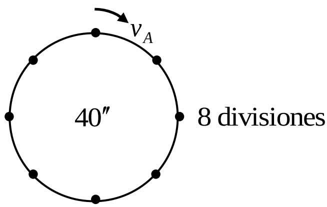
$$\begin{aligned}40v_A &= 15v_A + 15v_R\\ 25v_A &= 15v_R\\ v_R &= \frac{5}{3}v_A\end{aligned}$$

El tiempo que demorará Raúl en recorrer la vuelta será

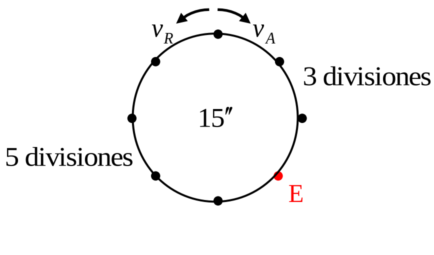
$$\begin{aligned}t &= \frac{e}{v_R}\\ t &= \frac{40v_A}{\frac{5}{3}v_A}\\ t &= 24''\end{aligned}$$

Forma 2

Dividamos el trayecto circular en 8 partes, de modo que Alberto lo recorre en $40''$ a razón de 1 división cada $5''$.



Si cada $15''$ se encuentra con Raúl, Alberto habrá avanzado $15/5 = 3$ divisiones para el encuentro.

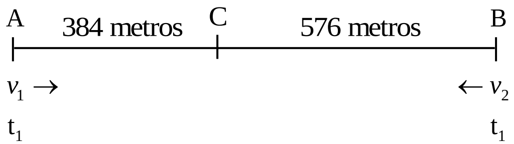


Deducimos que Raúl recorrió 5 divisiones en $15''$ a razón de $15''/5 = 3''$ por división. El recorrido completo de 8 divisiones le tomará a Raúl $8 \times 3 = 24''$.

153. Dos personas que se hallan separadas 960 metros salen simultáneamente en dirección de la otra y se encuentran a 384 metros de uno de los extremos. Si la que tiene mayor velocidad saliera $4'$ antes, el encuentro se produciría justo en la mitad del camino. Encontrar las velocidades.

Forma 1

Consideremos las dos situaciones siguientes:



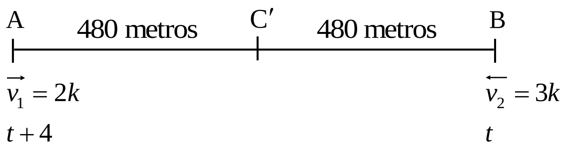
$$e = 384 = v_1 t_1$$
$$e = 576 = v_2 t_1$$

Dividámoslas:

$$\frac{v_1 t_1}{v_2 t_1} = \frac{384}{576}$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$$

De donde:

$$v_1 = 2k$$
$$v_2 = 3k$$



$$e = 480 = 2k(t+4)$$
$$e = 480 = 3k(t)$$

De donde:

$$3kt = 2k(t+4)$$
$$3kt = 2kt + 8k$$
$$kt = 8k$$
$$t = 8'$$

Entonces

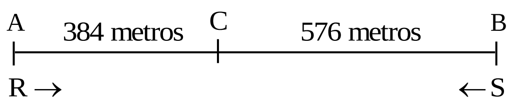
$$480 = 3k(8)$$
$$480 = 24k$$
$$k = 20$$

Finalmente

$$v_1 = 2(20) = 40\,\mathrm{m/minuto}$$
$$v_2 = 3(20) = 60\,\mathrm{m/minuto}$$

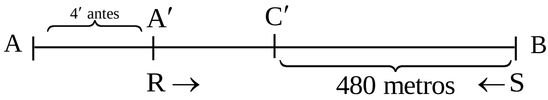
Forma 2

En el primer caso, R y S recorren distintas distancias en el mismo tiempo.



Las distancias recorridas por R y S están en la relación de $384/576 = 2/3$. Las velocidades de R y S deberán estar en la misma relación $2/3$.

En el segundo caso, analicemos las distancias recorridas por R y S después de transcurridos los $4'$ iniciales. Es decir R se encuentra en A' y S en B.



Si se encuentran en el punto medio del camino:

$$\mathrm{C'B} = \frac{960}{2}$$
$$\mathrm{C'B} = 480 \text{ metros}$$

Entonces

$$\frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{C'B}} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{\mathrm{A'C'}}{480} = \frac{2}{3}$$
$$\mathrm{A'C'} = 320 \text{ metros}$$

Significa que R recorrió $\mathrm{AA'} = 480 - 320 = 160 \text{ metros}$ en $4'$.

La velocidad de R será $\dfrac{160 \text{ metros}}{4'} = 40 \text{metros/minuto}$ y la de S será $\dfrac{3}{2}(40) = 60 \text{metros/minuto}$.

154. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{y} = 1 \\[2ex] y + \dfrac{4}{x} = 25 \end{cases}$$

Forma 1

De $x+\dfrac{4}{y}=1 \;\Rightarrow\; xy+4=y \qquad (\alpha)$

De $y+\dfrac{4}{x}=25 \;\Rightarrow\; xy+4=25x \qquad (\beta)$

De (α) y (β) $\quad y=25x$

En (α)

$$x(25x)+4=25x$$

$$25x^2-25x+4=0$$

$$(5x-1)(5x-4)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1=1/5 & \Rightarrow\; y_1=5 \\ x_2=4/5 & \Rightarrow\; y_2=20 \end{cases}$$

Forma 2

Multipliquemos miembro a miembro las ecuaciones dadas

$$x+\frac{4}{y}=1$$

$$y+\frac{4}{x}=25$$

$$\overline{xy+4+4+\frac{16}{xy}=25}$$

$$xy-17+\frac{16}{xy}=0$$

Por xy:

$$(xy)^2-17(xy)+16=0$$

$$(xy-1)(xy-16)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} xy=1 \\ xy=16 \end{cases}$$

Si $xy=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{y}=x,$ en (α):

$$x+\frac{4}{y}=1 \Rightarrow x+4x=1 \Rightarrow 5x=1 \Rightarrow x_1=1/5 \quad \wedge \quad y_1=5$$

Si $xy=16 \Rightarrow \dfrac{1}{y}=\dfrac{x}{16}$, en (α):

$$x+\frac{4}{y}=1 \Rightarrow x+\frac{4x}{16}=1 \Rightarrow \frac{5x}{4}=1 \Rightarrow x_2=4/5 \quad \wedge \quad y_2=20$$

Forma 3

De $x+\dfrac{4}{y}=1 \Rightarrow x=1-\dfrac{4}{y} \qquad (\alpha)$

De $y+\dfrac{4}{x}=25 \Rightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{25-y}{4} \Rightarrow x=\dfrac{4}{25-y} \qquad (\beta)$

Igualándolos:

$$1-\frac{4}{y}=\frac{4}{25-y}$$

Por $y(25-y)$:

$$\begin{aligned} y(25-y)-4(25-y)&=4y \\ 25y-y^2-100+4y&=4y \\ y^2-25y+100&=0 \end{aligned}$$

$$(y-5)(y-20)=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=5 & \Rightarrow x_1=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5} \\ y_2=20 & \Rightarrow x_2=1-\dfrac{4}{20}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

155. Resolver en términos de a y b:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{ab} - \dfrac{y}{b^2} = 1 - a^2 & (1) \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = a + ab^2 & (2) \end{cases}$$

Forma 1

De la primera ecuación (por ab^2)

$$bx - ay = ab^2\left(1 - a^2\right)$$

De la segunda ecuación (por ab)

$$ax + by = ab\left(a + ab^2\right)$$

$$\begin{cases} bx - ay = ab^2 - a^3b^2 & (3) \\ ax + by = a^2b + a^2b^3 & (4) \end{cases}$$

De (3) por b, más (4) por a:

$$\left(a^2 + b^2\right)x = ab^3 + a^3b$$

$$x = \frac{ab\left(a^2 + b^2\right)}{a^2 + b^2}$$

$$x = ab$$

En (1)

$$\frac{ab}{ab} - \frac{y}{b^2} = 1 - a^2$$

$$\frac{y}{b^2} = a^2$$

$$y = a^2b^2$$

Forma 2

$$\begin{cases} \dfrac{x}{ab} - \dfrac{y}{b^2} = 1 - a^2 & (1) \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} = a + ab^2 & (2) \end{cases}$$

De $\dfrac{1}{a}$ por (2), menos (1):

$$\frac{y}{a^2} + \frac{y}{b^2} = b^2 + a^2$$
$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right) y = a^2 + b^2$$
$$y = a^2 b^2$$

En (1):

$$\frac{x}{ab} - \frac{a^2 b^2}{b^2} = 1 - a^2$$
$$\frac{x}{ab} - a^2 = 1 - a^2$$

$$\frac{x}{ab} = 1$$
$$x = ab$$

156. Resolver en términos de a y b:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{a + b - \dfrac{ab}{a+b}}{a - b + \dfrac{ab}{a-b}} & (\alpha) \\ x + y = 64a^3 & (\beta) \end{cases}$$

Forma 1

De (α):

$$\frac{x}{y}=\frac{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}=\frac{\dfrac{(a+b)^2-ab}{a+b}}{\dfrac{(a-b)^2+ab}{a-b}}=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\frac{a-b}{a+b}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$$

$$x=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}y \qquad (\gamma)$$

En (β)

$$\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}y+y=64a^3$$

$$\left(a^3-b^3\right)y+\left(a^3+b^3\right)y=64a^3\left(a^3+b^3\right)$$

$$2a^3y=64a^3\left(a^3+b^3\right)$$

$$y=32\left(a^3+b^3\right)$$

En (γ)

$$x=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\left[32\left(a^3+b^3\right)\right]$$

$$x=32\left(a^3-b^3\right)$$

Forma 2

$$\frac{x}{y}=\frac{a+b-\dfrac{ab}{a+b}}{a-b+\dfrac{ab}{a-b}}$$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{x+y}{y-x}=\frac{a+b-\frac{ab}{a+b}+\left[a-b+\frac{ab}{a-b}\right]}{a-b+\frac{ab}{a-b}-\left[a+b-\frac{ab}{a+b}\right]}$$

$$\frac{x+y}{y-x}=\frac{2a-\frac{ab}{a+b}+\frac{ab}{a-b}}{-2b+\frac{ab}{a-b}+\frac{ab}{a+b}}$$

$$\frac{x+y}{y-x}=\frac{2a\left(a^2-b^2\right)-ab\left(a-b\right)+ab\left(a+b\right)}{-2b\left(a^2-b^2\right)+ab\left(a+b\right)+ab\left(a-b\right)}$$

$$\frac{x+y}{y-x}=\frac{2a^3}{2b^3}$$

Al reemplazar $x+y=64a^3 \qquad (\delta)$

$$\frac{64a^3}{y-x}=\frac{a^3}{b^3} \Rightarrow y-x=64b^3 \qquad (\varepsilon)$$

Al sumar (δ) y (ε)

$$2y=64a^3+64b^3$$

$$y=32a^3+32b^3 \Rightarrow x=32a^3-32b^3$$

Forma 3

De la forma 1

$$\frac{x}{y}=\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$$

Por propiedad de proporciones

$$\frac{x+y}{y}=\frac{a^3-b^3+\left(a^3+b^3\right)}{a^3+b^3}$$

Reemplazando $x+y=64a^3$:

$$\frac{64a^3}{y}=\frac{2a^3}{a^3+b^3}$$
$$\frac{32}{y}=\frac{1}{a^3+b^3}$$
$$y=32\left(a^3+b^3\right)$$

De donde

$$x=64a^3-\left(32a^3+32b^3\right)$$
$$x=32a^3-32b^3$$

157. Resolver el sistema

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{ay+bx}=a\\[2mm] \dfrac{xz}{az+cx}=a\\[2mm] \dfrac{yz}{bz+cy}=a\end{cases}$$

Forma 1

Invirtamos las fracciones

$$\begin{cases} \dfrac{ay+bx}{xy} = \dfrac{1}{a} & \Rightarrow & \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{az+cx}{xz} = \dfrac{1}{a} & \Rightarrow & \dfrac{a}{x} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{bz+cy}{yz} = \dfrac{1}{a} & \Rightarrow & \dfrac{b}{y} + \dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Cambiemos de variables

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = \frac{1}{y}, \quad R = \frac{1}{z}$$

Entonces

$$\begin{cases} aP + & bQ & & = & 1/a & (\alpha) \\ aP + & & cR & = & 1/a & (\beta) \\ & bQ + & cR & = & 1/a & (\gamma) \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro las tres ecuaciones

$$2(aP + bQ + cR) = \frac{3}{a} \qquad (\delta)$$

(γ) en (δ)

$$2\left(aP + \frac{1}{a}\right) = \frac{3}{a}$$

$$aP + \frac{1}{a} = \frac{3}{2a}$$

$$aP = \frac{1}{2a}$$

$$P = \frac{1}{2a^2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2a^2}$$

$$x = 2a^2$$

En (α)

$$a\left(\frac{1}{2a^2}\right)+bQ=\frac{1}{a}$$
$$\frac{1}{2a}+bQ=\frac{1}{a}$$
$$bQ=\frac{1}{2a}$$
$$Q=\frac{1}{2ab}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2ab}$$
$$y=2ab$$

En (β)

$$a\left(\frac{1}{2a^2}\right)+cR=\frac{1}{a}$$
$$\frac{1}{2a}+cR=\frac{1}{a}$$

$$cR=\frac{1}{2a}$$
$$R=\frac{1}{2ac}$$
$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2ac}$$
$$z=2ac$$

Forma 2

A partir del sistema dado:

$$a^2 y + abx = xy \;\Rightarrow\; y = \frac{abx}{x-a^2} \qquad (\alpha)$$

$$a^2 z + acx = xz \;\Rightarrow\; z = \frac{acx}{x-a^2} \qquad (\beta)$$

Si reemplazamos en:

$$abz + acy = yz$$

Obtenemos:

$$ab\left(\frac{acx}{x-a^2}\right) + ac\left(\frac{abx}{x-a^2}\right) = \left(\frac{abx}{x-a^2}\right)\left(\frac{acx}{x-a^2}\right)$$

Entre a^2bc:

$$\frac{x}{x-a^2} + \frac{x}{x-a^2} = \frac{x^2}{\left(x-a^2\right)^2}$$

Por $\left(x-a^2\right)^2$:

$$x\left(x-a^2\right) + x\left(x-a^2\right) = x^2$$

$$x^2 - a^2x + x^2 - a^2x = x^2$$

$$x^2 = 2a^2x$$

Como $x \neq 0,\; y \neq 0,\; z \neq 0$:

$$x = 2a^2$$

En (α)

$$y = \frac{ab\left(2a^2\right)}{2a^2 - a^2} = \frac{2a^3b}{a^2} = 2ab$$

En (β)

$$z=\frac{ac\left(2a^2\right)}{2a^2-a^2}=\frac{2a^3c}{a^2}=2ac$$

158. Resolver el sistema en términos de a, b y c.

$$\begin{aligned}(x+y)-(a+b)&=(a+b)(x-a)(y-b)\\(x+z)-(a+c)&=(a+c)(x-a)(z-c)\\(y+z)-(b+c)&=(b+c)(y-b)(z-c)\end{aligned}$$

Reescribamos el primer miembro de cada ecuación

$$\begin{aligned}(x-a)+(y-b)&=(a+b)(x-a)(y-b)\\(x-a)+(z-c)&=(a+c)(x-a)(z-c)\\(y-b)+(z-c)&=(b+c)(y-b)(z-c)\end{aligned}$$

Al dividir la primera ecuación entre $(x-a)(y-b)$:

$$\frac{1}{y-b}+\frac{1}{x-a}=a+b \qquad (\alpha)$$

Análogamente, al dividir la segunda ecuación entre $(x-a)(z-c)$:

$$\frac{1}{z-c}+\frac{1}{x-a}=a+c \qquad (\beta)$$

Y la tercera entre $(y-b)(z-c)$:

$$\frac{1}{z-c}+\frac{1}{y-b}=b+c \qquad (\gamma)$$

Al sumar miembro a miembro $(\alpha),(\beta)$ y (γ):

$$\frac{2}{x-a}+\frac{2}{y-b}+\frac{2}{z-c}=2a+2b+2c \;\Rightarrow\; \frac{1}{x-a}+\underbrace{\frac{1}{y-b}+\frac{1}{z-c}}_{b+c \text{ por } (\gamma)}=a+b+c$$

De donde:

$$\frac{1}{x-a}=a$$
$$x-a=\frac{1}{a}$$
$$x=a+\frac{1}{a}$$

Análogamente, se obtiene

$$y=b+\frac{1}{b}$$
$$z=c+\frac{1}{c}$$

159. La suma de dos números es c y el producto de los mismos es d^2. Si la suma de los cubos de dichos números es al producto de la suma por el producto de los mismos como 1 es a 3, encontrar el valor de c/d.

Sean x e y los números.

$$\begin{cases} x+y=c \\ xy=d^2 \end{cases}$$

Además:

$$\frac{x^3+y^3}{(x+y)(xy)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(x+y)(xy)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{c^3-3cd^2}{cd^2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{c^3}{cd^2}-\frac{3cd^2}{cd^2}=\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2-3=\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2=\frac{10}{3}$$

$$\frac{c}{d}=\pm\sqrt{\frac{10}{3}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{3}$$

160. El precio de cada bolígrafo es b soles y el de cada cuaderno, c soles. Si se adquieren bolígrafos y cuadernos por p soles, y se cumple que b y c están en la misma relación que los números de bolígrafos y cuadernos, respectivamente, ¿cuántos bolígrafos se adquirieron en términos de b, c y p?

Sean x e y el número de bolígrafos y de cuadernos, respectivamente, que se adquirieron. Entonces:

$$bx+cy=p \qquad (\alpha)$$

Además

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{c} \qquad (\beta)$$

De (β)

$$y=\frac{c}{b}x$$

En (α)

$$bx+c\left[\frac{c}{b}x\right]=p$$
$$x\left[b+\frac{c^2}{b}\right]=p$$
$$x=\frac{p}{b+\frac{c^2}{b}}$$
$$x=\frac{pb}{b^2+c^2}$$

Forma 2

Si se adquirieron x bolígrafos e y cuadernos

$$bx+cy=p$$

Por otro lado

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{c}=k$$

Entonces

$$\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{b}{c}\right)=(k)(k)$$
$$\frac{bx}{cy}=\frac{k^2}{1}$$

Por propiedad de proporciones

$$\frac{bx+cy}{bx}=\frac{k^2+1}{k^2}$$

Reemplacemos

$$\frac{p}{bx}=\frac{k^2+1}{k^2}$$

De donde

$$x=\frac{1}{b}\frac{pk^2}{k^2+1}$$

Reemplacemos k

$$x=\frac{1}{b}\frac{p\left(\frac{b}{c}\right)^2}{\left(\frac{b}{c}\right)^2+1}=\frac{1}{b}\frac{pb^2}{b^2+c^2}$$

$$x=\frac{pb}{b^2+c^2}$$

161. Un asunto fue sometido a la votación de 600 personas y se perdió. Habiendo votado de nuevo las mismas personas sobre el mismo asunto, fue ganado el caso por el doble de votos por el que había sido perdido y la mayoría fue con respecto a la anterior como 8 es a 7. ¿Cuántas personas cambiaron de opinión?

Forma 1

Votación	Número de personas	
	Sí	No
Primera	x	y
Segunda	$2z$	z

Donde $y>x.$ Entonces

$$2z + z = 600$$
$$z = 200$$

En la segunda votación $2(200) = 400$ personas votaron por el sí y 200 por el no.

Según los datos

$$\frac{400}{y} = \frac{8}{7}$$
$$y = 350$$

Cambiaron de opinión $350 - 200 = 150$ personas.

Forma 2

Asumamos que en la segunda votación fueron $8k$ personas las que votaron por el sí y $\frac{8k}{2} = 4k$ las que votaron por el no. Según los datos, en la primera votación fueron $7k$ personas las que votaron por el no. Cambiaron de opinión $7k - 4k = 3k$ personas (pasaron del no al sí). Entonces

$$8k + 4k = 600$$
$$k = 50$$

Cambiaron de opinión $3k = 3(50) = 150$ personas.

162. Álvaro y Diego juntan sus propinas para comprarse un tambor y les sobra S/.600. Si Álvaro quisiera comprarlo solo, le faltarían S/.800. Si Diego quisiera comprarlo solo, le faltaría una cantidad igual a la que tiene. ¿Cuánto cuesta el tambor?

Forma 1

Sean x e y las propinas (soles) de Álvaro y Diego, respectivamente, y T el costo del tambor. De acuerdo con los datos del problema:

$$x + y = T + 600 \qquad (\alpha)$$
$$x = T - 800 \qquad (\beta)$$
$$y = T - y \qquad (\gamma)$$

De (γ)

$$2y = T$$
$$y = \frac{T}{2} \qquad (\delta)$$

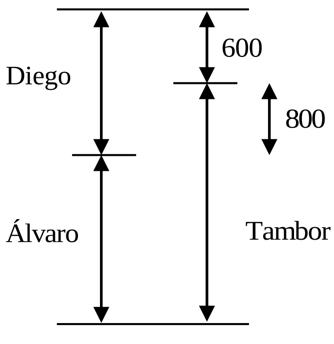
(β) y (δ) en (α):

$$T - 800 + \frac{T}{2} = T + 600$$
$$\frac{T}{2} = 1{,}400$$
$$T = 2{,}800 \text{ soles}$$

El tambor cuesta S/.2,800.

Forma 2

Consideremos el siguiente gráfico:



Diego tendrá $800+600=1,400$ soles. Como para comprar el tambor le falta una cantidad igual a la que tiene, aquel costará $1,400+1,400=2,800$ soles.

163. Tenía cierta cantidad de dinero y por la mañana gasté la tercera parte de lo que no gasté. Por la tarde no gasté el doble de lo que gasté. Por la noche no gasté los $2/5$ de lo que gasté. ¿Qué fracción de lo que tuve gasté en total?

Sea $4x$ la cantidad inicial de dinero. De acuerdo con los datos del problema:

	Gasté	No gasté	Quedó
Mañana	x	$3x$	$4x-x=3x$
Tarde	x	$2x$	$3x-x=2x$
Noche	y	$2y/5$	$2x-y$

Si después de la tarde quedó $2x$ y en la noche gastó y, queda $2x-y$ que equivale a lo que no gastó:

$$2x-y=\frac{2}{5}y$$
$$10x-5y=2y$$
$$y=\frac{10}{7}x$$

En total gastó: $x+x+y=2x+y=2x+\frac{10}{7}x=\frac{24}{7}x,$ que representa la fracción $\frac{24x/7}{4x}=\frac{24}{28}=\frac{6}{7}$ de lo que inicialmente tuvo.

164. Compré cierto número de libros a 6 por 7 pesos y otro número igual a 17 por 19 pesos. Los vendí todos a 3 por 4 pesos, gané 117 pesos. ¿Cuántos libros compré en total?

Forma 1

Sean x grupos de 6 libros e y grupos de 17 libros comprados. El costo total será $7x+19y$ pesos y el número total de libros será $6x+17y$.

Si todos los libros son vendidos a 3 por 4 pesos, el precio de venta unitario será $\dfrac{4\text{ pesos}}{3\text{ libros}}=\dfrac{4}{3}\dfrac{\text{pesos}}{\text{libro}}$ y la recaudación total será $(6x+17y)\dfrac{4}{3}$ pesos.
Si la utilidad fue 117 pesos, tendremos:

$$(6x+17y)\frac{4}{3}-(7x+19y)=117$$

Por 3

$$\begin{aligned}24x+68y-21x-57y&=351\\ 3x+11y&=351 \qquad (\alpha)\end{aligned}$$

Como el número de libros en cada grupo es el mismo, se cumplirá que:

$$6x=17y \qquad (\beta)$$

De (α)

$$6x+22y=702 \qquad (\gamma)$$

(β) en (γ):

$$\begin{aligned}17y+22y&=702\\ 39y&=702\\ y&=18 \;\Rightarrow\; x=51\end{aligned}$$

El número total de libros comprados será $6(51)+17(18)=612$.

Forma 2

Tenemos:

$$\begin{cases}\ \ 6\text{ libros A cuestan }\ 7\text{ pesos}\\ 17\text{ libros B cuestan }19\text{ pesos}\end{cases}$$

O mejor, (por 17 y por 6):

$$\begin{cases} \text{102 libros A cuestan 119 pesos} \\ \text{102 libros B cuestan 114 pesos} \end{cases}$$

Es decir, 204 libros cuestan 233 pesos en total.
Si se venden 3 libros por 4 pesos, la recaudación en los 204 libros será $204 \times \frac{4}{3} = 272$ pesos.
En cada 204 libros negociados, se gana $272 - 233 = 39$ pesos.
Como se quiere ganar 117 pesos, se deberán negociar $117/39 = 3$ grupos de 204 libros. Es decir, se compraron $3 \times 204 = 612$ libros.

165. El consumo de café es el 20% del consumo de té. Si se consumiera $a\%$ más de té y $b\%$ más de café, el aumento del consumo total sería $7c\%$, pero si se consumiera $b\%$ más de té y $a\%$ más de café, el aumento sería $3c\%$. Determine la relación a/b.

Forma 1
Sea $5x$ el consumo de té y x, el consumo de café.

De acuerdo con los datos tendríamos:

$$\frac{100+a}{100}(5x) + \frac{100+b}{100}(x) = \left[\frac{100+7c}{100}\right](5x+x)$$

$$\left(1+\frac{a}{100}\right)(5x) + \left(1+\frac{b}{100}\right)x = \left(1+\frac{7c}{100}\right)(6x)$$

$$5x + \frac{5ax}{100} + x + \frac{bx}{100} = 6x + \frac{42cx}{100}$$

Por 100:

$$5ax + bx = 42cx$$

$$5a + b = 42c \qquad (\alpha)$$

Asimismo:

$$\frac{100+b}{100}(5x)+\frac{100+a}{100}(x)=\left[\frac{100+3c}{100}\right](5x+x)$$
$$\left(1+\frac{b}{100}\right)(5x)+\left(1+\frac{a}{100}\right)(x)=\left(1+\frac{3c}{100}\right)(6x)$$
$$5x+\frac{5bx}{100}+x+\frac{ax}{100}=6c+\frac{18cx}{100}$$

Por 100:

$$5bx+ax=18cx$$
$$5b+a=18c \qquad (\beta)$$

De (α):

$$c=\frac{5a+b}{42}$$

De (β):

$$c=\frac{5b+a}{18}$$

Igualemos:

$$\frac{5a+b}{42}=\frac{5b+a}{18}$$
$$3(5a+b)=7(5b+a)$$
$$15a+3b=35b+7a$$
$$8a=32b$$
$$\frac{a}{b}=\frac{32}{8}$$
$$\frac{a}{b}=4$$

Forma 2

Sea $5x$ el consumo de té y $x,$ el consumo de café, con un consumo total de $6x.$

En el primer caso, el aumento de $5x$ en $a\%$ equivale a considerar un aumento de x en $5a\%,$ mientras que el aumento de $6x$ en $7c\%$ significa un aumento de x en $6\left(7c\%\right)=42c\%.$

Por lo tanto, al aumentar x en $5a\%$ (té) y x en $b\%$ (café), x aumentará en $42c\%$ (té y café):

$$5a\%+b\%=42c\%$$

$$5a+b=42c \qquad (\alpha')$$

En el segundo caso, el aumento de $5x$ en $b\%$ implica un aumento de x en $5b\%,$ mientras que el aumento de $6x$ en $3c\%$ corresponde a un aumento de x en $6\left(3c\%\right)=18c\%.$

Entonces, al aumentar x en $5b\%$ (té) y x en $a\%$ (café), x aumentará en $18c\%$ (té y café):

$$5b\%+a\%=18c\%$$

$$5b+a=18c \qquad (\beta')$$

$(\alpha')+(\beta')$:

$$6a+6b=60c$$

Por 0.7:

$$4.2a+4.2b=42c \qquad (\gamma')$$

De (α') y (γ'):

$$5a+b=4.2a+4.2b$$
$$0.8a=3.2b$$
$$\frac{a}{b}=\frac{3.2}{0.8}$$
$$\frac{a}{b}=4$$

166. Un fabricante elabora tres tipos de productos, A, B y C. Las utilidades que obtiene por cada unidad vendida de A, B y C, son \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos ascienden a \$17,000 por año y los costos de fabricación de cada unidad de A, B y C, son \$4, \$5 y \$7, respectivamente. Para el siguiente año se deberá fabricar y vender un total de 11,000 unidades de los tres productos y se deberá obtener una utilidad total del 31.25%. Si los costos totales deben ser \$80,000, ¿cuántas unidades del producto A se deben fabricar el próximo año?

Sean $x,\ y,\ z,$ las cantidades que se deben producir de los productos A, B y C, respectivamente.
La utilidad total será $31.25\%\times 80,000=25,000$ dólares, entonces:

$$x+y+z=11,000 \qquad (\alpha)$$
$$1x+2y+3z=25,000 \qquad (\beta)$$
$$4x+5y+7z+17,000=80,000 \ \Rightarrow\ 4x+5y+7z=63,000 \qquad (\gamma)$$

$(\alpha)+(\beta)$:

$$2x+3y+4z=36,000 \ \Rightarrow\ 3y+4z=36,000-2x$$

$(\alpha)+(\gamma)$:

$$5x+6y+8z=74,000 \ \Rightarrow\ 6y+8z=74,000-5x$$

Entonces:

$$74,000 - 5x = 2(36,000 - 2x)$$
$$74,000 - 5x = 72,000 - 4x$$
$$x = 2,000$$

167. Se compran 3 lotes de sillas por un total de $5,880. El precio de cada silla en el primer lote es $2 más que en el segundo y $4 menos que en el tercero. En el primer lote hay 6 sillas más que en el segundo y 5 menos que en el tercero. Si en el primer lote se gasta $300 más que en el segundo, encontrar las cantidades de sillas en cada lote y el precio unitario respectivo.

Sean x e y, el precio de cada silla (dólares) y la cantidad de sillas en el primer lote, respectivamente.
De acuerdo con el enunciado, elaboremos la siguiente tabla:

Lote	Precio unitario (dólares)	Cantidad de sillas
1	x	y
2	$x-2$	$y-6$
3	$x+4$	$y+5$

Como el gasto en el lote 1 es igual al gasto en el lote 2 más 300 dólares:

$$xy = (x-2)(y-6) + 300$$
$$xy = xy - 6x - 2y + 312$$
$$6x + 2y = 312$$
$$3x + y = 156$$
$$y = 156 - 3x \qquad (\alpha)$$

Como el gasto total es 5,880 dólares:

$$xy + (x-2)(y-6) + (x+4)(y+5) = 5,880$$
$$3xy - x + 2y + 32 = 5,880$$
$$3xy - x + 2y = 5,848 \qquad (\beta)$$

De (α) en (β):

$$3x(156-3x)-x+2(156-3x)=5,848$$

$$468x-9x^2-x+312-6x=5,848$$

$$9x^2-461x+5,536=0$$

$$x=\frac{461\pm\sqrt{461^2-4(9)(5,536)}}{2(9)}$$

$$x=\frac{461\pm115}{18}$$

$$x=\begin{cases}32 & \Rightarrow\ y=60\\ 19.22 & \Rightarrow\ y=98.34\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

$$x=32 \text{ e } y=60$$

La respuesta es:

Lote	Precio unitario (dólares)	Cantidad de sillas
1	32	60
2	30	54
3	36	65

168. En vista del incumplimiento de un agente vendedor, dos comerciantes de maletines deciden ir a comprar directamente al mayorista, llevando suficiente dinero para comprar 50 y 30 maletines, respectivamente. En el mayorista se dan con la sorpresa de que por la compra por docenas existe un significativo descuento, con lo cual el primero compra 5 docenas y le sobra 90 soles, en cambio el segundo compra 4 docenas, pero debe abonar además 108 soles. Si anteriormente su ganancia era del 15%, se pide calcular cuál será la ganancia de cada comerciante al vender todo lo comprado al precio fijado anteriormente.

Forma 1

Sea x el costo de cada maletín si lo adquieren del agente vendedor e y, el costo de cada maletín si lo adquieren del mayorista.

El primer comerciante debió llevar $50x$ soles para pagarle al agente vendedor; en cambio, si quisiera comprar directamente del mayorista debiera llevar $60y$ soles. Como se ahorraría 90 soles:

$$50x-60y=90$$
$$5x-6y=9 \qquad (\alpha)$$

El segundo comerciante debió llevar $30x$ soles para pagarle al agente vendedor; en cambio si quisiera comprar directamente del mayorista debiera llevar $48y$ soles y 108 soles más, es decir:

$$48y=30x+108$$
$$30x-48y=-108$$
$$5x-8y=-18 \qquad (\beta)$$

De $(\alpha)-(\beta)$:

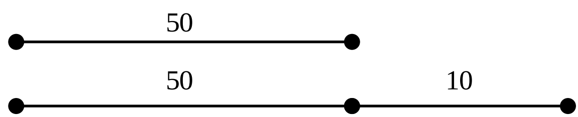
$$2y=27$$
$$y=13.5 \;\Rightarrow\; x=18$$

Si la ganancia es el 15% del costo, entonces el precio de venta es $1.15\times18=20.7$ soles. La ganancia real por cada maletín será $20.7-13.5=7.2$ soles. Los comerciantes ganarán $60\times7.2=432$ soles y $48\times7.2=345.6$ soles.

Forma 2

Sea C el costo de cada maletín, si es adquirido del mayorista y Δ el ahorro en cada maletín.

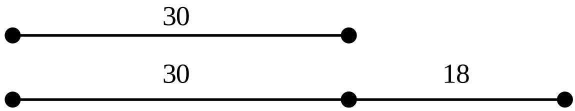
Primer comerciante



En la compra de los 50 primeros maletines ahorra $50\Delta.$ Esta cantidad servirá para comprar 10 maletines adicionales del mayorista $10C$ y aún así sobrarán 90 soles, entonces:

$$50\Delta = 10C + 90$$

Segundo comerciante



En la compra de los 30 primeros maletines ahorra $30\Delta.$ Esta cantidad servirá para comprar 18 maletines adicionales del mayorista $18C$ si se abonase 108 soles más, entonces:

$$30\Delta + 108 = 18C$$

$$\begin{cases} 50\Delta = 10C + 90 & (\alpha) \\ 30\Delta + 108 = 18C & (\beta) \end{cases}$$

$0.6(\alpha)$:

$$30\Delta = 6C + 54$$

Al igualar 30Δ:

$$\begin{aligned} 6C + 54 &= 18C - 108 \\ 12C &= 162 \\ C &= 13.5 \;\Rightarrow\; \Delta = 4.5 \end{aligned}$$

El costo inicial era $C + \Delta = 13.5 + 4.5 = 18$ soles. El precio de venta, $1.15 \times 18 = 20.7$ soles. La ganancia en cada maletín, $20.7 - 13.5 = 7.2$ soles. Los comerciantes ganarán $60 \times 7.2 = 432$ y $48 \times 7.2 = 345.6$ soles.

169. Si aumentan el precio de los libros en S/.4, dejaría de adquirir 4. Si a continuación me prestaran S/.80, adquiriría tantos libros como al principio. ¿Cuál es la suma de dinero con la que cuento para comprar libros?

Forma 1

Sean $x,$ el precio original de cada libro, $y,$ el número de libros adquiridos inicialmente y, $xy,$ la suma de dinero con la que se cuenta.
Entonces, el nuevo precio de cada libro es $x+4$ y la nueva cantidad de libros adquiridos, $y-4.$ De donde:

$$xy=(x+4)(y-4) \qquad (1)$$

Además, al nuevo precio por libro $x+4,$ el número de libros adquiridos con 80 soles más es $y,$ entonces:

$$\begin{aligned}(x+4)y&=xy+80\\ y&=20 \qquad (2)\end{aligned}$$

De (2) en (1)

$$\begin{aligned}20x&=(x+4)(16)\\ x&=16\end{aligned}$$

Se tenía $xy=16(20)=320$ soles al inicio.

Forma 2

Sea $S,$ la suma inicial de dinero en soles, $x,$ el precio inicial de cada libro, entonces $\dfrac{S}{x}$ es el número de libros adquiridos, $x+4$ es el precio aumentado de cada libro y $\dfrac{S}{x+4}$ es el número de libros adquiridos al nuevo precio.

Entonces:

$$\frac{S}{x+4}=\frac{S}{x}-4 \qquad (1)$$

Si me prestan 80 soles, tendría $S+80$ soles y $\frac{S+80}{x+4}$ sería el número de libros adquiridos con el préstamo. Por lo tanto:

$$\frac{S+80}{x+4}=\frac{S}{x} \qquad (2)$$

Que equivale a:

$$\frac{S}{x+4}+\frac{80}{x+4}=\frac{S}{x} \qquad (3)$$

De $(3)-(1)$

$$\frac{80}{x+4}=4$$
$$x=16$$

De donde

$$\frac{S}{20}=\frac{S}{16}-4$$
$$4S=5S-320$$
$$S=320 \text{ soles}$$

Forma 3

Al precio unitario de p soles adquiero x libros.
Al precio unitario de $p+4$ soles adquiero $x-4$ libros.

Al precio unitario de $p+4$ soles, con 80 soles adquiero 4 libros.

Entonces al precio unitario de $p+4$ soles, con 20 soles adquiero 1 libro, luego 1 libro cuesta $20-4=16$ soles.

Al aumentar el precio por libro de 16 a 20 soles, dejo de adquirir 4 libros que costaban $4\times 16=64$ soles en total.

Esta suma equivale a lo que gastaría adicionalmente al adquirir x libros que cuestan 4 soles más cada uno. Entonces

$$64=4x$$
$$x=16$$

Es el número de libros que adquirí con el precio aumentado, por lo tanto compré $16+4=20$ libros inicialmente, entonces inicialmente tenía

$S=20\times 16=320$ soles

170. Un estante de libros tiene capacidad para 50 libros de economía, 20 de contabilidad y 20 de administración, o para 40 de economía, 40 de contabilidad y 12 de administración, o para 20 de economía, 30 de contabilidad y 26 de administración. ¿Cuántos libros de economía entrarían en el estante?

Sean $E,\ C \wedge A,$ los anchos de cada libro de economía, contabilidad y administración, respectivamente.

El ancho L del estante es

$$50E+20C+20A=L \qquad (1)$$
$$40E+40C+12A=L \qquad (2)$$
$$20E+30C+26A=L \qquad (3)$$

Entonces, de (1) y (2):

$$50E+20C+20A=40E+40C+12A$$
$$10E+8A=20C \qquad (4)$$

De (2) y (3):

$$\begin{aligned}40E+40C+12A&=20E+30C+26A\\20E+10C&=14A\\10E+5C&=7A \qquad (5)\end{aligned}$$

De $(4)-(5)$

$$\begin{aligned}8A-5C&=20C-7A\\15A&=25C\\C&=\frac{3}{5}A \qquad (6)\end{aligned}$$

De $(4)+4\times(5)$:

$$\begin{aligned}10E+8A+4(10E+5C)&=20C+4(7A)\\50E+8A+20C&=20C+28A\\50E&=20A\\A&=\frac{5}{2}E \qquad (7)\end{aligned}$$

De (7) en (6):

$$C=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}E\right)=\frac{3}{2}E \qquad (8)$$

De (7) y (8) en (1):

$$\begin{aligned}L&=50E+20C+20A\\L&=50E+20\left(\frac{3}{2}E\right)+20\left(\frac{5}{2}E\right)\\L&=50E+30E+50E\\L&=130E\end{aligned}$$

Por lo tanto, caben 130 libros de economía.

171. Cuatro hombres y una mujer realizan un trabajo que exige esfuerzo físico en 24 días. Si se aumentaran un hombre y una mujer, el mismo trabajo lo realizarían en 18 días. ¿En cuántos días harán el trabajo los cuatro hombres solos?

Forma 1

Sean x e y, el número de días que tardaría un hombre y una mujer, respectivamente, en concluir el trabajo.

En un día, un hombre avanzaría $\dfrac{1}{x}$ de la obra y una mujer, $\dfrac{1}{y}$ de la obra.

4 hombres y 1 mujer avanzarían $4\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\left(\dfrac{1}{y}\right)$ de la obra en 1 día.

Como ellos demoran 24 días, en un día avanzarán $\dfrac{1}{24}$ de la obra.

Entonces:

$$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24} \qquad (\alpha)$$

Además:

$$\frac{5}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{18} \qquad (\beta)$$

$2(\alpha)-(\beta)$:

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{18}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{3-2}{36}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{36}$$

$$x=108 \text{ días}$$

Los 4 hombres avanzarían $4\left(\frac{1}{108}\right)=\frac{1}{27}$ de la obra en 1 día; por lo tanto, demorarían 27 días en concluir el trabajo.

Forma 2

Sea la eficiencia de la mujer como k y la del hombre como 1.

Trabajadores	Tiempo
$4k+1(1)$	24
$5k+2(1)$	18

Como el tiempo que requieren para realizar la obra varía en forma inversamente proporcional al número de trabajadores:

$$\frac{4k+1}{5k+2}=\frac{18}{24}$$
$$96k+24=90k+36$$
$$6k=12$$
$$k=2$$

Entonces, el tiempo que demorarían los cuatro hombres sería t:

$$\frac{4(2)+1}{4(2)}=\frac{t}{24}$$
$$8t=9\times 24$$
$$t=27 \text{ días}$$

Forma 3

En 1 día, 5 hombres y 2 mujeres avanzan $\frac{1}{18}=\frac{4}{72}$ $\quad(\alpha)$

En 1 día, 4 hombres y 1 mujer avanzan $\frac{1}{24}=\frac{3}{72}$ $\quad(\beta)$

Por comparación (diferencia) de (α) y (β):

En 1 día, 1 hombre y 1 mujer avanzan $\frac{1}{72}$ (γ)

Por comparación (diferencia) de (β) y (γ):

En 1 día, 3 hombres avanzan $\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$

En 1 día, 1 hombre avanza $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{108}$

En 1 día, 4 hombres avanzan $\frac{4}{108}=\frac{1}{27}$

Por lo tanto, 4 hombres harán la obra en 27 días.

Forma 4

Asumimos que la obra consiste en remover 144 m^3 de tierra (144 es el MCM de $24=2^3\times 3$ y de $18=2\times 3^2$)

4 hombres y 1 mujer removerían $\frac{144}{24}=6\ \mathrm{m}^3$ al día.

5 hombres y 2 mujeres removerían $\frac{144}{18}=8\ \mathrm{m}^3$ al día.

Por comparación (diferencia):

1 hombre y 1 mujer removerían $2\ \mathrm{m}^3$ al día.

Por comparación (diferencia):

3 hombres removerían $4\ \mathrm{m}^3$ al día.

1 hombre removería $\frac{4}{3}\ \mathrm{m}^3$ al día.

4 hombres removerían $\frac{16}{3}$ m^3 al día.

Por lo tanto, 4 hombres harían la obra en $\frac{144}{16/3}=\frac{432}{16}=27$ días.

172. Dos carpinteros A y B pueden completar un pedido de sillas trabajando juntos durante 15 días. Si A trabaja solo durante 11 días, B terminaría el pedido (también solo) en 18 días. Si B trabajara solo durante 12 días, ¿en qué tiempo completaría A el pedido de sillas?

Forma 1

Sean x e y los números de días que requieren A y B, respectivamente, para completar el pedido si trabajasen solos.
En cada día, A haría $\frac{1}{x}$ del pedido y B, $\frac{1}{y}$.
Si en 15 días, A y B trabajando juntos completan el pedido:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15} \qquad (\alpha)$$

Si A trabajara solo durante 11 días y B trabajara solo durante 18 días:

$$11\left(\frac{1}{x}\right)+18\left(\frac{1}{y}\right)=1 \qquad (\beta)$$

De (α)

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{15}-\frac{1}{x}$$

En (β)

$$11\left(\frac{1}{x}\right)+18\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{x}\right)=1$$
$$\frac{11}{x}-\frac{18}{x}=1-\frac{18}{15}$$
$$-\frac{7}{x}=-\frac{3}{15}$$
$$\frac{7}{x}=\frac{1}{5}$$
$$x=35 \text{ días}$$

Entonces

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{15}-\frac{1}{35}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{7-3}{105}$$
$$\frac{1}{y}=\frac{4}{105}$$
$$y=\frac{105}{4} \text{ días}$$

Si B trabajara solo durante 12 días, avanzaría $12\left(\frac{4}{105}\right)=\frac{16}{35}$ del pedido.

Faltaría por hacerse $1-\frac{16}{35}=\frac{19}{35}$ del pedido.

Como A avanza $\frac{1}{35}$ del pedido en cada día, requerirá trabajar $\frac{19/35}{1/35}=19$ días.

Forma 2

Comparemos las situaciones siguientes:

$$\text{A en 15 días} + \text{B en 15 días} \Rightarrow 1 \text{ pedido}$$
$$\text{A en 11 días} + \text{B en 18 días} \Rightarrow 1 \text{ pedido}$$

De donde, lo que A avanza en $15-11=4$ días, B lo realiza en $18-15=3$ días.

$$\begin{aligned}\text{A en 15 días} + \text{B en 15 días} &\Rightarrow 1\text{ pedido}\\ \text{A en }(15{+}4)\text{ días} + \text{B en }(15{-}3)\text{ días} &\Rightarrow 1\text{ pedido}\end{aligned}$$

Es decir, si B trabajara solo durante 12 días, A tendría que trabajar $15+4=19$ días para completar el pedido.

173. Un padre y un hijo pintan una cerca en $2\frac{2}{9}$ días. En la semana siguiente pintaron otra cerca igual, trabajando primero el padre solo durante 3 días y continuando el hijo, también solo, durante $1\frac{1}{4}$ días. ¿Cuánto tardará cada uno en pintar dicha cerca?

Forma 1

Si el padre y el hijo demoran x e y días en pintar la cerca, en cada día avanzarán $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ de la cerca, respectivamente.

Como juntos la terminan de pintar en $2\frac{2}{9}=\frac{20}{9}$ días, en cada día avanzarán $\frac{1}{20/9}=\frac{9}{20}$ de la cerca.

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{9}{20}\\ \frac{1}{y}&=\frac{9}{20}-\frac{1}{x} \qquad (\alpha)\end{aligned}$$

Además:

$$3\left(\frac{1}{x}\right)+1\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{y}\right)=1$$

$$\frac{3}{x}+\frac{5}{4y}=1 \qquad (\beta)$$

De (α) en (β):

$$\frac{3}{x}+\frac{5}{4}\left(\frac{9}{20}-\frac{1}{x}\right)=1$$

$$\frac{3}{x}+\frac{9}{16}-\frac{5}{4x}=1$$

Por $16x$:

$$48+9x-20=16x$$

$$7x=28$$

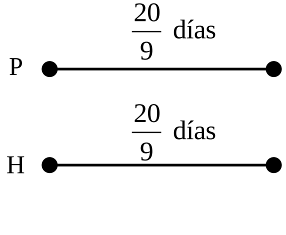
$$x=4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{y}=\frac{9}{20}-\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

El padre demorará 4 días y el hijo, 5 días.

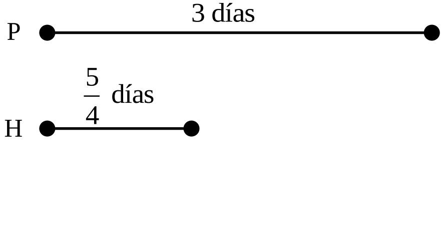
Forma 2

Al comparar:

A:



y B:



se concluye que el padre trabajó $3-\frac{20}{9}=\frac{7}{9}$ días más en el segundo caso mientras que el hijo trabajó $\frac{20}{9}-\frac{5}{4}=\frac{35}{36}$ días menos en B que en A.

Ello significa que lo que avanza el padre en $\frac{7}{9}=\frac{28}{36}$ días equivale a lo que avanza el hijo en $\frac{35}{36}$ días.

Si x días demora el padre en pintar la cerca e y días demora el hijo, se tendrá que:

$$\frac{x}{28/36}=\frac{y}{35/36}$$
$$\frac{x}{28}=\frac{y}{35}$$
$$\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$$

Como $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{20}$, al multiplicar por x:

$$1+\frac{x}{y}=\frac{9}{20}x$$
$$1+\frac{4}{5}=\frac{9}{20}x$$
$$\frac{9}{5}=\frac{9}{20}x$$
$$x=4 \text{ días } \Rightarrow \; y=5 \text{ días}$$

174. Entre tres personas pueden hacer una obra en $96/17$ horas. Si la más lenta trabaja sola durante 4 horas, las dos restantes tendrían que trabajar juntas durante 6 horas para concluir la obra. Si la más rápida trabaja sola

durante 3 horas, las dos restantes tendrían que trabajar juntas durante 8 horas para concluir la obra. ¿Cuánto tarda cada persona trabajando sola para hacer dicha obra?

Sean x, y, z, el número de horas que tardan A, B y C en hacer la obra, respectivamente.
Si $x > y > z$, entonces A es quien trabaja más lento y C, quien trabaja más rápido.
Si juntas demoran $96/17$, entonces en una hora avanzarán $17/96$ de la obra.
En una hora A avanza $\frac{1}{x}$ de la obra; B, $\frac{1}{y}$ y C, $\frac{1}{z}$.
Entonces:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{17}{96} \qquad (\alpha)$$

Además, de acuerdo con los datos:

$$4\left(\frac{1}{x}\right)+6\left(\frac{1}{y}\right)+6\left(\frac{1}{z}\right)=1 \qquad (\beta)$$

y

$$8\left(\frac{1}{x}\right)+8\left(\frac{1}{y}\right)+3\left(\frac{1}{z}\right)=1 \qquad (\gamma)$$

Cambiemos de variables:

$$\frac{1}{x}=p,\ \ \frac{1}{y}=q,\ \ \frac{1}{z}=r$$

El sistema será:

$$\begin{cases} p+q+r=\dfrac{17}{96} & (\alpha) \\ 4p+6q+6r=1 & (\beta) \\ 8p+8q+3r=1 & (\gamma) \end{cases}$$

De (β):

$$q+r=\frac{1-4p}{6} \qquad (\delta)$$

En (α):

$$\begin{aligned} p+(q+r)&=\frac{17}{96} \\ p+\frac{1-4p}{6}&=\frac{17}{96} \\ 96p+16(1-4p)&=17 \\ 96p+16-64p&=17 \\ 32p&=1 \\ p&=\frac{1}{32}=\frac{1}{x} \;\Rightarrow\; x=32 \text{ horas} \end{aligned}$$

De (γ):

$$p+q=\frac{1-3r}{8}$$

En (α):

$$\begin{aligned}(p+q)+r &= \frac{17}{96}\\ \frac{1-3r}{8}+r &= \frac{17}{96}\\ 12(1-3r)+96r &= 17\\ 12-36r+96r &= 17\\ 60r &= 5\\ r &= \frac{1}{12}=\frac{1}{z} \;\Rightarrow\; z=12 \text{ horas}\end{aligned}$$

En (α):

$$\frac{1}{32}+q+\frac{1}{12}=\frac{17}{96}$$

Por 96:

$$\begin{aligned}3+96q+8 &= 17\\ 96q &= 6\\ q &= \frac{1}{16}=\frac{1}{y} \;\Rightarrow\; y=16 \text{ horas}\end{aligned}$$

175. Se compraron 7 cajas de disquetes A y 4 cajas de disquetes B por \$564. ¿Cuánto cuesta cada caja de disquetes B si se sabe que se ahorraría \$62 si se intercambiasen los números de cajas, y se cobrase \$10 más en cada caja de disquetes B y \$15 menos en cada caja de disquetes A?

Forma 1

Sean x e y los precios de una caja de disquetes A y B, respectivamente. De acuerdo con el enunciado tendremos:

$$\begin{cases} 7x+4y=564 \\ 4(x-15)+7(y+10)=564-62 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} 7x + 4y = 564 \\ 4x + 7y = 492 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} 28x + 16y = 2256 \\ 28x + 49y = 3444 \end{cases}$$

Restándolas:

$$33x = 1188$$
$$x = 36$$

Cada caja de disquetes B costaría \$36.

Forma 2

Tenemos las dos situaciones siguientes

$$\begin{cases} \text{7A y 4B cuestan \$564} \\ \text{4A}' \text{ y 7B}' \text{ se ahorran \$62} \end{cases}$$

En donde:

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A} - 15$$
$$\mathrm{B}' = \mathrm{B} + 10$$

en las que no es posible compararlas porque los precios han variado de una situación a la otra.
Si en la segunda situación, el precio de cada una de las 4 cajas de disquetes A no se hubiese rebajado en \$15, el ahorro sería menor y de solamente $62 - 4\times 15 = 2$ dólares. Si además, el precio de cada una de las 7 cajas de disquetes B no se hubiese aumentado en \$10, el ahorro sería mayor y ascendería a $2 + 7\times 10 = 72$ dólares.
Significa que:

$$\begin{cases} \text{7A y 4B cuestan } 564 & (i) \\ \text{4A y 7B cuestan } 564-72=492 & (ii) \end{cases}$$

Considerando que en la segunda situación se mantienen los precios de la primera situación.
Comparémoslas:
3 cajas de disquetes B cuestan \$72 menos que 3 cajas de disquetes A.
1 caja de disquetes B cuesta \$24 menos que 1 caja de disquetes A.
1 caja de disquetes A cuesta \$24 más que 1 caja de disquetes B.
Si en la situación (i) disminuyéramos el precio de cada una de las 7 cajas de disquetes A en \$24, el precio de cada una de las $7+4=11$ cajas de disquetes sería el correspondiente al precio de cada caja de disquetes B.
Esto es:

$$\text{11 cajas de disquetes B costarían } 564-(7\times 24) \text{ dólares}$$
$$\text{11 cajas de disquetes B costarían 396 dólares}$$
$$\text{1 caja de disquetes B costaría 36 dólares}$$

176. 5180 jóvenes asistieron a un concierto de rock y se observó que por cada 4 chicas que fueron a platea, había 1 chico en platea, y que por cada 2 chicos que fueron a mezanine, había 5 chicas en mezanine. Si ellos pagan \$10 y \$8 en mezanine y platea, respectivamente, y ellas pagaron \$8 y \$6, ¿cuántas chicas más que chicos fueron al concierto si se sabe que la recaudación total fue \$39,840?

Forma 1

De los datos del problema, podemos asumir lo siguiente:

	Nº de chicos	Nº de chicas
Mezanine	$2x$	$5x$
Platea	$1y$	$4y$

Total 5,180 jóvenes.

	Precio de entrada (\$)	
	Chicos	Chicas

Mezanine	10	8
Platea	8	6

Total \$39,840.

Entonces:

$$\begin{cases} 2x+5x+1y+4y=5{,}180 \\ 2x(10)+5x(8)+1y(8)+4y(6)=39{,}840 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} 7x+5y=5{,}180 \\ 60x+32y=39{,}840 \end{cases}$$

Despejemos x:

$$x=\frac{5{,}180-5y}{7}$$

$$x=\frac{39{,}840-32y}{60}$$

$$310{,}800-300y=278{,}880-224y$$

$$76y=31{,}920$$

$$y=420 \;\Rightarrow\; x=440$$

La diferencia entre el número de chicas y chicos que asistió al concierto será:

$$D=(5x+4y)-(2x+1y)$$

$$D=3x+3y=3(x+y)$$

$$D=3(440+420)=2{,}580 \text{ jóvenes}$$

Forma 2

Consideremos un grupo de 7 jóvenes que va a mezanine, formado por 2 chicos y 5 chicas: grupo M paga $(2\times10)+(5\times8)=60$ dólares. Asimismo, un grupo de 5 jóvenes que va a platea, formado por 1 chico y 4 chicas: grupo P paga $(1\times8)+(4\times6)=32$ dólares.

Supongamos que los 5,180 jóvenes corresponden a $5{,}180/7 = 740$ grupos M, los cuales pagarían $740 \times 60 = \$44{,}400$ en total.
Como hay una diferencia entre los montos real y supuesto de $\text{DT} = 44{,}400 - 39{,}840 = 4{,}560$ dólares, habrá que disminuir este monto cambiando 5 grupos M por 7 grupos P (35 jóvenes en cada grupo).
Por cada cambio de los señalados, dejan de pagar

$$\text{DU} = (5 \times 60) - (7 \times 32) = \$76$$

De donde el número de cambios que deberá hacerse será

$$\frac{\text{DT}}{\text{DU}} = \frac{4{,}560}{76} = 60$$

Entonces, el número de grupos M será $740 - (5 \times 60) = 440$ y el de grupos P, $7 \times 60 = 420.$
El número de chicas será $(440 \times 5) + (420 \times 4) = 3{,}880$ y el de chicos, $(440 \times 2) + (420 \times 1) = 1{,}300.$
La diferencia solicitada será $3{,}880 - 1{,}300 = 2{,}580.$

177. El stock de tarjetas telefónicas en un local comercial es 1,200, repartidas en paquetes de decenas, docenas y quincenas, que cuestan 23, 29 y 32 pesos cada paquete, respectivamente. ¿Cuántos paquetes son de doce tarjetas si el importe total es 2,736 pesos y se sabe que es igual el número de tarjetas contenidas en todos los paquetes de quince que el número de tarjetas contenidas en todos los paquetes de doce?

Forma 1

Del último dato se deduce que el número de paquetes de 15 tarjetas puede considerarse como $12x$ y el número de paquetes de 12 tarjetas puede asumirse como $15x,$ (en ambos casos contendrían $15(12x) = 12(15x) = 180x$ tarjetas).
Entonces:

	$\frac{\text{Tarjetas}}{\text{paquete}}$	Nº de paquetes	Nº de tarjetas	Precio $\left(\frac{\text{pesos}}{\text{paquete}}\right)$
A	10	z	y	23
B	12	$15x$	$180x$	29
C	15	$12x$	$180x$	32
			1,200	

Se desprende que:

$$y = 1,200 - 180x - 180x$$
$$y = 1,200 - 360x \ \text{ tarjetas}$$
$$y = 10z$$
$$z = \frac{y}{10}$$
$$z = \frac{1,200 - 360x}{10}$$
$$z = 120 - 36x \ \text{ paquetes}$$

Calculemos el importe total:

$$\begin{aligned} 23(120 - 36x) + 29(15x) + 32(12x) &= 2,760 - 828x + 435x + 384x \\ &= 2,760 - 9x \ \text{ pesos} \end{aligned}$$

De donde:

$$2,760 - 9x = 2,736$$
$$9x = 24$$
$$x = \frac{24}{9}$$
$$x = \frac{8}{3}$$

El número de paquetes de 12 tarjetas cada uno será $15x = 15(8/3) = 40$.

Forma 2

Consideremos que se tienen paquetes A de 10 tarjetas telefónicas cada uno y paquetes D formados por 4 de 15 tarjetas y 5 de 12 tarjetas (el total de tarjetas en paquetes de 15 y 12 tarjetas es el mismo: $4\times 15=5\times 12=60$).

Entonces:

	$\dfrac{\text{Tarjetas}}{\text{paquete}}$	Precio $\left(\dfrac{\text{pesos}}{\text{paquete}}\right)$
A	10	23
D	$60+60=120$	$(4\times 32)+(5\times 29)=273$
	1,200 tarjetas	2,736 pesos

Supongamos que se tienen $\dfrac{1,200}{10}=120$ paquetes A. El importe total sería $120\times 23=2,760$ pesos. Sin embargo, hay una diferencia (exceso) $\text{DT}=2,760-2,736=24$ pesos.

Si cambiamos 12 paquetes A que contienen $12\times 10=120$ tarjetas por 1 paquete D que también contiene 120 tarjetas, el precio disminuirá en $\text{DU}=(12\times 23)-(1\times 273)=3\,\text{pesos/cambio}$. El número de cambios será $\dfrac{\text{DT}}{\text{DU}}=\dfrac{24}{3}=8.$

Por lo tanto, serán 8 paquetes D que contendrán a $8\times 5=40$ paquetes de 12 tarjetas cada uno.

178. Se adquirieron 170 libros de aritmética, economía y geografía. ¿De qué materia se compraron más libros si los paquetes A, B y C contienen las cantidades de libros que figuran en el cuadro adjunto y se sabe que hay doble número de paquetes de A que de C y que el número de libros de aritmética excede en uno a los de economía?

Materia	A	B	C

Aritmética	3	3	4
Economía	3	4	2
Geografía	2	3	3

Forma 1

Sean $2x,\ y \wedge z,$ las cantidades de paquetes A, B y C, respectivamente.
En cada paquete A hay $3+3+2=8$ libros; en cada paquete B, 10 libros y en cada paquete C, 9 libros.
Como hay 170 libros en total:

$$8(2x)+10(y)+9(x)=170$$
$$25x+10y=170$$
$$5x+2y=34 \qquad (\alpha)$$

El número de libros de aritmética es $3(2x)+3(y)+4(x)=10x+3y.$

El número de libros de economía es $3(2x)+4(y)+2(x)=8x+4y.$

Como hay 1 libro más de aritmética que de economía:

$$10x+3y-(8x+4y)=1$$
$$2x-y=1$$
$$y=2x-1 \qquad (\beta)$$

De (β) en (α):

$$5x+2(2x-1)=34$$
$$9x=36$$
$$x=4 \ \Rightarrow\ y=7$$

Son 8 paquetes A, 7 paquetes B y 4 paquetes C.
El número de libros de cada materia es

Materia	Número de libros
Aritmética	$8(3)+7(3)+4(4)=61$
Economía	$8(3)+7(4)+4(2)=60$
Geografía	$8(2)+7(3)+4(3)=49$

De aritmética se adquirieron más libros.
Forma 2

Agrupemos dos paquetes A con un paquete C para formar paquetes D. El número de libros de cada materia en los paquetes D y B será:

Materia	D	B
Aritmética	$2(3)+1(4)=10$	3
Economía	$2(3)+1(2)=8$	4
Geografía	$2(2)+1(3)=7$	3
Número de libros	25	10

Supongamos que los 170 libros corresponden a $170/10=17$ paquetes B. Calculemos cuántos libros serán de aritmética y cuántos de economía:

	Número de libros
Aritmética	$17\times 3=51$
Economía	$17\times 4=68$
Diferencia	$\text{arit.}-\text{econ.}=-17$

Como la diferencia $\text{arit.}-\text{econ.}$ debe ser +1, habrá que compensar dicha diferencia en $1-(-17)=18$ libros. Habrá que cambiar 5 paquetes B por 2 paquetes D, es decir $5\times 10=50$ libros del paquete B por $2\times 25=50$ libros del paquete D.
Analicemos cuántos libros más de aritmética que de economía habrá en cada cambio de los descritos anteriormente:

	5 paquetes B	2 paquetes D
Aritmética	$5\times 3=15$	$2\times 10=20$
Economía	$5\times 4=20$	$2\times 8=16$
$\text{Arit.}-\text{Econ.}$	-5	4

En cada cambio de los descritos, habrá $4-(-5)=9$ libros más de aritmética que de economía.
Entonces, el número de cambios que habrá que efectuar será $18/9=2$.
De donde:

Número de paquetes D: $2\times 2=4\ \Rightarrow \begin{cases} \text{Número de paquetes A} = 2\times 4 = 8 \\ \text{Número de paquetes C} = 1\times 4 = \ 4 \end{cases}$

Número de paquetes B: $17-2(5)=7$

Serán 8A, 7B y 4C como antes y 61 de aritmética, 60 de economía y 49 de geografía, por lo tanto de aritmética se compraron más libros.

179. Cierta compañía de alquiler de videos los ha clasificado en películas cómicas, dramáticas y de suspenso. En total tiene 588 títulos distintos de películas repartidos entre sus cuatro locales. El número de títulos de películas de cada tipo, en cada uno de sus locales, está en relación a los números indicados en el cuadro adjunto.

Tipo	Local			
	A	B	C	D
Cómica	3	4	5	4
Dramática	2	4	3	5
Suspenso	4	5	3	2

Si se sabe que:

- ☐ B tiene 18 películas dramáticas más que A.
- ☐ D tiene 31 películas dramáticas más que C.
- ☐ A y B tienen juntos 6 películas menos que C y D, también juntos.

¿Cuántos títulos de películas dramáticas hay en cada sucursal?

Forma 1

Supongamos que el número de películas de cada tipo en cada uno de los locales es como sigue:

Tipo	Local			
	A	B	C	D

Cómica	$3x$	$4y$	$5z$	$4u$
Dramática	$2x$	$4y$	$3z$	$5u$
Suspenso	$4x$	$5y$	$3z$	$2u$
Total por local	$9x$	$13y$	$11z$	$11u$

Formamos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas a partir de los datos del problema:

$$\begin{cases} 9x+13y+11z+11u=588 & (\alpha) \\ 4y-2x=18 & (\beta) \\ 5u-3z=31 & (\gamma) \\ 9x+13y+6=11z+11u & (\delta) \end{cases}$$

$(\alpha)+(\delta)$:

$$18x+26y+6=588$$
$$9x+13y=291 \qquad (\varepsilon)$$

De (β):

$$y=\frac{9+x}{2}$$

En (ε):

$$9x+\frac{13}{2}(9+x)=291$$
$$18x+117+13x=582$$
$$31x=465$$
$$x=15 \;\Rightarrow\; y=12$$

En (δ):

$$9(15)+13(12)+6=11z+11u$$
$$297=11z+11u$$
$$z+u=27$$
$$z=27-u$$

En (γ):

$$5u-3(27-u)=31$$
$$8u=31+81$$
$$8u=112$$
$$u=14 \;\Rightarrow\; z=13$$

El número de películas dramáticas en cada local será:

$$\text{A}: \; 2x=2(15)=30$$
$$\text{B}: \; 4y=4(12)=48$$
$$\text{C}: \; 3z=3(13)=39$$
$$\text{D}: \; 5u=5(14)=70$$

Forma 2

Si el número total de películas es 588 y hay 6 más en C y D que en $\text{A y B},$ se tendrá:

$$\text{C y D} \;\Rightarrow\; \frac{588}{2}+\frac{6}{2}=297 \text{ películas}$$
$$\text{A y B} \;\Rightarrow\; \frac{588}{2}-\frac{6}{2}=291 \text{ películas}$$

El número de películas de cada tipo por lote en los locales C y D es:

Tipo	C	D
Cómica	5	4
Dramática	3	5
Suspenso	3	2
Total	11	11

Supongamos que hay $297/11=27$ lotes D y 0 lotes C. Habrá $27\times5=135$ películas dramáticas más en D que en C. Como la diferencia debe ser 31, habrá una diferencia total de $135-31=104$.
Si cambiamos un lote D por un lote C (ambos tienen el mismo número de películas por lote), la diferencia unitaria será $3-(-5)=8$ películas. De donde, debiéramos hacer $104/8=13$ cambios. Por lo tanto, se tendrá:

$$C \Rightarrow 13 \text{ lotes } \Rightarrow 13 \times 3 = 39 \text{ películas dramáticas}$$
$$D \Rightarrow 27 - 13 = 14 \text{ lotes } \Rightarrow 14 \times 5 = 70 \text{ películas dramáticas}$$

Asimismo, entre A y B hay 291 películas y la distribución por lote es:

Tipo	A	B
Cómica	3	4
Dramática	2	4
Suspenso	4	5
Total	9	13

Dividamos

$$\begin{array}{r|l} 291 & 13 \\ \cline{2-2} 5 & 22 \end{array}$$

Entonces se tiene 22 lotes B + 5 unidades.
Mejor consideremos 21 lotes B $+(13+5)$ unidades, que equivalen a 21 lotes B + 2 lotes A.
Dramáticas B: $21 \times 4 = 84$, A: $2 \times 2 = 4$, luego la diferencia supuesta es 80, pero la diferencia real es 18, entonces la diferencia total es $80 - 18 = 62$.
Para que no se altere el número total de películas repartidas entre los locales A y B, cambiemos 9 lotes B por 13 lotes A. El número de películas dramáticas variará de:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A: aparecerán } 13 \times 2 = 26 \\ \text{B: desaparecerán } 9 \times 4 = 36 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{DU} = 26 - (-36) = 62$$

El número de cambios de los descritos que habrá que hacer será:

$$\frac{\text{DT}}{\text{DU}} = \frac{62}{62} = 1 \Rightarrow \text{ añadamos 13 lotes A y quitemos 9 lotes B}$$

Entonces, el número de lotes será:

$$\text{A}: \ 2 + 13 = 15 \text{ lotes } \Rightarrow 15 \times 2 = 30 \text{ películas dramáticas}$$
$$\text{B}: \ 21 - 9 = 12 \text{ lotes } \Rightarrow 12 \times 4 = 48 \text{ películas dramáticas}$$

180. Resolver para x:

$$\frac{x+a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-b}=\frac{3x(x-2a)}{x^2-(2a+b)x+2ab}$$

Factoricemos el denominador del segundo miembro:

$$\frac{x+a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-b}=\frac{3x^2-6ax}{(x-2a)(x-b)}$$

Restricciones

$$x \neq 2a,\ b$$

Multipliquemos ambos miembros por $(x-2a)(x-b)$:

$$(x+a)(x-b)+(x+2b)(x-2a)=3x^2-6ax$$
$$x^2+ax-bx-ab+x^2-2ax+2bx-4ab=3x^2-6ax$$
$$0=x^2-5ax-bx+5ab$$
$$0=x(x-5a)-b(x-5a)$$
$$0=(x-b)(x-5a) \Rightarrow \begin{cases} x=b \\ x=5a \end{cases}$$

De las restricciones, se deduce que la única raíz es $x=5a$.

181. Resolver

$$\frac{m}{mx-1}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}-\frac{n}{nx-1}$$

Forma 1

Transponemos términos

$$\frac{m}{mx-1}+\frac{n}{nx-1}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}$$

$$\frac{m(nx-1)+n(mx-1)}{(mx-1)(nx-1)}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}$$

$$\frac{mnx-m+mnx-n}{(mx-1)(nx-1)}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}$$

$$\left[2mnx-(m+n)\right]\left[(m+n)x-1\right]=(m+n)(mx-1)(nx-1)$$

$$2mn(m+n)x^2-\left[(m+n)^2+2mn\right]x+(m+n)=(m+n)\left[mnx^2-(m+n)x+1\right]$$

$$mn(m+n)x^2-2mnx=0$$

$$mnx\left[(m+n)x-2\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0, \text{ ó} \\ x=\dfrac{2}{m+n} \end{cases}$$

Forma 2
Transponemos términos

$$\frac{m}{mx-1}+\frac{n}{nx-1}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}$$

$$\frac{mnx-m+mnx-n}{(mx-1)(nx-1)}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}$$

$$\frac{2mnx-m-n}{(mx-1)(nx-1)}=\frac{m+n}{(m+n)x-1}$$

Invirtamos las fracciones:

$$\frac{(mx-1)(nx-1)}{2mnx-m-n}=\frac{(m+n)x-1}{m+n}$$

$$\frac{mnx^2-mx-nx+1}{2mnx-m-n}=\frac{(m+n)x-1}{m+n}$$

Sumemos y restemos mnx^2 en el numerador de la primera fracción:

$$\frac{2mnx^2 - mx - nx + 1 - mnx^2}{2mnx - m - n} = \frac{(m+n)x - 1}{m+n}$$

$$\frac{2mnx^2 - mx - nx}{2mnx - m - n} + \frac{1 - mnx^2}{2mnx - m - n} = \frac{(m+n)x}{m+n} - \frac{1}{m+n}$$

$$x + \frac{1 - mnx^2}{2mnx - m - n} = x - \frac{1}{m+n}$$

De donde:

$$(m+n)\left(1 - mnx^2\right) = -(2mnx - m - n)$$

$$m + n - mnx^2(m+n) + 2mnx - m - n = 0$$

$$mn(m+n)x^2 = 2mnx \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \text{ ó} \\ x = \dfrac{2}{m+n} \end{cases}$$

182. Resolver

$$\frac{1}{x-p} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{x-q}$$

Efectuemos las operaciones

$$\frac{p - (x-p)}{p(x-p)} = \frac{(x-q) - q}{q(x-q)}$$

$$\frac{2p - x}{px - p^2} = \frac{x - 2q}{qx - q^2}$$

$$2pqx - 2pq^2 - qx^2 + q^2x = px^2 - 2pqx - p^2x + 2p^2q$$

$$(p+q)x^2 + \left(-p^2 - q^2 - 4pq\right)x + \left(2pq^2 + 2p^2q\right) = 0$$

$$(p+q)x^2 - \left(p^2 + 4pq + q^2\right)x + 2pq(p+q) = 0$$

$$\left[(p+q)x - 2pq\right]\left[x - (p+q)\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2pq}{p+q} \quad \text{ó} \\ x = p + q \end{cases}$$

$$\frac{p-(x-p)}{p(x-p)}=\frac{(x-q-q)}{q(x-q)}$$

$$\frac{2p-x}{px-x^2}=\frac{x-2q}{qx-q^2}$$

$$2pqx-2pq^2-qx^2+q^2x=px^2-2pqx-p^2x+2p^2q$$

$$(p+q)x^2+\left(-p^2-q^2-4pq\right)x+\left(2pq^2+2p^2q\right)=0$$

$$(p+q)x^2-\left(p^2+4pq+q^2\right)x+2pq(p+q)=0$$

$$\left[(p+q)x-2pq\right]\left[x-(p+q)\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2pq}{p+q} & \text{ó} \\ x=p+q \end{cases}$$

183. Resolver para x la siguiente ecuación:

$$\left(1-a^2\right)(x+a)-2a\left(1-x^2\right)=0$$

Forma 1

Efectuemos las operaciones:

$$x+a-a^2x-a^3-2a+2ax^2=0$$

$$2ax^2+\left(1-a^2\right)x-\left(a^3+a\right)=0$$

Apliquemos la fórmula general de las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{-\left(1-a^2\right)\pm\sqrt{\left(1-a^2\right)^2-4(2a)\left(-a^3-a\right)}}{2(2a)}$$

$$x=\frac{-1+a^2\pm\sqrt{1-2a^2+a^4+8a^4+8a^2}}{4a}$$

$$x=\frac{-1+a^2\pm\sqrt{9a^4+6a^2+1}}{4a}$$

$$x=\frac{-1+a^2\pm\left(3a^2+1\right)}{4a}$$

De donde:

$$x_1=\frac{-1+a^2+3a^2+1}{4a}=\frac{4a^2}{4a}=a$$

$$x_2=\frac{-1+a^2-3a^2-1}{4a}=\frac{-2a^2-2}{4a}=-\frac{a^2+1}{2a}$$

Forma 2

Factoricemos por el método del aspa simple

$$\underset{\substack{\downarrow\\(2ax)(x)}}{2ax^2}\;+\left(1-a^2\right)x-\underset{\substack{\downarrow\\-a\left(a^2+1\right)}}{\underbrace{\left(a^3+a\right)}}=0$$

Escribamos

$$\left[2ax+\left(a^2+1\right)\right](x-a)=0$$

Se comprueba que el término en x es:

$$2a(-a)+\left(a^2+1\right)=1-a^2$$

Entonces:

$$2ax+\left(a^2+1\right)=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-a^2-1}{2a}$$
$$x-a=0 \;\rightarrow\; x=a$$

184. Resolver la ecuación

$$x^2+\sqrt{3x^2-\frac{4x}{3}-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\left(\frac{2x+5}{3}\right)+5$$

y encontrar el valor entero de x.

Forma 1

Multipliquemos la ecuación dada por 3 (al radical ingresa como 9):

$$3x^2+\sqrt{27x^2-12x-3}=2\frac{(2x+5)}{3}+15$$
$$3x^2+\sqrt{3\left(9x^2-4x-1\right)}=\frac{4x}{3}+\frac{55}{3}$$
$$3x^2-\frac{4x}{3}-\frac{55}{3}+\sqrt{3\left(9x^2-4x-1\right)}=0$$

Efectuemos un cambio de variable:

$$3x^2-\frac{4x}{3}-\frac{1}{3}=t^2$$
$$9x^2-4x-1=3t^2$$

Reescribamos la ecuación como:

$$\underbrace{3x^2-\frac{4x}{3}-\frac{1}{3}}_{t^2}-\frac{54}{3}+\sqrt{3\underbrace{\left(9x^2-4x-1\right)}_{3t^2}}=0$$
$$t^2-18+\sqrt{3\left(3t^2\right)}=0$$
$$t^2+3t-18=0$$

$$(t+6)(t-3)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} t=-6 \\ t=3 \end{cases}$$

Si $t=-6$

$$9x^2-4x-1=108$$
$$9x^2-4x-109=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=16+3,924$$
$$\Delta=3,940$$

Como Δ no es cuadrado perfecto, las raíces no podrán ser enteras.

Si $t=3$

$$9x^2-4x-1=27$$
$$9x^2-4x-28=0$$
$$(9x+14)(x-2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-14/9 \\ x=2 \end{cases}$$

La raíz entera es 2.

Forma 2

A partir de la ecuación $3x^2-\dfrac{4x}{3}-\dfrac{55}{3}=-\sqrt{3\left(9x^2-4x-1\right)}$, elevemos al cuadrado ambos miembros:

$$9x^4+\frac{16x^2}{9}+\frac{3,025}{9}+2\left(-4x^3-55x^2+\frac{220x}{9}\right)=3\left(9x^2-4x-1\right)$$

Por 9:

$$81x^4+16x^2+3,025-72x^3-990x^2+440x=243x^2-108x-27$$
$$81x^4-72x^3-1,217x^2+548x+3,052=0$$

Según el método de Ruffini:

	81	-72	-1,217	548	3,052

2	↓	162	180	-2,074	-3,052
	81	90	-1,037	-1,526	0

La única raíz entera es 2.

185. Resolver la siguiente ecuación

$$\frac{2\sqrt{x-1}+x}{x-2\sqrt{x-1}}\cdot\frac{1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}=3$$

Restricciones

$$\begin{aligned}
&x-1>0 &&\Rightarrow\quad x>1\\
&x-2\sqrt{x-1}\neq 0 &&\Rightarrow\quad x\neq 2\sqrt{x-1}\ \Rightarrow\ x^2\neq 4(x-1)\ \Rightarrow\ x^2-4x+4\neq 0\\
& &&\Rightarrow\quad (x-2)^2\neq 0\ \Rightarrow\ x\neq 2\\
&\sqrt{x-1}+1\neq 0 &&\Rightarrow\quad x\geq 1
\end{aligned}$$

Efectuemos las operaciones

$$\begin{gathered}
\left(2\sqrt{x-1}+x\right)\left(1-\sqrt{x-1}\right)=3\left(x-2\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)\\
2\sqrt{x-1}-2(x-1)+x-x\sqrt{x-1}=3\left[x\sqrt{x-1}+x-2(x-1)-2\sqrt{x-1}\right]\\
2\sqrt{x-1}-2(x-1)+x-x\sqrt{x-1}=3x\sqrt{x-1}+3x-6(x-1)-6\sqrt{x-1}\\
8\sqrt{x-1}-4x\sqrt{x-1}=4-2x\\
4\sqrt{x-1}(2-x)=2(2-x)
\end{gathered}$$

Dividamos entre $2-x$ que es diferente de cero, pues $x\neq 2$:

$$\begin{gathered}
4\sqrt{x-1}=2\\
\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}
\end{gathered}$$

$$x-1=\frac{1}{4}$$
$$x=\frac{5}{4},$$

que cumple con todas las restricciones.

186. Encontrar la suma de las raíces de la siguiente ecuación

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x+2}$$

Forma 1

Restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+5>0 \;\Rightarrow\; x>-5 \\ x-3>0 \;\Rightarrow\; x>3 \\ x+2>0 \;\Rightarrow\; x>-2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; x>3$$

Además $x+5>x-3 \;\Rightarrow\; 5>-3,$ que siempre se cumple.

Elevemos ambos miembros al cuadrado:

$$x+5-2\sqrt{x+5}\sqrt{x-3}+x-3=x+2$$
$$x=2\sqrt{x+5}\sqrt{x-3}$$

Nuevamente al cuadrado:

$$x^2=4(x+5)(x-3)$$
$$x^2=4x^2+8x-60$$
$$3x^2+8x-60=0$$
$$(3x-10)(x+6)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=10/3 \\ x=-6 \end{cases}$$

Solamente cumple la restricción $x > 3$ la solución $x = 10/3$.

La suma de las raíces es $10/3$.

Forma 2

Sea $x-3 = a^2 \Rightarrow x+5 = a^2+8 \quad \wedge \quad x+2 = a^2+5$.

De donde:

$$\sqrt{a^2+8} - \sqrt{a^2} = \sqrt{a^2+5}$$

Al cuadrado

$$a^2+8-2\sqrt{a^2}\sqrt{a^2+8}+a^2 = a^2+5$$
$$a^2+3 = 2\sqrt{a^2}\sqrt{a^2+8}$$

Nuevamente al cuadrado:

$$a^4+6a^2+9 = 4a^2\left(a^2+8\right)$$
$$a^4+6a^2+9 = 4a^4+32a^2$$
$$3a^4+26a^2-9 = 0$$
$$\left(3a^2-1\right)\left(a^2+9\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{3} \\ a^2 = -9 \Rightarrow a \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Entonces:

$$x = a^2+3$$
$$x = \frac{1}{3}+3$$
$$x = \frac{10}{3} \quad \text{(única raíz)}$$

187. Resolver

$$\sqrt{4x-1}-\sqrt{2x+3}=1$$

Restricciones

$$\left.\begin{array}{lll} 4x-1>0 & \Rightarrow & x>1/4 \\ 2x+3>0 & \Rightarrow & x>-3/2 \\ 4x-1>2x+3 & \Rightarrow & x>2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x>2$$

Elevemos ambos miembros al cuadrado

$$4x-1-2\sqrt{(4x-1)(2x+3)}+2x+3=1$$
$$2\sqrt{(4x-1)(2x+3)}=6x+1$$

Nuevamente al cuadrado

$$4(4x-1)(2x+3)=(6x+1)^2$$
$$32x^2+40x-12=36x^2+12x+1$$
$$4x^2-28x+13=0$$
$$(2x-13)(2x-1)=0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x=13/2 \quad \text{ó} \\ x=1/2 \end{cases}$$

De acuerdo con las restricciones

$$x=\frac{13}{2}$$

Forma 2

$$\sqrt{4x-1}=1+\sqrt{2x+3}$$

Al cuadrado

$$4x-1=1+2\sqrt{2x+3}+2x+3$$
$$2\sqrt{2x+3}=2x-5$$

Al cuadrado

$$4(2x+3)=(2x-5)^2$$

$$8x+12=4x^2-20x+25$$

$$4x^2-28x+13=0 \;\Rightarrow\; x=13/2$$

Forma 3

Sea $2x+3=a^2 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{a^2-3}{2}$

Reemplacemos en la ecuación original

$$\sqrt{4\left(\frac{a^2-3}{2}\right)-1}-\sqrt{a^2}=1$$

$$\sqrt{2a^2-7}=1+a$$

Al cuadrado

$$2a^2-7=1+2a+a^2$$

$$a^2-2a-8=0$$

$$(a-4)(a+2)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=4 \;\Rightarrow\; & x=\dfrac{4^2-3}{2}=\dfrac{13}{2} \\ a=-2 \;\Rightarrow\; & x=\dfrac{(-2)^2-3}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Solamente cumple $x=\dfrac{13}{2}$.

188. Si r y s son las raíces de la ecuación ax^2+bx+c, encontrar en términos de r y s las raíces de la siguiente ecuación:

$$ax^2+(b-4a)x+(4a-2b+c)=0$$

Las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son r y s:

$$r, s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces de la ecuación $ax^2 + (b-4a)x + (4a-2b+c) = 0$ son p y q:

$$p,\, q = \frac{-(b-4a) \pm \sqrt{(b-4a)^2 - 4a(4a-2b+c)}}{2a}$$
$$p,\, q = \frac{-b+4a \pm \sqrt{b^2 - 8ab + 16a^2 - 16a^2 + 8ab - 4ac}}{2a}$$
$$p,\, q = \frac{-b+4a \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$p,\, q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{4a}{2a}$$
$$p,\, q = r,\, s + 2$$

Es decir:

$$p = r + 2$$
$$q = s + 2$$

189. Si la ecuación $\dfrac{6x - 18 - x^2}{x+1} = 2m$ tiene dos raíces iguales, encontrar la suma de las posibles raíces.

Forma 1

Efectuemos operaciones y ordenemos el polinomio resultante:

$$6x - 18 - x^2 = 2mx + 2m$$
$$x^2 + (2m-6)x + (2m+18) = 0$$

Si las dos raíces son iguales, el discriminante debe ser nulo:

$$
\begin{aligned}
(2m-6)^2-4(1)(2m+18)&=0\\
4m^2-24m+36-8m-72&=0\\
4m^2-32m-36&=0\\
m^2-8m-9&=0\\
(m-9)(m+1)&=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} m=9 \\ m=-1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $m=9$:

$$
\begin{aligned}
x^2+12x+36&=0\\
(x+6)^2&=0\\
x&=-6 \;\text{(doble)}\\
S_1&=-12
\end{aligned}
$$

Si $m=-1$:

$$
\begin{aligned}
x^2-8x+16&=0\\
(x-4)^2&=0\\
x&=4 \;\text{(doble)}\\
S_2&=8
\end{aligned}
$$

De donde:

$$
\begin{aligned}
S_T&=-12+8\\
S_T&=-4
\end{aligned}
$$

Forma 2

Si las raíces son iguales a r, la ecuación será:

$$\begin{aligned}(x-r)(x-r)&=0\\(x-r)^2&=0\\\underbrace{x^2-2rx+r^2}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}}&=0\end{aligned}$$

Entonces $x^2+2(m-3)x+(2m+18)$ debe ser un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2+2(m-3)x+(2m+18)=\left[x+(m-3)\right]^2$$

Igualemos los términos independientes:

$$\begin{aligned}2m+18&=(m-3)^2\\m^2-8m-9&=0\\(m-9)(m+1)=0 &\Rightarrow \begin{cases}m=9\\m=-1\end{cases}\end{aligned}$$

Como antes:

$$\begin{aligned}S&=-12 \text{ ó } 8\\S_T&=-12+8\\S_T&=-4\end{aligned}$$

190. Si una de las raíces de la ecuación $x^4+(5-3n)x^2+9(n+1)=0$ es 2, hallar el valor de n y las otras raíces de dicha ecuación.

Forma 1

Reemplacemos $x=2$ en la ecuación dada para encontrar el valor de n:

$$\begin{aligned}16+(5-3n)4+9(n+1)&=0\\16+20-12n+9n+9&=0\\3n&=45\\n&=15\end{aligned}$$

La ecuación por resolver será:

$$x^4+(5-45)x^2+9(15+1)=0$$
$$x^4-40x^2+144=0$$
$$(x^2-4)(x^2-36)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \ \ 4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2=36 \Rightarrow x=\pm 6 \end{cases}$$

Forma 2

Si $P(x)=x^4+(5-3n)x^2+9(n+1)$ y $P(2)=0$, apliquemos el método de Ruffini con $x=2$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 5-3n & 0 & 9n+9 \\ & & & & & \\ 2 & \downarrow & 2 & 4 & 18-6n & 36-12n \\ \hline & 1 & 2 & 9-3n & 18-6n & \boxed{45-3n} \end{array}$$

Como $x=2$ es una raíz:

$$45-3n=0$$
$$n=15$$

El cociente de $P(x)\div(x-2)$ es:

$$1x^3+2x^2+(9-3n)x+(18-6n)=0$$

Reemplacemos $n=15$:

$$x^3+2x^2-36x-72=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -36 & -72 \\ & & & & \\ -2 & \downarrow & -2 & 0 & 72 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} \hline & 1 & 0 & -36 & 0 \\ \end{array}$$

$$\left(x+2\right)\left(x^2-36\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=-2 \\ x=-6 \\ x=\;\;\,6 \end{cases}$$

Las raíces serán: $2,\ -2,\ 6,\ -6.$

Forma 3

Como la ecuación es bicuadrada, al aceptar a $x=2$ como raíz, aceptará también a $x=-2,$ entonces $P\left(x\right)$ será divisible entre $\left(x+2\right)\left(x-2\right)=x^2-4$

$$\begin{array}{ccc|l} 1x^4 & +\left(5-3n\right)x^2 & +\left(9n+9\right) & x^2-4 \\ \cline{4-4} -x^4 & +4x^2 & & x^2+\left(9-3n\right) \\ \cline{1-2} & \left(9-3n\right)x^2 & +\left(9n+9\right) & \\ & -\left(9-3n\right)x^2 & +4\left(9-3n\right) & \\ \cline{2-3} & & 45-3n & \end{array}$$

De donde:

$$\begin{aligned} 45-3n&=0 \\ n&=15 \end{aligned}$$

$P\left(x\right)$ se podrá escribir como $P\left(x\right)=\left[x^2-4\right]\left[x^2+\left(9-3n\right)\right]=0,$ es decir:

$$x^2+(9-45)=0$$
$$x^2-36=0$$
$$(x+6)(x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-6 \\ x=\ \ 6 \end{cases}$$

Las raíces serán $2,\ -2,\ 6,\ -6.$

191. Si una de las raíces de la ecuación $nx(2x+5)=x(x-1)+3$ es -3, determinar la otra raíz.

Forma 1

Como $x=-3$ cumple con la ecuación dada:

$$n(-3)(-6+5)=-3(-4)+3$$
$$3n=15$$
$$n=5$$

La ecuación será:

$$5x(2x+5)=x(x-1)+3$$
$$10x^2+25x=x^2-x+3$$
$$9x^2+26x-3=0$$

Por el método de Ruffini, como $x+3$ es factor:

$$\begin{array}{r|rrr} & 9 & 26 & -3 \\ -3 & \downarrow & -27 & 3 \\ \hline & 9 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

De donde:

$$9x-1=0$$
$$x=\frac{1}{9}$$

Forma 2

La ecuación dada se puede escribir como:

$$2nx^2+5nx=x^2-x+3$$
$$(2n-1)x^2+(5n+1)x-3=0$$

Sean r y -3 las dos raíces, por propiedad de las raíces:

$$S=r-3=\frac{-(5n+1)}{2n-1} \qquad (\alpha)$$
$$P=r(-3)=\frac{-3}{2n-1} \qquad (\beta)$$

De (β):

$$r=\frac{1}{2n-1}$$

En (α):

$$\frac{1}{2n-1}-3=\frac{-5n-1}{2n-1}$$

Por $2n-1$:

$$1-3(2n-1)=-5n-1$$
$$n=5$$

La otra raíz será

$$r = \frac{1}{2(5)-1}$$
$$r = \frac{1}{9}$$

Forma 3

Si las raíces de $(2n-1)x^2 + (5n+1)x - 3 = 0$ son –3 y r, la ecuación se podrá obtener también como $(x+3)(x-r) = 0$, es decir $x^2 + (3-r)x - 3r = 0$.

Deberá cumplirse que haya proporcionalidad entre los coeficientes respectivos:

$$\frac{2n-1}{1} = \frac{5n+1}{3-r} = \frac{-3}{-3r}$$
$$2n-1 = \frac{5n+1}{3-r} = \frac{1}{r}$$

Entonces:

$$\begin{cases} 2nr - r = 1 & (\alpha) \\ 5nr + r = 3 - r \;\Rightarrow\; 5nr = 3 - 2r & (\beta) \end{cases}$$

De (β):

$$nr = \frac{3-2r}{5}$$

En (α):

$$2\left(\frac{3-2r}{5}\right)-r=1$$
$$6-4r-5r=5$$
$$9r=1$$
$$r=\frac{1}{9}$$

192. Dadas las ecuaciones cuadráticas $x^2-(b-1)x-2=0$ y $(a-1)x^2-2x-40=0,$ resolver la ecuación $(a-1)(b-1)x^2+x-1=0$ si se conoce que la menor raíz de la primera ecuación es tres unidades mayor que la menor raíz de la segunda ecuación y que la mayor raíz de la primera ecuación es tres unidades menor que la mayor raíz de la segunda ecuación. (No deberá emplear propiedades de las raíces).

Forma 1

Sean r y s las raíces de la primera ecuación $(r>s)$

$$r=\frac{b-1+\sqrt{(b-1)^2+8}}{2}=\frac{b-1+\sqrt{\Delta_1}}{2}$$
$$s=\frac{b-1-\sqrt{(b-1)^2+8}}{2}=\frac{b-1-\sqrt{\Delta_1}}{2}$$

Las raíces de la segunda ecuación serán $r+3$ y $s-3$ $\quad (r+3>s-3)$

$$r+3=\frac{2+\sqrt{4-4(a-1)(-40)}}{2(a-1)}=\frac{2+\sqrt{\Delta_2}}{2(a-1)}$$
$$s-3=\frac{2-\sqrt{4-4(a-1)(-40)}}{2(a-1)}=\frac{2-\sqrt{\Delta_2}}{2(a-1)}$$

Reemplacemos r y s en las últimas ecuaciones:

$$\frac{b-1+\sqrt{\Delta}}{2}+3=\frac{2+\sqrt{\Delta_2}}{2(a-1)}$$
$$\frac{b-1-\sqrt{\Delta}}{2}-3=\frac{2-\sqrt{\Delta_2}}{2(a-1)}$$

Sumemos miembro a miembro:

$$\frac{b-1}{2}+\frac{b-1}{2}=\frac{2}{2(a-1)}+\frac{2}{2(a-1)}$$
$$b-1=\frac{2}{a-1}$$

De donde

$$(a-1)(b-1)=2$$

La ecuación por resolver será:

$$2x^2+x-1=0$$
$$(2x-1)(x+1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=1/2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Forma 2

Si r y s son raíces de la primera ecuación, tendremos:

$$r^2-(b-1)r-2=0 \qquad (\alpha)$$
$$s^2-(b-1)s-2=0 \qquad (\beta)$$

Como $r+3$ y $s-3$ cumplen con la segunda ecuación, tendremos:

$$(a-1)(r+3)^2-2(r+3)-40=0 \qquad (\gamma)$$
$$(a-1)(s-3)^2-2(s-3)-40=0 \qquad (\delta)$$

$(\alpha)-(\beta)$:

$$\begin{aligned} r^2-s^2-(b-1)r+(b-1)s&=0\\ (r+s)(r-s)-(b-1)(r-s)&=0\\ (r-s)\left[(r+s)-(b-1)\right]&=0 \end{aligned}$$

Como $r\neq s \;\Rightarrow\; r-s\neq 0,$ entonces de la ecuación anterior resulta:

$$r+s=b-1 \qquad (\varepsilon)$$

$(\gamma)-(\delta)$:

$$\begin{aligned} (a-1)\left[(r+3)^2-(s-3)^2\right]-2\left[(r+3)-(s-3)\right]&=0\\ (a-1)[r+s][r-s+6]-2[r-s+6]&=0\\ [r-s+6]\left[(a-1)(r+s)-2\right]&=0 \end{aligned}$$

Como $r+3\neq s-3 \;\Rightarrow\; r-s+6\neq 0 \;\Rightarrow\; (a-1)(r+s)=2 \qquad (\eta)$

(ε) en (η):

$$(a-1)(b-1)=2$$

La ecuación por resolver será $2x^2+x-1=0,$ con raíces $1/2$ ó $-1.$

Forma 3

Factoricemos $x^2-(b-1)x-2$ por el método del aspa simple:

i) $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$

ii) $(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

Comparemos con la ecuación dada

i) $b-1=1 \Rightarrow b=2,$ con raíces -1 y 2.

ii) $b-1=-1 \Rightarrow b=0,$ con raíces -2 y 1.

De acuerdo con el enunciado del problema, las raíces de la segunda ecuación serían:

i) $-1-3$ y $2+3 \Rightarrow -4 \text{ y } 5$

ii) $-2-3$ y $1+3 \Rightarrow -5 \text{ y } 4$

La segunda ecuación sería:

i) $(x+4)(x-5)=x^2-x-20=2x^2-2x-40$

ii) $(x+5)(x-4)=x^2+x-20=2x^2+2x-40$

Solo $2x^2-2x-40$ corresponde a la ecuación dada $(a-1)x^2-2x-40=0,$ de donde $a-1=2$ y $b-1=1.$

La ecuación por resolver $(a-1)(b-1)x^2+x-1=0$ será

$$2(1)x^2+x-1=0$$
$$(2x-1)(x+1)=0$$

Sus raíces serán -1 ó $1/2$.

193. Determinar los valores de a y b de tal manera que las ecuaciones:

$$(a+4)x^2+(a-3)x+2a=-1$$
$$(b-7)x^2+(b+7)x+b=-3$$

tengan las mismas raíces.

Forma 1

Para que las ecuaciones

$$a_1x^2+a_2x+a_3=0$$
$$b_1x^2+b_2x+b_3=0$$

tengan las mismas raíces se requiere que haya proporcionalidad entre los coeficientes respectivos. Esto debido a que las ecuaciones dadas se pueden escribir como:

$$a_1\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)=0$$
$$b_1\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)=0$$

Es decir:

$$a_1\left(x^2-r_1x-r_2x+r_1r_2\right)=0$$
$$b_1\left(x^2-r_1x-r_2x+r_1r_2\right)=0$$

o lo que es lo mismo:

$$a_1x^2-a_1\left(r_1+r_2\right)x+a_1r_1r_2=0$$
$$b_1x^2-b_1\left(r_1+r_2\right)x+b_1r_1r_2=0$$

y se cumple que

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{-a_1\left(r_1+r_2\right)}{-b_1\left(r_1+r_2\right)}=\frac{a_1r_1r_2}{b_1r_1r_2}=\frac{a_1}{b_1}$$

En el caso presente:

$$\begin{cases}\left(a+4\right)x^2+\left(a-3\right)x+\left(2a+1\right)=0\\ \left(b-7\right)x^2+\left(b+7\right)x+\left(b+3\right)=0\end{cases}$$

$$\frac{a+4}{b-7}=\frac{a-3}{b+7}=\frac{2a+1}{b+3}$$

De donde:

$$\begin{cases} (a+4)(b+7)=(a-3)(b-7) \Rightarrow ab+7a+4b+28=ab-7a-3b+21 \\ (a-3)(b+3)=(2a+1)(b+7) \Rightarrow ab+3a-3b-9=2ab+14a+b+7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a+7b=-7 \Rightarrow 2a+b=-1 \Rightarrow b=-1-2a \qquad (\alpha) \\ ab+11a+4b=-16 \qquad (\beta) \end{cases}$$

(α) en (β):

$$\begin{aligned} a(-1-2a)+11a+4(-1-2a)&=-16 \\ -a-2a^2+11a-4-8a&=-16 \\ 2a^2-2a-12&=0 \\ a^2-a-6&=0 \\ (a-3)(a+2)=0 &\Rightarrow \begin{cases} a=3 \Rightarrow b=-1-6=-7 \\ a=-2 \Rightarrow b=-1+4=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Forma 2

Para resolver el sistema siguiente, podemos igualar a una constante k:

$$\frac{a+4}{b-7}=\frac{a-3}{b+7}=\frac{2a+1}{b+3}=k$$

Entonces:

$$\begin{cases} a+4=k(b-7) \qquad (1) \\ a-3=k(b+7) \qquad (2) \\ 2a+1=k(b+3) \qquad (3) \end{cases}$$

De $(1)-(2)$:

$$7 = k(b-7-b-7)$$
$$7 = k(-14)$$
$$k = -1/2$$

$(3)-2(2):$

$$1+6 = k(b+3-2b-14)$$
$$7 = -\frac{1}{2}(-b-11)$$
$$-14 = -b-11$$
$$b = 3$$

En (1):

$$a+4 = -\frac{1}{2}(3-7)$$
$$a+4 = 2$$
$$a = -2$$

194. Si p y q son las raíces de $x^2+bx+1=0$ y r y s son las raíces de $x^2+cx+1=0$, demostrar que

$$(p-r)(q-r)(p+s)(q+s) = c^2-b^2$$

Forma 1

De $x^2+bx+1=0 \;\Rightarrow\; p+q=-b \quad \wedge \quad pq=1$

De $x^2+cx+1=0 \;\Rightarrow\; r+s=-c \quad \wedge \quad rs=1$

Efectuemos operaciones en el primer miembro:

$$\begin{aligned}
&= \left[pq - r\left(p+q\right) + r^2 \right]\left[pq + s\left(p+q\right) + s^2 \right] \\
&= \left[1 - r\left(-b\right) + r^2 \right]\left[1 + s\left(-b\right) + s^2 \right] \\
&= \left[1 + br + r^2 \right]\left[1 - bs + s^2 \right] \\
&= 1 - bs + s^2 + br - b^2 rs + brs^2 + r^2 - bsr^2 + r^2 s^2 \\
&= 1 + r^2 + s^2 + \left(rs\right)^2 + br - bs + bs\left(rs\right) - br\left(rs\right) - b^2\left(rs\right)
\end{aligned}$$

Reemplacemos valores:

$$\begin{aligned}
&= 1 + r^2 + s^2 + \left(1\right)^2 + br - bs + bs\left(1\right) - br\left(1\right) - b^2\left(1\right) \\
&= r^2 + s^2 + 2 - b^2 \\
&= \left(r+s\right)^2 - 2\left(rs\right) + 2 - b^2 \\
&= \left(-c\right)^2 - 2\left(1\right) + 2 - b^2 \\
&= c^2 - 2 + 2 - b^2 \\
&= c^2 - b^2
\end{aligned}$$

Forma 2

Como p y q son las raíces de $x^2 + bx + 1 = 0$, tendremos:

$$p^2 + bp + 1 = 0$$
$$q^2 + bq + 1 = 0$$

De donde:

$$p^2 + bp = q^2 + bq$$
$$p^2 - q^2 = b\left(q - p\right)$$
$$\left(p+q\right)\left(p-q\right) = -b\left(p-q\right)$$
$$p + q = -b$$

Además:

$$r^2 + cr + 1 = 0 \qquad \left(\alpha\right)$$
$$s^2 + cs + 1 = 0 \qquad \left(\beta\right)$$

Asimismo:

$$r+s=-c$$

Por propiedades de raíces:

$$pq=1$$
$$rs=1$$

Efectuemos operaciones en el primer miembro:

$$=\left[pq-r(p+q)+r^2\right]\left[pq+s(p+q)+s^2\right]$$
$$=\left[1-r(-b)+r^2\right]\left[1+s(-b)+s^2\right]$$
$$=\left[1+r^2+br\right]\left[1+s^2-bs\right] \qquad (\gamma)$$

De (α) $1+r^2=-cr$

De (β) $1+s^2=-cs$

En (γ):

$$=\left[-cr+br\right]\left[-cs-bs\right]$$
$$=-r(c-b)(-s)(c+b)$$
$$=rs\left(c^2-b^2\right)$$
$$=1\left(c^2-b^2\right)$$
$$=c^2-b^2$$

III

Desigualdades e inecuaciones

1. Desigualdades

Son relaciones de orden que establecen que un número es mayor o menor que otro.

Ejemplo

$$7 > 4$$
$$7 \geq 4$$
$$-2 < -1$$
$$-4 \leq -4$$

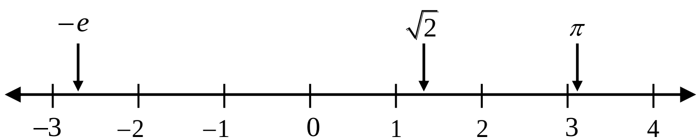
Al igual que las igualdades, las desigualdades se cumplen siempre. En cambio, cuando una desigualdad se cumple solamente para determinado(s) valor(es) de la incógnita, se le denomina inecuación.

Ejemplo

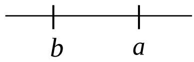
$$7 \geq 4 + 3x$$
$$-2 < -1 + 5x$$

1.1. El eje real

Es una recta en la que se asocia cada uno de sus puntos con un número real. Se le considera la representación gráfica de los números reales.

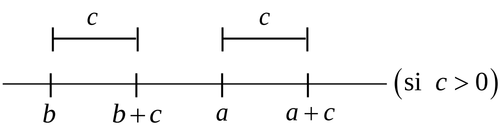


Si $a \wedge b \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad a > b,$ se les puede representar de la siguiente manera:



1.2. Propiedades de las desigualdades

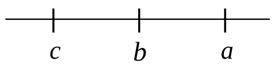
i) Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c.$



Ejemplo

Las edades de Alberto y de Beatriz son 18 y 15 años, respectivamente $(18 > 15)$. Al cabo de 6 años, sus edades serán 24 y 21 $(24 > 21)$.

ii) Si $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c.$



Ejemplo

Si la edad del abuelo es mayor que la edad del padre y la del padre, mayor que la del hijo, entonces el abuelo es mayor que el hijo.

iii) Si $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc.$

Demostración

$$\underset{(+)}{a > b \;\Rightarrow\; a - b > 0}$$

$$\underset{(+)}{c > 0}$$

Multiplicándolos:

$$(a-b)c > 0$$
$$ac - bc > 0$$
$$ac > bc$$

iv) Si $a > b \;\wedge\; c < 0 \;\Rightarrow\; ac < bc.$

Demostración

$$\underset{(+)}{a > b \;\Rightarrow\; a - b > 0}$$

$$\underset{(-)}{c < 0}$$

Multiplicándolos:

$$(a-b)c < 0$$
$$ac - bc < 0$$
$$ac < bc$$

v) Si $a > b > 0 \;\wedge\; c > d > 0 \;\Rightarrow\; ac > bd.$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} a > b > 0 \overset{\text{por } c}{\Rightarrow} ac > bc \\ c > d > 0 \overset{\text{por } b}{\Rightarrow} bc > bd \end{array}\right\} \; ac > bc \;\wedge\; bc > bd \overset{\text{de ii)}}{\Rightarrow} ac > bd$$

vi) Si $a > b > 0 \;\wedge\; n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a^n > b^n.$

Demostración

$$\left.\begin{array}{c} a > b > 0 \\ a > b > 0 \\ \vdots \\ a > b > 0 \end{array}\right\} n \text{ veces}$$

De v)

$$a^n > b^n$$

vii) Si $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Demostración

$$a > b$$

Multipliquemos ambos miembros de la desigualdad por $\frac{1}{ab}$ (que es positivo)

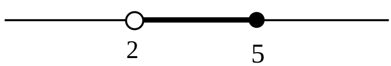
$$\frac{1}{ab}(a) > \frac{1}{ab}(b)$$
$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$$

2. Intervalos

Son conjuntos de números que cumplen determinada(s) relación(es) de orden y se les representa gráficamente con ayuda del eje real.

Ejemplo

$A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 5\}$



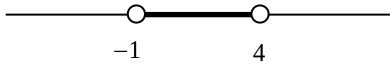
2.1. Clasificación de los intervalos

Pueden ser:

i) Cerrados, cuando contienen a sus extremos.
Ejemplo:

$[-1, 4]$

ii) Abiertos, cuando no contienen a ningún extremo.
Ejemplo:



$]-1, 4[$

iii) Semiabiertos, cuando contienen solamente a un extremo.
Ejemplo:

$[-1, 4[$

Otros ejemplos:

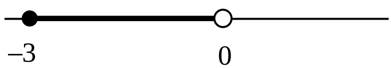
$[-1, \infty[$

$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

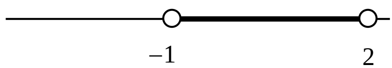
2.2. Operaciones con intervalos

Dado que los intervalos son conjuntos, es posible efectuar operaciones con intervalos. A saber:

i) Unión: se trata de reunir los elementos de los intervalos dados.
Ejemplo:



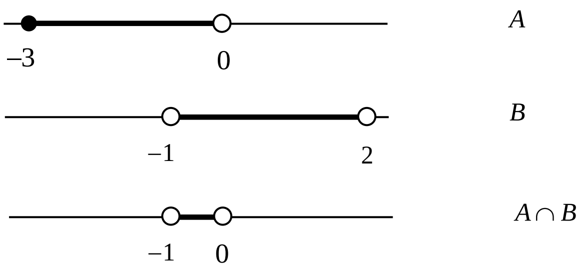
A



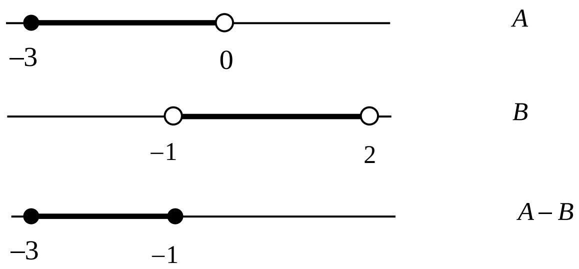
B

$A \cup B$

ii) Intersección: se trata de encontrar los elementos comunes de los intervalos dados.
Ejemplo:



iii) Diferencia: en $A-B$ se trata de encontrar los elementos de A que no pertenecen a B, o, dicho de otra forma, los elementos que solamente pertenecen a A.
Ejemplo:



3. Inecuaciones lineales con una incógnita

Son aquellas que se pueden convertir a la forma $ax+b\geq 0$ ó $ax+b\leq 0$, después de aplicadas las propiedades de las desigualdades anteriormente explicadas en el acápite 1.2. (ii, iii y iv).

La solución de $ax+b\geq 0$ (por ejemplo) es $x\geq -\dfrac{b}{a}$.

Ejemplo:
Resolver $5x+3(1-x)<9-x$.

$$\begin{aligned} 5x+3(1-x)&<9-x\\ 5x+3-3x&<9-x\\ 2x+3&<9-x\\ 3x&<6 \end{aligned}$$

Por la propiedad iii)

$$x<\frac{6}{3}$$
$$x<2 \quad \text{ó} \quad x\in\left]-\infty,2\right[$$

Ejemplo:
Resolver $ax-b(a-x)\geq b(x+1)$, si se conoce que $a>0>b$.

$$\begin{aligned} ax-ab+bx&\geq bx+b\\ ax&\geq ab+b \end{aligned}$$

Como $a>0$:

$$x\geq\frac{ab+b}{a}$$
$$x\geq b+\frac{b}{a} \quad \text{ó} \quad x\in\left[b+\frac{b}{a},\infty\right[$$

4. Resolución de inecuaciones cuadráticas con una incógnita
La forma general de las inecuaciones cuadráticas es

$$ax^2 + bx + c > 0,$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$
$$ax^2 + bx + c < 0,$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

i) Cuando $\Delta > 0$: Se factoriza el trinomio

Ejemplo:
Resolver $x^2 - 2x - 15 \geq 0$.

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$
$$(x-5)(x+3) \geq 0$$

$$(x-5 \geq 0 \ \wedge \ x+3 \geq 0) \ \cup \ (x-5 \leq 0 \ \wedge \ x+3 \leq 0)$$
$$(x \geq 5 \ \cap \ x \geq -3) \ \cup \ (x \leq 5 \ \cap \ x \leq -3)$$
$$(x \geq 5) \ \cup \ (x \leq -3)$$

La respuesta es $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[5, \infty\right[$

ii) Cuando $\Delta = 0$: Se factoriza el trinomio y se debe tener en cuenta que el cuadrado de un número real es siempre positivo o cero.

Ejemplo:
Resolver $x^2 - 6x + 9 > 0$.

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$
$$\underbrace{(x-3)^2}_{(+)\text{ ó } 0} > 0$$

x puede tomar cualquier valor excepto 3, ya que $(3-3)^2 \not> 0$.

$$\therefore\ x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Ejemplo:
Resolver $x^2 + 4x + 4 \leq 0$.

$$x^2 + 4x + 4 \leq 0$$
$$\underbrace{(x+2)^2}_{(+)\text{ ó }0} \leq 0$$

La única posibilidad es $x + 2 = 0$, ya que $\underbrace{(x+2)^2}_{(+)\text{ ó }0} \not< 0$.

$$\therefore\ x = -2$$

iii) Cuando $\Delta < 0$: En vista de que no es posible factorizar el trinomio, se puede aplicar cualquiera de los dos métodos siguientes:

a) Completar cuadrados

Ejemplo:
Resolver $x^2 - 10x + 28 > 0$.

$$x^2 - 10x + 28 > 0$$
$$\underbrace{\underbrace{(x-5)^2}_{(+)\text{ ó }0} + 3}_{(+)} > 0$$

Como el primer miembro resulta positivo para todo valor real de x y se pide hallar los valores de x para los que el primer miembro es positivo, el conjunto solución es:

$$x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

Resolver $x^2+6x+13\le 0.$

$$x^2+6x+13\le 0$$

$$\underbrace{\underbrace{(x+3)^2}_{(+)\text{ ó }0}+4}_{(+)}\le 0$$

Como el primer miembro resulta positivo para todo valor real de x y se pide hallar los valores de x para los que el primer miembro es negativo o cero, el conjunto solución es:

$$x\in\varnothing$$

b) Aplicar el siguiente teorema:

El trinomio ax^2+bx+c, cuyo discriminante es negativo, será siempre:

- □ positivo si $a>0.$
- □ negativo si $a<0.$

Demostración

Reescribamos el trinomio de la siguiente manera:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

En cuanto a signos:

$$ax^2+bx+c=a\left[\underbrace{(+)\ \text{ó}\ 0}\ -\frac{(-)}{(+)}\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\underbrace{(+)\ \text{ó}\ 0}\ -(-)\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\underbrace{(+)\ \text{ó}\ 0}\ +(+)\right]$$

$$ax^2+bx+c=a\left[(+)\right]$$

De donde se deduce que el trinomio tendrá el mismo signo que a. Por ello:

- Si $a>0 \Rightarrow ax^2+bx+c>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- Si $a<0 \Rightarrow ax^2+bx+c<0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:
Resolver $x^2-10x+28>0$.

Como $\Delta=10^2-4(1)(28)=-12<0$ y $a=1>0$, según el teorema, $x^2-10x+28>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\therefore\ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:
Resolver $-x^2-6x-13 \geq 0$.

$\Delta=(-6)^2-4(-1)(-13)=-16<0$ y $a=-1<0$. Según el teorema, $-x^2-6x-13<0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Como se pide hallar los valores de x para los que el trinomio $-x^2-6x-13$ es positivo o cero:

$$\therefore \; x \in \varnothing$$

Nota:
Se debe tener en cuenta que las inecuaciones cuadráticas también se podrán resolver con el método de los puntos críticos (o de las zonas) que se detallará a continuación.

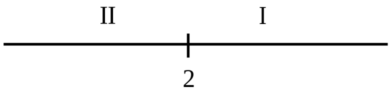
5. Método de los puntos críticos (o de las zonas)
Empecemos a explicar el método con una inecuación de primer grado (muy sencilla de resolver):

$$x > 2 \;\rightarrow\; \text{su solución evidente es } \left]2, \infty\right[$$

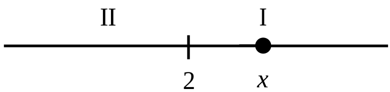
1er. paso: Convertir al segundo miembro en 0 y factorizar el otro miembro de la forma $a(x \pm b)$.

$$1(x-2) > 0$$

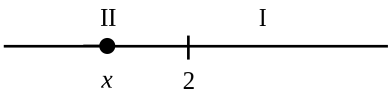
2º paso: Marcar en el eje real el opuesto de -2, es decir, 2 (punto crítico) y se consiguen así dos zonas, I y II.



Si se escoge un x cualquiera en la zona I

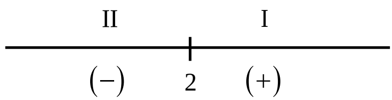


Se cumplirá que $x > 2 \;\Rightarrow\; x-2 > 0$.
En cambio, si se escoge un x cualquiera en la zona II



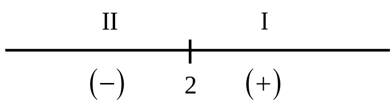
Se tendrá que $x<2 \Rightarrow x-2<0.$

En resumen



$(-)$ indica que $x-2$ es **negativo** para todo $x<2.$ (Si x está a la **izquierda** de 2, ocurrirá que $x-2<0.$)
$(+)$ indica que $x-2$ es **positivo** para todo $x>2.$ (Si x está a la **derecha** de 2, ocurrirá que $x-2>0.$)

3er. paso: Determinar qué zona cumple con el enunciado.



Como el enunciado es $x-2>0,$ la solución parcial será la zona I.

4º paso: Analizar si se incluyen a los puntos críticos en la solución final. Basta con reemplazar el punto crítico en el enunciado para averiguar si lo cumple.
Si se reemplaza $x=2$ en el enunciado

$$x-2>0$$

resulta

$$2-2>0$$
$$0>0$$

lo cual es falso y por lo tanto 2 no pertenece al conjunto solución.

Respuesta final: $x>2$ ó $x \in \left]2, \infty\right[.$

Una vez que se han entendido los cuatro pasos del método expuesto, es posible aplicarlo a las inecuaciones cuadráticas, de grado superior y racionales, como detallaremos en los ejemplos siguientes.

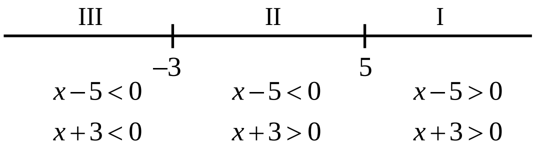
5.1. Inecuaciones cuadráticas

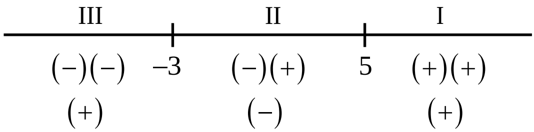
Resolver $x^2 - 2x - 15 \geq 0$.

1º Factorizar

$$(x-5)(x+3) \geq 0$$

2º Ubicar 5 y -3 en el eje real





3º Como se pretende que $(x-5)(x+3)$ sea mayor o igual que cero, nos quedamos con las zonas marcadas con $(+)$ (Zonas I y III).

$$x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]5, \infty\right[$$

4º Si reemplazamos $x = 5$ ó $x = -3$ en el enunciado

$$x^2 - 2x - 15 \geq 0$$

se obtiene

$$0 \geq 0$$

lo cual es cierto, entonces se debe incluir a 5 y -3 en la solución.

Por lo tanto el conjunto solución es $x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left[5, \infty\right[$.

5.2. Inecuaciones de grado superior

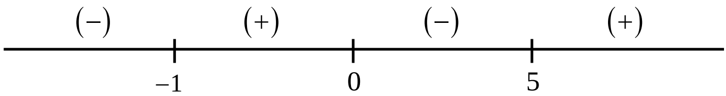
Ejemplo:

Resolver $x^3 - 4x^2 - 5x < 0$.

1º

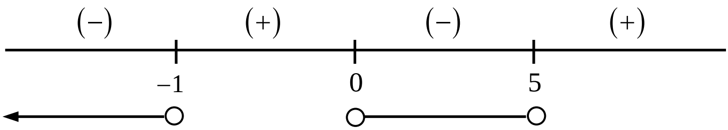
$$x(x+1)(x-5) < 0$$

2º



$\underbrace{x}_{-}\underbrace{(x+1)}_{-}\underbrace{(x-5)}_{-} \Rightarrow (-)$ $\underbrace{x}_{-}\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-5)}_{-} \Rightarrow (+)$ $\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-5)}_{-} \Rightarrow (-)$ $\underbrace{x}_{+}\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-5)}_{+} \Rightarrow (+)$

3º



4º Ningún valor crítico es parte de la solución, luego:

$$x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]0, 5\right[$$

Ejemplo:

Resolver $(2x-3)(x^2+12x+36)(-x^2+2x-7)(x+5) < 0$.

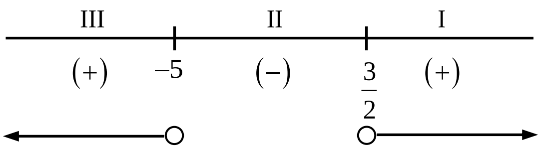
$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+6)^2(-x^2+2x-7)(x+5) < 0$$

Analicemos los factores:

- □ $(x+6)^2$ es positivo o cero. Si es positivo puede ser eliminado por no alterar el signo de la expresión; si es cero, la expresión se anula y como $0<0$ es falso, -6 no es parte de la solución.
- □ $-x^2+2x-7$ es negativo, porque $\Delta<0$ y $a=-1<0$, entonces el trinomio puede ser eliminado cambiándole de signo a la expresión

Luego, la inecuación se puede expresar como:

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+5)>0 \qquad \text{pero } x\neq -6$$



El conjunto solución es:

$$x\in\,]-\infty,-5[\,\cup\,]3/2,\infty[\,-\{-6\}$$

5.3. Inecuaciones racionales

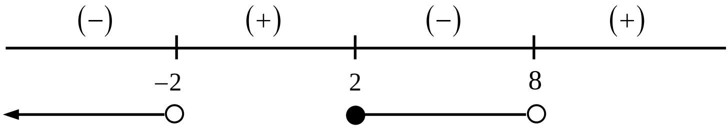
Ejemplo:

Resolver $\dfrac{(4x-8)^3(-x^2)(x+2)}{(x^2+x+1)(x-8)}\geq 0.$

$$\frac{4^3(x-2)^3\overset{(-)\text{ ó }0}{(-x^2)}(x+2)}{\underbrace{(x^2+x+1)}_{(+)}(x-8)}\geq 0$$

El factor $-x^2$ puede ser eliminado cambiando de signo a la expresión y teniendo en cuenta que si $x=0$, la inecuación se cumple:

$$\frac{(x-2)^3(x+2)}{(x-8)} \leq 0 \qquad \cup \qquad x=0$$



El valor $x=8$ no cumple con la inecuación dada ya que hace 0 al denominador.

Luego, el conjunto solución es

$$x \in \left]-\infty,-2\right[\cup \{0\} \cup \left[2,8\right[$$

6. Valor absoluto de un número

Si $a \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de a se denota $|a|$ y se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{cuando} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{cuando} \quad a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|8| = 8$ porque $8 \geq 0$.

$|-5| = -(-5) = 5$ porque $-5 < 0$.

$|-x^2+4x-6| = -(-x^2+4x-6) = x^2-4x+6$ porque $-x^2+4x-6$ es siempre menor que cero ($\Delta < 0$ y $a=-1<0$).

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5, & \text{cuando } 2x+5 \geq 0 \\ -(2x+5), & \text{cuando } 2x+5 < 0 \end{cases}$$

De los ejemplos precedentes se desprende que el valor absoluto es siempre positivo o cero.

6.1. Propiedades del valor absoluto

P1 $|a| \geq 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

P2 $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

P3 $|a| = |-a|$

P4 $|ab| = |a||b|$

P5 $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0)$

P6 $|a|^2 = a^2$

P7 $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ siempre que $a \geq 0$.

P8 $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a \cup x \geq a$ siempre que $a \geq 0$.

Ejemplos:

$$|7| = |-7|$$

$$|2x(x+4)| = |2x||x+4|$$

$$|-x+5|^2 = (-x+5)^2$$

$$|x-4| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-4 \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq 9$$

$$|2x+1| > 3 \Rightarrow 2x+1 < -3 \quad \cup \quad 2x+1 > 3$$

$$x < -2 \quad \cup \quad x > 1$$

Ejemplo:

El conjunto solución de $|2x+3| > -2$ es $x \in \mathbb{R}$ porque el primer miembro es siempre positivo o cero (por ser $|\ |$)

Ejemplo:

El conjunto solución de $|x-2|<-1$ es $x \in \varnothing$ porque el primer miembro es siempre positivo o cero y el segundo, negativo y se pide $(+)<(-)$ que es falso.

Nota:
En general $|a+b| \neq |a|+|b|$. La afirmación es cierta si a y b son de igual signo:

$$|3+5| = |3|+|5| = 8$$
$$\underbrace{|5-1|}_{4} \neq \underbrace{|5|+|-1|}_{6}$$

6.2. Inecuaciones con valor absoluto

Si se tiene un solo valor absoluto se pueden utilizar las propiedades referidas anteriormente o aplicar el método de las zonas que se describirá posteriormente.

Ejemplo:

Resolver $|2x+8| \leq 3x+2$.

a) Si $3x+2 \geq 0 \Rightarrow -3x-2 \leq 2x+8 \leq 3x+2$

$$x \geq -2/3 \quad \cap \quad -3x-10 \leq 2x \leq 3x-6$$
$$x \geq -2/3 \quad \cap \quad [-10 \leq 5x \quad \cap \quad 6 \leq x]$$
$$x \geq -2/3 \quad \cap \quad [-2 \leq x \quad \cap \quad 6 \leq x]$$
$$x \geq -2/3 \quad \cap \quad x \geq 6$$
$$x \in [6, \infty[\qquad (\alpha)$$

b) Si $3x+2<0 \Rightarrow |2x+8| \leq \underset{(-)}{3x+2}$

$$x \in \varnothing \qquad (\beta)$$

Uniendo (α) con (β):

$$x \in [6,\ \infty[$$

Ejemplo:

Resolver $|3x+4| \geq x+2$.

a) Si $\ x+2 \geq 0 \ \Rightarrow \ [3x+4 \geq x+2 \quad \cup \quad 3x+4 \leq -x-2]$

$$x \geq -2 \quad \cap \quad [x \geq -1 \quad \cup \quad x \leq -3/2]$$

$$x \in [-2,\ -3/2] \cup [-1,\ \infty[\qquad (\alpha)$$

b) Si $\ x+2 < 0 \ \Rightarrow \ |3x+4| \geq \underset{(-)}{x+2}$

$$x < -2 \quad \cap \quad [x \in \mathbb{R}]$$

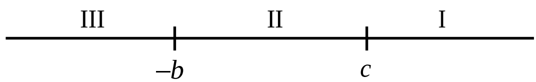
$$x \in]-\infty,\ -2[\qquad (\beta)$$

Uniendo (α) con (β):

$$x \in]-\infty,\ -3/2] \cup [-1,\ \infty[$$

7. Método de las zonas aplicado a valores absolutos

La idea es averiguar el signo de las expresiones que están afectadas del valor absoluto para poder escribirlas sin dicho valor absoluto. Para ello es recomendable factorizar dichas expresiones en la forma $a(x+b)(x-c)\ \cdots$ y tener en cuenta el segundo paso del método de los puntos críticos (hemos supuesto $-b < c$).



$x-c<0$	$x-c<0$	$x-c>0$
$x+b<0$	$x+b>0$	$x+b>0$

Ejemplo:

Resolver $|3x+4| \geq x+2$.

$$3\left|x+\frac{4}{3}\right| \geq x+2$$

II I

$$\left(x+\frac{4}{3}<0\right) \quad -\frac{4}{3} \quad \left(x+\frac{4}{3}>0\right)$$

Zona I

$$x \geq -4/3 \quad \cap \quad 3(x+4/3) \geq x+2$$
$$x \geq -4/3 \quad \cap \quad x \geq -1$$
$$\therefore \ x \in [-1, \infty[\qquad (\alpha)$$

Zona II

$$x < -4/3 \quad \cap \quad 3(-x-4/3) \geq x+2$$
$$x < -4/3 \quad \cap \quad x \leq -3/2$$
$$\therefore \ x \in]-\infty, -3/2] \qquad (\beta)$$

Como $CS = CS_\alpha \cup CS_\beta$:

$$x \in]-\infty, -3/2] \cup [-1, \infty[$$

Ejemplo:

Resolver $3|2x+1| - |3x-6| > 2.$

$$6|x+1/2| - 3|x-2| > 2$$

III II I

$$-\frac{1}{2} \qquad 2$$

Zona I

$$x \geq 2 \quad \cap \quad 6(x+1/2)-3(x-2)>2$$
$$x \geq 2 \quad \cap \quad x>-7/3$$
$$\therefore \ x \in [2, \infty[\qquad (\alpha)$$

Zona II

$$-1/2 \leq x \leq 2 \quad \cap \quad 6(x+1/2)-3(-x+2)>2$$
$$-1/2 \leq x \leq 2 \quad \cap \quad x>5/9$$
$$\therefore \ x \in]5/9, 2] \qquad (\beta)$$

Zona III

$$x \leq -1/2 \quad \cap \quad 6(-x-1/2)-3(-x+2)>2$$
$$x \leq -1/2 \quad \cap \quad x<-11/3$$
$$\therefore \ x \in]-\infty, -11/3[\qquad (\gamma)$$

Como $\mathrm{CS} = \mathrm{CS}_\alpha \cup \mathrm{CS}_\beta \cup \mathrm{CS}_\gamma$:

$$x \in]-\infty, -11/3] \cup]5/9, \infty[$$

Ejercicios resueltos

321. Si se cumple que $-7 \leq x < -2$, ¿entre qué valores varía $\dfrac{330}{4-x}$?

Forma 1

A partir de $-7 \leq x < -2$, obtenemos:

$$7 \geq -x > 2$$
$$11 \geq 4 - x > 6$$

Como tanto 11, $4 - x$, y 6 son positivos:

$$\frac{1}{11} \leq \frac{1}{4-x} < \frac{1}{6}$$

Por 330

$$30 \leq \frac{330}{4-x} < 55$$

Forma 2

Dividamos

$$\begin{array}{rr|l} 330 & & 4-x \\ \cline{3-3} -328 & +82x & 82 \\ \hline 2 & +82x & \end{array}$$

$$\frac{330}{4-x} = 82 + \frac{2+82x}{4-x}$$

Si $-7 \leq x < -2$, entonces:

$$-574 \leq 82x < -164$$
$$-572 \leq 2 + 82x < -162$$

Si $-7 \leq x < -2$, entonces:

$$7 \geq -x > 2$$
$$11 \geq 4 - x > 6$$

Averigüemos en qué intervalo se encuentra $\dfrac{N}{D}=\dfrac{2+82x}{4-x}$.

$$-572 \leq N < -162$$

$$6 < D \leq 11$$

El mayor valor de $\dfrac{N}{D}$ será con $N_{máx}$ y $D_{mín}$ $\dfrac{-162}{6}=-27$ (extremo excluido).

El menor valor de $\dfrac{N}{D}$ será con $N_{mín}$ y $D_{máx}$ $\dfrac{-572}{11}=-52$ (extremo incluido).

Por lo tanto

$$-52 \leq \frac{2+82x}{4-x} < -27$$

$$30 \leq 82+\frac{2+82x}{4-x} < 55$$

$$30 \leq \frac{330}{4-x} < 55$$

322. Resolver

$$\frac{2x+5}{2}+\frac{2x-2}{3} \leq \frac{3x+2}{8}-1$$

Multipliquemos ambos miembros por 24:

$$12(2x+5)+8(2x-2) \leq 3(3x+2)-24$$

$$24x+60+16x-16 \leq 9x+6-24$$

$$31x \leq -62$$

Como $31>0$:

$$x \leq -2$$

$x \in \left]-\infty, -2\right]$.

323. Encontrar en términos de a el conjunto solución de

$$\frac{(3a-1)(x+1)}{3} < \frac{3ax+(3a-2)^2}{8} + \frac{x+9a^2}{12}$$

Forma 1

Multipliquemos ambos miembros por 24:

$$8(3a-1)(x+1) < 3\left[3ax+(3a-2)^2\right]+2\left(x+9a^2\right)$$
$$24ax+24a-8x-8 < 9ax+3\left(9a^2-12a+4\right)+2x+18a^2$$
$$15ax-10x < 45a^2-60a+20$$

Entre 5:

$$(3a-2)x < 9a^2-12a+4$$
$$(3a-2)x < (3a-2)^2$$

Si $3a-2>0 \Rightarrow x < \dfrac{(3a-2)^2}{3a-2} \Rightarrow x < 3a-2.$

Si $3a-2<0 \Rightarrow x > \dfrac{(3a-2)^2}{3a-2} \Rightarrow x > 3a-2.$

Si $3a-2=0 \Rightarrow 0x<0 \Rightarrow x \in \varnothing.$

Forma 2

A partir de $(3a-2)x < (3a-2)^2$

$$(3a-2)x-(3a-2)^2 < 0$$
$$(3a-2)\left[x-(3a-2)\right] < 0$$

Si $3a-2>0 \Rightarrow x-(3a-2)<0 \Rightarrow x<3a-2.$

Si $3a-2<0 \Rightarrow x-(3a-2)>0 \Rightarrow x>3a-2.$

Si $3a-2=0 \Rightarrow 0[x-0]<0 \Rightarrow x\in\varnothing.$

324. Si A es el conjunto solución de $a(x+2b)\leq 2a(a+b)$ y B, el conjunto solución de $bx-b^2<ax-a^2$, encontrar $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ si $b<0<a.$

Resolvamos:

$$ax+2ab\leq 2a^2+2ab$$
$$\underset{+}{a}\,x\leq 2a^2$$
$$x\leq 2a$$

De donde:

$$\mathrm{A}=\left]-\infty,\,2a\right]$$

De otro lado:

$$bx-b^2<ax-a^2$$
$$(b-a)x<b^2-a^2$$

Si $b<a \Rightarrow b-a<0,$ entonces:

$$\underbrace{(b-a)}_{(-)}x<b^2-a^2$$
$$x>b+a$$

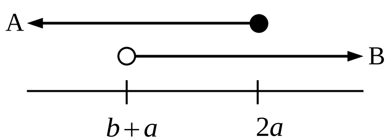
Es decir,

$$\mathrm{B}=\left]\,b+a,\infty\right[$$

Comparemos $2a$ con $b+a$:

$$b<a \Rightarrow b+a<a+a \Rightarrow b+a<2a$$

De donde:



$$A \cap B = \left] \, b + a, \, 2a \right]$$

325. Hallar un número entero y positivo si se sabe que la tercera parte del que le precede, disminuida en una decena, es mayor que 14, y que la cuarta parte del que le sigue, aumentada en una decena, es menor que 29.

Sea x el número pedido.

Se deberá cumplir que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}(x-1)-10>14 & \Rightarrow \quad x-1>3(14+10) \quad \Rightarrow \quad x>73 \\ \dfrac{1}{4}(x+1)+10<29 & \Rightarrow \quad x+1<4(29-10) \quad \Rightarrow \quad x<75 \end{cases}$$

El único número entero y positivo que cumple ambas condiciones es 74.

326. Si $a>1$, resolver para x:

$$\frac{3x-2}{1-a} \leq 4x+5$$

Forma 1

Tenemos

$$\frac{3x-2}{1-a}-4x-5 \leq 0$$

$$\frac{3x-2-4x-5+4ax+5a}{1-a} \leq 0$$

$$\frac{(4a-1)x+(5a-7)}{1-a}\le 0$$

$$\frac{(4a-1)\left[x+\dfrac{5a-7}{4a-1}\right]}{1-a}\le 0$$

Del dato:

$$a>1 \Rightarrow 4a>4 \Rightarrow 4a-1>3>0$$
$$a>1 \Rightarrow 0>1-a$$

De donde:

$$\frac{(+)\left[x+\dfrac{5a-7}{4a-1}\right]}{(-)}\le 0$$

$$x+\frac{5a-7}{4a-1}\ge 0$$

Entonces

$$x\ge\frac{7-5a}{4a-1}$$

$x\in\left[\dfrac{7-5a}{4a-1},\infty\right[.$

Forma 2

A partir de $\dfrac{3x-2}{1-a}\le 4x+5,$ como $a>1 \Rightarrow 0>1-a.$

Al ser negativo el denominador, si multiplicamos ambos miembros de la inecuación por $1-a,$ el sentido de la inecuación cambiará. Entonces:

$$\begin{aligned} 3x-2 &\geq (1-a)(4x+5) \\ 3x-2 &\geq 4x+5-4ax-5a \\ 4ax-x &\geq 7-5a \\ (4a-1)x &\geq 7-5a \end{aligned}$$

Como $a > 1 \Rightarrow 4a > 4 \Rightarrow 4a-1 > 3 \Rightarrow 4a-1 > 0.$

Dividamos entre $4a-1$:

$$x \geq \frac{7-5a}{4a-1}$$

$x \in \left[\frac{7-5a}{4a-1}, \infty \right[.$

327. Resolver para x:

$$-1 < \frac{px+q}{qx-p} < 1$$

si $p < q < 0.$

Encontremos la solución de

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{px+q}{qx-p} \\ 0 &< \frac{px+q}{qx-p} + 1 \\ 0 &< \frac{px+q+qx-p}{qx-p} \end{aligned}$$

$$0<\frac{(p+q)\left[x+\dfrac{q-p}{p+q}\right]}{q\left(x-\dfrac{p}{q}\right)}$$

$$0<\frac{(-)\left(x+\dfrac{q-p}{p+q}\right)}{(-)\left(x-\dfrac{p}{q}\right)}$$

$$0<\frac{x-\dfrac{p-q}{p+q}}{x-\dfrac{p}{q}}$$

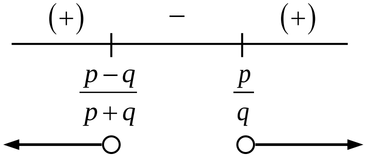
Ubiquemos a $\dfrac{p-q}{p+q}$ con respecto a $\dfrac{p}{q}$. Tenemos que:

$$\frac{p-q}{p+q}=\frac{p+q-2q}{p+q}=1-\frac{2q}{p+q}=1-\frac{2(-)}{(-)+(-)}=1-\frac{(-)}{(-)}=1-(+)$$

Entonces $\dfrac{p-q}{p+q}<1.$

De otro lado como $p<q<0,$ al dividir entre q resulta $\dfrac{p}{q}>1>0.$

Entonces:



(α)

Resolvamos ahora:

$$\frac{px+q}{qx-p}<1$$

$$\frac{px+q}{qx-p}-1<0$$

$$\frac{px+q-qx+p}{qx-p}<0$$

$$\frac{(p-q)x+(q+p)}{qx-p}<0$$

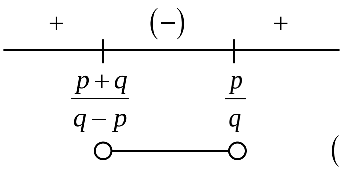
$$\frac{(p-q)\left(x+\dfrac{p+q}{p-q}\right)}{q\left(x-\dfrac{p}{q}\right)}<0$$

Como $p<q<0 \Rightarrow p-q<0$:

$$\frac{(-)\left(x+\dfrac{p+q}{p-q}\right)}{(-)\left(x-\dfrac{p}{q}\right)}<0$$

$$\frac{\left(x-\dfrac{p+q}{q-p}\right)}{\left(x-\dfrac{p}{q}\right)}<0$$

Ubiquemos a $\dfrac{p+q}{q-p}$ con respecto a $\dfrac{p}{q}$: sabemos que $p<q<0 \Rightarrow 0<q-p$, entonces el signo de $\dfrac{p+q}{q-p}$ es $\dfrac{(-)+(-)}{(+)}=\dfrac{(-)}{(+)}=(-)$ y el signo de $\dfrac{p}{q}$ es $\dfrac{(-)}{(-)}=(+)$. De donde:

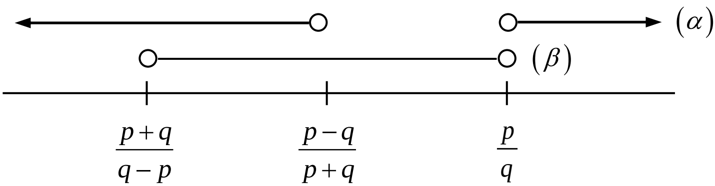


(β)

Finalmente, la solución es $(\alpha)\cap(\beta)$.

Debemos ubicar $\dfrac{p+q}{q-p}$ con respecto a $\dfrac{p-q}{p+q}$: como $\dfrac{p+q}{q-p}<0 \Rightarrow \dfrac{p+q}{p-q}>0$

de lo cual se deduce que $\dfrac{p-q}{p+q}>0$. Entonces:



$$\therefore\ x\in\left]\frac{p+q}{q-p},\frac{p-q}{p+q}\right[$$

328. Una compañía importó cierta cantidad de televisores. De estos, vende la tercera parte más 10 televisores y luego vende la mitad de los que le quedaban más 10 televisores, quedándole por vender más de 11 televisores. Si hubiese vendido primero la mitad más 10 televisores y luego la tercera parte de los que le quedaban más 10 televisores, le hubiese quedado por vender menos de 10 televisores. ¿Cuántos televisores importó?

Sea x el número de televisores importados.
Del primer caso, le quedaría por vender:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{3}-10\right]-10>11$$
$$\frac{2x}{3}-10>(11+10)2$$
$$\frac{2x}{3}>42+10$$
$$x>\frac{3(52)}{2}$$
$$x>78 \qquad (\alpha)$$

Del segundo caso, le quedaría por vender:

$$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}x-10\right]-10<10$$
$$\frac{1}{2}x-10<\frac{3(10+10)}{2}$$
$$\frac{1}{2}x<30+10$$
$$x<80 \qquad (\beta)$$

De (α) y (β):

$$x=79$$

329. Resolver

$$4x+8<4x+5<3x+6$$

La inecuación doble se resolverá intersecando la soluciones de $4x+8<4x+5$ y $4x+5<3x+6.$ Sin embargo, de la primera se deduce que $8<5,$ lo cual es falso siempre. Por lo tanto, ningún valor real de x cumplirá con la primera inecuación, siendo la solución de la inecuación doble $x\in\varnothing.$

330. Resolver

$$3x+6<4x+5\leq 6x-1$$

Equivale a resolver:

$$\begin{array}{ccc} 3x+6<4x+5 & \cap & 4x+5\leq 6x-1 \\ 1<x & \cap & 6\leq 2x \\ x>1 & \cap & x\geq 3 \end{array}$$

De donde

$$x\geq 3$$

$x\in[\ 3,\infty[$.

331. Si la inecuación $x+a^2\leq ax+1\leq x+a^3$ se satisface para un único valor de x, encontrar a $(a<1)$ y dicha solución única.

Resolvamos

$$\begin{gathered} x+a^2\leq ax+1 \\ x(1-a)\leq 1-a^2 \\ x(1-a)\leq (1-a)(1+a) \end{gathered}$$

Como $a<1 \Rightarrow 0<1-a.$
Dividamos entre $1-a$:

$$x\leq 1+a \qquad (\alpha)$$

Resolvamos

$$\begin{gathered} ax+1\leq x+a^3 \\ 1-a^3\leq x-ax \\ (1-a)\left(1+a+a^2\right)\leq x(1-a) \end{gathered}$$

Dividamos entre $1-a$:

$$1+a+a^2\leq x \qquad (\beta)$$

De (α) y (β):

$$1+a+a^2 \leq x \leq 1+a$$

Si hay solución única:

$$1+a+a^2 = 1+a$$
$$a^2 = 0$$
$$a = 0$$

La única solución será:

$$x = 1+a$$
$$x = 1$$

332. Resolver

$$(x+1)(x-2)(x+3) < x^3 - 10$$

Desarrollemos el primer miembro:

$$(x^2 - x - 2)(x+3) < x^3 - 10$$
$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < x^3 - 10$$
$$2x^2 - 5x + 4 < 0$$
$$x^2 - \frac{5}{2}x + 2 < 0$$

Completemos cuadrados:

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{15}{16} + 2 < 0$$
$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 < -\frac{7}{16}$$

Como el primer miembro es positivo o cero, nunca se cumplirá que sea menor que $-7/16$,

$$\therefore\ x \in \varnothing$$

333. La agencia central de un banco atiende 36,000 operaciones bancarias al mes. Un cajero automático atiende 120 operaciones por día y está disponible los 30 días del mes; en cambio, un empleado atiende 30 operaciones por día y labora 20 días al mes. El costo mensual de un cajero es \$600 y un empleado gana \$500 al mes. Si se desea que el costo mensual total del servicio de atención a los clientes se encuentre entre \$10,800 y \$15,600, ¿cuántos cajeros se deben instalar y cuántos empleados se deben contratar?

Sean x e y el número de cajeros automáticos y de empleados por contratar.

Los cajeros y los empleados deberán atender al mes 36,000 operaciones bancarias en total:

$$120(30)x + 30(20)y = 36,000$$

Entre 600

$$\begin{aligned} 6x + y &= 60 \\ y &= 600 - 6x \qquad (\alpha) \end{aligned}$$

El costo mensual total del servicio será:

$$10,800 < 600x + 500y < 15,600$$

Entre 100:

$$108 < 6x + 5y < 156$$

Reemplacemos (α)

$$\begin{aligned} 108 &< 6x + 5(60 - 6x) < 156 \\ 108 &< 300 - 24x < 156 \\ -108 &> 24x - 300 > -156 \\ 192 &> 24x > 144 \\ 8 &> x > 6 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{cases} x = 7 \ \text{ cajeros automáticos} \\ y = 18 \ \text{ empleados} \end{cases}$$

334. Determinar los valores de a para los cuales la inecuación cuadrática $(a-2)x^2+(2a-1)x+8>0$ tiene como solución a todos los reales.

Se deberán cumplir dos condiciones:

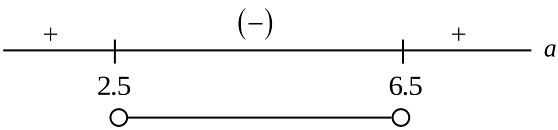
$$a-2>0 \ \wedge \ \Delta<0$$

De la primera condición

$$a>2$$

Y de la segunda

$$\begin{aligned} (2a-1)^2-4(a-2)8&<0 \\ 4a^2-36a+65&<0 \\ (2a-13)(2a-5)&<0 \\ 4(a-6.5)(a-2.5)&<0 \end{aligned}$$



Intersecando con $a>2$ resulta:

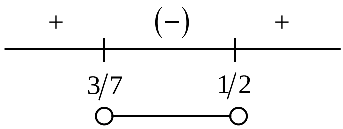
$$a \in \left]\, 2.5, 6.5 \,\right[$$

Por último, deberá analizarse qué sucede si $a-2=0 \ \Rightarrow \ a=2 \ \Rightarrow \ 0x^2+3x+8>0$. Como no se cumple para todo $x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ a$ no puede valer 2.

335. ¿Para qué valores de k se cumple que la inecuación $\left(3k^2-k\right)x^2+(2k-9)x+\left(2k^2-5\right)<0$ tiene como conjunto solución a $x\in\left]\,3/7\,,1/2\right[$?

Forma 1

Partamos de la solución de la inecuación y reconstruyámosla:



$$\left(x-\frac{3}{7}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$$
$$(7x-3)(2x-1)<0$$
$$14x^2-13x+3<0$$

Comparémosla con $\left(3k^2-k\right)x^2+(2k-9)x+\left(2k^2-5\right)<0$ y concluyamos que para que ambas tengan la misma solución, sus coeficientes correspondientes deben ser proporcionales.

$$\frac{3k^2-k}{14}=\frac{2k-9}{-13}=\frac{2k^2-5}{3}$$

De la ecuación de la izquierda

$$-39k^2+13k=28k-126$$
$$39k^2+15k-126=0$$
$$13k^2+5k-42=0$$
$$(13k-21)(k+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=21/13 \\ k=-2 \end{cases} \qquad (\alpha)$$

De la ecuación de la derecha

$$-26k^2+65=6k-27$$
$$26k^2+6k-92=0$$
$$13k^2+3k-46=0$$
$$(13k-23)(k+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=23/13 \\ k=-2 \end{cases} \qquad (\beta)$$

De (α) y (β)

$$k=-2$$

Forma 2

Resolvamos la ecuación

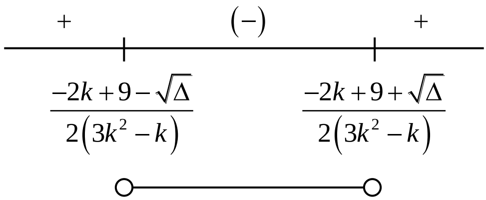
$$\left(3k^2-k\right)x^2+(2k-9)x+\left(2k^2-5\right)=0$$

$$x=\frac{-(2k-9)\pm\sqrt{(2k-9)^2-4\left(3k^2-k\right)\left(2k^2-5\right)}}{2\left(3k^2-k\right)}$$

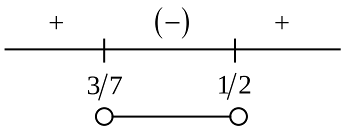
$$x=\frac{-2k+9\pm\sqrt{4k^2-36k+81-24k^4+8k^3+60k^2-20k}}{2\left(3k^2-k\right)}$$

$$x=\frac{-2k+9\pm\sqrt{-24k^4+8k^3+64k^2-56k+81}}{2\left(3k^2-k\right)}$$

$$\left[x-\frac{-2k+9+\sqrt{\Delta}}{2\left(3k^2-k\right)}\right]\left[x-\frac{-2k+9-\sqrt{\Delta}}{2\left(3k^2-k\right)}\right]<0$$



Comparemos con



Entonces

$$\begin{cases} \dfrac{-2k+9-\sqrt{\Delta}}{2\left(3k^2-k\right)}=\dfrac{3}{7} & (\alpha) \\ \dfrac{-2k+9+\sqrt{\Delta}}{2\left(3k^2-k\right)}=\dfrac{1}{2} & (\beta) \end{cases}$$

De (α):

$$-14k+63-7\sqrt{\Delta}=6\left(3k^2-k\right)$$
$$7\sqrt{\Delta}=-18k^2-8k+63$$
$$49\Delta=\left(-18k^2-8k+63\right)^2$$
$$49\left(-24k^4+8k^3+64k^2-56k+81\right)=324k^4+64k^2+3969+288k^3-2268k^2-1008k$$
$$1500k^4-104k^3-5340k^2+1736k=0$$
$$375k^4-26k^3-1335k^2+434k=0$$
$$k\left(375k^3-26k^2-1335k+434\right)=0$$

	375	-26	-1335	434	
-2	$\downarrow$	-750	1552	-434	
	375	-776	217	0	$\Rightarrow (k+2)$ es factor
1/3	$\downarrow$	125	-217		
	375	-651	0		$\Rightarrow (k-1/3)$ es factor
217/125	$\downarrow$	651			
	375	0			$\Rightarrow (k-217/125)$ es factor

$\therefore$ k puede ser $0,\,-2,\ \dfrac{1}{3}$ ó $\dfrac{217}{125}$.

Averigüemos cuál de los valores de k que satisfacen (α) cumplen también con (β): $\dfrac{-2k+9+\sqrt{\Delta}}{2\left(3k^2-k\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Restricción $3k^2-k=k(3k-1)\neq 0 \ \Rightarrow\ k\neq 0,\ 1/3$.

Probemos solamente con $k=-2$ ó $217/125$:

$$k=-2\ \Rightarrow\ \Delta=1\ \Rightarrow\ \frac{-2(-2)+9+\sqrt{1}}{2(12+2)}=\frac{14}{28}=\frac{1}{2},\ \text{sí cumple}$$

$$k = \frac{217}{125} \approx 1.736 \;\Rightarrow\; \Delta = 0.54 \;\Rightarrow\; \frac{-2(1.736)+9+\sqrt{0.54}}{2(9.048-1.736)} = \frac{6.262}{14.61} = 0.428, \text{ no cumple}$$

De donde:

$$k = -2$$

336. Resolver para x:

$$ax^2 + x - a^2x - a < 0$$

Tenemos que

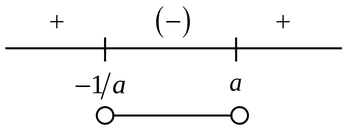
$$ax^2 + \left(1-a^2\right)x - a < 0$$

Factoricemos

$$(ax+1)(x-a) < 0$$
$$a\left(x+\frac{1}{a}\right)(x-a) < 0$$

Caso i)

Si $a > 0 \;\Rightarrow\; (+)\left(x+\frac{1}{a}\right)(x-a) < 0$

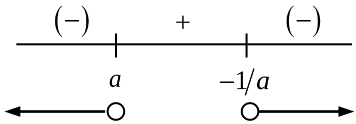


$$x \in \left]-\frac{1}{a}, a\right[$$

Caso ii)

Si $a<0 \Rightarrow (-)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)(x-a)<0$

Como $a<0 \Rightarrow -\dfrac{1}{a}>0$



$$x \in \left]-\infty, a\right[\cup \left]-\frac{1}{a}, \infty\right[$$

Caso iii)

Si $a=0$, reemplacemos en la inecuación original:

$$0x^2+x-0-0<0$$
$$x<0$$

$$x \in \left]-\infty, 0\right[$$

337. Resolver para x:

$$\frac{x-a}{x+a} \le \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$$

Tenemos:

$$\frac{x-a}{x+a}-\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\le 0$$

$$\frac{(x-a)^2-(x^2+a^2)}{(x+a)(x-a)}\le 0$$

$$\frac{-2ax}{(x+a)(x-a)}\le 0$$

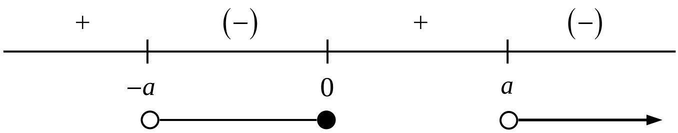
Por -1:

$$\frac{2ax}{(x+a)(x-a)}\ge 0$$

Analicemos 3 casos:

i) Si $a>0$:

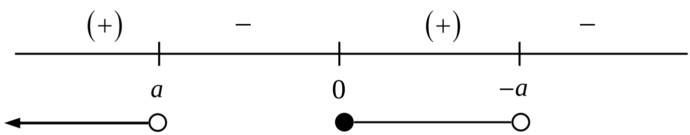
$$\frac{(+)(x-0)}{(x+a)(x-a)}\ge 0$$



$$x\in\,]-a,0]\cup\,]a,\infty[$$

ii) Si $a<0$:

$$\frac{(-)(x-0)}{(x+a)(x-a)}\ge 0$$



$$x \in \left]-\infty, a\right[\cup \left[\, 0, -a\right[$$

iii) Si $a = 0$:

$$\frac{2(0)(x-0)}{(x+0)(x-0)} \geq 0$$

$$\frac{0}{x^2} \geq 0$$

Se cumple para:

$$x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

338. ¿Qué valores de x no cumplen con $\dfrac{x-a}{x} \leq \dfrac{x}{x+a} \qquad (a<0)$?

Tenemos:

$$\frac{x-a}{x} - \frac{x}{x+a} \leq 0$$

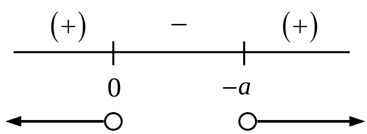
$$\frac{x^2-a^2-x^2}{x(x+a)} \leq 0$$

$$\frac{-a^2}{(x-0)(x+a)} \leq 0$$

Como $a^2 > 0$:

$$\frac{(-)}{(x-0)(x+a)} \leq 0 \;\Rightarrow\; (x-0)(x+a) > 0$$

Como $a < 0 \;\Rightarrow\; -a > 0$:



Los valores de x que no cumplen con la inecuación dada son $x \in [\,0, -a\,]$.

339. Encontrar el conjunto de posibles valores de k para que la inecuación $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3} < k-1,$ se cumpla para todo x real.

Analicemos el signo del trinomio $1x^2+2x+3$:

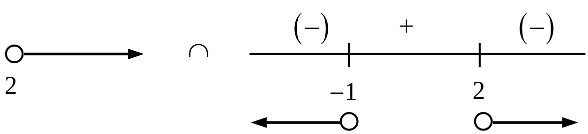
$$a=1>0 \quad \wedge \quad \Delta=(2)^2-4(1)(3)=-12<0 \;\Rightarrow\; x^2+2x+3>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Multipliquemos ambos miembros por $x^2+2x+3,$ sin cambiar el signo:

$$x^2+2x-3<(k-1)\left(x^2+2x+3\right)$$
$$x^2+2x-3<kx^2+2kx+3k-x^2-2x-3$$
$$(k-2)x^2+(2k-4)x+(3k)>0$$

Para que la solución sea $x \in \mathbb{R}$, deben cumplirse dos condiciones:

$$\begin{array}{ccc} k-2>0 & \text{y} & \Delta<0 \\ k>2 & \cap & (2k-4)^2-4(3k)(k-2)<0 \\ k>2 & \cap & -8k^2+8k+16<0 \\ k>2 & \cap & -8(k-2)(k+1)<0 \end{array}$$



De la intersección de ambas, resulta:

$$k>2$$

340. Dada la ecuación cuadrática en x:

$$\left(a-1\right)x^2-\left(3a-2\right)x+2a=0,$$

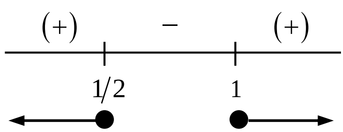
encontrar los valores de a tal que esta ecuación tenga dos raíces reales diferentes cuya suma sea no menor que 1.

Si la ecuación tiene dos raíces reales diferentes es porque su discriminante es positivo:

$$\begin{aligned}
\left(3a-2\right)^2-4\left(a-1\right)\left(2a\right)&>0\\
9a^2-12a+4-8a^2+8a&>0\\
a^2-4a+4&>0\\
\left(a-2\right)^2&>0\\
a\in\mathbb{R}-\left\{2\right\}&\qquad\left(\alpha\right)
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
S&=\frac{3a-2}{a-1}\\
\frac{3a-2}{a-1}&\geq 1\\
\frac{3a-2}{a-1}-1&\geq 0\\
\frac{3a-2-a+1}{a-1}&\geq 0\\
\frac{2a-1}{a-1}&\geq 0\\
\frac{2\left(a-\frac{1}{2}\right)}{a-1}&\geq 0
\end{aligned}$$



$$a \in \left]-\infty, 1/2\right] \cup \left]1, \infty\right[\qquad (\beta)$$

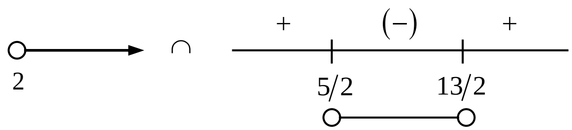
De (α) y (β):

$$a \in \left]-\infty, 1/2\right] \cup \left]1, \infty\right[- \{2\}$$

341. Determinar los valores de a para los cuales la inecuación cuadrática $(a-2)x^2+(2a-1)x+8>0$ se cumple para todos los valores reales de x.

Para que el trinomio $(a-2)x^2+(2a-1)x+8$ sea siempre mayor que cero, deben cumplirse dos condiciones:

$$\begin{array}{ccc} a-2>0 & \cap & (2a-1)^2-4(a-2)(8)<0 \\ a>2 & \cap & 4a^2-36a+65<0 \\ a>2 & \cap & (2a-5)(2a-13)<0 \\ a>2 & \cap & 4\left(a-\dfrac{5}{2}\right)\left(a-\dfrac{13}{2}\right)<0 \end{array}$$



De donde

$$a \in \left]5/2, 13/2\right[$$

342. Encontrar el conjunto de valores de k para que la desigualdad $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}<k-1$ se cumpla para todo $x \in \mathbb{R}$.

El trinomio x^2+2x+3 se puede escribir como $(x+1)^2+2$ que es siempre positivo para todo $x \in \mathbb{R}$.
Multipliquemos ambos miembros por x^2+2x+3:

$$x^2+2x-3<(k-1)\left(x^2+2x+3\right)$$
$$x^2+2x-3<kx^2+2kx+3k-x^2-2x-3$$
$$0<(k-2)x^2+(2k-4)x+3k$$

En principio, para que dicho trinomio sea positivo para todo $x \in \mathbb{R}$ deben cumplirse dos condiciones:

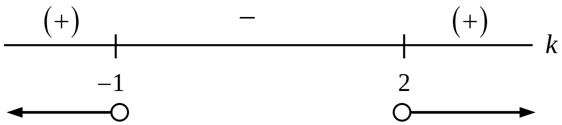
i) $k-2>0 \Rightarrow k>2$

ii) $(2k-4)^2-4(k-2)(3k)<0$

De ii)

$$(2k-4)^2-4(k-2)(3k)<0$$
$$2^2(k-2)^2-4(k-2)(3k)<0$$
$$4(k-2)\left[(k-2)-3k\right]<0$$

$$4(k-2)(-2k-2)<0$$
$$-8(k-2)(k+1)<0$$
$$8(k-2)(k+1)>0$$



Intersequemos las dos condiciones:

$$k \in \left]\,2, \infty\,\right[$$

Faltaría analizar qué sucede cuando el trinomio de segundo grado se convierte en un polinomio de primer grado:

Si $k-2=0 \Rightarrow k=2.$

Reemplacémoslo en la inecuación original

$$\frac{x^2+2x-3}{\underbrace{x^2+2x+3}_{(+)}}<2-1$$
$$x^2+2x-3<x^2+2x+3$$
$$0<6$$

Sí se cumple para $k=2.$

Finalmente

$$k\in\left]\,2,\infty\,\right[\cup\{2\}$$
$$\therefore\ k\in\left[\,2,\infty\,\right[$$

343. Dada la ecuación cuadrática en x:

$$(a-1)x^2-(3a-2)x+2a=0,$$

hallar los valores de a tal que la ecuación tenga 2 raíces reales diferentes y cuya suma sea 1 o más.

Forma 1

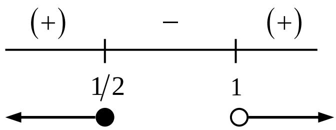
Si la ecuación debe tener dos raíces, debe ser cuadrática, entonces $a-1\neq 0 \Rightarrow a\neq 1.$

El discriminante de la ecuación debe ser mayor que 0 para que las dos raíces sean reales y diferentes:

$$\left[-(3a-2)\right]^2-4(a-1)(2a)>0$$
$$9a^2-12a+4-8a^2+8a>0$$
$$a^2-4a+4>0$$
$$(a-2)^2>0$$
$$a\in\mathbb{R}-\{2\}$$

Por otro lado, la suma de las raíces $\dfrac{3a-2}{a-1}$ debe ser mayor o igual que 1:

$$\frac{3a-2}{a-1}\geq 1$$
$$\frac{3a-2}{a-1}-1\geq 0$$
$$\frac{3a-2-a+1}{a-1}\geq 0$$
$$\frac{2a-1}{a-1}\geq 0$$
$$\frac{2(a-1/2)}{a-1}\geq 0$$



Intersequemos las tres respuestas

$$a\in\left]-\infty,1/2\right]\cup\left]1,\infty\right[-\{2\}$$

Forma 2

Apliquemos la fórmula de las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{3a-2\pm\sqrt{(3a-2)^2-4(a-1)(2a)}}{2(a-1)}$$

Se requiere que

$$a-1\neq 0\ \Rightarrow\ a\neq 1 \qquad (\alpha)$$

Además,

$$\Delta=(3a-2)^2-4(a-1)(2a)>0\ \Rightarrow\ (a-2)^2>0\ \Rightarrow\ a\in\mathbb{R}-\{2\} \qquad (\beta)$$

Por último

$$\frac{3a-2+\sqrt{(a-2)^2}}{2(a-1)}+\frac{3a-2-\sqrt{(a-2)^2}}{2(a-1)}\geq 1$$

$$\frac{6a-4}{2(a-1)}\geq 1$$

$$\frac{3a-2}{a-1}\geq 1$$

Igual que antes,

$$a\in\,]-\infty,1/2]\cup\,]1,\infty[\qquad (\gamma)$$

La respuesta final será la intersección de (α), (β) y (γ)

$$a\in\,]-\infty,1/2]\cup\,]1,\infty[-\{2\}$$

344. El número de unidades vendidas q de cierto artículo, cuando su precio unitario es p dólares, está dado por $p=600-5q$. El costo de producir q unidades del mismo artículo es $C=8,000+75q$ dólares. ¿Cuántas unidades de este artículo se deberán producir y vender de modo que la utilidad mensual sea por lo menos 5,500 dólares?

Tenemos que:

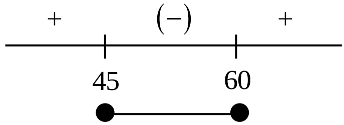
$$U = I - C$$
$$U = pq - C$$

Reemplacemos

$$U = (600 - 5q)q - (8,000 + 75q)$$
$$U = -5q^2 + 525q - 8,000$$

Como se debe cumplir que $U \geq 5,500$:

$$-5q^2 + 525q - 8,000 \geq 5,500$$
$$5q^2 - 525q + 13,500 \leq 0$$
$$q^2 - 105q + 2,700 \leq 0$$
$$(q - 45)(q - 60) \leq 0$$



$$\therefore \; q \in [\,45, 60]$$

345. El precio de venta de un artículo está dado por $p = 200 - 3q$ dólares, en donde q es el número de artículos vendidos. El costo de producir estos q artículos es $C = (650 + 5q)$ dólares. ¿Cuántas unidades de este artículo se deben producir y vender de manera que la utilidad no sea menor que 2,500 dólares?

Se tiene que

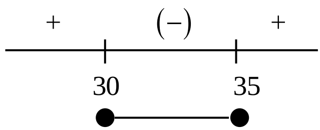
$$U = I - C$$
$$U = pq - C$$

Al reemplazar

$$U = (200 - 3q)q - (650 + 5q)$$
$$U = 200q - 3q^2 - 650 - 5q$$
$$U = -3q^2 + 195q - 650 \text{ dólares}$$

Entonces:

$$-3q^2 + 195q - 650 \geq 2,500$$
$$3q^2 - 195q + 3,150 \leq 0$$
$$q^2 - 65q + 1,050 \leq 0$$
$$(q - 30)(q - 35) \leq 0$$



De donde

$$q \in [\ 30, 35]$$

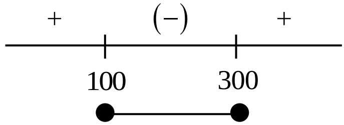
346. La utilidad que se obtiene al producir y vender mesas en una empresa está dada por $U = -\dfrac{x^2}{10} + 40x,$ en donde x representa el número de meses y U está dada en soles. Si se desea obtener una utilidad de por lo menos 3,000 soles, ¿entre qué valores debe estar comprendido el número de mesas producidas y vendidas?

Tenemos que:

$$-\frac{x^2}{10}+40x\geq 3,000$$

$$x^2-400x+30,000\leq 0$$

$$(x-100)(x-300)\leq 0$$



$$\therefore\ \ x\in[\ 100,300]$$

El número de mesas producidas y vendidas debe estar comprendido entre 100 y 300, ambos inclusive.

347. Cuando se plantan 100 árboles de naranja en una hectárea, cada árbol produce 180 naranjas al año. Sin embargo, por cada 2 árboles adicionales que se plantan, la producción por árbol decrecerá en 3 naranjas. Si las naranjas se venden a un precio promedio de S/.0.15 la unidad y el costo de mantenimiento por árbol es de S/.8 al año, determinar entre qué valores debe estar la producción anual de naranjas por árbol para que la utilidad por hectárea sea mayor que S/.1,400 y menor que S/.1,740.

Forma 1

Sea x el número de veces en el que el número inicial de 100 árboles plantados se incrementa en 2 árboles.
El número de árboles plantados será $100+2x$.
x será también el número de veces en el que la producción inicial de naranjas al año por árbol decrece en 3 naranjas.
El número de naranjas producidas al año por árbol será $180-3x$.
De donde, la producción total anual de naranjas será $(100+2x)(180-3x)$.
La utilidad por hectárea será:

$$U=I-C$$

$$U=(100+2x)(180-3x)\cdot 0.15-8(100+2x)$$

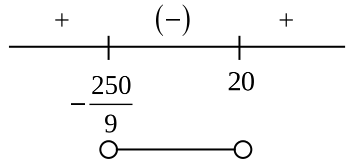
$$U = (100 + 2x)(27 - 0.45x - 8)$$
$$U = (100 + 2x)(19 - 0.45x)$$
$$U = 1{,}900 - 45x + 38x - 0.9x^2$$
$$U = -0.9x^2 - 7x + 1{,}900$$

Entonces:

$$4{,}400 < -0.9x^2 - 7x + 1{,}900 < 1{,}740$$

De la inecuación de la izquierda:

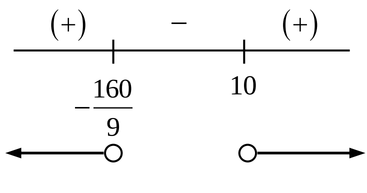
$$0.9x^2 + 7x - 500 < 0$$
$$9x^2 + 70x - 5{,}000 < 0$$
$$(9x + 250)(x - 20) < 0$$
$$9(x + 250/9)(x - 20) < 0$$



$$\therefore \; x \in \left] -250/9,\, 20 \right[\qquad (\alpha)$$

De la inecuación de la derecha:

$$0.9x^2 + 7x - 160 > 0$$
$$9x^2 + 70x - 1{,}600 > 0$$
$$(9x + 160)(x - 10) > 0$$
$$9(x + 160/9)(x - 10) > 0$$



$$\therefore \; x \in \left]-\infty, -160/9\right[\cup \left]10, \infty\right[\qquad (\beta)$$

De (α) y (β), como $x > 0$:

$$10 < x < 20$$

El número de naranjas al año por árbol es $180 - 3x$, entonces:

$$-30 > -3x > -60$$
$$150 > 180 - 3x > 120$$

Forma 2

Sea x el número de naranjas producidas al año por árbol.
La disminución de la producción respecto de las 180 iniciales será $180 - x$, en donde $x < 180$.
El número de veces en que se disminuyó la producción en 3 naranjas por árbol será $\dfrac{180 - x}{3}$, que coincidirá con el número de veces en que se aumentó el número de árboles plantados en 2 árboles a partir de los 100 iniciales.
Entonces, el número de árboles plantados será $100 + 2\left(\dfrac{180 - x}{3}\right)$.
La producción total anual de naranjas será:

$$= \left[100 + 2\left(\frac{180 - x}{3}\right)\right](x)$$
$$= \left[100 + 120 - \frac{2x}{3}\right]x$$
$$= \left[220 - \frac{2x}{3}\right]x$$

De donde:

$$1,400 < \left[220 - \frac{2x}{3}\right] x(0.15) - 8\left[220 - \frac{2x}{3}\right] < 1,740$$

$$1,400 < \left[220 - \frac{2x}{3}\right](0.15x - 8) < 1,740$$

$$1,400 < 33x - 1,760 - 0.10x^2 + \frac{16x}{3} < 1,740$$

$$1,400 < -0.1x^2 + \frac{115x}{3} - 1,760 < 1,740$$

Por 30:

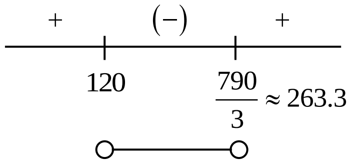
$$42,000 < -3x^2 + 1,150x - 52,800 < 52,200$$

De la inecuación de la izquierda:

$$3x^2 - 1,150x + 94,800 < 0$$

$$(3x - 790)(x - 120) < 0$$

$$3(x - 790/3)(x - 120) < 0$$



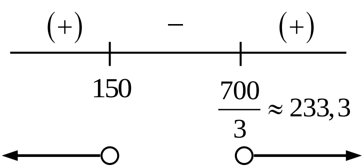
$$\therefore \; x \in \left]120,\ 790/3\right[\qquad (\alpha)$$

De la inecuación de la derecha:

$$3x^2 - 1,150x + 105,000 > 0$$

$$(3x - 700)(x - 150) > 0$$

$$3(x - 700/3)(x - 150) > 0$$



$$\therefore \ x \in \left] -\infty, 150 \right[\cup \left] 700/3, \infty \right[\qquad (\beta)$$

De (α) y (β), como $x < 180$:

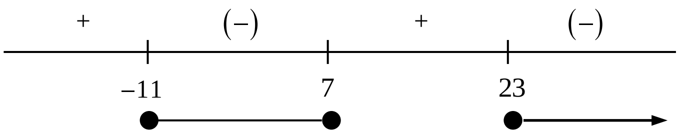
$$120 < x < 150$$

348. Resolver

$$(x-7)(46-2x)(x+11) \leq 0$$

Factoricemos el -2 del segundo factor:

$$-2(x-7)(x-23)(x+11) \leq 0$$



De donde:

$$x \in \left[-11, 7 \right] \cup \left[23, \infty \right[$$

349. Resolver

$$\left(3x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 + 4x - 21\right)\left(x^2 - 2x - 4\right) \leq 0$$

e indicar cuántos valores enteros admite la solución.

Analicemos cada factor por separado:

i) $3x^2-5x+4$

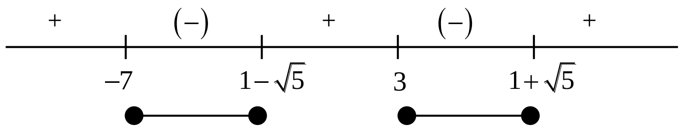
$$\Delta=(-5)^2-4(3)(4)=-23<0 \quad \wedge \quad a=3>0 \Rightarrow 3x^2-5x+4>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

ii) $x^2+4x-21=(x+7)(x-3)$

iii) $x^2-2x-4=\left[x-\left(1+\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\left(1-\sqrt{5}\right)\right]$

Entonces:

$$(+)(x+7)(x-3)\left[x-\left(1+\sqrt{5}\right)\right]\left[x-\left(1-\sqrt{5}\right)\right]\leq 0$$



Los valores enteros que cumplen con la inecuación son $x=-7,\ -6,\ -5,\ -4,$
$-3,\ -2,\ 3.$
Hay 7 valores enteros.

350. Resolver

$$\left(x^3-5x^2-6x\right)\left(x^3-2x^2+x\right)\left(x^3-x^2-2x\right)\leq 0$$

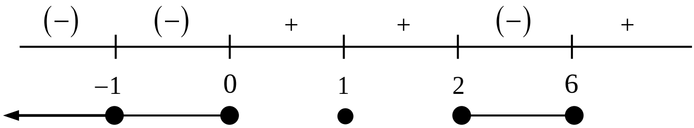
Factoricemos los tres factores:

$$\left[x\left(x^2-5x-6\right)\right]\left[x\left(x^2-2x+1\right)\right]\left[x\left(x^2-x-2\right)\right]\leq 0$$

$$x^3(x-6)(x+1)(x-1)^2(x-2)(x+1)\leq 0$$

$$x^3(x-6)(x+1)^2(x-1)^2(x-2)\leq 0$$

En el eje real:



De donde:

$$x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\ 2, 6\right] \cup \{1\}$$

351. Resolver:

$$\frac{(7-x)(2x-5)}{(x+4)(x-3)} \leq 0$$

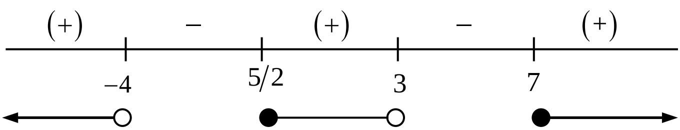
Escribamos:

$$\frac{\left[-(x-7)\right]\left[2\left(x-\frac{5}{2}\right)\right]}{(x+4)(x-3)} \leq 0$$

$$\frac{-2(x-7)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x+4)(x-3)} \leq 0$$

Entre -2:

$$\frac{(x-7)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x+4)(x-3)} \geq 0$$



De donde:

$$x \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left[5/2\,,3\right[\cup \left[\,7, \infty\right[$$

352. Resolver

$$\frac{x-1}{x+2} \le \frac{x+1}{x+3}$$

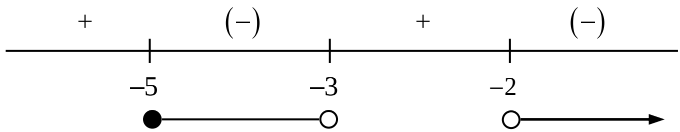
Forma 1

Trasponemos términos:

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+1}{x+3} \le 0$$

$$\frac{x^2+2x-3-\left(x^2+3x+2\right)}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

$$\frac{-(x+5)}{(x+2)(x+3)} \le 0$$



$$\therefore\; x \in \left[\,-5, -3\right[\cup \left]-2, \infty\right[$$

Forma 2

Analicemos 4 casos:

i)

$$\begin{array}{ccccc} x+2>0 & \cap & x+3>0 & \cap & (x-1)(x+3) \le (x+1)(x+2) \\ x>-2 & \cap & x>-3 & \cap & x^2+2x-3 \le x^2+3x+2 \\ x>-2 & \cap & x>-3 & \cap & x \ge -5 \end{array}$$

$$\therefore\; x \in \left]-2, \infty\right[$$

ii)

$$x+2<0 \quad \cap \quad x+3<0 \quad \cap \quad (x-1)(x+3)\le(x+1)(x+2)$$
$$x<-2 \quad \cap \quad x<-3 \quad \cap \quad x\ge -5$$
$$\therefore \;\; x\in[\,-5,-3[$$

iii)

$$x+2>0 \quad \cap \quad x+3<0 \quad \cap \quad (x-1)(x+3)\ge(x+1)(x+2)$$
$$x>-2 \quad \cap \quad x<-3 \quad \cap \quad x\le -5$$
$$\therefore \;\; x\in\varnothing$$

iv)

$$x+2<0 \quad \cap \quad x+3>0 \quad \cap \quad (x-1)(x+3)\ge(x+1)(x+2)$$
$$x<-2 \quad \cap \quad x>-3 \quad \cap \quad x\le -5$$
$$\therefore \;\; x\in\varnothing$$

Obtenemos la solución uniendo las cuatro soluciones parciales:

$$x\in[\,-5,-3[\,\cup\,]-2,\infty[$$

353. Resolver

$$\frac{x+3}{x+4}\le\frac{1-x}{x+2}$$

Pasemos al primer miembro:

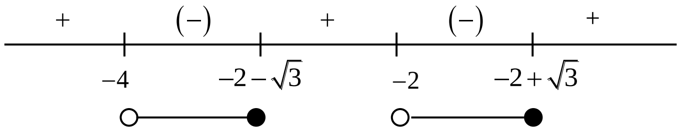
$$\frac{x+3}{x+4}-\frac{1-x}{x+2}\le 0$$
$$\frac{x^2+5x+6-\left(-x^2-3x+4\right)}{(x+4)(x+2)}\le 0$$
$$\frac{2x^2+8x+2}{(x+4)(x+2)}\le 0$$
$$\frac{x^2+4x+1}{(x+4)(x+2)}\le 0$$

Factoricemos x^2+4x+1:

$$x^2+4x+1=(x-r)(x-s),\ \text{donde: } r,\, s=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2(1)}=-2\pm\sqrt{3}$$

Entonces:

$$\frac{\left[x-\left(-2+\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(-2-\sqrt{3}\right)\right]}{(x+4)(x+2)}\leq 0$$



$$\therefore\ x\in\left]-4,\,-2-\sqrt{3}\right]\cup\left]-2,\,-2+\sqrt{3}\right]$$

354. Resolver

$$\frac{x-2}{x-1}\leq\frac{x+2}{x+1}$$

Forma 1

Analicemos cuatro casos

i)

$$\begin{array}{ccccc} x-1>0 & \cap & x+1>0 & \cap & (x-2)(x+1)\leq(x+2)(x-1) \\ x>1 & \cap & x>-1 & \cap & x^2-x-2\leq x^2+x-2 \\ x>1 & \cap & x>-1 & \cap & x\geq 0 \end{array}$$

$$\therefore\ x\in\left]1,\,\infty\right[$$

ii)

$$\begin{array}{ccccc} x-1>0 & \cap & x+1<0 & \cap & (x-2)(x+1)\geq(x+2)(x-1) \\ x>1 & \cap & x<-1 & \cap & x\leq 0 \end{array}$$

$$\therefore\ x\in\varnothing$$

iii)

$$\begin{array}{ccccc} x-1<0 & \cap & x+1>0 & \cap & (x-2)(x+1)\geq(x+2)(x-1) \\ x<1 & \cap & x>-1 & \cap & x\leq 0 \end{array}$$

$$\therefore\ x\in\left]-1,0\right]$$

iv)

$$\begin{array}{ccccc} x-1<0 & \cap & x+1<0 & \cap & (x-2)(x+1)\leq(x+2)(x-1) \\ x<1 & \cap & x<-1 & \cap & x\geq 0 \end{array}$$

$$\therefore\ x\in\varnothing$$

El conjunto solución de la inecuación será $x\in\left]-1,0\right]\cup\left]1,\infty\right[$.

Forma 2

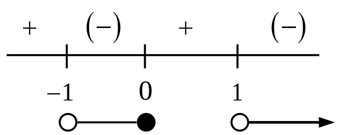
Pasemos todo al primer miembro

$$\frac{x-2}{x-1}-\frac{x+2}{x+1}\leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+1)-(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\leq 0$$

$$\frac{x^2-x-2-\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)(x+1)}\leq 0$$

$$\frac{-2(x-0)}{(x-1)(x+1)}\leq 0$$



De donde:

$$x \in \left] -1,\, 0 \right] \cup \left] 1,\, \infty \right[$$

355. Resolver la inecuación:

$$\frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \geq 1$$

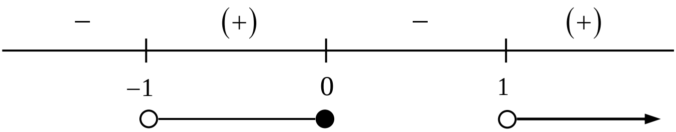
Efectuemos las operaciones después de transponer términos al primer miembro:

$$\frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{x-1} - 1 \geq 0$$

$$\frac{(x+2)(x-1)+(x+1)-\left(x^2-1\right)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x^2+x-2+x+1-x^2+1}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{2(x-0)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$



$$\therefore \; x \in \left] -1,\, 0 \right] \cup \left] 1,\, \infty \right[$$

356. Resolver

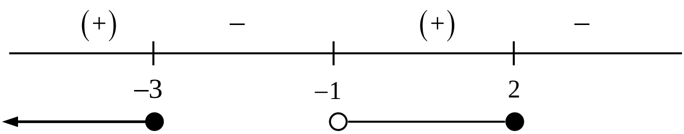
$$\frac{5-2x-x^2}{x+1} \geq -1$$

Forma 1

Escribamos:

$$\frac{5-2x-x^2}{x+1}+1 \ge 0$$
$$\frac{5-2x-x^2+x+1}{x+1} \ge 0$$
$$\frac{-x^2-x+6}{x+1} \ge 0$$
$$\frac{-\left(x^2+x-6\right)}{x+1} \ge 0$$
$$\frac{-(x+3)(x-2)}{x+1} \ge 0$$

En el eje real:



De donde:

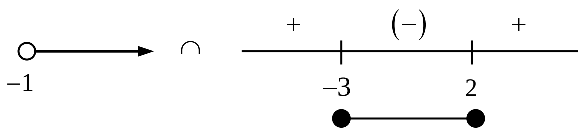
$$x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left]-1, 2\right]$$

Forma 2

Consideremos dos casos:

i) Si $x+1>0 \Rightarrow 5-2x-x^2 \ge -1(x+1)$ (no cambia el signo)

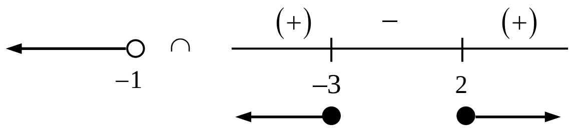
$$x>-1 \quad \cap \quad 0 \ge x^2+x-6$$
$$x>-1 \quad \cap \quad (x+3)(x-2) \le 0$$



$$\therefore \; x \in \left]-1, 2\right]$$

ii) Si $x+1<0 \Rightarrow 5-2x-x^2 \le -1(x+1)$ (cambia el signo)

$$x<-1 \quad \cap \quad 0 \le x^2+x-6$$
$$x<-1 \quad \cap \quad (x+3)(x-2) \ge 0$$



$$\therefore \; x \in \left]-\infty, -3\right]$$

Finalmente:

$$x \in \left]-\infty, -3\right] \cup \left]-1, 2\right]$$

357. Resolver para x:

$$\frac{2a-b}{a-b}x+\frac{2a-b}{a+b}<\frac{2a+b}{a+b}x+\frac{2a+b}{a-b}$$

si se conoce que $a<b<0.$

Forma 1

Multipliquemos ambos miembros por $(a+b)(a-b),$ teniendo en cuenta que

$$\left\{\begin{array}{l} a<0 \\ b<0 \end{array}\right. \Rightarrow \; a+b<0$$

$$a<b \;\Rightarrow\; a-b<0$$

Como $\underbrace{(a+b)}_{-}\underbrace{(a-b)}_{-} \Rightarrow (a+b)(a-b)>0,$ el sentido de la inecuación no cambia:

$$(2a-b)(a+b)x+(2a-b)(a-b)<(2a+b)(a-b)x+(2a+b)(a+b)$$
$$\left(2a^2+ab-b^2\right)x-\left(2a^2-ab-b^2\right)x<\left(2a^2+3ab+b^2\right)-\left(2a^2-3ab+b^2\right)$$
$$2\underset{-}{a}\,\underset{-}{b}\,x<6ab$$

Entre ab:

$$2x<6$$
$$x<3$$

Forma 2

Escribámoslo:

$$\frac{(a-b)+a}{a-b}x+\frac{(a+b)+a-2b}{a+b}<\frac{(a+b)+a}{a+b}x+\frac{(a-b)+a+2b}{a-b}$$
$$\left[1+\frac{a}{a-b}\right]x+\left[1+\frac{a-2b}{a+b}\right]<\left[1+\frac{a}{a+b}\right]x+\left[1+\frac{a+2b}{a-b}\right]$$
$$\left[\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}\right]x<\left[\frac{a+2b}{a-b}-\frac{a-2b}{a+b}\right]$$

Como $a<b<0 \Rightarrow a^2>b^2>0 \Rightarrow a^2-b^2>0.$

Multipliquemos ambos miembros por a^2-b^2 (no cambia de sentido)

$$\left[a(a+b)-a(a-b)\right]x<\left[(a+2b)(a+b)-(a-2b)(a-b)\right]$$
$$2abx<a^2+3ab+2b^2-\left(a^2-3ab+2b^2\right)$$
$$2abx<6ab$$

Entre ab que es positivo:

$$2x<6$$
$$x<3$$

358. ¿Qué relación deberán cumplir a y b, entre sí, para que la solución de la inecuación $\dfrac{x+b}{bx-a} \geq \dfrac{x-a}{ax+b}$ $\quad (a \geq b > 0)$ sea $\left]-\dfrac{b}{a},\ 0\right] \cup \left]\dfrac{a}{b}, \infty\right[$?

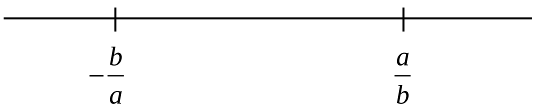
Forma 1

$$\frac{x+b}{bx-a} - \frac{x-a}{ax+b} \geq 0$$

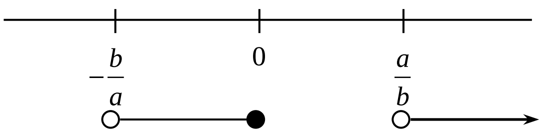
$$\frac{ax^2 + abx + bx + b^2 - \left(bx^2 - abx - ax + a^2\right)}{(bx-a)(ax+b)} \geq 0$$

$$\frac{(a-b)x^2 + (2ab+a+b)x + \left(b^2 - a^2\right)}{b\left(x - \dfrac{a}{b}\right)a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)} \geq 0 \qquad (\alpha)$$

Hay que ubicar a $\underset{(+)}{\dfrac{a}{b}}$ y $\underset{(-)}{-\dfrac{b}{a}}$.



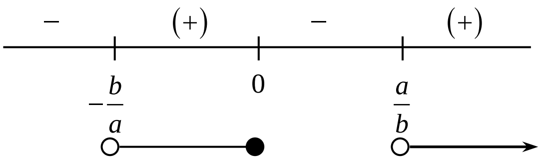
Se pretende que la solución sea:



Habrá que ver la forma de ubicar al $x = 0$ (un solo valor).

Sin embargo, si el numerador fuese de segundo grado deberían ubicarse dos valores.
De donde, el numerador debe ser de primer grado.
Es decir, $a-b=0 \Rightarrow a=b$.
La expresión quedaría así:

$$\frac{0x^2+\overbrace{\left(2a^2+2a\right)}^{(+)}x+0}{ab\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x+\frac{b}{a}\right)}\geq 0$$

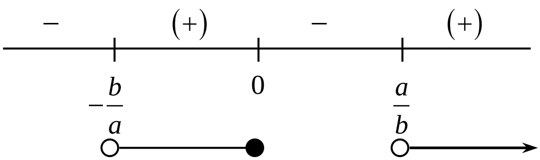


que coincide con el dato.

$$\therefore\ a=b$$

Forma 2

Reconstruyamos la inecuación a partir de la solución dada:



$$\frac{k(x-0)}{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x-\frac{a}{b}\right)}\geq 0 \qquad (\beta)$$

siendo $k>0$ para que se cumpla con la solución dada.

Comparando (α) con (β):

$$a-b=0 \;\Rightarrow\; a=b \qquad (1)$$

$$k=2ab+a+b \qquad (2)$$

$$b^2-a^2=0 \;\Rightarrow\; a=\pm b \qquad (3)$$

De (1) y (3):

$$a=b$$

faltando por comprobar que k es mayor que cero:

$$k=2a(a)+a+a$$

$$k=2a^2+2a$$

De donde $k>0$ porque $a>0$.

359. Resolver

$$\frac{(x-ab)^2\left(x^2-b^2x+bx-b^3\right)}{x(x+a)^3}\geq 0$$

si se conoce que $-1<b<0<a<1$.

Factoricemos el numerador:

$$\frac{(x-ab)^2(x+b)\left(x-b^2\right)}{(x-0)(x+a)^3}\geq 0$$

Como $(x-ab)^2$ es de signo positivo o 0:

$$\frac{(+)(x+b)\left(x-b^2\right)}{(x-0)(x+a)^3}\geq 0 \qquad \cup \qquad \{\ ab\ \}$$

porque $x=ab$ cumple con la inecuación dada.
Ubiquemos los puntos $-b,\ b^2,\ 0\ \wedge\ -a$ a partir del dato:

$$-1<b<0<a<1$$

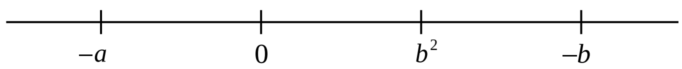
i) Por -1:

$$1>-b>0>-a>-1 \qquad (\alpha)$$

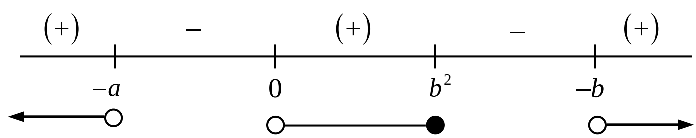
ii) Por b, que es negativo:

$$-b>b^2>0>ab>b \qquad (\beta)$$

De (α) y (β) se deduce que:



Luego:



Falta averiguar dónde se encuentra $x=ab$. Del dato $-1<b<0$, al multiplicar por a resulta $-a<ab<0$, entonces ab se encuentra fuera de los intervalos hallados.
Entonces:

$$x\in\ ]-\infty,-a[\ \cup\ ]\,0,b^2\,]\cup[\,-b,\infty[\ \cup\{ab\}$$

360. Resolver en $\mathbb{R}$:

i) $|2x+8|=12$

ii) $|2x+8|=3x+2$

iii) $|3x-1|=|x+3|$

i) La expresión contenida en el valor absoluto puede ser 12 ó -12. Es decir:

$$2x+8=12 \quad \cup \quad 2x+8=-12$$
$$x=2 \quad \cup \quad x=-10$$
$$\therefore \; x\in\{2,\,-10\}$$

ii) Si $|2x+8|=3x+2,$ se requiere que $3x+2$ sea positivo o cero:

$$3x+2\geq 0$$
$$x\geq -\frac{2}{3} \qquad (\alpha)$$

Además:

$$2x+8=3x+2 \quad \cup \quad 2x+8=-3x-2$$
$$x=6 \quad \cup \quad x=-2$$
$$\therefore \; x\in\{-2,\,6\} \qquad (\beta)$$

De $(\alpha)\cap(\beta)$:

$$x=6$$

iii) Para que $|3x-1|=|x+3|$, las cantidades contenidas en los valores absolutos deben ser iguales entre sí o variar solamente en el signo, es decir:

$$3x-1=x+3 \quad \cup \quad 3x-1=-(x+3)$$
$$x=2 \quad \cup \quad x=-\frac{1}{2}$$
$$\therefore \; x\in\{2,-1/2\}$$

361. Resolver la ecuación:

$$|x+2|+|x-1|=9$$

Forma 1

Consideremos cuatro casos:

i)

$$\begin{array}{ccccc} x+2\geq 0 & \cap & x-1\geq 0 & \cap & (x+2)+(x-1)=9 \\ x\geq -2 & \cap & x\geq 1 & \cap & x=4 \end{array}$$

$$\therefore\ x=4$$

ii)

$$\begin{array}{ccccc} x+2\geq 0 & \cap & x-1\leq 0 & \cap & (x+2)+(-x+1)=9 \\ x\geq -2 & \cap & x\leq 1 & \cap & 3=9 \quad (\text{falso}) \end{array}$$

$$\therefore\ x\in\varnothing$$

iii)

$$\begin{array}{ccccc} x+2\leq 0 & \cap & x-1\geq 0 & \cap & (-x-2)+(x-1)=9 \\ x\leq -2 & \cap & x\geq 1 & \cap & -3=9 \quad (\text{falso}) \end{array}$$

$$\therefore\ x\in\varnothing$$

iv)

$$\begin{array}{ccccc} x+2\leq 0 & \cap & x-1\leq 0 & \cap & (-x-2)+(-x+1)=9 \\ x\leq -2 & \cap & x\leq 1 & \cap & x=-5 \end{array}$$

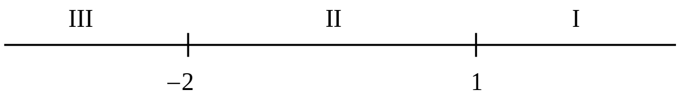
$$\therefore\ x=-5$$

De lo anterior:

$$x\in\{4,\,-5\}$$

Forma 2

Apliquemos el método de los puntos críticos



Zona I:

$$x \geq 1 \;\Rightarrow\; (x+2)+(x-1)=9$$
$$x \geq 1 \;\cap\; x=4 \;\Rightarrow\; x \in \{4\} \qquad (\alpha)$$

Zona II:

$$1 \geq x \geq -2 \;\Rightarrow\; (x+2)+(-x+1)=9$$
$$1 \geq x \geq -2 \;\cap\; 3=9 \;\; (\text{falso}) \;\Rightarrow\; x \in \{\;\} \qquad (\beta)$$

Zona III:

$$-2 \geq x \;\Rightarrow\; (-x-2)+(-x+1)=9$$
$$-2 \geq x \;\cap\; x=-5 \;\Rightarrow\; x \in \{-5\} \qquad (\gamma)$$

Finalmente:

$$x \in (\alpha) \cup (\beta) \cup (\gamma)$$
$$x \in \{4, -5\}$$

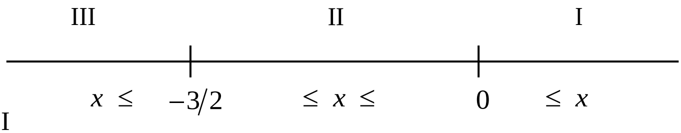
362. Resolver la ecuación:

$$\left|2x^2+3x\right|+2=3\left|2x+3\right|$$

Factoricemos $2x^2+3x$:

$$\left|x\left(2x+3\right)\right|+2=3\left|2x+3\right|$$
$$\left|x\right|\left|2x+3\right|+2=3\left|2x+3\right|$$
$$2\left|x-0\right|\left|x+\frac{3}{2}\right|+2=6\left|x+\frac{3}{2}\right|$$

Según el método de las zonas:



Zona I

$$x\geq 0 \quad \cap \quad 2\left(x\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)+2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)$$
$$x\geq 0 \quad \cap \quad 2x^2+3x+2=6x+9$$
$$x\geq 0 \quad \cap \quad 2x^2-3x-7=0$$
$$x\geq 0 \quad \cap \quad 2\left(x-\frac{3+\sqrt{65}}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{65}}{4}\right)=0$$
$$x\geq 0 \quad \cap \quad \left\{\frac{3-\sqrt{65}}{4},\ \frac{3+\sqrt{65}}{4}\right\}$$

$$\therefore\ x\in\left\{\frac{3+\sqrt{65}}{4}\right\}$$

Zona II

$$0\geq x\geq -3/2 \quad \cap \quad 2\left(-x\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)+2=6\left(x+\frac{3}{2}\right)$$
$$0\geq x\geq -3/2 \quad \cap \quad 2x^2+9x+7=0$$
$$0\geq x\geq -3/2 \quad \cap \quad \left(2x+7\right)\left(x+1\right)=0$$
$$0\geq x\geq -3/2 \quad \cap \quad x\in\left\{-\frac{7}{2},\ -1\right\}$$
$$\therefore\ x\in\left\{-1\right\}$$

Zona III:

$$
\begin{aligned}
-3/2 \geq x \quad &\cap \quad 2(-x)\left(-x-\frac{3}{2}\right)+2=6\left(-x-\frac{3}{2}\right) \\
-3/2 \geq x \quad &\cap \quad 2x^2+9x+11=0 \\
-3/2 \geq x \quad &\cap \quad x \notin \mathbb{R} \quad (\Delta < 0) \\
&\therefore \; x \in \varnothing
\end{aligned}
$$

Unamos las tres soluciones:

$$x \in \left\{ \frac{3+\sqrt{65}}{4}, \; -1 \right\}$$

363. Resolver

$$|2x+8| \leq 3x+2$$

Forma 1

Según la definición de valor absoluto:

a)

$$
\begin{aligned}
2x+8 \geq 0 \quad &\cap \quad 2x+8 \leq 3x+2 \\
x \geq -4 \quad &\cap \quad 6 \leq x \\
&\therefore \; x \geq 6
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
2x+8 \leq 0 \quad &\cap \quad -2x-8 \leq 3x+2 \\
x \leq -4 \quad &\cap \quad -2 \leq x \\
&\therefore \; x \in \varnothing
\end{aligned}
$$

De donde $\text{a)} \cup \text{b)}$:

$$x \in [\; 6, \infty[$$

Forma 2

Por propiedad del valor absoluto, si $3x+2 \geq 0 \Rightarrow -3x-2 \leq 2x+8 \leq 3x+2$:

$$x \geq -2/3 \quad \cap \quad -10 \leq 5x \quad \cap \quad 6 \leq x$$

$$x \geq -2/3 \quad \cap \quad -2 \leq x \quad \cap \quad 6 \leq x$$

$$\therefore \; x \in [\; 6, \infty[$$

Forma 3

De acuerdo con el método de las zonas:

$$|2x+8| \leq 3x+2$$

$$2|x+4| \leq 3x+2$$

$$\begin{array}{ccc} \text{II} & & \text{I} \\ \hline x \; \leq & -4 & \leq \; x \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \cap & \cap \\ 2(-x-4) \leq 3x+2 & 2(x+4) \leq 3x+2 \\ -2 \leq x & 6 \leq x \end{array}$$

Zona I: $x \geq 6$

Zona II: $x \in \varnothing$

Unamos ambas soluciones:

$$x \in [\; 6, \infty[$$

364. Resolver

$$|3x+4| \geq x+2$$

Forma 1

Por la definición:

a)

$$\begin{array}{ccc} 3x+4\geq 0 & \Rightarrow & 3x+4\geq x+2 \\ x\geq -4/3 & \cap & x\geq -1 \\ & \therefore\ x\geq -1 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} 3x+4\leq 0 & \Rightarrow & -3x-4\geq x+2 \\ x\leq -4/3 & \cap & -3/2\geq x \\ & \therefore\ x\leq -3/2 & \end{array}$$

Finalmente de $\text{a)}\cup\text{b)}$:

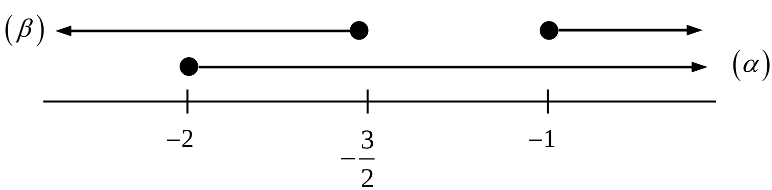
$$x\in \left]-\infty,-3/2\right]\cup\left[-1,\infty\right[$$

Forma 2

Según propiedad

$$\begin{array}{llccc} \text{a)} & \text{Si} & x+2\leq 0 & \Rightarrow & 3x+4\in\mathbb{R} \\ & & x\leq -2 & \cap & x\in\mathbb{R} \\ & & & \therefore\ x\leq -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llccccc} \text{b)} & \text{Si} & x+2\geq 0 & \Rightarrow & 3x+4\geq x+2 & \cup & 3x+4\leq -x-2 \\ & & x\geq -2 & \cap & \left[\ x\geq -1\right. & \cup & \left. x\leq -3/2\ \right] \\ & & (\alpha) & \cap & & (\beta) & \end{array}$$



$$\therefore \; x \in \left[\, -2, -3/2 \right] \cup \left[\, -1, \infty \right[$$

Unamos las soluciones de los casos a) y b):

$$x \in \left] -\infty, -3/2 \right] \cup \left[\, -1, \infty \right[$$

Forma 3

Empleemos el método de los puntos críticos:

$$\left|3x+4\right| \geq x+2$$
$$3\left|x+4/3\right| \geq x+2$$

$$\begin{array}{ccc} \text{II} & & \text{I} \\ \hline x \leq & -4/3 & \leq x \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \cap & \cap \\ 3\left(-x-4/3\right) \geq x+2 & 3\left(x+4/3\right) \geq x+2 \\ -3/2 \geq x & x \geq -1 \end{array}$$

Zona I: $x \geq -1$

Zona II: $x \leq -3/2$

De donde:

$$x \in \left] -\infty, -3/2 \right] \cup \left[\, -1, \infty \right[$$

365. Resolver

$$\left|2x+3\right|^2 + 2 \leq 3\left|2x+3\right|$$

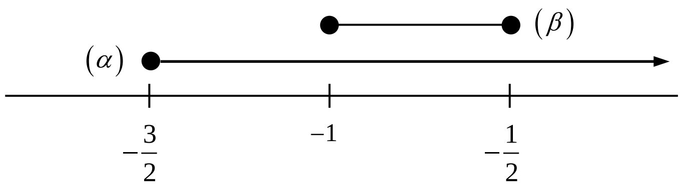
Por propiedad del valor absoluto, tenemos que $|a|^2 = a^2$.
Entonces

$$\begin{aligned}(2x+3)^2+2 &\le 3(2)|x+3/2|\\ 4x^2+12x+11 &\le 6|x+3/2|\end{aligned}$$

Analicemos dos casos:

a)

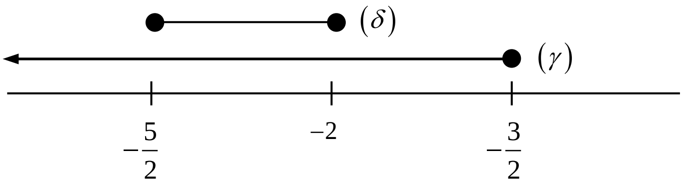
$$\begin{array}{llcc} \text{Si} & x+3/2\ge 0 & \Rightarrow & 4x^2+12x+11\le 6(x+3/2)\\ & x\ge -3/2 & \cap & 4x^2+6x+2\le 0\\ & x\ge -3/2 & \cap & 2x^2+3x+1\le 0\\ & x\ge -3/2 & \cap & 2(x+1/2)(x+1)\le 0\\ & (\alpha) & & (\beta) \end{array}$$



$$\therefore\ x\in[-1,-0.5]$$

b)

$$\begin{array}{llcc} \text{Si} & x+3/2\le 0 & \Rightarrow & 4x^2+12x+11\le 6(-x-3/2)\\ & x\le -3/2 & \cap & 4x^2+18x+20\le 0\\ & x\le -3/2 & \cap & 2x^2+9x+10\le 0\\ & x\le -3/2 & \cap & 2(x+5/2)(x+2)\le 0\\ & (\gamma) & & (\delta) \end{array}$$



$$\therefore \; x \in \left[-5/2 , -2 \right]$$

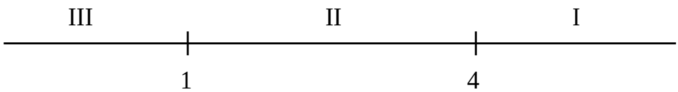
La solución será la unión de a) y b):

$$x \in \left[-2.5, -2 \right] \cup \left[-1, -0.5 \right]$$

366. Resolver

$$|x-4| - |x-1| > 1$$

Empleemos el método de las zonas



$$\begin{array}{llllll} \text{Zona I:} & \text{Si} & x \geq 4 & \Rightarrow & (x-4)-(x-1)>1 \\ & & x \geq 4 & \cap & -3>1 \;\; (\text{falso}) \end{array}$$

$$\therefore \; x \in \varnothing$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Zona II:} & \text{Si} & 4 \geq x \geq 1 & \Rightarrow & (-x+4)-(x-1)>1 \\ & & 4 \geq x \geq 1 & \cap & 2 > x \end{array}$$

$$\therefore \; 2 > x \geq 1$$

Zona III: Si $1 \geq x \quad \Rightarrow \quad (-x+4)-(-x+1)>1$

$1 \geq x \quad \cap \quad 3>1 \ \ (\text{verdadero})$

$\therefore \ 1 \geq x$

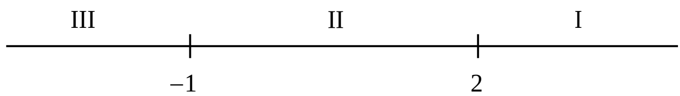
La solución será la unión de las soluciones parciales:

$$x \in \left]-\infty, 2\right[$$

367. Resolver

$$|x+1|+2|x-2|<8$$

Empleemos el método de las zonas



Zona I: $x \geq 2 \quad \cap \quad (x+1)+2(x-2)<8$

$x \geq 2 \quad \cap \quad x<11/3$

$\therefore \ x \in \left[2, 11/3\right[$

Zona II: $2 \geq x \geq -1 \quad \cap \quad (x+1)+2(-x+2)<8$

$2 \geq x \geq -1 \quad \cap \quad x>-3$

$\therefore \ x \in \left[-1, 2\right]$

Zona III: $-1 \geq x \quad \cap \quad (-x-1)+2(-x+2)<8$

$-1 \geq x \quad \cap \quad x>-5/3$

$\therefore \ x \in \left]-5/3, -1\right]$

Zona I $\cup$ Zona II $\cup$ Zona III:

$$x \in \left]-5/3, 11/3\right[$$

368. Resolver

$$\left|x^2+2x+3\right|+\left|x^2-3x\right|<6$$

Analicemos el trinomio x^2+2x+3:

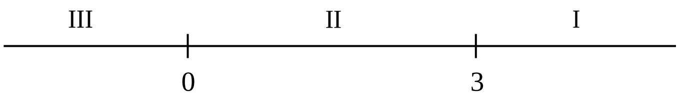
$$\Delta=(2)^2-4(1)(3)=-8$$
$$a=1>0$$

Según el teorema, $x^2+2x+3>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

De donde:

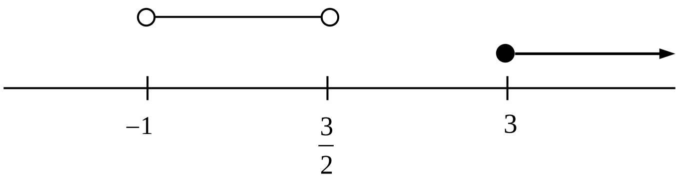
$$x^2+2x+3+\left|x(x-3)\right|<6$$
$$x^2+2x-3+|x||x-3|<0$$

Por el método de las zonas:



Zona I:

$$\begin{array}{ccr} x\geq 3 & \Rightarrow & x^2+2x-3+x(x-3)<0 \\ x\geq 3 & \cap & 2x^2-x-3<0 \\ x\geq 3 & \cap & (2x-3)(x+1)<0 \\ x\geq 3 & \cap & 2(x-3/2)(x+1)<0 \end{array}$$



$$\therefore\ x\in\varnothing$$

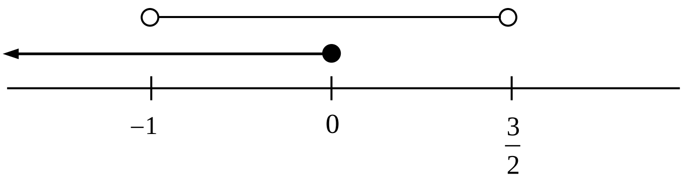
Zona II:

$$\begin{array}{lcr} 3 \geq x \geq 0 & \Rightarrow & x^2+2x-3+x(-x+3)<0 \\ 3 \geq x \geq 0 & \cap & x<3/5 \end{array}$$

$$\therefore\ x \in [\ 0, 3/5[$$

Zona III:

$$\begin{array}{lcl} 0 \geq x & \Rightarrow & x^2+2x-3+(-x)(-x+3)<0 \\ 0 \geq x & \cap & 2x^2-x-3<0 \quad (\text{igual que Zona I}) \end{array}$$



$$\therefore\ x \in]\ -1, 0]$$

De la unión de los tres conjuntos solución:

$$\therefore\ x \in]\ -1, 3/5[$$

369. Resolver

$$|x^2-4x+3|+|x^2-1|<6$$

si se sabe que $x>2$.

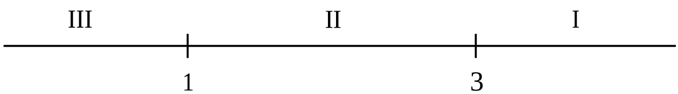
A partir del dato:

$$x>2 \ \Rightarrow\ x^2>4 \ \Rightarrow\ x^2-1>3>0 \ \Rightarrow\ |x^2-1|=x^2-1$$

Entonces:

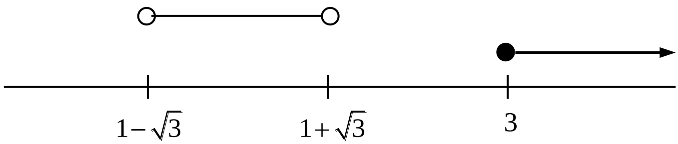
$$|(x-1)(x-3)|+x^2-1<6$$

$$|x-1||x-3|+x^2-7<0$$



Zona I:

$$
\begin{array}{lcr}
x \geq 3 & \cap & (x-1)(x-3)+x^2-7<0 \\
x \geq 3 & \cap & 2x^2-4x-4<0 \\
x \geq 3 & \cap & x^2-2x-2<0 \\
x \geq 3 & \cap & \left[x-\left(1-\sqrt{3}\right)\right]\left[x-\left(1+\sqrt{3}\right)\right]<0
\end{array}
$$

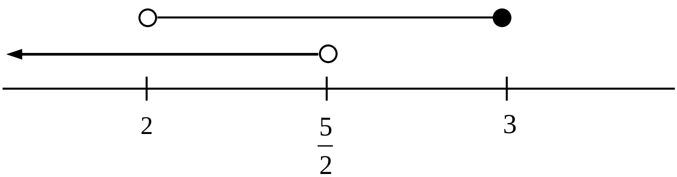


$$\therefore \; x \in \varnothing$$

Zona II:

Considerando el dato $x>2$, solamente escogeremos

$$
\begin{array}{lcr}
3 \geq x > 2 & \cap & (x-1)(-x+3)+x^2-7<0 \\
3 \geq x > 2 & \cap & -x^2+4x-3+x^2-7<0 \\
3 \geq x > 2 & \cap & 4x<10 \\
3 \geq x > 2 & \cap & x<5/2
\end{array}
$$



$$\therefore \; x \in \left]\, 2, 5/2 \right[$$

De Zona I $\cup$ Zona II:

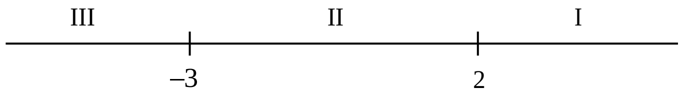
$$x \in \left]\, 2,\, 2.5 \right[$$

370. Resolver

$$\left|x^2 + x - 6\right| + 1 < |x+3| + |x-2|$$

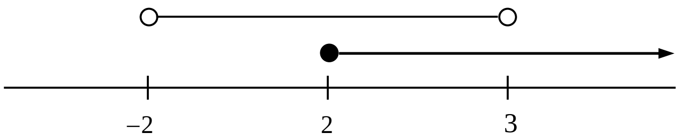
Tenemos que:

$$|x+3||x-2| + 1 < |x+3| + |x-2|$$



Zona I:

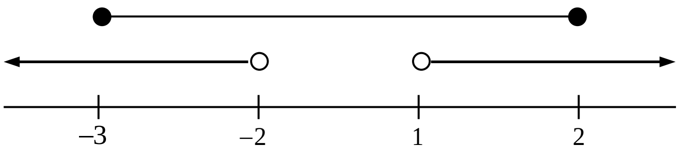
$$\begin{array}{lcr} x \geq 2 & \cap & (x+3)(x-2) + 1 < x + 3 + x - 2 \\ x \geq 2 & \cap & x^2 + x - 6 + 1 < 2x + 1 \\ x \geq 2 & \cap & x^2 - x - 6 < 0 \\ x \geq 2 & \cap & (x-3)(x+2) < 0 \end{array}$$



$$\therefore\ x \in \left[\, 2,\, 3 \right[$$

Zona II:

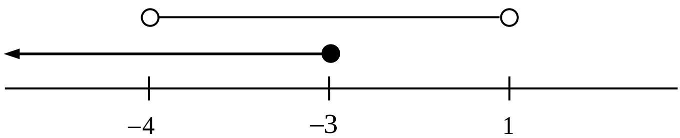
$$\begin{array}{lcr} 2\geq x\geq -3 & \cap & (x+3)(-x+2)+1<x+3-x+2 \\ 2\geq x\geq -3 & \cap & -x^2-x+6+1<5 \\ 2\geq x\geq -3 & \cap & x^2+x-2>0 \\ 2\geq x\geq -3 & \cap & (x+2)(x-1)>0 \end{array}$$



$$\therefore\ x\in[-3,-2[\cup]1,2]$$

Zona III:

$$\begin{array}{lcr} -3\geq x & \cap & (-x-3)(-x+2)+1<-x-3-x+2 \\ -3\geq x & \cap & x^2+x-6+1<-2x-1 \\ -3\geq x & \cap & x^2+3x-4<0 \\ -3\geq x & \cap & (x+4)(x-1)<0 \end{array}$$



$$\therefore\ x\in]-4,-3]$$

Finalmente:

$$x\in]-4,-2[\cup]1,3[$$

371. Resolver

$$\left|x^3-2x+3\right|\leq x+3$$

Para que se cumpla la inecuación, el segundo miembro $x+3$ debe ser mayor o igual que cero porque el primer miembro siempre es mayor o igual que cero:

$$x+3\geq 0$$
$$x\geq -3 \qquad (\alpha)$$

Según la propiedad $|x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a \qquad (a\geq 0)$:

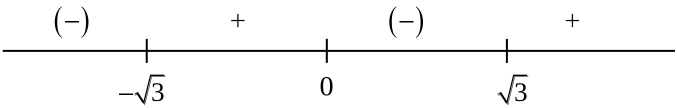
$$-x-3\leq x^3-2x+3\leq x+3$$

Del lado izquierdo:

$$0\leq x^3-x+6$$
$$0\leq (x+2)\underbrace{\left(x^2-2x+3\right)}_{\Delta\,<\,0,\quad a\,=\,1\,>\,0}$$
$$0\leq (x+2)(+)$$
$$-2\leq x \qquad (\beta)$$

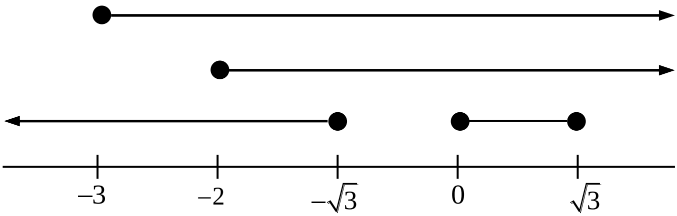
Del lado derecho:

$$x^3-3x\leq 0$$
$$x\left(x^2-3\right)\leq 0$$
$$x\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\leq 0$$



$$x\in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\,0,\sqrt{3}\right] \qquad (\gamma)$$

$(\alpha)\cap(\beta)\cap(\gamma)$:



$$\therefore\ x \in \left[\ -2, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\ 0, \sqrt{3}\right[$$

372. Resolver

$$\left|2\left|x-1\right| + x^2 + 9\right| \le \left|\left|x-2\right| + \left|x^2+9\right|\right|$$

Analicemos:

$$x^2 + 9 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ \Rightarrow \ \left|x^2+9\right| = x^2 + 9$$

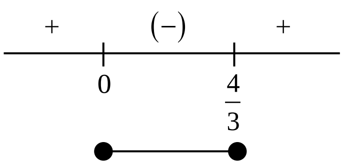
Del primer miembro, $2\left|x-1\right|$, x^2 y 9 son siempre positivos, entonces se anulan las barras del valor absoluto.
Del segundo miembro, $\left|x-2\right|$, x^2 y 1 son siempre positivos, entonces se anulan las barras del valor absoluto.

Luego resulta

$$2\left|x-1\right| + x^2 + 9 \le \left|x-2\right| + x^2 + 9$$
$$2\left|x-1\right| \le \left|x-2\right|$$

Elevemos al cuadrado

$$4\left|x-1\right|^2 \le \left|x-2\right|^2$$
$$4\left(x-1\right)^2 \le \left(x-2\right)^2$$
$$4x^2 - 8x + 4 \le x^2 - 4x + 4$$
$$3x^2 - 4x \le 0$$
$$3x\left(x - 4/3\right) \le 0$$



La inecuación se cumple para $x \in [\,0,\, 4/3]$.

373. Resolver

$$\left|x^2+2x+3\right|+\left|x^2-1\right|<6$$

Forma 1

El trinomio x^2+2x+3 es positivo para todo $x \in \mathbb{R}$ porque $a=1>0$ y $\Delta = 2^2-4(3)=-8<0$. Además, $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$.
Entonces:

$$\left|x^2+2x+3\right| = x^2+2x+3$$

Tendremos que:

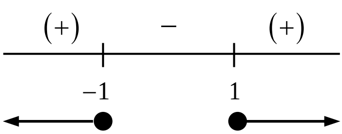
$$x^2+2x+3+\left|x^2-1\right|<6$$

Analicemos los casos a) y b):

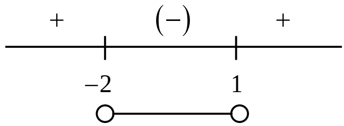
a) Si $x^2-1\geq 0 \quad (a_1) \;\Rightarrow\; x^2+2x+3+x^2-1<6 \quad (a_2)$

$$x^2-1\geq 0 \qquad (a_1)$$

$$(x-1)(x+1)\geq 0$$



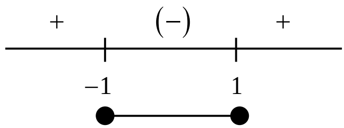
$$x^2+2x+3+x^2-1<6 \qquad (a_2)$$
$$2x^2+2x-4<0$$
$$x^2+x-2<0$$
$$(x+2)(x-1)<0$$



$$CS_a = CS_{a_1} \cap CS_{a_2}$$
$$CS_a = \left]-2,-1\right]$$

b) Si $x^2-1\leq 0 \quad (b_1) \Rightarrow x^2+2x+3-\left(x^2-1\right)<6 \quad (b_2)$

$$x^2-1\leq 0 \qquad (b_1)$$



$$x^2+2x+3-\left(x^2-1\right)<6 \qquad (b_2)$$
$$2x<2$$
$$x<1$$

$$CS_b = CS_{b_1} \cap CS_{b_2}$$
$$CS_b = \left[-1,1\right[$$

El conjunto solución se obtiene uniendo CS_a con CS_b :

$$x \in \left]-2,1\right[$$

Forma 2

A partir de $x^2+2x+3+\left|x^2-1\right|<6$, tenemos:

$$x^2+2x+3+\left|x-1\right|\left|x+1\right|<6$$

Zona III Zona II Zona I

$$x \quad \leq \quad -1 \quad \leq \quad x \quad \leq \quad 1 \quad \leq \quad x$$

Zona I

$$\begin{array}{lcc} x\geq 1 & \cap & x^2+2x+3+(x+1)(x-1)<6 \\ x\geq 1 & \cap & 2x^2+2x-4<0 \\ x\geq 1 & \cap & 2(x+2)(x-1)<0 \end{array}$$

$$x\geq 1 \quad \cap \quad \begin{array}{ccccc} + & & (-) & & + \\ & -2 & & 1 & \end{array}$$

$$CS_1=\varnothing$$

Zona II

$$\begin{array}{lcc} -1\leq x\leq 1 & \cap & x^2+2x+3+(x+1)(-x+1)<6 \\ -1\leq x\leq 1 & \cap & 2x+4<6 \\ -1\leq x\leq 1 & \cap & x<1 \end{array}$$

$$CS_2=[\,-1,1[$$

Zona III

$$\begin{array}{ccc} x \leq -1 & \cap & x^2 + 2x + 3 + (-x-1)(-x+1) < 6 \\ x \leq -1 & \cap & 2x^2 + 2x - 4 < 0 \\ x \leq -1 & \cap & 2(x+2)(x-1) < 0 \\ ]-\infty, -1] & \cap &]-2, 1[\end{array}$$

$$CS_3 =]-2, -1]$$

Encontremos el conjunto solución CS :

$$\begin{aligned} CS &= CS_1 \cup CS_2 \cup CS_3 \\ CS &= \varnothing \cup [-1, 1[\cup]-2, -1] \\ CS &=]-2, 1[\end{aligned}$$

374. Resolver

$$\frac{|4x - x^2| - 5}{|x| - 1} \geq 0$$

si se sabe que x es positivo.

Escribámoslo:

$$\frac{|x(4-x)| - 5}{|x| - 1} = \frac{|x||4-x| - 5}{|x| - 1} = \frac{|x||x-4| - 5}{|x| - 1}$$

Como $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

$$\frac{x|x-4| - 5}{x - 1} \geq 0$$

Además

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & x-4 \geq 0 \qquad (1) \\ 4-x, & x-4 < 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Caso (1)

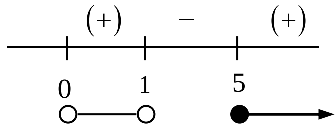
$$x>0 \quad \cap \quad x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{x(x-4)-5}{x-1}\geq 0$$

$$x>0 \quad \cap \quad x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{x^2-4x-5}{x-1}\geq 0$$

$$x>0 \quad \cap \quad x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{(x-5)\overbrace{(x+1)}^{+\text{ porque } x>0}}{x-1}\geq 0$$

$$x>0 \quad \cap \quad x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{x-5}{x-1}\geq 0$$

$$x\geq 4 \quad \cap$$



De donde $x\in[\ 5,\infty\ [$

Caso (2)

$$x>0 \quad \cap \quad x<4 \quad \cap \quad \frac{x(-x+4)-5}{x-1}\geq 0$$

$$x>0 \quad \cap \quad x<4 \quad \cap \quad \frac{-x^2+4x-5}{x-1}\geq 0$$

Como el discriminante de $-x^2+4x-5$ es negativo (-4) y el primer coeficiente es negativo (-1), el trinomio será siempre negativo. Entonces:

$$x>0 \quad \cap \quad x<4 \quad \cap \quad \frac{(-)}{x-1}\geq 0$$

$$x>0 \quad \cap \quad x<4 \quad \cap \quad x-1<0$$

De donde $x\in]\ 0,1[$

La respuesta final será $x\in]\ 0,1[\cup[\ 5,\infty[$.

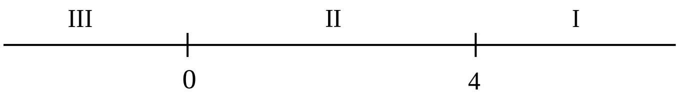
375. Resolver

$$\frac{\left|4x-x^2\right|-5}{|x|-4}\geq 0$$

Como $\left|4x-x^2\right|=\left|x^2-4x\right|$, escribamos:

$$\frac{\left|x^2-4x\right|-5}{|x|-4}\geq 0$$

$$\frac{|x||x-4|-5}{|x|-4}\geq 0$$

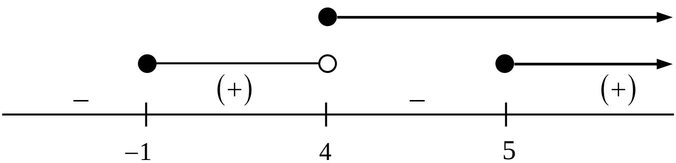


Zona I:

$$x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{x(x-4)-5}{x-4}\geq 0$$

$$x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{x^2-4x-5}{x-4}\geq 0$$

$$x\geq 4 \quad \cap \quad \frac{(x-5)(x+1)}{x-4}\geq 0$$



$$\therefore \; x\in [\; 5,\infty[$$

Zona II:

$$4 \geq x \geq 0 \quad \cap \quad \frac{x(-x+4)-5}{x-4} \geq 0$$

$$4 \geq x \geq 0 \quad \cap \quad \frac{-x^2+4x-5}{x-4} \geq 0$$

Como $-x^2+4x-5$ tiene $\Delta < 0$ y $a = -1 < 0,$ el trinomio será siempre negativo:

$$4 \geq x \geq 0 \quad \cap \quad \frac{(-)}{x-4} \geq 0$$

$$4 \geq x \geq 0 \quad \cap \quad x < 4$$

$$\therefore \; x \in [\; 0, 4[$$

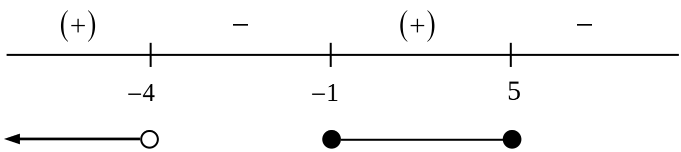
Zona III:

$$0 \geq x \quad \cap \quad \frac{(-x)(-x+4)-5}{-x-4} \geq 0$$

$$0 \geq x \quad \cap \quad \frac{x^2-4x-5}{-(x+4)} \geq 0$$

$$0 \geq x \quad \cap \quad \frac{(x-5)(x+1)}{-(x+4)} \geq 0$$

La solución de la inecuación de la derecha es



Como se debe cumplir que $x \leq 0$:

$$x \in \;]-\infty, -4[\; \cup [\; -1, 0]$$

De la unión de las tres zonas:

$$x \in \;]-\infty, -4[\; \cup [\; -1, 4[\; \cup [\; 5, \infty[$$

Ejercicios propuestos

376. Dados $A = [-4, 4[\cup \{8\}$ y $B =]0, 6] - \{1\}$, encontrar cuántos números enteros pertenecen a $B - A$.

R.: 3

377. Si $x \in]-7, -3[$, ¿en qué intervalo se encuentra $\dfrac{-1}{2x-5}$?

R.: $]1/19, 1/11[$

378. Resolver $\dfrac{2x^2 - 3x}{4} \leq \dfrac{4x^2 + 2x - 5}{8}$.

R.: $x \geq \dfrac{5}{8}$

379. ¿Cuál es el mayor valor entero de x que cumple con la inecuación $\dfrac{2x-1}{5} + \dfrac{3x-2}{6} > \dfrac{2x+1}{2} + \dfrac{2}{3}$?

R.: -18

380. Resolver $\dfrac{x}{2x-4} - \dfrac{7-2x}{3x-6} \geq \dfrac{2}{3}$.

R.: $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

381. Encontrar x en $\dfrac{ax-b}{a} + \dfrac{b-2ax}{b} \geq \dfrac{3}{b}$, si $a > 0 > b$.

R.: $x \geq \dfrac{3a + b^2 - ab}{ab - 2a^2}$

382. Si $m < \dfrac{3}{4}$ pero $m \neq 0,$ resolver $\dfrac{x-m}{m} + \dfrac{3x+2m}{m^2} \geq \dfrac{5x+4m}{m}.$

R.: $x \geq \dfrac{5m^2 - 2m}{3-4m}$

383. El doble de un número es menor que el exceso de 40 sobre el triple del número y el quíntuplo del número no es menor que 28 unidades más que el mismo. Determinar dicho número.

R.: $x \in [7, 8[$

384. Encontrar el mayor valor entero de x que cumple con

$$2x - 5 < x + 3 < 3x - 7$$

R.: 7

385. ¿Qué número entero excede a su raíz en más de 7 pero en menos de 8?

R: 11

386. Si se sabe que la suma de $4n+2$ números consecutivos es menor que la suma de los $2n+1$ siguientes, calcular el mayor número considerado si es el más grande posible.

R.: $7n+2$

387. Encontrar la relación entre a y b para que el conjunto solución del siguiente sistema tenga solución única

$$\begin{cases} 2x - a \geq a + 4 \\ 4 - 3x \geq 13 - 3b \end{cases}$$

R.: $a + 5 = b$

388. ¿Cuántos números cumplen con las siguientes inecuaciones a la vez?

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) > (x+4)(x-2) \\ (x+1)(x+3) > (x+4)(x-3) \end{cases}$$

R.: 10

389. Resolver

$$6 > \sqrt[3]{2x\sqrt[3]{2x\sqrt[3]{\cdots}}} > 4$$

R.: $8 < x < 18$

390. Resolver

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} < 1 \\ \dfrac{3}{x+2} > 3 \end{cases}$$

R.: $\left]-2,\ -1\right[$

391. Calcular la suma de todos los valores enteros de n tal que la solución del sistema

$$\begin{cases} nx - y = 5 \\ 2x + 3ny = 7 \end{cases}$$

satisfaga la condición $x > 0 \quad \wedge \quad y < 0.$

R.: 1

392. Una playa de estacionamiento tiene capacidad para 60 coches estacionados en ella. Si el número de coches estacionados se redujera a la sexta parte, se ocuparía menos de la décima parte de la capacidad del estacionamiento; pero, si se tratara de duplicar el número de coches estacionados, más de 8 coches no alcanzarían cupo. ¿Cuántos espacios están ocupados?

R.: 35

393. ¿Cuántos números enteros cumplen con $x^2 - 4x + 6 < 0$?

R.: 0

394. Encontrar la suma de los números enteros que cumplen con $x^2 + 2x - 35 < 0.$

R.: -11

395. ¿Qué signo tiene la expresión $-ax^2 - a^2x^2 - ax - a \quad (a \neq 0)$?

R.: Positivo si $a < 0,$ negativo si $a > 0$

396. Calcular el menor valor de m que satisface $-9x^2 + 4x \leq m - 7,$ para todo valor real de $x.$

R.: $67/9$

397. Resolver para x: $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{m}{2} - \dfrac{x^2}{2m} > 0.$

R.:
Si $m > 0 \Rightarrow x \in \left]-m/2,\ 2m\right[,$ si $m < 0 \Rightarrow x \in \left]-\infty,\ 2m\right[\cup \left]-m/2,\ \infty\right[$

398. Resolver para x: $\dfrac{x+a}{x-a} \leq \dfrac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}$ si $a \leq 0.$

R.: Si $a = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\},$ si $a < 0 \Rightarrow x \in \left]a, 0\right] \cup \left]-a, \infty\right[$

399. Encontrar el conjunto de valores de a que hacen que la ecuación siguiente en la variable x tenga soluciones positivas

$$ax + 2 = a^2 + 5x + a$$

R.: $a \in \left]-2, 1\right[\cup \left]5, \infty\right[$

400. Determinar m de manera que la raíz de la ecuación $\dfrac{4}{x} = \dfrac{2m-1}{x+m}$ sea mayor que 2.

R.: $\left]5/2, \infty\right[$

401. Encontrar el conjunto de posibles valores de r para que la inecuación $\dfrac{rx^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 3} > r - 2$ se cumpla para todo $x \in \mathbb{R}$.

R.: $r \in \left]-5, 1\right[$

402. La utilidad que se obtiene al producir y vender x cocinas en una compañía está dada por $U = -\dfrac{4}{25}x^2 + 80x - 1{,}200$ dólares. ¿Cuántas cocinas se deberán producir y vender para que la utilidad esté entre \$5,200 y \$7,200?

R.: $x \in \left]100, 150\right[\cup \left]350, 400\right[$

403. Resolver $x^3 - 3x^2 + 4 \le 0$.

R.: $\left]-\infty, -1\right]$

404. Hallar el conjunto solución de $x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9 > 0$.

R.: $x \in \mathbb{R} - \{-1, -3\}$

405. Hallar el conjunto solución de $\dfrac{(2-x)(x+1)}{(x-3)^2} \le 0$.

R.: $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[2, \infty\right[- \{3\}$

406. Resolver $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 2.$

R.: $\left[-3, -1\right[$

407. Hallar la suma de los valores enteros de x que verifican la inecuación

$$\frac{3x+2}{x-5}+2<\frac{4x-7}{x-5}$$

R.: 9

408. Resolver $\dfrac{300}{3x+4} \leq \dfrac{200}{2x+1}$ e indicar su complemento.

R.: $\left[-4/3, -1/2\right]$

409. Dada la ecuación $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{x-c}$ $\left(a>b>0,\ c>0\right),$ encontrar la condición que debe cumplirse para que tenga dos raíces reales diferentes.

R.: $c>a \quad \vee \quad c<b$

410. Si $a>0>b>-a,$ resolver

$$\frac{a}{bx+a}-\frac{b}{b-ax} \leq \frac{a^2+b^2}{\left(bx+a\right)\left(b-ax\right)}$$

R.: $x \in \left[-1, b/a\right[\cup \left]-a/b, \infty\right[$

411. Calcular la suma de los valores enteros de x que satisfacen $\sqrt{x-2}-3<0.$

R.: 54

412. Resolver $\sqrt{2x-3} > \sqrt{2-x}$.

R.: $]5/3,\ 2]$

413. Encontrar la suma de las raíces de la ecuación $|3x-1|-1=|x+2|$.

R.: $3/2$

414. Encontrar la suma de las raíces de la ecuación $|3x+6|=4+|x+2|$.

R.: -4

415. Resolver $|3x^2-4x|=|5x-1|$ e indicar la suma de todas sus soluciones reales.

R.: $8/3$

416. Resolver $|3x+4|\le 3x+2$.

R.: $\varnothing$

417. Resolver $|x-a|-2|x+a|<3a$ si $a>0$.

R.: □

418. Resolver $\dfrac{2x-1}{|3-x|}\le 2$.

R.: $]-\infty,\ 7/4]$

419. Resolver $||3x-2|-5|<1$ e indicar el menor valor entero.

R.: -1

420. Resolver $\dfrac{2(x+2)-\left|x^2+3x\right|}{|x|+1}<2-|x+3|$.

R.: $x\in\left]-\infty,-1\right[$

IV

Progresiones aritméticas y geométricas

1. Progresiones aritméticas

Son sucesiones de números en las cuales cada uno de ellos se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante llamada razón aritmética (r). La progresión es creciente si $r > 0$ y decreciente si $r < 0$.

Ejemplo:
3, 8, 13, 18, 23, 28, 33 es una progresión aritmética de razón $r = 8 - 3 = 5$.

1.1. Cálculo del último término de una progresión aritmética

Sean

a : primer término de la progresión aritmética
r : razón aritmética
u : último término
n : número de términos

Los términos de la progresión aritmética serán

$$\underset{1°}{a}, \ \underset{2°}{a+r}, \ \underset{3°}{a+2r}, \ \underset{4°}{a+3r}, \ \cdots \ , \underset{n°}{u}$$

en donde "u" es el $n-$ésimo término. Por simple inspección, se desprende que:

$$u = a + (n-1)r$$

1.2. Propiedad fundamental

En toda progresión aritmética, la suma de cualquier par de términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los términos extremos. Ello debido a que:

$$\underset{1°}{a} + \underset{n°}{u} = \underbrace{(a+r)}_{2°} + \underbrace{(u-r)}_{(n-1)°} = \underbrace{(a+2r)}_{3°} + \underbrace{(u-2r)}_{(n-2)°} = \ \cdots$$

Ejemplo:
En la progresión aritmética $3, 8, 13, 18, 23, 28, 33,$ se observa que $3+33=8+28=13+23=18+18.$

1.3. Término central de una progresión aritmética

Si el número de términos de la progresión es impar, existirá el término central (t_c) y será igual a la semisuma de los extremos (media aritmética de los términos extremos):

$$t_c = \frac{a+u}{2}$$

Ejemplo:
En la progresión aritmética $3, 8, 13, (18), 23, 28, 33,$ el número de términos es impar $n=7,$ entonces hay término central y como $a=3$ y $u=33$:

$$t_c = \frac{3+33}{2}$$

$$t_c = 18$$

1.4. Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \cdots\ ,\ \underbrace{a+(n-3)r}_{u-2r},\ \underbrace{a+(n-2)r}_{u-r},\ \underbrace{a+(n-1)r}_{u}$$

o mejor:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \cdots\ ,\ u-2r,\ u-r,\ u$$

Se pide la suma S que se puede escribir

$$S=\underbrace{a+u}_{a+u}+\underbrace{(a+r)+(u-r)}_{a+u}+\underbrace{(a+2r)+(u-2r)}_{a+u}+\ \cdots$$

Como el número de términos es $n,$ el número de parejas será $n/2;$ de donde:

$$S=(a+u)\cdot\frac{n}{2}$$

$$S=\frac{a+u}{2}\cdot n$$

Ejemplo:
Sea la progresión aritmética siguiente $\_,\ \_,\ 3,\ 7,\ \_,\ \_,\ \cdots$.
Encontrar la suma de los 100 primeros términos.

Se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}3=a+2r\\7=a+3r\end{array}\right\}\Rightarrow\ r=4,\ \ a=-5$$

luego:

$$S_{100} = \frac{a+u}{2} \cdot 100$$
$$S_{100} = \frac{a+[a+99r]}{2} \cdot 100$$
$$S_{100} = \frac{2a+99r}{2} \cdot 100$$
$$S_{100} = \frac{2(-5)+99(4)}{2} \cdot 100$$
$$S_{100} = 19,300$$

2. Progresiones geométricas

Son sucesiones de números en las cuales cada uno de ellos se obtiene multiplicando al anterior por una cantidad constante llamada razón geométrica (q).

Si el primer término es positivo, la progresión geométrica será:

- creciente si $q > 1$
- decreciente si $1 > q > 0$
- oscilante si $q < 0$

Ejemplo:

$3, 6, 12, 24, 48, 96$ es una progresión geométrica de razón $q = \frac{6}{3} = 2$.

2.1. Cálculo del último término de una progresión geométrica

Sean

a : primer término de la progresión geométrica
q : razón geométrica
u : último término
n : número de términos

Los términos de la progresión geométrica serán

$$\underset{1°}{a},\ \underset{2°}{aq},\ \underset{3°}{aq^2},\ \underset{4°}{aq^3},\ \cdots\ ,\underset{n°}{u}$$

Por simple observación, se tiene que:

$$u = aq^{n-1}$$

2.2. Propiedad fundamental

En toda progresión geométrica, el producto de cualquier par de términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los términos extremos. Ello debido a que:

$$\underset{1°}{a} \cdot \underbrace{\left(aq^{n-1}\right)}_{n°} = \underset{2°}{(aq)} \cdot \underbrace{\left(aq^{n-2}\right)}_{(n-1)°} = \underset{3°}{\left(aq^2\right)} + \underbrace{\left(aq^{n-3}\right)}_{(n-2)°} = \cdots$$

Ejemplo:
En la progresión geométrica $3, 6, 12, 24, 48, 96,$ se observa que $3 \cdot 96 = 6 \cdot 48 = 12 \cdot 24.$

2.3. Término central de una progresión geométrica

Si el número de términos de la progresión es impar, existirá el término central $\left(t_c\right)$ y será igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos (media geométrica de los términos extremos):

$$t_c = \sqrt{au}$$

Ejemplo:
En la progresión geométrica $6, 12, \left(24\right), 48, 96,$ el número de términos es impar $n = 5,$ entonces hay término central y como $a = 6$ y $u = 96$:

$$t_c = \sqrt{6 \cdot 96}$$
$$t_c = 24$$

2.4. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica

Sea la progresión geométrica:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots\ ,\ aq^{n-2},\ aq^{n-1}$$

Se pide:

$$S = a + aq + aq^2 + \ \cdots\ + aq^{n-2} + aq^{n-1} \qquad (1)$$

(1) por q:

$$qS = aq + aq^2 + aq^3 + \ \cdots\ + aq^{n-1} + aq^n \qquad (2)$$

De $(2)-(1)$:

$$\begin{aligned} Sq - S &= aq^n - a \\ S(q-1) &= a\left(q^n - 1\right) \\ S &= a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \end{aligned}$$

Ejemplo:
Sea la progresión geométrica siguiente $\_,\ 108,\ \_,\ \_,\ \_,\ 4/3,\ \_,\ \cdots$. Averiguar el número de términos que tiene si se sabe que la suma de todos ellos es $485\frac{7}{9}$.

Se sabe que:

$$\left.\begin{aligned} 108 &= aq^1 \\ \frac{4}{3} &= aq^5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{aq^5}{aq} = \frac{4/3}{108} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{81} \Rightarrow q = \frac{1}{3},\ a = 324$$

Al resolver $q^4 = \frac{1}{81}$ se toma la solución $q = \frac{1}{3}$ y no $q = -\frac{1}{3}$ porque la progresión geométrica dada es decreciente.

Además:

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$485\frac{7}{9} = 324 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$\frac{4{,}372}{9} = 324 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{2}{3}}$$

De donde:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2{,}187}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

$$n = 7$$

3. Progresión geométrica decreciente e ilimitada

Consideremos la progresión geométrica siguiente

$$16,\ 8,\ 4,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots$$

Como se nota, la razón es $q = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} < 1$ y el número de términos tiende a infinito.

Si se trata de averiguar el límite de la suma de todos sus términos o la suma límite:

$$S_L = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

se puede deducir una fórmula a partir de:

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

en donde $0 < q < 1$ y $n \to \infty$. Si $0 < q < 1$ y $n \to \infty$, entonces q^n tiende a 0. Por ejemplo si $q = \frac{1}{2}$, se observa que:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}, \\ \quad\vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

De donde:

$$S_L = a \cdot \frac{0 - 1}{q - 1}$$

$$S_L = \frac{a}{1 - q}$$

En el ejemplo anterior:

$$S_L = \frac{16}{1 - 1/2} = 32$$

Ejercicios resueltos

421. La suma de los siete primeros términos de una progresión aritmética es 49 y la suma de los 20 primeros, 400. ¿Cuántos términos de dicha progresión se deben tomar para que la suma de estos términos sea igual a 729?

Forma 1

Se sabe que:

$$S_7 = \frac{a+(a+6r)}{2}\times 7 = (a+3r)\times 7 = 49 \;\Rightarrow\; a+3r=7 \qquad (1)$$
$$S_{20} = \frac{a+(a+19r)}{2}\times 20 = (a+9.5r)\times 20 = 400 \;\Rightarrow\; a+9.5r=20 \qquad (2)$$

Al resolver el sistema, obtenemos:

$$r=2$$
$$a=1$$

Como $S_n = \frac{a+[a+(n-1)r]}{2}\times n,$ se debe cumplir que:

$$\frac{a+[a+(n-1)r]}{2}\times n = 729$$
$$\frac{1+[1+(n-1)2]}{2}\times n = 729$$
$$[1+(n-1)]\times n = 729$$
$$n^2 = 729$$
$$n = 27$$

422. La suma de los a primeros términos de una progresión aritmética de razón 3 es 112. Calcular el término central, siendo a el primer término.

Tenemos que:

$$\underbrace{a,\ a+3,\ a+6,\cdots,\ t_a}_{a\text{ términos}}$$

$$112=\frac{a+t_a}{2}\cdot a$$

$$224=\left[a+a+(a-1)3\right]a$$

$$224=(5a-3)a$$

$$5a^2-3a-224=0$$

$$(5a+32)(a-7)=0$$

De donde $a=7$.

El término central será:

$$t_c=\frac{a+u}{2}$$

$$t_c=\frac{a+t_7}{2}$$

$$t_c=\frac{7+\left[7+(7-1)3\right]}{2}$$

$$t_c=\frac{7+25}{2}$$

$$t_c=16$$

423. La suma de los seis términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 141 y el producto de los extremos es 46. Encontrar el lugar que ocupa el número 34.

Tenemos la progresión aritmética siguiente:

$$t_1,\cdots,\ \underbrace{t_6,\ t_7,\cdots,\ t_{10},\ t_{11}}_{S=141},\cdots,\ t_{16}$$

Se tiene que:

$$\begin{cases} 141 = \dfrac{t_6 + t_{11}}{2} \cdot 6 \\ t_1 \cdot t_{16} = 46 \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} \dfrac{141(2)}{6} = (a+5r) + (a+10r) \\ a \cdot (a+15r) = 46 \end{cases}$$

O sea:

$$\begin{cases} 2a + 15r = 47 & (\alpha) \\ a^2 + 15ar = 46 & (\beta) \end{cases}$$

De (β):

$$r = \frac{46 - a^2}{15a}$$

En (α):

$$2a + 15\left(\frac{46 - a^2}{15a}\right) = 47$$

Por $15a$:

$$30a^2 + 690 - 15a^2 = 705a$$
$$15a^2 - 705a + 690 = 0$$
$$a^2 - 47a + 46 = 0$$
$$(a-46)(a-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a = 46 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a = 46 \Rightarrow r = \dfrac{46 - 46^2}{15(46)} < 0 \quad (\text{descartada})$

Si $a = 1 \Rightarrow r = \dfrac{46 - 1^2}{15(1)} = 3.$

Finalmente:

$$\begin{aligned} 34 &= a + (n-1)r \\ 34 &= 1 + (n-1)3 \\ n - 1 &= 11 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

El número 34 ocupa el duodécimo lugar.

424. En una progresión aritmética creciente de 18 términos, la suma de sus términos es 549 y el producto del primero por el último es 280. Encontrar la razón.

Se tiene $a, \cdots, t_{18}$.

$$\begin{cases} 549 = \dfrac{a + t_{18}}{2} \cdot 18 \\ a \cdot t_{18} = 280 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} a + t_{18} = \dfrac{549(2)}{18} = 61 \\ a \cdot t_{18} = 280 \end{cases}$$

Formemos la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 61x + 280 = 0$$

$$(x-5)(x-56) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = 56 \end{cases}$$

Si $a = 5 \Rightarrow t_{18} = 56.$

Si $a = 56 \Rightarrow t_{18} = 5$ (descartada por ser creciente la progresión)
Entonces:

$$t_{18} = 56 \Rightarrow 5 + (18-1)r = 56 \Rightarrow r = 3$$

425. Los tres primeros términos de una progresión aritmética suman -6 y los tres últimos, 234. Averiguar el número total de términos si la suma global es 912.

Forma 1

Sea la progresión aritmética siguiente:

$$a,\ b,\ c, \cdots,\ x,\ y,\ z$$

De los datos:

$$\left.\begin{array}{ll} a+b+c = -6 \Rightarrow & (a+c)+b = -6 \\ x+y+z = 234 \Rightarrow & (x+z)+y = 234 \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Por propiedad:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{a+c}{2} = b \Rightarrow & a+c = 2b \\ \dfrac{x+z}{2} = y \Rightarrow & x+z = 2y \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

(β) en (α):

$$\begin{array}{lllll} 2b+b=-6 & \Rightarrow & b=-2 & \Rightarrow & a=-2-r \\ 2y+y=234 & \Rightarrow & y=78 & \Rightarrow & z=78+r \end{array}$$

La suma:

$$\begin{aligned} 912 &= \frac{a+z}{2}\times n \\ 1824 &= \left[-2-r+78+r\right]\times n \\ 1824 &= 76n \\ n &= 24 \end{aligned}$$

Forma 2

Sea la progresión aritmética siguiente:

$$\underbrace{a,\ a+r,\ a+2r,\cdots,\ a+(n-3)r,\ a+(n-2)r,\ a+(n-1)r}_{n \text{ términos}}$$

Según el enunciado:

$$\begin{cases} a+(a+r)+(a+2r) = -6 \\ a+(n-3)r+a+(n-2)r+a+(n-1)r = 234 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+3r = -6 \ \Rightarrow\ a+r=-2 & (1) \\ 3a+(3n-6)r = 234 \ \Rightarrow\ a+(n-2)r = 78 & (2) \end{cases}$$

De $(1)+(2)$:

$$2a+(n-1)r = 76 \qquad (\alpha)$$

Además:

$$\begin{aligned} 912 &= \frac{a+a+(n-1)r}{2}\times n \\ 1824 &= \left[2a+(n-1)r\right]n \qquad (\beta) \end{aligned}$$

(α) en (β):

$$1824 = [76]n$$
$$n = 24$$

426. Dada la progresión aritmética $(x+1)$, $(2x)$, $(4x-5)$, ¿cuántos términos debo sumar para obtener 75?

Encontremos la razón de la progresión aritmética:

$$\left.\begin{array}{l} r = (2x)-(x+1) = x-1 \\ r = (4x-5)-(2x) = 2x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow x-1 = 2x-5 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Luego la progresión aritmética es $4+1=5,\; 2(4)=8,\; 4(4)-5=11, \cdots$
El término enésimo será:

$$t_n = 5+(n-1)3$$
$$t_n = 3n+2$$

La suma será:

$$75 = \frac{5+(3n+2)}{2}\cdot n$$

Por 2:

$$150 = 5n+3n^2+2n$$
$$3n^2+7n-150 = 0$$
$$(3n+25)(n-6) = 0$$

Como $n \in \mathbb{N}$:

$$n = 6$$

427. El primer término de una progresión aritmética es 0.02, la razón, 0.01, y el término central es igual al cuadrado de la suma de todos los términos. Calcular el número de ellos.

Tenemos que:

$$a = 0.02$$
$$r = 0.01$$
$$t_c = \frac{a+u}{2} = S^2$$

Entonces:

$$\frac{a+u}{2} = S^2$$
$$\frac{a+u}{2} = \left(\frac{a+u}{2} \cdot n\right)^2$$

$$\frac{a+u}{2} = \left(\frac{a+u}{2}\right)^2 \cdot n^2$$
$$1 = \frac{a+u}{2} \cdot n^2$$
$$2 = (a+u) \cdot n^2$$
$$2 = \left[0.02 + 0.02 + (n-1)0.01\right] n^2$$
$$2 = 0.03n^2 + 0.01n^3$$

Entonces:

$$0.01n^3 + 0.03n^2 - 2 = 0$$

Por 100:

$$n^3 + 3n^2 - 200 = 0$$

Por Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 3 & 0 & -200 \\
5 & \downarrow & 5 & 40 & 200 \\
\hline
 & 1 & 8 & 40 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}
$$

$$\therefore\ n = 5$$

428. En una progresión aritmética de $4n$ términos, cuyo primer término es 6 y la razón, 5, la suma de los $2n$ últimos términos es 508. Hallar n.

Tenemos que la progresión aritmética es:

$$\underbrace{6,\ 11,\ 16, \cdots ,}_{2n \text{ términos}}\ \underbrace{t_{2n+1}, \cdots ,\ t_{4n}}_{2n \text{ términos}}$$

Encontremos:

$$t_{2n+1} = 6 + \left(2n+1-1\right)5 = 6 + 10n$$
$$t_{4n} = 6 + \left(4n-1\right)5 = 1 + 20n$$

Entonces, como $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$:

$$\frac{t_{2n+1} + t_{4n}}{2} \times \left(2n\right) = 508$$
$$\left[6 + 10n + 1 + 20n\right]n = 508$$
$$30n^2 + 7n - 508 = 0$$
$$\left(30n + 127\right)\left(n - 4\right) = 0$$

Como $n \in \mathbb{N}$:

$$n = 4$$

429. En una progresión aritmética de $3n$ términos, la suma de los n últimos términos es 525. Si el primer y segundo términos son 9 y 17, respectivamente, determinar n.

Tenemos:

$$\underbrace{9,\ 17,\ 25,\cdots t_{2n},}_{2n\ \text{términos}}\ \underbrace{t_{2n+1},\cdots,\ t_{3n}}_{n\ \text{términos}}$$

Del dato:

$$525=\frac{t_{2n+1}+t_{3n}}{2}\cdot n \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
t_{2n+1}&=9+(2n+1-1)r\\
t_{2n+1}&=9+(2n)8\\
t_{2n+1}&=9+16n \qquad (2)\\
t_{3n}&=9+(3n-1)r\\
t_{3n}&=9+(3n-1)8\\
t_{3n}&=1+24n \qquad (3)
\end{aligned}$$

Reemplacemos (3) y (2) en (1):

$$525=\frac{9+16n+1+24n}{2}\cdot n$$

$$525=(5+20n)n$$

$$20n^2+5n-525=0$$

$$4n^2+n-105=0$$

$$(4n+21)(n-5)=0$$

De donde:

$$n=5$$

430. En la siguiente progresión aritmética

$$3, \cdots, \ 30, \cdots, \ x$$

el número de términos comprendidos entre 3 y 30 es el mismo que entre 30 y x. Si la suma de todos los términos es 570, hallar el decimoquinto término de dicha progresión.

Forma 1

Sea n el número de términos comprendidos entre 3 y 30:

$$\underbrace{\underbrace{3, \overbrace{\cdots}^{n}, \ 30}_{n+2}, \overbrace{\cdots}^{n}, \ x}_{2n+3}$$

30 sería el término que ocupa el lugar $n+2$:

$$30 = 3 + (n+2-1)r$$
$$r = \frac{27}{n+1} \qquad (1)$$

Además, 570 sería la suma de los $2n+3$ primeros términos:

$$570 = \frac{3 + \left[3 + (2n+3-1)r\right]}{2}(2n+3)$$
$$570 = \left[3 + (n+1)r\right](2n+3) \qquad (2)$$

De (1) en (2):

$$570 = \left[3 + (n+1)\left(\frac{27}{n+1}\right)\right](2n+3)$$
$$570 = [3+27](2n+3)$$
$$19 = 2n+3$$
$$n = 8$$

En (1):

$$r=\frac{27}{8+1}=3$$

De donde:

$$\begin{aligned} t_{15} &= 3+(15-1)3 \\ t_{15} &= 45 \end{aligned}$$

Forma 2

Formemos dos progresiones aritméticas con igual número de términos:

$$\begin{array}{c} 3,\cdots,\ 30 \\ \underbrace{30,\cdots,\ x}_{n\ \text{términos}} \end{array}$$

Se tiene que:

$$30=3+(n-1)r \ \Rightarrow\ (n-1)r=27 \qquad (1)$$
$$x=30+(n-1)r \ \Rightarrow\ (n-1)r=x-30 \qquad (2)$$

De (1) y (2)

$$\begin{aligned} x-30 &= 27 \\ x &= 57 \end{aligned}$$

Además:

$$570=\frac{3+57}{2}\underbrace{\overbrace{(2n-1)}^{n+n-1\ \text{términos}}}_{\substack{\text{el término 30}\\ \text{se repite}}}$$

$$\begin{aligned} 2n-1 &= 19 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

En (1):

$$30 = 3 + (10-1)r$$
$$r = 3$$

Finalmente:

$$t_{15} = 3 + (15-1)3$$
$$t_{15} = 45$$

Forma 3

A partir de:

$$3, \cdots, \ 30$$
$$\underbrace{30, \cdots, \ x}_{n \text{ términos}}$$

Se tiene que:

$$30 = 3 + (n-1)r \ \Rightarrow \ (n-1)r = 27 \qquad (1)$$
$$x = 30 + (n-1)r \ \Rightarrow \ (n-1)r = x - 30 \qquad (2)$$

De (1) y (2)

$$x - 30 = 27$$
$$x = 57$$

Además:

$$570 = \frac{3+30}{2}(n) + \frac{30+x}{2}(n) - 30$$

30 se repite en las dos progresiones

$$600 = \frac{63+x}{2}(n)$$
$$n = \frac{1,200}{63+x}$$

De donde:

$$n = \frac{1,200}{63+57}$$
$$n = \frac{1,200}{120}$$
$$n = 10$$

Entonces:

$$30 = 3 + (10-1)r$$
$$r = 3$$

Por lo tanto:

$$t_{15} = 3 + (15-1)3$$
$$t_{15} = 45$$

431. En una progresión aritmética la suma de los p primeros términos es q y la suma de los q primeros términos es $p.$ Determinar la razón.

Sea la progresión aritmética:

$$a,\ a+r,\ a+2r, \cdots$$

De los datos:

$$\begin{cases} S_1 = q = \dfrac{a+t_p}{2} \cdot p \\ S_2 = p = \dfrac{a+t_q}{2} \cdot q \end{cases}$$

Es decir:

$$\begin{cases} 2q = \left[a + a + (p-1)r\right]p \\ 2p = \left[a + a + (q-1)r\right]q \end{cases}$$

Despejemos $2a$ de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a = \dfrac{2q}{p} - (p-1)r \\ 2a = \dfrac{2p}{q} - (q-1)r \end{cases}$$

Igualemos

$$\frac{2q}{p} - (p-1)r = \frac{2p}{q} - (q-1)r$$

$$\left[(q-1) - (p-1)\right]r = \frac{2p}{q} - \frac{2q}{p}$$

$$(q-p)r = \frac{2p^2 - 2q^2}{pq}$$

$$r = \frac{2\left(p^2 - q^2\right)}{(q-p)pq}$$

$$r = -\frac{2(p+q)}{pq}$$

432. José compra un auto de manera que en la primera cuota paga S/.180 y en cada cuota paga S/.10 más que en la anterior. ¿Cuántas cuotas pagó si en total el auto le costó S/.12,780?

De acuerdo con el enunciado:

$$a = 180$$
$$r = 10$$
$$S = 12,780$$

Entonces:

$$12,780 = \left(\frac{a+u}{2} \right) \cdot n$$
$$25,560 = \left[180 + 180 + (n-1)10 \right] \cdot n$$
$$25,560 = 350n + 10n^2$$
$$n^2 + 35n - 2,556 = 0$$
$$(n+71)(n-36) = 0$$

De donde

$$n = 36 \text{ cuotas}$$

433. Si en una progresión geométrica se cumple que el quinto y el octavo términos son $\frac{b}{4}$ y $16b$, respectivamente, hallar el decimotercer término en función de b.

Se tiene que:

$$t_5 = \frac{b}{4}$$
$$t_8 = 16b$$

Como

$$t_8 = t_5 \cdot q \cdot q \cdot q$$
$$t_8 = t_5 \cdot q^3$$
$$16b = \frac{b}{4} \cdot q^3$$
$$q^3 = 64$$

$$q = 4$$

Entonces el término t_{13} será:

$$t_{13} = t_8 \cdot q^5$$
$$t_{13} = 16b \cdot (4)^5$$
$$t_{13} = 16,384b$$

434. La suma de los términos que ocupan los lugares impares de una progresión geométrica de 6 términos es 182 y la suma de los que ocupan los lugares pares es 546. Encontrar la razón.

Forma 1

Sea la progresión geométrica siguiente:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ aq^5$$

Se tiene que:

$$a + aq^2 + aq^4 = 182 \qquad (\alpha)$$
$$aq + aq^3 + aq^5 = 546 \qquad (\beta)$$

(β) entre (α):

$$\frac{aq\left(1+q^2+q^4\right)}{a\left(1+q^2+q^4\right)} = \frac{546}{182}$$
$$q = 3$$

Forma 2
Sea la progresión geométrica siguiente:

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$$

Se sabe que:

$$b = qa$$
$$d = qc$$
$$f = qe$$

Sumándolas:

$$b + d + f = q(a + c + e)$$
$$546 = q(182)$$
$$q = 3$$

435. Cuatro números forman una progresión geométrica decreciente. Si la suma de sus extremos es 140 y la suma de los términos centrales es 60, encontrar el último término.

Sea la progresión geométrica siguiente:

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3$$

Se sabe que:

$$a + aq^3 = a\left(1 + q^3\right) = 140$$
$$aq + aq^2 = a\left(q + q^2\right) = 60 \qquad (\alpha)$$

Dividámoslas:

$$\frac{1 + q^3}{q + q^2} = \frac{140}{60}$$
$$\frac{1 + q^3}{q + q^2} = \frac{7}{3}$$

$$3+3q^3 = 7q+7q^2$$
$$3\left(q^3+1\right)=7q\left(q+1\right)$$
$$3\left(q^2-q+1\right)=7q$$
$$3q^2-10q+3=0$$
$$\left(3q-1\right)\left(q-3\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} q=1/3 \\ q=3 \end{cases}$$

Como la progresión es decreciente $\left(q<1\right)$:

$$q=\frac{1}{3}$$

En $\left(\alpha\right)$:

$$a\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=60$$
$$a\left(\frac{4}{9}\right)=60$$
$$a=135$$

El último término será $aq^3=135\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{135}{27}=5.$

436. Hallar cuatro números si se sabe que los tres primeros están en progresión geométrica y los tres últimos, en progresión aritmética de razón 6, siendo el primer número igual al cuarto.

Forma 1

Sean $a,\ aq,\ aq^2,\ a,$ los elementos de la sucesión.

De acuerdo con la propiedad del término central, los elementos de la sucesión que forman una progresión aritmética, cumplen:

$$\begin{aligned} aq^2 + aq^2 &= aq + a \\ 2aq^2 &= aq + a \end{aligned}$$

Como $a \neq 0$:

$$2q^2 = q + 1$$
$$2q^2 - q - 1 = 0$$
$$(2q+1)(q-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} q = -1/2 \\ q = 1 \end{cases}$$

Además:

$$aq^2 - aq = 6$$
$$a\left(q^2 - 1\right) = 6$$

Si $q = -1/2 \;\Rightarrow\; a(1/4 + 1/2) = 6 \;\Rightarrow\; a = 6/(3/4) = 8.$
Si $q = 1 \;\Rightarrow$ los tres primeros términos de la progresión geométrica serían $a,\ a,\ a,$ lo cual no corresponde a la restricción del enunciado.
Con lo cual, los elementos serán: $8, -4,\ 2,\ 8.$

Forma 2

Sean $a,\ a-12,\ a-6,\ a,$ los elementos de la serie.
De acuerdo con la propiedad del término central de la progresión geométrica:

$$(a-12)^2 = a(a-6)$$
$$a^2 - 24a + 144 = a^2 - 6a$$
$$18a = 144$$
$$a = 8$$

Los elementos serán: $8, -4,\ 2,\ 8.$

437. En un juego de azar una persona apuesta la primera vez un dólar y se propone triplicar la apuesta anterior cada vez que el éxito no le favorezca. Cuando tiene éxito, gana una cantidad igual a su apuesta. En su novena apuesta obtiene por primera vez un éxito y luego se retira. Si ingresó al casino con $10,000, ¿con cuánto se retiró?

La primera vez pierde 1 dólar, la segunda pierde 3 dólares, en la tercera pierde $3^2=9$ dólares y así sucesivamente hasta su octava apuesta en la que pierde 3^7 dólares.
La pérdida acumulada en las 8 primeras apuestas es:

$$\begin{aligned} 1+3+3^2+\cdots+3^7 &= 1\cdot\frac{3^8-1}{3-1} \\ &= 3,280 \end{aligned}$$

Su novena apuesta es de 3^8 dólares y gana una suma igual.
Se retiró del casino con $10,000-3,280+3^8=10,000-3,280+6,561=13,281$ dólares.

438. Varios socios forman una empresa y al cabo de cierto tiempo se reparten S/.8´190,000 de utilidad. Si se sabe que cada socio aportó un capital equivalente al cuádruplo del aportado por el anterior y que la diferencia entre las ganancias del segundo y primer socios fue S/.18,000, encontrar el número de socios.

Si los aportes de capital forman una progresión geométrica de razón 4, las utilidades formarán otra progresión geométrica de razón 4.
Sean las utilidades $(q=4)$:

$$a,\ 4a,\ 16a,\cdots$$

Del enunciado se tiene que:

$$4a-a=3a \ \Rightarrow\ 3a=18,000 \ \Rightarrow\ a=6,000$$

Luego:

$$8'190,000 = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$8'190,000 = 6,000 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1}$$

$$4^n - 1 = 4,095$$

$$4^n = 4,096$$

$$4^n = 4^6$$

$$n = 6$$

439. En cada caso hallar la suma de todos los términos:

a) $243, \; 81, \; 27, \cdots, \; 1/3$

b) $243, \; 81, \; 27, \cdots$

a) En la progresión geométrica limitada:

$$a = 243$$

$$q = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$$

$$u = \frac{1}{3} = aq^{n-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{3} = 243\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{729} = \frac{1}{3^{n-1}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{3^6} = \frac{1}{3^{n-1}} \;\Rightarrow\; n = 7$$

La suma pedida será:

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S = 243 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1}$$

$$S = 243 \cdot \frac{\frac{1}{2187} - 1}{-\frac{2}{3}}$$

$$S = \frac{243\left[1 - 2187\right]}{-2\left(729\right)}$$

$$S = \frac{243\left(2186\right)}{2\left(729\right)}$$

$$S = \frac{2186}{6}$$

$$S = 364.33$$

b) En la progresión geométrica decreciente ilimitada:

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

$$S = \frac{243}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{243}{\frac{2}{3}}$$

$$S = 364.50$$

440. Los dos primeros términos de una progresión geométrica decreciente e infinita suman 6 y cada término es igual a 4 veces la suma de todos los términos que le siguen. Calcular la suma de los términos de la progresión.

Sea la progresión:

$$a,\ \underbrace{aq,\ aq^2,\ aq^3 \cdots}_{S}$$

Se tiene que:

$$a + aq = 6$$
$$a(1+q) = 6 \qquad (\alpha)$$

De otro lado:

$$a = 4S$$
$$a = 4\frac{aq}{1-q}$$
$$1 = \frac{4q}{1-q}$$
$$1-q = 4q$$
$$q = \frac{1}{5}$$

En (α):

$$a\left(1+\frac{1}{5}\right) = 6$$
$$\frac{6}{5}a = 6$$
$$a = 5$$

De donde, la suma pedida será:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{4}$$

441. La suma de tres términos que están en progresión aritmética es 21. Si a estos números se les suma 2, 3 y 9, respectivamente, los nuevos números

forman una progresión geométrica. Encontrar el octavo término de esta si la progresión aritmética es creciente.

Sea la progresión aritmética:

$$7-r,\ 7,\ 7+r$$

La progresión geométrica será:

$$7-r+2,\ 7+3,\ 7+r+9$$
$$9-r,\ 10,\ 16+r$$

Por propiedad de la progresión geométrica:

$$10^2=(9-r)(16+r)$$
$$100=144+9r-16r-r^2$$
$$r^2+7r-44=0$$
$$(r+11)(r-4)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases} r=-11 \\ r=4 \end{cases}$$

Como la progresión aritmética es creciente: $r=4$.

La progresión geométrica será:

$$9-4,\ 10,\ 16+4,\cdots$$
$$5,\ 10,\ 20,\cdots\ \Rightarrow\ q=2$$

Entonces:

$$t_8=aq^{8-1}$$
$$t_8=5(2)^7$$
$$t_8=640$$

442. En una progresión geométrica decreciente prolongada indefinidamente, cada término es igual a la suma de todos los términos que le siguen multiplicada por el doble de la razón. Encontrar el sexto término si se sabe

que la suma de los seis primeros términos de dicha progresión geométrica es 31.5.

Se tiene que:

$$a,\ \underbrace{aq,\ aq^2,\ aq^3 \cdots}_{S=\frac{aq}{1-q}}$$

$$a = S\cdot(2q)$$

$$a = \frac{aq}{1-q}\cdot(2q)$$

$$1-q = 2q^2$$

$$2q^2+q-1=0$$

$$(2q-1)(q+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} q = 1/2 \\ q = -1 \end{cases}$$

Como la progresión es decreciente: $q = 1/2$.
Además:

$$31.5 = a\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2}-1}$$

$$31.5 = a\cdot\frac{1-64}{32-64}$$

$$31.5 = \frac{63}{32}a$$

$$a = 16$$

El sexto término será:

$$t_6 = aq^{6-1}$$
$$t_6 = 16\left(\frac{1}{2}\right)^5$$
$$t_6 = \frac{1}{2}$$

443. Una progresión geométrica decreciente de términos racionales positivos tiene por suma de sus infinitos términos a $\frac{243}{8}$. Si el tercer y cuarto términos suman 7.5, ¿cuánto suman el tercer y sexto términos?

Se sabe que $S = \frac{a}{1-q}$, de donde:

$$\frac{243}{8} = \frac{a}{1-q}$$
$$a = \frac{243}{8}(1-q) \qquad (\alpha)$$

Además:

$$t_3 + t_4 = 7.5$$
$$aq^2 + aq^3 = 7.5$$
$$a\left(q^2 + q^3\right) = 7.5$$
$$a = \frac{7.5}{q^2 + q^3} \qquad (\beta)$$

De (α) y (β):

$$\frac{243}{8}(1-q)=\frac{7.5}{q^2+q^3}$$

$$243(1-q)\left(q^2+q^3\right)=60$$

$$243\left(q^2+q^3-q^3-q^4\right)=60$$

$$243\left(q^2-q^4\right)=60$$

$$81\left(q^2-q^4\right)=20$$

$$81q^4-81q^2+20=0$$

$$\left(9q^2-4\right)\left(9q^2-5\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} q^2=\dfrac{4}{9} \Rightarrow q=\pm\dfrac{2}{3} \\ q^2=\dfrac{5}{9} \Rightarrow q=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Como la progresión tiene términos racionales positivos:

$$q=\frac{2}{3}$$

En (α):

$$a=\frac{243}{8}\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$a=\frac{243}{8}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$a=\frac{81}{8}$$

La suma pedida será:

$$S = t_3 + t_6$$
$$S = aq^2 + aq^5$$
$$S = aq^2\left(1+q^3\right)$$
$$S = \frac{81}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)$$
$$S = \frac{81}{8}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{35}{27}$$

$$S = \frac{35}{6}$$

444. Se forma la tabla siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
2 & 3 & 4 & & & & \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Demostrar que la suma de los términos de cada fila es el cuadrado de un número impar.

Sea n el primer número de cada fila. Averigüemos cuántos términos hay en cada fila.

$n=1$	1 término	$1=2(1)-1$
$n=2$	3 términos	$3=2(2)-1$
$n=3$	5 términos	$5=2(3)-1$
$n=4$	7 términos	$7=2(4)-1$

Se desprende que el número de términos en la fila que empieza con n es $2n-1$.
Analicemos la enésima fila y nos daremos cuenta de que los términos forman una progresión aritmética de primer término $"n"$ y de razón 1:

$$\underbrace{n \quad n+1 \quad n+2 \quad \cdots \quad u}_{(2n-1)\ \text{términos}}$$

Para calcular la suma de los $(2n-1)$ términos de la progresión:

$$S = \frac{a+u}{2} \cdot (\text{número de términos})$$
$$S = \frac{a+u}{2} \cdot n_T$$
$$u = a + (n_T - 1)r$$

Entonces:

$$u = n + \left[(2n-1)-1\right](1)$$
$$u = 3n-2$$

De donde:

$$S = \frac{n+(3n-2)}{2} \cdot (2n-1)$$
$$S = (2n-1) \cdot (2n-1)$$
$$S = (2n-1)^2$$

Se ha demostrado que la suma de los términos de la enésima fila es el cuadrado del número impar $2n-1$.

445. Encontrar la suma siguiente si se sabe que el número de cifras del último sumando es n:

$$S = 1 + 11 + 111 + \cdots \underbrace{111 \cdots 1}_{"n"\ \text{cifras}}$$

Escribamos los sumandos de la serie de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 11 = 1 + 10 \\ 111 = 1 + 10 + 100 \\ \vdots \\ \underbrace{11 \cdots 1}_{"n" \text{ cifras}} = 1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{n-1} \end{cases}$$

Se nota que los sumandos de los segundos miembros forman una progresión geométrica de primer término $a = 1$ y de razón $q = 10$.

Empleando la fórmula:

$$S = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (\alpha)$$

se tiene que:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot \dfrac{10^1 - 1}{9} \\ 11 = 1 \cdot \dfrac{10^2 - 1}{9} \\ 111 = 1 \cdot \dfrac{10^3 - 1}{9} \\ \vdots \\ \underbrace{11 \cdots 1}_{"n" \text{ cifras}} = 1 \cdot \dfrac{10^n - 1}{9} \end{cases}$$

La suma pedida será:

$$S = \underbrace{\frac{10^1 - 1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + \ \cdots \ \frac{10^n - 1}{9}}_{"n" \text{ sumandos}}$$

$$S = \frac{1}{9}\left[\left(10-1\right) + \left(10^2 - 1\right) + \left(10^3 - 1\right) + \ \cdots \ + \left(10^n - 1\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{9}\left[\left(10 + 10^2 + 10^3 + \ \cdots \ 10^n\right) - \underbrace{\left(1+1+1+ \ \cdots \ +1\right)}_{"n" \text{ sumandos}}\right]$$

Con ayuda de la fórmula (α), se puede escribir:

$$S = \frac{1}{9}\left[10 \cdot \frac{10^n - 1}{10-1} - n\right]$$

$$S = \frac{1}{9}\left[\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right]$$

Ejercicios propuestos

446. La suma de los cuatro primeros términos de una progresión aritmética es 20 y la razón es 6. ¿Cuál es el primer término?

     R.: -4

447. La suma de los 15 términos de los que consta una progresión aritmética es 360. Encontrar el término central.

     R.: 24

448. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es $5n+2n^2$. Encontrar el término de lugar 10.

     R.: 43

449. La suma de los cinco términos de una progresión aritmética creciente es -5 y la suma de sus cuadrados es 45. Calcular el segundo término.

     R.: -3

450. ¿Cuántos términos se deben sumar en la progresión aritmética, cuyos términos cuarto y noveno son 16 y 31, respectivamente, para que el resultado sea 282?

     R.: 12

451. En una progresión aritmética, la razón y el número de términos son iguales. La suma de los términos es 156 y la diferencia de los extremos es 30. Calcular el primer término.

     R.: 11

452. Sea $3n^2+n$ la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Encontrar la suma de los términos segundo y quinto.

     R.: 38

453. En una progresión aritmética cuyo primer término es 10 y su último término es 100, el número de términos comprendidos entre 10 y 76 es el triple de los comprendidos entre 76 y 100. Encontrar la suma de los términos de dicha progresión.
R.: 1,705

454. Calcular el primer término de una progresión aritmética si se conoce que el tercer y sexto términos suman 57 y que el quinto con el décimo suman 99.

R.: 4

455. La suma del quinto y noveno términos de una progresión aritmética es 10 y la suma de los cuadrados de los términos cuarto y séptimo es 41. Encontrar el número de términos de la progresión aritmética si se sabe que su razón es un número entero y que el término central es dos unidades menor que la tercera parte del último término aumentado en 1.

R.: 15

456. El término de lugar p de una progresión aritmética es q y el término de lugar q es p. Encontrar el término de lugar $p+q$.

R.: 0

457. Si los términos de lugares p, q y r de una progresión aritmética son a, b y c, respectivamente, calcular

$$E=(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c$$

R.: 0

458. Si los números $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ y $\frac{1}{a+b}$ son términos consecutivos de una progresión aritmética, calcular $\frac{a^2+c^2}{b^2}$.

R.: 2

459. El segundo término de una progresión geométrica es 32 y el décimo, $1/8$. Encontrar el séptimo término.

R.: 1

460. Encontrar el noveno término de una progresión aritmética de "x" términos en la que su primer y último términos son $x^2-3x-110$ y $x^2+11x-124,$ respectivamente.

R.: $(x-1)(x-2)$

461. Los dos primeros términos de una progresión aritmética están en relación 3 a 7. ¿En qué relación estarán los dos últimos términos si la progresión tiene "n" términos?

R.: $\dfrac{4n-5}{4n-1}$

462. La suma de los "n" primeros términos de una progresión aritmética es $bn^2+cn.$ Encontrar la suma de los "m" últimos términos de dicha progresión.

R.: $m(2bn+c-mb)$

463. Encontrar el número de términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 7 y el último, 567, siendo 847 la suma de todos los términos.

R.: 5

464. Tres números enteros positivos están en progresión geométrica y su suma es 63. Si la suma de sus inversas es $7/16,$ encontrar el producto de los tres números.

R.: 1,728

465. Hallar el lugar que ocupa el mayor de los dos términos consecutivos de la progresión geométrica siguiente $\dfrac{9}{16},\ 2\dfrac{1}{4},\ \cdots,$ si se sabe que sus raíces cuadradas difieren en 48.

R.: Octavo lugar

466. Un individuo gastó el lunes cierta cantidad, el martes gastó la mitad, el miércoles gastó la mitad de lo que gastó el martes y así sucesivamente hasta el sábado de la misma semana. ¿Cuánto gastó el jueves si en total gastó S/.25,200?

R.: S/.1,600

467. Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2-3x+A=0$ y x_3 y x_4, las de $x^2-12x+B=0.$ Si se sabe que los números x_1, x_2, x_3 y x_4 (en ese orden) forman una progresión geométrica creciente, hallar $A^3+B.$
R.: 40

468. El término de lugar p de una progresión geométrica es s y el término de lugar s es $p.$ Encontrar la razón.

R.: $\sqrt[p-s]{s/p}$

469. Tres números positivos forman una progresión geométrica creciente de tal forma que la suma de los cuadrados del primero y del tercero es 153. Si al segundo se le aumenta 1 y al tercero se le resta 1, se forma una progresión aritmética. Encontrar los números que forman la progresión geométrica.

R.: 3, 6, 12

470. La suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética es 4 veces la suma de los 5 primeros términos. Al sumarle 1 al primer término de esta progresión aritmética, restarle 1 al segundo término y sumarle 1 al tercer término, resultan tres números que están en progresión aritmética.

a) Calcular el séptimo término de esta progresión aritmética

b) Calcular la suma de los 6 primeros términos de la progresión geométrica.

R.: a) 39, b) 252

471. Calcular el sexto término de la siguiente progresión $15,\ 16.5,\ 18.15\ldots.$

R.: 24.15765

472. Calcule el término de lugar k en una progresión geométrica en la cual el 5º y 10º términos son 2 y 64, respectivamente.

R.: 2^{k-4}

473. Encontrar la suma de los términos de $\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\ \cdots$.

R.: $3/16$

474. De una progresión geométrica de infinitos términos se sabe que la suma de los términos 3º, 4º y 5º es $76/9;$ además, si a dicha progresión geométrica se le quitan los dos primeros términos, la suma límite resultante es 12. Hallar la suma límite de todos los términos de los lugares impares de dicha progresión geométrica.

R.: $81/5$

475. Se tiene un triángulo equilátero de lado $L.$ Se unen sus puntos medios, resultando un segundo triángulo; se vuelven a unir los puntos medios de los lados de este segundo triángulo, y así sucesivamente. Hallar la suma de los perímetros de todos los triángulos formados.

R.: $6L$

476. Se deja caer una pelota desde una altura de 90 metros y rebota hasta la tercera parte de la altura desde la cual cayó la última vez. ¿Qué distancia recorrió la pelota hasta quedar en reposo?

R.: 180 metros

477. La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es dos veces la suma de sus n primeros términos. Encontrar la razón.

R.: $\sqrt[n]{1/2}$

478. El límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es 9 y el segundo término, 2. Calcular el primer término.

R.: 3

479. Si la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente es m veces la suma de sus n primeros términos, encontrar la razón.

R.: $q = \sqrt[n]{\dfrac{m-1}{m}}$

480. En una progresión geométrica de n términos, se conoce la suma S de los $n-1$ primeros términos y la suma P de los $n-1$ últimos. Calcular el primer término.

R.: $\dfrac{P-S}{\left(\dfrac{P}{S}\right)^{n-1}-1}$

V

Logaritmos

1. Definición de logaritmo

El logaritmo de un número (N) en cierta base (b) es el EXPONENTE al que hay que elevar la base para reproducir el número.

Es decir:

$$\log_b N = x \;\Rightarrow\; b^x = N$$

Ejemplo:
$\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
$\log_4 \dfrac{1}{16} = -2$ porque $4^{-2} = \dfrac{1}{16}$

Ejemplo:
Calcular $\log_3 9\sqrt[5]{27}$.

Si $\log_3 9\sqrt[5]{27} = x,$ entonces se cumple que

$$3^x = 9\sqrt[5]{27}$$
$$3^x = 3^2 \cdot 3^{3/5}$$
$$3^x = 3^{13/5}$$
$$x = \frac{13}{5}$$

Consideremos que:

$N > 0$

$b > 0$ y $b \neq 1$ porque $\log_1 N$ no existe

Obviamente:

$$\log_b b = 1$$
$$\log_b 1 = 0$$

Los sistemas de logaritmos más usados son:

- Logaritmos decimales (base 10): $\log_{10} N$ o $\log N$.
- Logaritmos naturales (base $e = 2,7182\cdots$): $\log_e N$ o $\ln N$ o $\mathrm{L}\,N$

2. Propiedades de los logaritmos

P1. $b^{\log_b N} = N$

Demostración

A partir de

$\log_b N = x \Rightarrow b^x = n,$ reemplacemos x : $b^x = b^{\log_b N} = N.$

P2. $\log_b M + \log_b N = \log_b (MN)$

Demostración

Sean:

$$\log_b M = x \Rightarrow b^x = M$$
$$\log_b N = y \Rightarrow b^y = N$$

Si multiplicamos

$$b^x \cdot b^y = M \cdot N$$
$$b^{x+y} = MN$$

Por definición de logaritmos:

$$\log_b (MN) = x + y$$
$$\log_b (MN) = \log_b M + \log_b N$$

P3. $\log_b M^n = n \log_b M$

Demostración

$$\log_b M^n = \log_b \left(\underbrace{M \cdot M \cdot \cdots \cdot M}_{n \text{ veces}} \right)$$
$$\log_b M^n = \underbrace{\log_b M + \log_b M + \cdots + \log_b M}_{n \text{ veces}}$$
$$\log_b M^n = n \log_b M$$

P4. $\log_b \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n} \log_b M$

Demostración

Usar la propiedad anterior

P5. $\log_b M - \log_b N = \log_b \left(\dfrac{M}{N} \right)$

Demostración

Sean:

$$\log_b M = x \;\Rightarrow\; b^x = M$$
$$\log_b N = y \;\Rightarrow\; b^y = N$$

Si dividimos

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{M}{N}$$
$$b^{x-y} = \frac{M}{N}$$

Por definición de logaritmos:

$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = x - y$$
$$\log_b\left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$$

P6. $\log_{b^n} M = \frac{1}{n}\log_b M$

Demostración

Sea $\log_{b^n} M = x,$ entonces se cumple que:

$$\left(b^n\right)^x = M \;\Rightarrow\; b^{nx} = M \;\Rightarrow\; nx = \log_b M \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{n}\log_b M$$
$$\log_{b^n} M = \frac{1}{n}\log_b M$$

P7. $\log_{b^n} M^n = \log_b M$

Demostración

A partir de P3. y P5.:

$$\log_{b^n} M^n = n\log_{b^n} M = \frac{n}{n}\log_b M = \log_b M$$

P8. Cambio de base de logaritmos

$$\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$

Demostración

Sea $\log_b M = x,$ entonces se cumple que

$$b^x = M$$

Tomemos logaritmos en base c:

$$\log_c b^x = \log_c M$$
$$x\log_c b = \log_c M$$
$$x = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$
$$\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$$

P9. $\log_b M \cdot \log_M b = 1$

Demostración

Cambiemos de base al primer término:

$$\frac{\log_M M}{\log_M b} \cdot \log_M b = \log_M M = 1$$

P10. Regla de la cadena

$$\log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e \cdot \ \cdots \ \log_p q = \log_b q$$

Demostración

Se comprueba si se cambian todos los logaritmos a base 10.

$$\frac{\log c}{\log b}\cdot\frac{\log d}{\log c}\cdot\frac{\log e}{\log d}\cdot\ \cdots\ \frac{\log q}{\log p}=\frac{\log q}{\log b}=\log_b q$$

Notas:

En general

N1. $\log_b(M+N)\neq\log_b M+\log_b N$

N2. $\log_b(M-N)\neq\log_b M-\log_b N$

N3. $\dfrac{\log_b M}{\log_b N}\neq\log_b M-\log_b N$

N4. $\dfrac{\log_b M}{\log_b N}\neq\dfrac{M}{N}$

N5. $\log_b^n M=(\log_b M)^n$

N6. $\log_b M^n\neq\log_b^n M$

N7. $\log_b^p M^n\neq n\log_b^p M$

N8. $\log(\log N)\neq\log^2 N$

Ejemplo:

Resolver $\log_x^3 2-5(\log_x 2)^2=\log_4^2 16-8\log_x 2.$

Escribamos:

$$(\log_x 2)^3-5(\log_x 2)^2+8(\log_x 2)-4=0$$

Sea $A=\log_x 2,$ entonces:

$$A^3-5A^2+8A-4=0$$

$$(A-1)(A-2)^2=0$$

De donde:

$$A = 1 \;\Rightarrow\; x = 2$$
$$A = 2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2}$$

3. Cologaritmo de un número

Por definición $\operatorname{colog}_b N = \log_b \dfrac{1}{N} = -\log_b N$. Por comodidad, bastará con reemplazar "co" por " $-$ ".

Ejemplo:
$\operatorname{colog}_{10} 1000 = -\log_{10} 1000 = -3.$

4. Antilogaritmo de un número

La operación del antilogaritmo es la operación inversa del logaritmo, así como suma con resta, multiplicación con división, etc.

Suma/Resta	$\Rightarrow\; N + x - x = N$
Multiplicación/División	$\Rightarrow\; \dfrac{Nx}{x} = N$
Logaritmo/Antilogaritmo	$\Rightarrow\; \operatorname{antilog}_b\left(\log_b N\right) = N \qquad (\alpha)$
	ó $\log_b\left(\operatorname{antilog}_b N\right) = N \qquad (\beta)$

Esto último se comprobará con la definición siguiente:

$$\operatorname{antilog}_b N = b^N$$

Por simplicidad, bastará con eliminar la palabra antilog, es decir:

$$\cancel{\operatorname{antilog}}_{\,b} N = b^N$$

Comprobemos (α):

$$\operatorname{antilog}_b\left(\log_b N\right) = b^{\log_b N} = N \qquad (\text{por P1})$$

Comprobemos (β):

$$\log_b\left(\text{antilog}_b N\right)=\log_b\left(b^N\right)=N \qquad \left(\text{por definición de logaritmos}\right)$$

Ejemplo:
Calcular $E=\text{antilog}_{16}\left(\text{colog}_4 256\right)$.

Método 1

$$E=\text{antilog}_{16}\left(-\log_4 4^4\right)$$
$$E=\text{antilog}_{16}\left(-4\right)$$
$$E=16^{-4}=\frac{1}{16^4}=\frac{1}{2^{16}}$$

Método 2

$$E=16^{\text{colog}_4 256}$$
$$E=\left(4^2\right)^{-\log_4 256}$$
$$E=\left(4^2\right)^{-4}=4^{-8}=\frac{1}{4^8}=\frac{1}{2^{16}}$$

Método 3

Si

$$E=\text{antilog}_{16}\left(\text{colog}_4 256\right)$$
$$E=\text{antilog}_{16}\left(-4\right)$$

Tomemos $\log_{16}$:

$$\log_{16} E = \log_{16}\left[\text{antilog}_{16}(-4)\right]$$
$$\log_{16} E = -4 \qquad (\text{por } \beta)$$
$$E = 16^{-4}$$
$$E = \frac{1}{2^{16}}$$

5. Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas en las cuales la incógnita está afectada de logaritmos. Será necesario emplear las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo:
Resolver $\log_3^2 x^2 = 36$.

$$(2\log_3 x)^2 = 36$$
$$\log_3^2 x = 9$$
$$\log_3 x = \pm 3 \;\Rightarrow\; x = 3^3 \text{ ó } x = 3^{-3}$$

6. Ecuaciones exponenciales

Son aquellas en las cuales la incógnita aparece como exponente. Normalmente conviene tomar logaritmos a la expresión.

Ejemplo:
Resolver $4^{6x} = \log_4 6$.

$$6x\log_4 4 = \log_4\left[\log_4 6\right]$$
$$x = \frac{1}{6}\log_4\left[\log_4 6\right]$$

Ejemplo:
Resolver $\log_5^2 \dfrac{x}{5} - \log_5^2 5x = -4$.

Método 1
Según las propiedades de logaritmos:

$$(\log_5 x - \log_5 5)^2 - (\log_5 5 + \log_5 x)^2 = -4$$

Sea $\log_5 x = A$:

$$\begin{aligned}(A-1)^2-(1+A)^2 &= -4\\ -4A &= -4\\ A=1 \;\Rightarrow\; \log_5 x = 1 \;\Rightarrow\; x&=5\end{aligned}$$

Método 2

Por diferencia de cuadrados:

$$\left(\log_5 \frac{x}{5}+\log_5 5x\right)\left(\log_5 \frac{x}{5}-\log_5 5x\right)=-4$$

Por propiedades

$$\begin{aligned}\left[\log_5 \frac{x}{5}(5x)\right]\left[\log_5 \frac{x/5}{5x}\right] &= -4\\ \left[\log_5 x^2\right]\left[\log_5 \frac{1}{25}\right] &= -4\\ \left[\log_5 x^2\right][-2] &= -4\\ \log_5 x^2 &= 2\\ x^2 = 25 \;\Rightarrow\; x &= \pm 5\end{aligned}$$

Como en el enunciado aparece $\log \frac{x}{5}$, $\frac{x}{5}$ debe ser positivo, entonces $x \neq -5$:

$$\therefore\; x = 5$$

7. Sistemas de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Son conjuntos de dos o más ecuaciones en las cuales las variables figuran afectadas de logaritmos y/o aparecen como exponentes.

Ejemplo:
Resolver

$$\begin{cases} x^2 = 1 + 6\log_4 y \\ y^2 = y \cdot 2^x + 2^{2x+1} \end{cases}$$

Restricción $y > 0.$
De la segunda ecuación:

$$y^2 - 2^x \cdot y - 2^1 \cdot 2^{2x} = 0$$
$$y^2 - 2^x \cdot y - 2\left(2^x\right)^2 = 0$$
$$\left[y + 2^x\right]\left[y - 2\left(2^x\right)\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2^x \\ y = 2\left(2^x\right) = 2^{x+1} \end{cases}$$

Por la restricción $y > 0,$ no se debe admitir como solución $y = -2^x$ ya que 2^x es siempre positivo.

Reemplacemos $y = 2^{x+1}$ en la primera ecuación:

$$x^2 = 1 + 6\log_4 2^{x+1}$$
$$x^2 = 1 + \frac{6}{2}\log_2 2^{x+1}$$
$$x^2 = 1 + 3\left(x+1\right)$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$\left(x-4\right)\left(x+1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \Rightarrow y = 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Ejercicios resueltos

481. Si $x = \sqrt[10]{3},$ calcular

$$\log_x\left(3^{\log_9 x^4}+4^{\log_2 x}+6^{\log_{\sqrt[3]{6}}\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

Encontramos por separado:

$$3^{\log_9 x^4}=3^{\log_{3^2} x^4}=3^{\frac{1}{2}\log_3 x^4}=3^{\log_3 x^2}=x^2$$
$$4^{\log_2 x}=\left(2^2\right)^{\log_2 x}=2^{2\log_2 x}=2^{\log_2 x^2}=x^2$$
$$6^{\log_{\sqrt[3]{6}}\sqrt[3]{x^2}}=6^{\log_6 x^2}=x^2$$

Entonces:

$$\underbrace{\log_x\left(x^2+x^2+x^2\right)}_{E}=\log_x\left(3x^2\right)$$
$$E=\log_x 3+\log_x x^2$$
$$E=\log_x 3+2$$

Reemplacemos $x=\sqrt[10]{3}$:

$$E=\log_x 3+2$$
$$E=\log_{\sqrt[10]{3}} 3+2$$
$$E=\frac{1}{1/10}\log_3 3+2$$
$$E=10+2$$
$$E=12$$

482. Emplear únicamente la definición de logaritmo para demostrar:

$$\log_{b^c}^n m=\left(\frac{m}{c}\right)^n\left(\frac{\log_c a}{\log_c b}\right)^n$$

A partir del segundo miembro, sean:

$$m\log_c a = x \;\Rightarrow\; \log_c a = \frac{x}{m} \qquad (\alpha)$$

$$c\log_c b = y \;\Rightarrow\; \log_c b = \frac{y}{c} \qquad (\beta)$$

Deberemos demostrar que el primer miembro es $\left(\frac{x}{y}\right)^n$.

Según la definición de logaritmo, de (α):

$$a = c^{x/m} \;\Rightarrow\; c = a^{m/x}$$

De (β):

$$b = c^{y/c} \;\Rightarrow\; c = b^{c/y}$$

Entonces:

$$a^{m/x} = b^{c/y}$$
$$a^m = b^{cx/y}$$
$$a^m = \left(b^c\right)^{x/y}$$

Por definición de logaritmo:

$$\log_{b^c} a^m = \frac{x}{y}$$

$$\left[\log_{b^c} a^m\right]^n = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

483. Calcular el valor de

$$E = \operatorname{antilog}\left[\frac{2\log_{\sqrt{2}} 8 - \operatorname{antilog}_3 2}{\log_5 75 + \operatorname{colog}_5 3}\right]$$

Simplifiquemos el numerador:

$$N = 2\log_{\sqrt{2}} 8 - \text{antilog}_3 2$$
$$N = \log_{\sqrt{2}} 8^2 - 3^2$$
$$N = \log_{2^{1/2}} 8^2 - 9$$
$$N = 2\log_2 \left(2^3\right)^2 - 9$$

$$N = 2(6) - 9$$
$$N = 3$$

El denominador:

$$D = \log_5 75 + \text{colog}_5 3$$
$$D = \log_5 75 - \log_5 3$$
$$D = \log_5 \left(\frac{75}{3}\right)$$
$$D = \log_5 25$$
$$D = 2$$

Entonces:

$$E = \text{antilog}\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$E = 10^{3/2}$$
$$E = \sqrt{1,000}$$

484. Calcular el valor de:

$$\text{colog}_4 \text{antilog}_8 \log_2 \text{antilog}_{0.5} \text{colog}_{0.2}\, 625$$

Empecemos por el último término:

$$\operatorname{colog}_{0.2} 625 = -\log_{5^{-1}} 5^4 = -\frac{4}{-1}\log_5 5 = 4$$

$$\operatorname{antilog}_{0.5} 4 = 0.5^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4$$

$$\operatorname{antilog}_8 (-4) = 8^{-4} = \left(2^3\right)^{-4} = 2^{-12}$$

$$\operatorname{colog}_4 2^{-12} = -\log_{2^2} 2^{-12} = -\frac{(-12)}{2}\log_2 2 = 6$$

485. Resolver $\operatorname{antilog}_2 \log_x 16 = x$, y obtener $\operatorname{colog}_{r_1} r_2$ siendo r_1 y r_2 las raíces obtenidas.

Forma 1
A partir de $\operatorname{antilog}_2 \log_x 16 = x$, y según la definición de antilogaritmo tendremos:

$$2^{\log_x 16} = x$$
$$(\log_x 16)(\log_x 2) = \log_x x$$
$$(4\log_x 2)(\log_x 2) = 1$$
$$(\log_x 2)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\log_x 2 = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^{-1/2} = 2 \Rightarrow x = 2^{-2} \Rightarrow x_1 = 1/4 \\ x^{1/2} = 2 \Rightarrow x = 2^2 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

Se pide:

$$\operatorname{colog}_4 4^{-1} = -\log_4 4^{-1} = 1, \quad \text{ó} \quad \operatorname{colog}_{1/4} 4 = -\log_{4^{-1}} 4 = 1$$

Forma 2

Sea

$$\log_x 16 = p \;\Rightarrow\; x^p = 16 \qquad (\alpha)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{antilog}_2 \log_x 16 &= x \\ \operatorname{antilog}_2 p &= x \end{aligned}$$

Tomemos $\log_2$:

$$\begin{aligned} \log_2 \left[\operatorname{antilog}_2 p\right] &= \log_2 x \\ p &= \log_2 x \\ 2^p &= x \qquad (\beta) \end{aligned}$$

De (α):

$$p \log x = \log 16$$

De (β):

$$p \log 2 = \log x$$

Dividamos:

$$\begin{aligned} \frac{p \log x}{p \log 2} &= \frac{\log 2^4}{\log x} \\ \frac{\log x}{\log 2} &= \frac{4 \log 2}{\log x} \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} (\log x)^2 &= 4(\log 2)^2 \\ \log x &= \pm 2 \log 2 \\ \log x &= \log 2^{\pm 2} \end{aligned}$$

O sea:

$$\begin{cases} x_1 = 2^2 = 4 \\ x_2 = 2^{-2} = 1/4 \end{cases}$$

De manera que r_1 y r_2 toman los valores 4 ó $1/4$.

Piden el valor de:

$$\operatorname{colog}_4 4^{-1} = -\log_4 4^{-1} = 1, \quad \text{ó} \quad \operatorname{colog}_{1/4} 4 = -\log_{4^{-1}} 4 = 1$$

486. Si $\dfrac{m}{n} - \dfrac{n}{m} = mn,$ calcular $\dfrac{2 - \log_n\left(1 - n^2\right)}{\log_n m}$.

Forma 1

Del dato:

$$\frac{m^2 - n^2}{mn} = mn$$

$$m^2 - n^2 = m^2 n^2$$

$$m^2 - m^2 n^2 = n^2$$

$$m^2\left(1 - n^2\right) = n^2$$

$$1 - n^2 = \frac{n^2}{m^2}$$

Reemplacemos en la expresión pedida:

$$\frac{2-\log_n\left(\frac{n^2}{m^2}\right)}{\log_n m}=\frac{2-2\log_n\left(\frac{n}{m}\right)}{\log_n m}$$
$$=\frac{2-2\left[\log_n n-\log_n m\right]}{\log_n m}$$
$$=\frac{2-2+2\log_n m}{\log_n m}$$
$$=2$$

Forma 2

Reescribamos la expresión pedida:

$$\frac{\log_n n^2-\log_n\left(1-n^2\right)}{\log_n m}=\frac{\log_n \frac{n^2}{1-n^2}}{\log_n m}$$

Por cambio de base:

$$\frac{\log_n \frac{n^2}{1-n^2}}{\log_n m}=\log_m \frac{n^2}{1-n^2}$$

Del dato se obtiene:

$$m^2\left(1-n^2\right)=n^2$$

Entonces:

$$\log_m \frac{m^2\left(1-n^2\right)}{1-n^2}=\log_m m^2$$
$$=2$$

487. Hallar el valor de

$$\log_5 175 + \log_7 245 - \frac{\log_3^2 35}{\log_3 5 \cdot \log_3 7}$$

Forma 1

Factoricemos los números

$$E = \log_5\left(5^2 \times 7\right) + \log_7\left(5 \times 7^2\right) - \frac{\left[\log_3\left(5\times 7\right)\right]^2}{\log_3 5 \cdot \log_3 7}$$
$$E = \left(2 + \log_5 7\right) + \left(\log_7 5 + 2\right) - \frac{\left[\log_3 5 + \log_3 7\right]^2}{\log_3 5 \cdot \log_3 7}$$
$$E = 4 + \log_5 7 + \log_7 5 - \frac{\log_3^2 5 + 2\log_3 5 \cdot \log_3 7 + \log_3^2 7}{\log_3 5 \cdot \log_3 7}$$
$$E = 4 + \log_5 7 + \log_7 5 - \frac{\log_3 5}{\log_3 7} - 2 - \frac{\log_3 7}{\log_3 5}$$
$$E = 4 + \log_5 7 + \log_7 5 - \log_7 5 - 2 - \log_5 7$$
$$E = 2$$

Forma 2

Convirtamos a base 3:

$$E = \frac{\log_3\left(5^2 \times 7\right)}{\log_3 5} + \frac{\log_3\left(5 \times 7^2\right)}{\log_3 7} - \frac{\left[\log_3\left(5\times 7\right)\right]^2}{\log_3 5 \cdot \log_3 7}$$

Sea $\log_3 5 = A \quad \wedge \quad \log_3 7 = B$:

$$E = \frac{2A+B}{A} + \frac{A+2B}{B} - \frac{\left(A+B\right)^2}{AB}$$
$$E = 2 + \frac{B}{A} + \frac{A}{B} + 2 - \frac{A^2 + 2AB + B^2}{AB}$$
$$E = 2 + \frac{B}{A} + \frac{A}{B} + 2 - \frac{A}{B} - 2 - \frac{B}{A}$$
$$E = 2$$

488. Si $P = \log_8 \dfrac{\sqrt{98}+\sqrt{128}+\sqrt{162}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{\dfrac{18}{5}}}$ y $\log_5 \dfrac{Q}{\sqrt[6]{78{,}125}} = P$, encontrar el valor de Q.

Simplifiquemos los radicales:

$$P = \log_8 \frac{7\sqrt{2}+8\sqrt{2}+9\sqrt{2}}{\sqrt{10(18/5)}}$$

$$P = \log_8 \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{36}}$$

$$P = \log_8 4\sqrt{2}$$

$$P = \log_{2^3} 2^{5/2}$$

$$P = \frac{5/2}{3}$$

$$P = \frac{5}{6}$$

Entonces:

$$\log_5 \frac{Q}{\sqrt[6]{78{,}125}} = \frac{5}{6}$$

$$\log_5 \frac{Q}{\sqrt[6]{\dfrac{625{,}000}{8}}} = \frac{5}{6}$$

Según la definición de logaritmos:

$$\frac{Q}{\sqrt[6]{\dfrac{625{,}000}{8}}} = 5^{5/6}$$

Elevemos a la sexta:

$$\frac{Q^6}{625{,}000/8} = 5^5$$
$$\frac{8Q^6}{5^7 \cdot 2^3} = 5^5$$
$$Q^6 = 5^{12}$$
$$Q = 5^2$$
$$Q = 25$$

489. Si $\log a = \log_2\left(x^2 y^5\right)$, $\log b = \log_4\left(x^8 y^6\right)$ y $3\log b + \log a = 28$, encontrar xy.

Tenemos que:

$$\log a = \log_2\left(x^2 y^5\right)$$
$$\log b = \log_4\left(x^8 y^6\right) = \log_{2^2}\left(x^8 y^6\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(x^8 y^6\right) = \log_2\left(x^8 y^6\right)^{1/2} = \log_2\left(x^4 y^3\right)$$

Como ambos están expresados en la misma base, reemplacemos en el dato $3\log b + \log a = 28$:

$$3\log_2\left(x^4 y^3\right) + \log_2\left(x^2 y^5\right) = 28$$
$$\log_2\left(x^{12} y^9\right) + \log_2\left(x^2 y^5\right) = 28$$
$$\log_2\left(x^{14} y^{14}\right) = 28$$

Por definición de logaritmos:

$$x^{14}y^{14} = 2^{28}$$
$$(xy)^{14} = \left(2^2\right)^{14}$$
$$xy = 2^2$$
$$xy = 4$$

490. Si $\log 2 = p,$ resolver en términos de p la siguiente ecuación

$$5\left(2^{x^2+5}\right) = 32\left(5^{x+1}\right)$$

Forma 1

Tomemos logaritmos decimales a ambos miembros:

$$\log 5 + \left(x^2+5\right)\log 2 = 5\log 2 + (x+1)\log 5$$

Si $\log 2 = p \;\Rightarrow\; \log 5 = \log\dfrac{10}{2} = 1 - \log 2 = 1 - p.$

Reemplacemos:

$$1 - p + \left(x^2+5\right)p = 5p + (x+1)(1-p)$$
$$1 - p + px^2 + 5p = 5p + x - px + 1 - p$$
$$px^2 = x - px$$
$$x(px - 1 + p) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ px - 1 + p = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \dfrac{1-p}{p} \end{cases}$$

Forma 2

Expresemos en potencias de 2 y de 5:

$$5 \cdot 2^{x^2+5} = 2^5 \cdot 5^{x+1}$$
$$2^{x^2} = 5^x$$

Tomando logaritmos decimales:

$$x^2 \log 2 = x \log 5$$
$$x^2 \log 2 = x(1 - \log 2)$$

Dividamos entre x $(x = 0$ forma parte del conjunto solución$)$:

$$x \log 2 = 1 - \log 2$$
$$x_1 = \frac{1 - \log 2}{\log 2}$$
$$x_1 = \frac{1 - p}{p}$$

Además $x_2 = 0.$

491. Si $2^{\log_b c} = 3^{\log_b 8}$ y $\log_2 c = 3a,$ encontrar $\log_6 32$ en términos de $a.$

Forma 1

Se sabe que

$$\log_6 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 6} = \frac{5 \log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{5}{1 + \log_2 3} \qquad (\alpha)$$

De $2^{\log_b c} = 3^{\log_b 8}$ se deduce que:

$$(\log_b c)\underbrace{(\log_2 2)}_{1} = (\log_b 8)(\log_2 3)$$

Entonces:

$$\log_2 3 = \frac{\log_b c}{\log_b 8} = \log_8 c = \log_{2^3} c = \frac{1}{3}\log_2 c = \frac{1}{3}(3a) = a$$

En (α):

$$\log_6 32 = \frac{5}{1+a}$$

Forma 2

Se conoce que

$$\log_6 32 = \frac{\log 32}{\log 6} = \frac{5\log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{5}{1+\dfrac{\log 3}{\log 2}} = \frac{5}{1+\log_2 3} \qquad (\alpha)$$

De $\log_2 c = 3a \;\Rightarrow\; c = 2^{3a}$

Remplacemos en la condición dada inicialmente:

$$2^{\log_b 2^{3a}} = 3^{\log_b 8}$$
$$\left(\log_b 2^{3a}\right)\left(\log_2 2\right) = \left(\log_b 8\right)\left(\log_2 3\right)$$
$$3a\log_b 2(1) = \left(3\log_b 2\right)\left(\log_2 3\right)$$

De donde:

$$\log_2 3 = \frac{3a\log_b 2}{3\log_b 2}$$
$$\log_2 3 = a$$

En (α):

$$\log_6 32 = \frac{5}{1+a}$$

Forma 3

Se tiene que

$$\log_6 32 = \frac{\log_3 32}{\log_3 6} = \frac{5\log_3 2}{\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{5\log_3 2}{\log_3 2 + 1} \qquad (\beta)$$

Escribamos:

$$2^{\log_b c} = 2^{\frac{\log_2 c}{\log_2 b}} = 3^{\log_b 2^3} = 3^{\frac{3}{\log_2 b}}$$

Entonces:

$$2^{\log_2 c} = 3^3$$

Es decir:

$$2^{3a} = 3^3$$
$$\left(2^a\right)^3 = 3^3$$
$$2^a = 3$$

Si $2^a = 3 \Rightarrow 2 = 3^{1/a} \Rightarrow \log_3 2 = \dfrac{1}{a}$.

En (β):

$$\log_6 32 = \frac{5\left(\frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}+1}$$
$$\log_6 32 = \frac{5}{1+a}$$

492. Si a, b y c están en progresión geométrica, hallar x en:

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_c N} - \frac{1}{\log_{b^x} N} = 0$$

Forma 1

Según $(\log_N a)(\log_a N)=1 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_a N}=\log_N a,$ se tiene:

$$\begin{aligned} \log_N a+\log_N c-\log_N b^x &= 0 \\ \log_N (ac) &= \log_N b^x \\ ac &= b^x \end{aligned}$$

Del dato:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \;\Rightarrow\; ac=b^2$$

De donde:

$$b^x=b^2 \;\Rightarrow\; x=2$$

Forma 2

Según el dato, $a,$ b y c forman una progresión geométrica, entonces $b=ar$ y $c=ar^2$.

Reemplacemos:

$$\frac{1}{\log_a N}+\frac{1}{\log_{ar^2} N}=\frac{1}{\log_{(ar)^x} N}$$

Cambiemos a base N:

$$\frac{1}{\dfrac{\log_N N}{\log_N a}}+\frac{1}{\dfrac{\log_N N}{\log_N \left(ar^2\right)}}=\frac{1}{\dfrac{\log_N N}{\log_N (ar)^x}}$$

$$\begin{aligned} \log_N a+\log_N \left(ar^2\right) &= \log_N (ar)^x \\ \log_N \left(a^2r^2\right) &= x\log_N (ar) \end{aligned}$$

$$2\log_N(ar) = x\log_N(ar)$$
$$x = 2$$

493. El cologaritmo de 3 en cierta base es mayor en $2/3$ que el cologaritmo de 81 en una base que es el triple de la primera. Encontrar todos los posibles valores que puede tomar dicha base.

De acuerdo con el enunciado:

$$\operatorname{colog}_B 3 = \frac{2}{3} + \operatorname{colog}_{3B} 81$$
$$-\log_B 3 = \frac{2}{3} - \log_{3B} 81$$

Cambiemos a base 3:

$$\frac{-\log_3 3}{\log_3 B} = \frac{2}{3} - \frac{\log_3 3^4}{\log_3(3B)}$$
$$\frac{-1}{\log_3 B} = \frac{2}{3} - \frac{4}{1+\log_3 B}$$

Es decir:

$$-3(1+\log_3 B) = 2\log_3 B(1+\log_3 B) - 4(3\log_3 B)$$
$$-3 - 3\log_3 B = 2\log_3 B + 2\log_3^2 B - 12\log_3 B$$
$$2\log_3^2 B - 7\log_3 B + 3 = 0$$
$$(2\log_3 B - 1)(\log_3 B - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_3 B = 1/2 \Rightarrow B_1 = 3^{1/2} = \sqrt{3} \\ \log_3 B = 3 \Rightarrow B_2 = 3^3 = 27 \end{cases}$$

494. Resolver la siguiente inecuación

$$x^2 + \left[\operatorname{colog}_{\sqrt[5]{2}} \cdot \left\{\left(\operatorname{antilog}_{2^{-1/2}} 2\right)\left(\operatorname{Ln} e^4\right)\right\}\right] x \le \operatorname{colog}_{e^{2/5}}\left(e^2\sqrt[5]{e^2}\right)$$

Calculemos:

$$x^2+\operatorname{colog}_{\sqrt[5]{2}}\cdot\underbrace{\left(\operatorname{antilog}_{2^{-1/2}}\ 2\right)}_{\underbrace{\left(2^{-1/2}\right)^2}_{2^{-1}}}\underbrace{\left(\operatorname{Ln} e^4\right)}_{4}x\le\underbrace{\operatorname{colog}_{e^{2/5}}\left(e^2\sqrt[5]{e^2}\right)}_{\underbrace{-\log_{e^{2/5}} e^{12/5}}_{-6}}$$

Entonces:

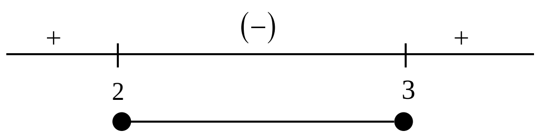
$$x^2+\operatorname{colog}_{2^{1/5}}\left[2^{-1}\cdot 4\right]x\le -6$$

$$x^2-\left(\log_{2^{1/5}}\right)x\le -6$$

$$x^2-\frac{1}{1/5}x\le -6$$

$$x^2-5x+6\le 0$$

$$(x-2)(x-3)\le 0$$



De donde

$$x\in[2,\ 3]$$

495. Resolver la ecuación:

$$\log^2 x=\log x^2$$

Se tiene que:

$$\log^2 x=(\log x)^2 \quad \wedge \quad \log x^2=2\log x$$

Entonces:

$$(\log x)^2 = 2\log x$$

$$(\log x)^2 - 2\log x = 0$$

$$(\log x)(\log x - 2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \log x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1 \\ \log x = 2 \;\Rightarrow\; x_2 = 10^2 = 100 \end{cases}$$

Se cumple para

$$x \in \{1,\ 100\}$$

496. Resolver

$$\frac{\log_4\left(x^4 - 17\right)}{\log_2 \sqrt{2x^2 - 10}} = 2$$

Condiciones:

$$\begin{array}{lclcl} x^4 - 17 > 0 & \cap & 2x^2 - 10 > 0 & \cap & 2x^2 - 10 \neq 1 \\ \left(x^2 + \sqrt{17}\right)\left(x^2 - \sqrt{17}\right) > 0 & \cap & x^2 > 5 & \cap & x^2 \neq 11/2 \\ x^2 > \sqrt{17} & \cap & x^2 > 5 & \cap & x^2 \neq 11/2 \end{array}$$

Escribamos:

$$\log_4\left(x^4 - 17\right) = 2\log_2 \sqrt{2x^2 - 10}$$

$$\frac{1}{2}\log_2\left(x^4 - 17\right) = \log_2\left(2x^2 - 10\right)$$

$$\log_2\left(x^4 - 17\right)^{1/2} = \log_2\left(2x^2 - 10\right)$$

De donde:

$$\left(x^4 - 17\right)^{1/2} = 2x^2 - 10$$

Elevemos al cuadrado:

$$x^4 - 17 = \left(2x^2 - 10\right)^2$$
$$x^4 - 17 = 4x^4 - 40x^2 + 100$$
$$3x^4 - 40x^2 + 117 = 0$$
$$\left(3x^2 - 13\right)\left(x^2 - 9\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x^2 = 13/3 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

Solamente $x^2 = 9$ cumple con las condiciones.

$$\therefore\; x = \pm 3$$

497. Si $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11,$ hallar el valor de b si además se cumple que:

$$\operatorname{antilog}_2 \operatorname{colog}_b \log_8 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De la ecuación:

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^3} x = 11$$
$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = 11$$

$$\frac{11}{6}\log_2 x = 11$$
$$\log_2 x = 6$$
$$x = 2^6$$
$$x = 64$$

Reemplacemos en el dato:

$$\text{antilog}_2\,\text{colog}_b\,\underbrace{\log_8 64}_{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{antilog}_2\,\text{colog}_b\,2 = 2^{-1/2}$$

Por definición de antilogaritmo:

$$2^{\text{colog}_b 2} = 2^{-1/2}$$

$$2^{-\log_b 2} = 2^{-1/2}$$

$$\log_b 2 = \frac{1}{2}$$

$$b^{1/2} = 2$$

$$b = 2^2$$

$$b = 4$$

498. Resolver

$$\log_3^{-1}(x-1) = 2 + \log_3 (x-1)^{-1}$$

Escribamos así:

$$\frac{1}{\log_3 (x-1)} = 2 - \log_3 (x-1)$$

Efectuemos un cambio de base

$$\log_3 (x-1) = A$$

Entonces:

$$\frac{1}{A} = 2 - A$$

Por A:

$$1 = 2A - A^2$$
$$A^2 - 2A + 1 = 0$$
$$(A-1) = 0 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \log_3(x-1) = 1 \Rightarrow x - 1 = 3^1$$

De donde:

$$x - 1 = 3$$
$$x = 4$$

499. Resolver

$$\log^2(100x) + \log^2(10x) + \log x^2 = 15$$

Apliquemos propiedades de logaritmos:

$$\left[\log(100x)\right]^2 + \left[\log(10x)\right]^2 + \left[2\log x\right] = 15$$
$$\left[\log 100 + \log x\right]^2 + \left[\log 10 + \log x\right]^2 + 2\log x = 15$$
$$\left[2 + \log x\right]^2 + \left[1 + \log x\right]^2 + 2\log x = 15$$
$$4 + 4\log x + \log^2 x + 1 + 2\log x + \log^2 x + 2\log x = 15$$
$$2\log^2 x + 8\log x - 10 = 0$$
$$\log^2 x + 4\log x - 5 = 0$$
$$(\log x + 5)(\log x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x = -5 \Rightarrow x_1 = 10^{-5} \\ \log x = 1 \Rightarrow x_2 = 10^1 \end{cases}$$

500. Resolver para x:

$$\log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2}\left(\frac{1}{a}\right)$$

Forma 1

Simplifiquemos la expresión dada:

$$\log_a(ax) = \log_a a + \log_a x = 1 + \log_a x$$

$$\log_x(ax) = \log_x a + \log_x x = \log_x a + 1 = \frac{1}{\log_a x} + 1$$

$$\log_{a^2}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}\log_a a^{-1} = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

Si cambiamos de variable, $\log_a x = A$, tendremos:

$$(1+A)\left(\frac{1}{A}+1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{A} + 1 + 1 + A = -\frac{1}{2}$$

Por $2A$:

$$2 + 4A + 2A^2 = -A$$

$$2A^2 + 5A + 2 = 0$$

$$(2A+1)(A+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ A = -2 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} \log_a x = -1/2 \Rightarrow x_1 = a^{-1/2} = 1/\sqrt{a} \\ \log_a x = -2 \Rightarrow x_2 = a^{-2} = 1/a^2 \end{cases}$$

Forma 2

Cambiemos los logaritmos a base 10:

$$\frac{\log(ax)}{\log a}\cdot\frac{\log(ax)}{\log x}=\frac{-1}{2}\log_a a$$
$$\frac{\log(ax)}{\log a}\cdot\frac{\log(ax)}{\log x}=-\frac{1}{2}$$
$$-2\log^2(ax)=\log a\cdot\log x$$
$$-2(\log a+\log x)^2=\log a\cdot\log x$$
$$-2\left(\log^2 a+2\log a\cdot\log x+\log^2 x\right)=\log a\cdot\log x$$
$$2\log^2 x+5\log a\cdot\log x+2\log^2 a=0$$
$$(2\log x+\log a)(\log x+2\log a)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\log x=-\dfrac{\log a}{2}\ \Rightarrow\ \log x=\log a^{-1/2}\\ \log x=-2\log a\ \Rightarrow\ \log x=\log a^{-2}\end{cases}$$

De donde finalmente:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\\ x_2=\dfrac{1}{a^2}\end{cases}$$

501. Al resolver $x^{\log_3 x}=81$ se obtienen dos raíces, x_1 y x_2, siendo $x_1>x_2$. Calcular el valor de $\operatorname{colog}_{x_2} x_1$.

Forma 1

A partir del dato $x^{\log_3 x}=81$ tomemos logaritmos en base 3:

$$\log_3 x\cdot\log_3 x=\log_3 81$$
$$(\log_3 x)^2=4$$
$$\log_3 x=\pm 2\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_1=3^2=9\\ x_2=3^{-2}=1/9\end{cases}$$

Se pide $\operatorname{colog}_{1/9} 9 = -\log_{3^{-2}} 3^2 = \frac{-2}{-2}\log_3 3 = 1.$

Forma 2

Tomemos logaritmos en base 81:

$$\left(\log_3 x\right)\left(\log_{81} x\right) = 1$$
$$\log_3 x = \frac{1}{\log_{81} x}$$
$$\log_3 x = \log_x 81$$

Iguálemoslos a B:

$$\log_3 x = B \;\Rightarrow\; x = 3^B \qquad (\alpha)$$
$$\log_x 81 = B \;\Rightarrow\; 81 = x^B \qquad (\beta)$$

(α) en (β):

$$81 = \left(3^B\right)^B$$
$$81 = 3^{B^2}$$

De donde:

$$3^4 = 3^{B^2}$$
$$B^2 = 4$$
$$B = \pm 2$$

En (α):

$$x_1 = 3^2 \quad \vee \quad x_2 = 3^{-2}$$

Se pide $-\log_{3^{-2}} 3^2 = \dfrac{-(2)}{-2}\log_3 3 = 1.$

502. Resolver

$$3\log^2 10x + 2\log_x^2 10 = 10 + 6\log x$$

Convirtamos a base 10:

$$3[\log 10x]^2 + 2\left[\frac{\log 10}{\log x}\right]^2 = 10 + 6\log x$$
$$3[\log 10 + \log x]^2 + 2\left[\frac{1}{\log x}\right]^2 = 10 + 6\log x$$

Si $\log x = A$:

$$3(1+A)^2 + 2\left(\frac{1}{A}\right)^2 = 10 + 6A$$
$$3\left(1 + 2A + A^2\right) + \frac{2}{A^2} = 10 + 6A$$

Por A^2 :

$$3A^2 + 6A^3 + 3A^4 + 2 = 10A^2 + 6A^3$$
$$3A^4 - 7A^2 + 2 = 0$$
$$\left(3A^2 - 1\right)\left(A^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A^2 = 1/3 \Rightarrow A = \pm 1/\sqrt{3} \\ A^2 = 2 \quad \Rightarrow A = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

De donde:

$$x = 10^{\sqrt{3}/3},\ 10^{-\sqrt{3}/3},\ 10^{\sqrt{2}},\ 10^{-\sqrt{2}}$$

503. Encontrar el producto de las raíces de la ecuación

$$81^{\log_x 3} = 27x$$

Forma 1

Tomemos logaritmos en base x a ambos miembros:

$$\begin{aligned} \log_x 3 \cdot \log_x 81 &= \log_x 27 + \log_x x \\ \log_x 3 \cdot 4\log_x 3 &= 3\log_x 3 + 1 \\ 4(\log_x 3)^2 - 3\log_x 3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$(4\log_x 3 + 1)(\log_x 3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_x 3 = -1/4 \Rightarrow x^{-1/4} = 3 \Rightarrow x_1 = 3^{-4} \\ \log_x 3 = 1 \quad \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

El producto de las raíces será $3^{-4} \cdot 3 = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$.

Forma 2

Si tomamos logaritmos en base 3:

$$\log_x 3 \cdot \log_3 81 = \log_3 27 + \log_3 x$$
$$\frac{1}{\log_3 x}(4) = 3 + \log_3 x$$

Por $\log_3 x$:

$$4 = 3\log_3 x + (\log_3 x)^2$$
$$(\log_3 x)^2 + 3\log_3 x - 4 = 0$$
$$(\log_3 x + 4)(\log_3 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = -4 \Rightarrow x_1 = 3^{-4} \\ \log_3 x = 1 \quad \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

El producto de las raíces será $3^{-4} \cdot 3 = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$.

504. Encuentre el producto de las raíces de la siguiente ecuación:

$$\operatorname{colog}_x (ax)\cdot \operatorname{colog}_a x = 1 - \operatorname{colog}_x \sqrt{a}$$

Forma 1

Escribamos:

$$-\log_x (ax)\cdot\left[-\log_a x\right] = 1-\left(-\log_x a^{1/2}\right)$$
$$\left(\log_x (ax)\right)\left(\log_a x\right) = 1+\frac{1}{2}\log_x a$$

Por la regla de la cadena:

$$\log_a (ax) = 1+\frac{1}{2}\log_x a$$
$$\log_a a+\log_a x = 1+\frac{1}{2\log_a x}$$
$$1+\log_a x = 1+\frac{1}{2\log_a x}$$
$$\log_a x = \frac{1}{2\log_a x}$$
$$\left(\log_a x\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\log_a x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a^{-\sqrt{2}/2} \\ x_2 = a^{\sqrt{2}/2} \end{cases}$$

El producto de las raíces de la ecuación será $a^{\sqrt{2}/2}\cdot a^{-\sqrt{2}/2} = a^0 = 1.$

Forma 2

A partir de:

$$\left(\log_x (ax)\right)\left(\log_a x\right) = 1 + \frac{1}{2}\log_x a$$

$$\left(\log_x a + \log_x x\right)\left(\frac{1}{\log_x a}\right) = 1 + \frac{1}{2}\log_x a$$

$$\left(\log_x a + 1\right)\left(\frac{1}{\log_x a}\right) = 1 + \frac{1}{2}\log_x a$$

$$1 + \frac{1}{\log_x a} = 1 + \frac{1}{2}\log_x a$$

De donde:

$$\left(\log_x a\right)^2 = 2$$

$$\log_x a = \pm\sqrt{2}$$

$$a = x^{\pm\sqrt{2}}$$

O sea:

$$\begin{cases} x_1 = a^{1/\sqrt{2}} \\ x_2 = a^{-1/\sqrt{2}} \end{cases}$$

El producto de las raíces será $a^{1/\sqrt{2}} \cdot a^{-1/\sqrt{2}} = a^0 = 1.$

505. Resolver

$$4\log_2^3 x - 4\log_2^2 x - \log_2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Efectuemos un cambio de variable $\log_2 x = A.$

Escribamos:

$$\begin{aligned} 4\left(\log_2 x\right)^3-4\left(\log_2 x\right)^2-\left(\log_2 x-\log_2 2\right)&=0\\ 4A^3-4A^2-A+1&=0\\ 4A^2\left(A-1\right)-\left(A-1\right)&=0\\ \left(4A^2-1\right)\left(A-1\right)&=0\\ \left(2A+1\right)\left(2A-1\right)\left(A-1\right)&=0 \end{aligned}$$

De donde:

$$A=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\ \text{ ó }\ 1$$

Es decir:

$$\log_2 x=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\ \text{ ó }\ 1$$

Por último:

$$x=2^{-1/2},\ 2^{1/2}\ \text{ ó }\ 2$$

506. Resolver $\log_a x^{\log_a x}-\log_a x^5+4=0.$

Se sabe que:

$$\log_a x^{\log_a x}=\left(\log_a x\right)\left(\log_a x\right)=\left(\log_a x\right)^2$$

Entonces:

$$\left(\log_a x\right)^2-5\left(\log_a x\right)+4=0$$

$$\left(\log_a x-4\right)\left(\log_a x-1\right)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\log_a x=4\ \Rightarrow\ x_1=a^4\\ \log_a x=1\ \Rightarrow\ x_2=a\end{cases}$$

507. Si x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación $x^{3-\log_2^2 x-\log_2 x^2}=1$, siendo $x_1>x_2>x_3$, calcular $\operatorname{colog}_{x_3}$ $\operatorname{antilog}_{x_1}$ $\log_{x_3}\left(\dfrac{x_2}{32}\right)$.

Resolvamos

$$x^{3-\log_2^2 x-\log_2 x^2}=1$$

Se admiten dos posibilidades:

i) base 1

$$x=1$$

ii) exponente cero

$$\begin{aligned}3-\log_2^2 x-\log_2 x^2&=0\\ \log_2^2 x+2\log_2 x-3&=0\end{aligned}$$

$$\left(\log_2 x+3\right)\left(\log_2 x-1\right)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\log_2 x=-3\ \Rightarrow\ x=2^{-3}=1/8\\ \log_2 x=1\quad\Rightarrow\ x=2\end{cases}$$

Entonces:

$$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=1/8$$

Se pide:

$$\operatorname{colog}_{1/8}\operatorname{antilog}_2\log_{1/8}\left(\frac{1}{32}\right)=-\log_{2^{-3}}\operatorname{antilog}_2\log_{2^{-3}}2^{-5}$$
$$=\frac{-1}{-3}\log_2\operatorname{antilog}_2\left(\frac{-5}{-3}\log_2 2\right)$$
$$=\frac{1}{3}\underbrace{\log_2\operatorname{antilog}_2\left(\frac{5}{3}\right)}_{5/3}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}$$
$$=\frac{5}{9}$$

508. Encontrar la suma de las raíces de la siguiente ecuación:

$$\log\left(x^2-8\right)\cdot\log\left(2-x\right)=\frac{\log_5\left(x^2-8\right)}{\log_5\left(2-x\right)}$$

Forma 1

Según la fórmula del cambio de base:

$$\frac{\log_5\left(x^2-8\right)}{\log_5\left(2-x\right)}=\log_{2-x}\left(x^2-8\right)$$

Es decir:

$$\log\left(x^2-8\right)\cdot\log\left(2-x\right)=\log_{2-x}\left(x^2-8\right)$$
$$\log\left(x^2-8\right)\cdot\log\left(2-x\right)=\frac{\log\left(x^2-8\right)}{\log\left(2-x\right)}$$

Dividamos entre $\log\left(x^2-8\right)$:

$$\log(2-x)=\frac{1}{\log(2-x)}$$

$$\left[\log(2-x)\right]^2=1$$

$$\log(2-x)=\pm 1$$

$$2-x=10^{\pm 1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1=2-10=-8 \\ x_2=2-10^{-1}=19/10=1.9 \end{cases}$$

Debemos descartar $x_2=1.9$ porque no cumple la condición $x^2-8>0$.

Analicemos:

$$\log\left(x^2-8\right)=0$$

$$x^2-8=1$$

$$x^2=9 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_3=-3 \\ x_4=3 \end{cases}$$

Debemos descartar $x_4=3$ porque no cumple la condición $2-x>0$.

Las únicas raíces de la ecuación son -3 y -8 y su suma es -11.

509. Si a es una constante positiva $(a\neq 1)$, resolver para x:

$$\log_x a\cdot\log_{x/a} a^2=\log_{a^2x} a$$

Forma 1

Cambiemos a base x:

$$\log_x a \cdot \frac{2\log_x a}{\log_x (x/a)} = \frac{\log_x a}{\log_x (a^2 x)}$$
$$\log_x a \cdot \frac{2\log_x a}{1-\log_x a} = \frac{\log_x a}{2\log_x a + 1}$$

Sea $\log_x a = A \Rightarrow x^A = a$, como $a \neq 1 \Rightarrow A \neq 0$

$$A \cdot \frac{2A}{1-A} = \frac{A}{2A+1}$$
$$\frac{2A^2}{1-A} = \frac{A}{2A+1}$$
$$\frac{2A}{1-A} = \frac{1}{2A+1}$$
$$4A^2 + 2A = 1 - A$$
$$4A^2 + 3A - 1 = 0$$
$$(4A-1)(A+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 \Rightarrow x^{1/4} = a \Rightarrow x_1 = a^4 \\ A = -1 \Rightarrow x^{-1} = a \Rightarrow x_2 = 1/a \end{cases}$$

Forma 2

Cambiemos a base a:

$$\frac{\log_a a}{\log_a x} \cdot \frac{2\log_a a}{\log_a x - 1} = \frac{1}{\log_a (a^2 x)}$$
$$\frac{1}{\log_a x} \cdot \frac{2}{\log_a x - 1} = \frac{1}{2 + \log_a x}$$

Sea $\log_a x = B \Rightarrow a^B = x$

$$\frac{2}{B(B-1)}=\frac{1}{2+B}$$
$$B^2-B=4+2B$$
$$B^2-3B-4=0$$
$$(B-4)(B+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} B=4 \Rightarrow x_1=a^4 \\ B=-1 \Rightarrow x_2=a^{-1}=1/a \end{cases}$$

Forma 3

Cambiemos a base 10:

$$\frac{\log a}{\log x}\cdot\frac{2\log a}{\log\left(\frac{x}{a}\right)}=\frac{\log a}{\log\left(a^2x\right)}$$

Como $a\neq 1 \Rightarrow \log a\neq 0$ y se puede simplificar $\log a$:

$$\frac{2\log a}{\log x(\log x-\log a)}=\frac{1}{2\log a+\log x}$$
$$\log^2 x-\log a\log x=4\log^2 a+2\log a\log x$$
$$\log^2 x-3\log a\log x-4\log^2 a=0$$
$$(\log x-4\log a)(\log x+\log a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \log x=4\log a=\log a^4 \Rightarrow x_1=a^4 \\ \log x=-\log a=\log a^{-1} \Rightarrow x_2=a^{-1} \end{cases}$$

510. Resolver:

$$\log_2(2x)-\log_{1/2}\left[a^{x^{\frac{\log_a(\log_a x)}{\log_a x}}}-28\right]=8$$

Forma 1

Tenemos que:

$$\frac{\log_a\left(\log_a x\right)}{\log_a x}=\frac{\dfrac{\log_x\left(\log_a x\right)}{\log_x a}}{\dfrac{\dfrac{\log_x x}{\log_x a}}{}}=\log_x\left(\log_a x\right)$$

Entonces:

$$\log_2\left(2x\right)-\log_{2^{-1}}\left[a^{x^{\log_x\left(\log_a x\right)}}-28\right]=8$$

Por propiedad $B^{\log_B N}=N \;\Rightarrow\; x^{\log_x\left(\log_a x\right)}=\log_a x$

$$\log_2\left(2x\right)-\frac{1}{\left(-1\right)}\log_2\left[a^{\log_a x}-28\right]=8$$
$$\log_2\left(2x\right)+\log_2\left[x-28\right]=8$$
$$\log_2\left[2x\left(x-28\right)\right]=8$$
$$2x\left(x-28\right)=2^8$$
$$x\left(x-28\right)=2^7$$
$$x^2-28x-128=0$$
$$\left(x-32\right)\left(x+4\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1=-4 & \left(\text{descartado porque } 2x>0\right) \\ x_2=32 & \text{(solución)} \end{cases}$$

Forma 2

A partir de:

$$\log_2\left(2x\right)-\log_{2^{-1}}\left[x-28\right]=8$$
$$\log_2\left(2x\right)+\log_2\left(x-28\right)=\log_2 2^8$$
$$\log_2\left[2x\left(x-28\right)\right]=\log_2 2^8$$

Tomemos antilogaritmos en base 2:

$$2x(x-28)=256$$
$$2x^2-56x-256=0$$
$$x^2-28x-128=0$$

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -28 & -128 \\
-4 & \downarrow & -4 & 128 \\
\hline
 & 1 & -32 & \boxed{0} \\
32 & \downarrow & 32 & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\Rightarrow (x+4) \text{ es factor} \\
\\
\Rightarrow (x-32) \text{ es factor}
\end{array}$$

Como $x>0 \Rightarrow x=32.$

Forma 3

Sea $\log_a x = c \Rightarrow x = a^c$.
Entonces

$$a^{x^{\frac{\log_a(\log_a x)}{\log_a x}}} = a^{x^{\frac{\log_a c}{c}}} = a^{\left(a^c\right)^{\frac{\log_a c}{c}}} = a^{a^{\log_a c}} = a^c = x$$

De donde:

$$\log_2(2x)-\log_{1/2}(x-28)=8$$

A base x:

$$\frac{\log_x(2x)}{\log_x 2} - \frac{\log_x(x-28)}{\log_x(1/2)} = 8$$
$$\frac{\log_x 2 + 1}{\log_x 2} - \frac{\log_x(x-28)}{0 - \log_x 2} = 8$$
$$\frac{\log_x 2 + 1 + \log_x(x-28)}{\log_x 2} = 8$$
$$\log_x 2 + 1 + \log_x(x-28) = 8\log_x 2$$
$$\log_x 2 + 1 + \log_x(x-28) = \log_x 2^8$$
$$1 = \log_x\left[\frac{2^8}{2(x-28)}\right]$$

De donde:

$$\frac{2^7}{x-28} = x^1$$
$$x(x-28) = 2^7$$
$$x^2 - 28x - 128 = 0$$

Como antes:

$$x = 32$$

511. El cuadrado del logaritmo de un número en base 2 es mayor en 3 unidades que el logaritmo de la mitad del número dado, en base 2. Encontrar todos los posibles valores que puede tomar el número dado.

Según el enunciado tenemos:

$$\log_2^2 N = \log_2\left(\frac{N}{2}\right) + 3$$

$$\left(\log_2 N\right)^2 = \log_2 N - \log_2 2 + 3$$

$$\left(\log_2 N\right)^2 - \log_2 N - 2 = 0$$

$$\left(\log_2 N - 2\right)\left(\log_2 N + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 N = 2 \Rightarrow N_1 = 4 \\ \log_2 N = -1 \Rightarrow N_2 = 1/2 \end{cases}$$

512. Encontrar la suma de las raíces de la ecuación:

$$\log\sqrt{x+14} + \log\sqrt{x+7} = \log 3 + 2\log 2$$

Restricciones:

$$x+14>0 \quad \wedge \quad x+7>0 \Rightarrow x>-14 \quad \wedge \quad x>-7 \Rightarrow x \in \left]-7, \infty\right[\qquad (\alpha)$$

Por propiedad de logaritmos:

$$\log\left[\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x+7}\right] = \log 3 + \log 2^2$$

$$\log\left[\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x+7}\right] = \log\left(3\cdot 2^2\right)$$

$$\sqrt{x+14}\cdot\sqrt{x+7} = 12$$

Elevemos al cuadrado:

$$(x+14)(x+7) = 144$$

$$x^2 + 21x - 46 = 0$$

$$(x+23)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -23 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad (\beta)$$

De $(\alpha)\cap(\beta)$, solamente cumple $x=2$.

La suma de las raíces será 2.

513. Dar como respuesta $\log_y x$ al resolver el sistema:

$$\begin{cases} \log x - \log y = 2 \\ \log x - \log \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}$$

Restemos ambas ecuaciones:

$$\left(\log x - \log y\right) - \left(\log x - \log \sqrt[3]{y}\right) = 2 - 3$$

$$-\log y + \frac{1}{3}\log y = -1$$

$$-\frac{2}{3}\log y = -1$$

$$\log y = \frac{3}{2}$$

$$y = 10^{3/2}$$

En la primera ecuación:

$$\log x - \log 10^{3/2} = 2$$

$$\log x - \frac{3}{2} = 2$$

$$\log x = \frac{7}{2}$$

$$x = 10^{7/2}$$

Calculemos

$$\log_{10^{3/2}} 10^{7/2} = \frac{7/2}{3/2}\log_{10} 10 = \frac{7}{3}$$

514. Resolver

$$\begin{cases} \log_x y - \log_y x = 2\tfrac{2}{3} \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

Forma 1

De la segunda ecuación

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 y &= 4 \\ \log_2 (xy) &= 4 \\ xy &= 2^4 \\ xy &= 16 \qquad (\alpha) \end{aligned}$$

De la primera ecuación:

$$\log_x y - \frac{1}{\log_x y} = \frac{8}{3}$$

Por $3\log_x y$:

$$\begin{aligned} 3\log_x^2 y - 3 &= 8\log_x y \\ 3\log_x^2 y - 8\log_{xy} - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$(3\log_x y + 1)(\log_x y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_x y = -1/3 \Rightarrow y = x^{-1/3} \\ \log_x y = 3 \Rightarrow y = x^3 \end{cases} \qquad (\beta)$$

Reemplacemos (β) en (α):

a) Si $y = x^{-1/3} \Rightarrow x\left(x^{-1/3}\right) = x^{2/3} = 16 \Rightarrow x_1 = 16^{3/2} = 64, \; y_1 = 64^{-1/3} = 1/4$

b) Si $y = x^3 \Rightarrow x\left(x^3\right) = x^4 = 16 \Rightarrow x_2 = 2, \; y_2 = 2^3 = 8$

Forma 2

En la primera ecuación, convirtamos a base 2:

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x}{\log_2 y} = \frac{8}{3}$$

Sea $\log_2 y = A \quad \wedge \quad \log_2 x = B.$

El sistema será:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{B} - \dfrac{B}{A} = \dfrac{8}{3} & (\alpha) \\ A + B = 4 & (\beta) \end{cases}$$

De (α)

$$\frac{A^2 - B^2}{AB} = \frac{8}{3}$$
$$\frac{(A+B)(A-B)}{AB} = \frac{8}{3} \qquad (\gamma)$$

(β) en (γ):

$$\frac{4(A-B)}{AB} = \frac{8}{3}$$
$$3(A-B) = 2AB$$
$$3A - 3B = 2AB$$
$$A = \frac{3B}{3-2B} \qquad (\delta)$$

De (β) y (δ):

$$\frac{3B}{3-2B} = 4 - B$$
$$3B = 12 - 8B - 3B + 2B^2$$
$$2B^2 - 14B + 12 = 0$$
$$B^2 - 7B + 6 = 0$$
$$(B-1)(B-6) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} B = 1 \;\Rightarrow\; A = 3 \\ B = 6 \;\Rightarrow\; A = -2 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} \log_2 x = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2^1 = 2,\; \log_2 y = 3 \;\Rightarrow\; y_1 = 2^3 = 8 \\ \log_2 x = 6 \;\Rightarrow\; x_2 = 2^6 = 64,\; \log_2 y = -2 \;\Rightarrow\; y_2 = 2^{-2} = 1/4 \end{cases}$$

515. Resolver para valores enteros de x e y:

$$\begin{cases} \log_x^2 y + \log_y^2 x = 2 + \dfrac{9}{\log_x^2 y} \\ x^4 + y^2 = 32 \end{cases}$$

Forma 1

Sea $\log_x y = p$:

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$$
$$= \frac{1}{p}$$

Reemplacemos en la primera ecuación:

$$p^2 + \frac{1}{p^2} = 2 + \frac{9}{p^2}$$

Por p^2:

$$p^4 + 1 = 2p^2 + 9$$
$$p^4 - 2p^2 - 8 = 0$$
$$\left(p^2 - 4\right)\left(p^2 + 2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} p^2 = 4 \;\Rightarrow\; p = \pm 2 \\ p^2 = -2 \;\Rightarrow\; p \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Es decir:

$$\log_x y = \pm 2$$
$$y = x^{\pm 2}$$

Reemplacemos en la segunda ecuación:

$$x^4 + y^2 = 32$$

Si $y = x^2$, entonces:

$$x^4 + \left(x^2\right)^2 = 32$$
$$x^4 + x^4 = 32$$
$$x^4 = 16$$
$$x = \pm 2$$

Se descarta el valor -2, ya que $\log\left(-2\right) \notin \mathbb{R}$.

Si $y = x^{-2}$, entonces:

$$x^4 + \left(x^{-2}\right)^2 = 32$$
$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 32$$

Por x^4:

$$x^8 + 1 = 32x^4$$
$$x^8 - 32x^4 + 1 = 0$$
$$x^4 = \frac{32 \pm \sqrt{1020}}{2}$$
$$x^4 = 16 \pm \sqrt{255} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

Las soluciones enteras serán:

$$x = 2, \quad y = 4$$

516. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3\log y = 6\log x = 2\log z \\ \dfrac{\log\left(x^y y^x\right)}{\log\left(x^{-1}y\right)} = z \end{cases}$$

Forma 1

De la primera ecuación:

$$3\log y = 6\log x$$
$$\log y^3 = \log x^6$$
$$y = x^2$$

En la segunda ecuación:

$$\frac{\log\left(x^{x^2} x^{2x}\right)}{\log\left(x^{-1}x^2\right)} = z$$
$$z\log x = \log\left(x^{x^2+2x}\right)$$
$$z\log x = \left(x^2 + 2x\right)\log x$$

Como $\log x \neq 0$:

$$z = x^2 + 2x \qquad (\alpha)$$

Además:

$$6\log x = 2\log z$$
$$\log x^6 = \log z^2$$
$$z = x^3 \qquad (\beta)$$

(β) en (α):

$$x^3 = x^2 + 2x$$
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x\left(x^2 - x - 2\right) = 0$$
$$x(x-2)(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Como $x > 0$:

$$x = 2 \;\Rightarrow\; y = 2^2 = 4 \;\Rightarrow\; z = 4 + 4 = 8$$

Forma 2

Expresemos $\log x \;\wedge\; \log y$ en términos de $\log z$:

$$6\log x = 2\log z \;\Rightarrow\; \log x = \frac{\log z}{3}$$
$$3\log y = 2\log z \;\Rightarrow\; \log y = \frac{2\log z}{3} \qquad (\alpha)$$

De la segunda ecuación:

$$\log\left(x^y y^x\right) = z \cdot \log\left(x^{-1} y\right)$$
$$y\log x + x\log y = z(\log y - \log x) \qquad (\beta)$$

(α) en (β):

$$\frac{y\log z}{3}+\frac{2x\log z}{3}=z\left(\frac{2\log z}{3}-\frac{\log z}{3}\right)$$

$$\frac{y\log z}{3}+\frac{2x\log z}{3}=\frac{z\log z}{3}$$

Por $\dfrac{3}{\log z}$:

$$y+2x=z \qquad (\gamma)$$

De la primera ecuación:

$$\log x^6=\log z^2 \;\Rightarrow\; x^6=z^2 \;\Rightarrow\; x=z^{1/3}$$
$$\log y^3=\log z^2 \;\Rightarrow\; y^3=z^2 \;\Rightarrow\; y=z^{2/3}$$

En (γ):

$$z^{2/3}+2z^{1/3}=z$$
$$z-z^{2/3}-2z^{1/3}=0$$
$$z^{1/3}\left(z^{2/3}-z^{1/3}-2\right)=0$$
$$z^{1/3}\left(z^{1/3}-2\right)\left(z^{1/3}+1\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} z^{1/3}=0 \;\Rightarrow\; z_1=0 \\ z^{1/3}=2 \;\Rightarrow\; z_2=8 \\ z^{1/3}=-1 \;\Rightarrow\; z_3=-1 \end{cases}$$

Para que exista $\log z$ en $\mathbb{R}$, se debe cumplir que $z\neq 0,\ -1$:

$$\therefore\; z=8$$

En (α):

$$\log x = \frac{\log 8}{3} \Rightarrow \log x = \frac{1}{3}\log 8 \Rightarrow \log x = \log 8^{1/3} \Rightarrow \log x = \log 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\log y = \frac{2\log 8}{3} \Rightarrow \log y = \frac{2}{3}\log 8 \Rightarrow \log y = \log 8^{2/3} \Rightarrow \log y = \log 4 \Rightarrow y = 4$$

517. El cuadrado del logaritmo del producto de dos números en cierta base a $(a > 1)$ excede en 48 al cuadrado del logaritmo del cociente de dichos números en la misma base. Además, el logaritmo de uno de ellos es el triple del logaritmo del otro, disminuido en 5 (base a). Determinar los números.

Forma 1

$$\begin{cases} \log_a^2 (xy) - 48 = \log_a^2 \left(\dfrac{x}{y} \right) \\ \log_a x = 3\log_a y - 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación:

$$\log_a x = 3\log_a y - \log_a a^5$$

$$\log_a x = \log_a y^3 - \log_a a^5$$

$$\log_a x = \log_a \left(\frac{y^3}{a^5} \right)$$

$$x = \frac{y^3}{a^5}$$

Reemplacemos en la primera ecuación:

$$\log_a^2\left(\frac{y^4}{a^5}\right)-48=\log_a^2\left(\frac{y^2}{a^5}\right)$$

$$\log_a^2\left(\frac{y^4}{a^5}\right)-\log_a^2\left(\frac{y^2}{a^5}\right)=48$$

$$\left[\log_a\left(\frac{y^4}{a^5}\right)+\log_a\left(\frac{y^2}{a^5}\right)\right]\left[\log_a\left(\frac{y^4}{a^5}\right)-\log_a\left(\frac{y^2}{a^5}\right)\right]=48$$

$$\left[4\log_a y-5+2\log_a y-5\right]\left[4\log_a y-5-2\log_a y+5\right]=48$$

$$\left[6\log_a y-10\right]\left[2\log_a y\right]=48$$

$$6\log_a^2 y-10\log_a y-24=0$$

$$3\log_a^2 y-5\log_a y-12=0$$

$$\left(3\log_a y+4\right)\left(\log_a y-3\right)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\log_a y=-4/3\\ \log_a y=3\end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} y_1=a^{-4/3} & \Rightarrow\; x_1=a^{-1}\\ y_2=a^3 & \Rightarrow\; x_2=a^4\end{cases}$$

Forma 2

De la primera ecuación:

$$\log_a^2\left(xy\right)-\log_a^2\left(\frac{x}{y}\right)=48$$

$$\left[\log_a\left(xy\right)+\log_a\left(\frac{x}{y}\right)\right]\left[\log_a\left(xy\right)-\log_a\left(\frac{x}{y}\right)\right]=48$$

$$\left[\log_a\left(x^2\right)\right]\left[\log_a\left(y^2\right)\right]=48$$

$$\left[2\log_a x\right]\left[2\log_a y\right]=48$$

$$\log_a x\cdot\log_a y=24 \qquad (\alpha)$$

De la segunda ecuación:

$$\log_a x = 3\log_a y - 5 \qquad (\beta)$$

De (β) en (α):

$$(3\log_a y - 5)(\log_a y) = 12$$
$$3\log_a^2 y - 5\log_a y - 12 = 0$$

Igual que antes:

$$\begin{cases} y_1 = a^{-4/3} & \Rightarrow \ x_1 = a^{-1} \\ y_2 = a^3 & \Rightarrow \ x_2 = a^4 \end{cases}$$

518. Resolver

$$\begin{cases} (2x)^{\log 2} = (5y)^{\log 5} \\ 5^{\log x} = 2^{\log y} \end{cases}$$

Forma 1

Tomemos logaritmos decimales a ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} (\log 2)(\log 2x) = (\log 5)(\log 5y) \\ (\log x)(\log 5) = (\log y)(\log 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log 2)(\log 2 + \log x) = (\log 5)(\log 5 + \log y) \\ (\log x)(\log 5) = (\log y)(\log 2) \end{cases}$$

Cambiemos de variables $\log x = X$, $\log y = Y$, $\log 2 = D$, $\log 5 = C$.

Entonces:

$$\begin{cases} D(D+X) = C(C+Y) & (\alpha) \\ XC = YD \;\Rightarrow\; Y = \dfrac{XC}{D} & (\beta) \end{cases}$$

(β) en (α):

$$D(D+X) = C\left(C + \frac{XC}{D}\right)$$

Por D:

$$\begin{aligned} D^3 + D^2X &= C^2D + C^2X \\ X\left(D^2 - C^2\right) &= C^2D - D^3 \\ X\left(D^2 - C^2\right) &= D\left(C^2 - D^2\right) \\ X &= -D \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \log x &= -\log 2 \\ \log x &= \log 2^{-1} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Y &= \frac{XC}{D} \\ Y &= \frac{(-D)C}{D} \\ Y &= -C \end{aligned}$$

Entonces:

$$\log y = -\log 5$$
$$\log y = \log 5^{-1}$$
$$y = \frac{1}{5}$$

Forma 2

A partir de la segunda ecuación

$$5^{\log x} = 2^{\log y}$$

y sabiendo que $2 = 5^{\log_5 2}$, tenemos que:

$$5^{\log x} = \left(5^{\log_5 2}\right)^{\log y}$$
$$5^{\log x} = 5^{\log_5 2 \cdot \log y}$$
$$\log x = \log_5 2 \cdot \log y$$
$$\log x = \frac{\log 2}{\log 5} \cdot \log y$$
$$\frac{\log x}{\log 2} = \frac{\log y}{\log 5}$$
$$\log_2 x = \log_5 y \qquad (\alpha)$$

De la primera ecuación:

$$(2x)^{\log 2} = (5y)^{\log 5}$$

Elevemos a la $\dfrac{1}{\log 2}$:

$$(2x)^{\frac{\log 2}{\log 2}} = (5y)^{\frac{\log 5}{\log 2}}$$
$$2x = (5y)^{\log_2 5}$$

Tomemos logaritmos en base 2:

$$\log_2 2+\log_2 x=\log_2 5\left(\log_2 5+\log_2 y\right)$$
$$1+\log_2 x=\log_2^2 5+\log_2 5\cdot\log_2 y \qquad (\beta)$$

(α) en (β):

$$1+\log_5 y=\log_2^2 5+\log_2 5\cdot\log_2 y$$
$$1+\frac{\log_2 y}{\log_2 5}=\log_2^2 5+\log_2 5\cdot\log_2 y$$

Por $\log_2 5$:

$$\log_2 5+\log_2 y=\log_2^3 5+\log_2^2 5\cdot\log_2 y$$
$$\log_2 y=\frac{\log_2^3 5-\log_2 5}{1-\log_2^2 5}$$
$$\log_2 y=\frac{\log_2 5\left(\log_2^2 5-1\right)}{1-\log_2^2 5}$$
$$\log_2 y=-\log_2 5$$

O sea:

$$\log_2 y=-\log_2 5$$
$$\log_2 y=\log_2\frac{1}{5}$$
$$y=\frac{1}{5}$$

En (α):

$$\log_2 x=\log_5\frac{1}{5}$$
$$\log_2 x=-1$$

$$x = 2^{-1}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

519. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \log^2(xy) - \log^2\left(\dfrac{x}{y}\right) = 8 \\ 2^{\log x} = 4^{\log y} \end{cases}$$

Forma 1

De la primera ecuación:

$$\left[\log(xy)\right]^2 - \left[\log\left(\frac{x}{y}\right)\right]^2 = 8$$
$$\left[\log x + \log y\right]^2 - \left[\log x - \log y\right]^2 = 8$$
$$4\log x \log y = 8$$
$$\log x \log y = 2 \qquad (1)$$

De la segunda ecuación del sistema:

$$2^{\log x} = 4^{\log y}$$
$$2^{\log x} = \left(2^2\right)^{\log y}$$
$$2^{\log x} = 2^{2\log y}$$
$$\log x = 2\log y \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$\log x = 2 \quad \wedge \quad \log y = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 100 \\ y_1 = 10 \end{cases}$$

$$\log x = -2 \quad \wedge \quad \log y = -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1/100 \\ y_2 = 1/10 \end{cases}$$

Forma 2

De la primera ecuación del sistema, factoricemos usando diferencia de cuadrados:

$$\left[\log(xy) + \log\left(\frac{x}{y}\right)\right]\left[\log(xy) - \log\left(\frac{x}{y}\right)\right] = 8$$
$$[2\log x][2\log y] = 8$$
$$\log x \log y = 2 \qquad (1)$$

De la segunda ecuación del sistema, tomando logaritmos en base 10:

$$\log\left(2^{\log x}\right) = \log\left(4^{\log y}\right)$$
$$\log x \log 2 = \log y \log 2^2$$
$$\log x \log 2 = 2\log y \log 2$$
$$\log x = 2\log y \qquad (2)$$

Igual que antes.

Forma 3

De la segunda ecuación del sistema:

$$2^{\log x} = 4^{\log y}$$
$$2^{\log x} = \left(2^2\right)^{\log y}$$
$$2^{\log x} = 2^{2\log y}$$
$$2^{\log x} = 2^{\log y^2}$$
$$x = y^2 \qquad (2)$$

Reemplacemos en la primera ecuación del sistema:

$$\log^2\left(y^2 y\right)-\log^2\left(\frac{y^2}{y}\right)=8$$
$$\log^2\left(y^3\right)-\log^2\left(y\right)=8$$
$$\left(3\log y\right)^2-\log^2 y=8$$
$$8\log^2 y=8$$
$$\log y=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} y_1=10 \Rightarrow x_1=100 \\ y_2=\dfrac{1}{10} \Rightarrow x_2=\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

520. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a^{2x}+a^{2y}=2b \\ a^{x+y}=c \qquad (a>0) \end{cases}$$

Para que el sistema tenga solución, ¿qué condiciones deben cumplir b y c?

Forma 1

Dado que a^{x+y} es siempre positivo (para $a>0$), se deduce de la segunda ecuación que $c>0$.

Efectuemos dos cambios de variable:

$a^x=u$

$a^y=v$

Entonces:

$$\begin{cases} u^2+v^2=2b \Rightarrow (u+v)^2-2uv=2b \qquad (1) \\ uv=c \qquad (2) \end{cases}$$

De (2) en (1):

$$(u+v)^2=2b+2uv=2(b+c)$$

Además:

$$(u-v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 = 2b - 2c = 2(b-c)$$

Como los valores de u y v (potencias de a) son positivos:

$$u + v = +\sqrt{2(b+c)} \qquad (\alpha)$$

Por otro lado, $(u-v)^2$ es positivo, entonces $2(b-c) \geq 0 \Rightarrow b \geq c$.
De donde:

$$u - v = \pm\sqrt{2(b-c)} \qquad (\beta)$$

Caso 1:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{2(b+c)} = \sqrt{2}\sqrt{b+c} \\ u - v = \sqrt{2(b-c)} = \sqrt{2}\sqrt{b-c} \end{cases}$$

De la semisuma y de la semidiferencia:

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c} + \sqrt{b-c}\right]$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c} - \sqrt{b-c}\right]$$

Caso 2:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt{2(b+c)} = \sqrt{2}\sqrt{b+c} \\ u - v = -\sqrt{2(b-c)} = -\sqrt{2}\sqrt{b-c} \end{cases}$$

Análogamente:

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c} - \sqrt{b-c}\right]$$
$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c} + \sqrt{b-c}\right]$$

Se requiere que $b+c \geq 0$ y $b-c \geq 0.$ Como se obtuvo que $c > 0$ y $b \geq c,$ basta que $b \geq c > 0 \Rightarrow b > 0$ para que se satisfagan los requerimientos señalados.
Las soluciones del sistema serán:

$$\text{Caso 1: } x_1 = \log_a u_1 \quad \wedge \quad y_1 = \log_a v_1$$
$$\text{Caso 2: } x_2 = \log_a u_2 \quad \wedge \quad y_2 = \log_a v_2$$

Forma 2
De la segunda ecuación:

$$a^x \cdot a^y = c \Rightarrow a^y = \frac{c}{a^x}$$

Como a^x y a^y son positivos, se requiere que $c > 0.$
En la primera ecuación:

$$a^{2x} + \left(\frac{c}{a^x}\right)^2 = 2b$$
$$a^{4x} - 2ba^{2x} + c^2 = 0$$

De donde:

$$a^{2x} = \frac{2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4(1)(c^2)}}{2}$$
$$a^{2x} = b \pm \sqrt{b^2 - c^2} \qquad (1)$$

Como a^{2x} es positivo, se requiere que b sea positivo ya que $\sqrt{b^2 - c^2} < b.$ Además, $b^2 - c^2 \geq 0 \Rightarrow (b+c)(b-c) \geq 0.$ Como b y c son positivos entonces $(+)(b-c) \geq 0 \Rightarrow b \geq c.$
De (1):

$$a^x = +\sqrt{b \pm \sqrt{b^2 - c^2}}$$

Se descarta el signo $(-)$ porque $a^x > 0$.

Aplicando la fórmula de los radicales dobles siguiente:

$$\sqrt{P+\sqrt{Q}} = \pm\left[\sqrt{\frac{P+R}{2}}+\sqrt{\frac{P-R}{2}}\right]$$

siendo $R=\sqrt{P^2-Q}$, se tiene que:

Caso 1:

Si

$$a^x = +\sqrt{b+\sqrt{b^2-c^2}}$$

$$a^x = \pm\left[\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-\left(b^2-c^2\right)}}{2}}+\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-\left(b^2-c^2\right)}}{2}}\right]$$

$$a^x = \pm\left[\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{b-c}{2}}\right]$$

Como $a^x > 0$:

$$a^x = \left[\sqrt{\frac{b+c}{2}}+\sqrt{\frac{b-c}{2}}\right]$$

$$a^x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}\right]$$

Caso 2:

Si

$$a^x = +\sqrt{b-\sqrt{b^2-c^2}}$$

$$a^x = \pm\left[\sqrt{\frac{b+\sqrt{b^2-\left(b^2-c^2\right)}}{2}}-\sqrt{\frac{b-\sqrt{b^2-\left(b^2-c^2\right)}}{2}}\right]$$

$$a^x = \pm\left[\sqrt{\frac{b+c}{2}}-\sqrt{\frac{b-c}{2}}\right]$$

Como a^x debe ser positivo y $\frac{b+c}{2} > \frac{b-c}{2}$ porque $b>0,\ c>0$,

$$a^x = \left[\sqrt{\frac{b+c}{2}}-\sqrt{\frac{b-c}{2}}\right]$$

$$a^x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}\right]$$

El análisis mostrado conduce a los mismos resultados que los obtenidos de la Forma 1. Es decir:

$$x_1 = \log_a \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}\right]$$

$$y_1 = \log_a \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}\right]$$

$$x_2 = \log_a \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}\right]$$

$$y_2 = \log_a \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}\right]$$

Es decir, $b>0,\ c>0 \ \wedge \ b \geq c$.

Ejercicios propuestos

521. Si $\log_{mn} m = 4,$ encontrar el valor de $E = \log_{mn} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{m}}.$

R.: $-17/6$

522. Si $\log_a b = 3$ y $\log_b c = 4,$ encontrar $\log_{abc} (ab)^{\log_c abc}.$

R.: $1/3$

523. Si $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1,$ demostrar que

i) $\log(a+b) = \log a + \log b$

ii) $\log a = \log \dfrac{b}{b-1}$

524. Hallar el valor de x en $\operatorname{antilog}_x \operatorname{antilog}_{\sqrt[4]{2}} \operatorname{antilog}_2 3 = 81.$

R.: 3

525. Dado $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = 5,$ calcular $\log_{ab} a.$

R.: 6.60

526. Demostrar que la relación entre los logaritmos de dos números en cualquier base es la misma.

527. Si $x = e^{\frac{1}{1-\mathrm{L}\,z}}$ y $y = e^{\frac{1}{1-\mathrm{L}\,x}},$ encontrar z en términos de $y.$

R.: $z = e^{\frac{1}{1-\mathrm{L}\,y}}$

528. Encontrar $\log_6 16$ si $\log_{\sqrt[3]{12}} 3 = a.$

R.: $\dfrac{4(2-a)}{a+3}$

529. Encontrar K si se sabe que

$$\alpha\beta + K\alpha = 1 + K\beta$$
$$\alpha = \log_{12} 18$$
$$\beta = \log_{24} 54$$

R.: 5

530. Si $(\log_a N)(\log_b N - \log_c N) = (\log_c N)(\log_a N - \log_b N),$ calcular $\log_{b^2}(ac).$

R.: 1

531. Evaluar K si se conoce que

$$\frac{7}{16}\log_5\left(3+2\sqrt{2}\right) - 4\log_5\left(\sqrt{2}+1\right) = K\log_5\left(\sqrt{2}-1\right)$$

R.: $25/8$

532. Calcular x en $2^{\log_3 x} = x^{\log_3 2}.$

R.: $x > 0$

533. Calcular $\log_{25} 24$ si $\log_6 15 = a$ y $\log_{12} 18 = b.$

R.: $\dfrac{b-5}{2(2b-ab-a-1)}$

534. Si $\log 0.224 = a$ y $\log 125 = b,$ hallar $\log 7.$

R.: $a + \dfrac{5b}{3} - 2$

535. Simplificar $4^{\log_3 6} - 6^{\log_3 4}$.

R.: 0

536. Si $\log_b N = h$ y $\log_b a = k$, determinar $\log_{ab^2} N$.

R.: $\dfrac{h}{k+2}$

537. Calcular $E = 81^{1-\log_9 2} + 7^{-\log_7 4}$.

R.: 20.5

538. Los logaritmos de tres números en bases 8, 4 y 2, respectivamente, forman una progresión aritmética. Si el segundo número es igual al cuadrado del primero e igual al doble del tercero, hallar dichos números.

R.: 8, 64 y 32

539. Si $m = x^{\log y} \quad \wedge \quad n = y^{\log x}$, calcular $E = \dfrac{\mathrm{L}\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\log m + \log n}$.

R.: 0.217

540. Si $\log 2 = 0.301$, determinar $\log_{25} 200$.

R.: 1.645

541. ¿Cuántas cifras tiene el producto $2^{15} \times 3^{21}$ si $\log 2 = 0.301$ y $\log 3 = 0.477$?

R.: 15

542. Si $\log 2 = 0.301$ y $\log 3 = 0.477$, encontrar x en $3^{x+2} = 135$.

R.: 2.465

543. Resolver $\log_5\left(x^{\log_5 x}\right)=4$ e indicar la menor raíz.

R.: 0.04

544. Resolver $\log_7(x-2)+\log_7(x-5)=2\log_7 2$.

R.: 6

545. Resolver $\log_3(5x-1)+\operatorname{colog}_3(3x-5)=2$.
R.: 2

546. Resolver $\log\sqrt{7x+4}+\log\sqrt{2x+3}=1+\log 1.5$.

R.: 3

547. Resolver $\log_3 x+\log_{1/3} x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_9 x=10$.

R.: 81

548. Encontrar el producto de las raíces de la ecuación $\dfrac{\log_5 x+5}{\log_x 5+1}=6$.

R.: 5

549. Resolver $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_x\left(x^2+2\right)}=2\log_3\sqrt{27}$.

R.: 5

550. Calcular $\dfrac{y}{x}$ en $\begin{cases} 3^x=\sqrt{y} \\ x^2+3\left(3-\log_3 y\right)=0 \end{cases}$

R.: 243

551. Resolver $\sqrt[\log_x 3x]{x}=3$.

R.: $3^{1.618}$ y $3^{-0.618}$

552. Resolver $\log_{0.5x} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0.$

R.: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 1 y 4

553. Si $\dfrac{1-2\log_{(xy)} y}{1+2\log_{(x/y)} y} = 4,$ hallar el valor de $\log_{(xy)}\dfrac{x}{y} + \log_{(x/y)} xy.$

R.: $\pm 5/2$

554. Resolver $\log(x-1)+\log(x-3) = 3\log 2.$

R.: 5

555. Resolver $2\log(3x-4)+\log(10x-4) = 2\log(5x-2).$

R.: 2

556. Formar la ecuación cuadrática cuyas raíces sean las mismas que las de

$$\left(4x^2\right)^{\log_4 x} = 64$$

R.: $8x^2 - 33x + 4 = 0.$

557. Resolver $\log|x+1| + \log|x+5| = \log(\operatorname{antilog}_2 4 - 1).$

R.: 1.359 y -7.359

558. Resolver $\log_3 x = \log_9(4x+15) + \log_{49} 7.$

R.: 15

559. Resolver $\log_{10x} 27 + \log_{x/10} \frac{1}{9} + \log_x 3 = 0$ y dar la suma de $\log x_1 + \log x_2$, siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación.

R.: $5/2$

560. Resolver $\log_8 8x^{-2} = 3(\log_8 x)^2$.

R.: $1/8$ y 2

561. Resolver $\log_{2x}\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \log_2^2 x + \log_2^4 x = 1.$

R.: 2

562. ¿Para qué valor de m, x toma un valor único en $(\mathrm{L}\, m + 1)x^2 - 2x\,\mathrm{L}\, m + \mathrm{L}\, m - 3 = 0$?

R.: $1/e$ y $e^{-3/2}$

563. En la ecuación $x^2 - 2x + \log n = 0$, ¿para qué valores de m existen i) soluciones reales, ii) soluciones positivas y iii) soluciones de distinto signo?
R.: i) $m \leq 10$, ii) $1 < m \leq 10$, iii) $0 < m < 1$

564. Resolver $e^x + 3e^{-x} = 4.$

R.: 0, $\mathrm{L}\, 3$

565. Resolver $e^x\left(1 - 2.5e^x\right) = \frac{5 - 2e^{3x}}{2}.$

R.: $\mathrm{L}\, 2.5$

566. Resolver $e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0.$

R.: $\mathrm{L}\,2,\ \mathrm{L}\,3$

567. Resolver $6e^{5x+2} - 7\sqrt{e^{8x+4}} + e^{3x+2} = 0.$

R.: $0,\ -\mathrm{L}\,6$

568. Resolver $18^{8-4x} = \left(54\sqrt{2}\right)^{3x-2}.$

R.: $22/17$

569. Resolver $3^{\log_a x} + 3x^{\log_a 3} = 2.$

R.: $2^{-\log_3 a}$

570. Resolver $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}.$

R.: 1 ó 4

571. Se tiene la ecuación $e^{2x} + (m-3)e^x + (1-2m) = 0,$

a) ¿Para qué valores de m existen 2 soluciones reales?

b) ¿Qué valor de m hace que $x = \mathrm{L}\,2.5$?

R.: a) $m < 1/2$, b) $m = 1/2$

572. Dada la ecuación $(m-1)e^x + me^{-x} = 2m,$ ¿entre qué límites de m se obtiene una solución real?

R.: $0 < m \leq 1$

573. Resolver $\dfrac{4^{x+4}+1}{2^{x+2}} = 8.$

R.: -4 (doble)

574. Resolver $x^{\log_a y}+y^{\log_a x}=2x^3$.

R.: Si $x=1 \Rightarrow y\in \mathbb{R}^+$, si $x>0$ pero $x\neq 1 \Rightarrow y=a^3$

575. Resolver $7^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}}=14$ si $\log_2 7=a$.

R.: 1 ó $-2-\dfrac{2}{a}$

576. Resolver $\log_x\left(\dfrac{\log_3 2}{\log_3\left(\log_{\sqrt{2}} x\right)}\right)^{\log_3 x}+1=0$.

R.: 16

577. Resolver $a^{\log_b x}+a^{\log_b \frac{1}{x}}=2$.

R.: $x=1$, $x>0$ si $a=1$

578. Hallar $\log_{xy} x^3y^2$ si $\log_y xy\cdot\log_x xy=\log_{b^2}(1/b)$.

R.: 1 ó 4

579. Encontrar la suma de los valores de x que cumplen con

$$\log_x 3\cdot\log_{81/x} 3=-\log_{x^{-3}} x$$

R.: 30

580. Dar la suma de todas las soluciones de $\log_x\sqrt{2}\cdot\log_{x/32}\sqrt{2}=\log_{x^{-4}}\sqrt{2}$.

R.: 8

581. Resolver la ecuación $\dfrac{5\log x-\dfrac{2}{\log_x 10}}{2\log_x 10}=-2\log x.$

R.: $10^{-4/3}$

582. Resolver $2\log(\log x)=\log(7-2\log x)-\log 5$ e indicar la suma de los posibles valores de $x.$

R.: 10

583. Resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} \log_{a^x} y = 2y^2 \\ \log_a \sqrt{xa} + 2\log_{a^2} \dfrac{y}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

R.: $x=a^{1-4a} \wedge y=a^{2a}$

584. Resolver

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\ \cdots}}}}\right)^{x+y} = \left(\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\ \cdots}}}\right)^{y} \\ 3^{x-1} = \left(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\sqrt[3]{2\sqrt[3]{32\ \cdots}}}}\right)^{y+1} \end{cases}$$

R.: $x=\dfrac{\log 3}{\log 3-\log 2},\ y=\dfrac{\log 2}{\log 3-\log 2}$

585. Resolver

$$\begin{cases} \log^2 z = \left(\log \dfrac{1}{x}\right)(\log y) \\ \log_y x + \log_z y + \log_x z + 4 = 0 \\ \log_3 x = \log_3 y + 5 \end{cases}$$

R.: $(81,\ 1/3,\ 9 \text{ ó } 1/9)$

586. Encontrar las raíces reales del sistema

$$\begin{cases} x^2 = 1 + 3\log_2 y \\ y^2 = 2^x \cdot y + 2^{2x+1} \end{cases}$$

R.: $x = 4,\ \ y = 32$ ó $x = -1,\ \ y = 1$

587. Resolver

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^n \\ y^{x+y} = x^{2n} \cdot y^n \qquad (x, y, n > 0) \end{cases}$$

e indicar el valor de x.

R.: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{1+8n}}{2}$

588. Resolver

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 117 \\ \log x = \mathrm{L}\, \dfrac{e}{e^{\log y}} \end{cases}$$

R.: $x = 5,\ \ y = 2$

589. Resolver

$$\begin{cases} \log x^3 - \mathrm{L}\, y^4 = 1 \\ \log^2 x^2 + \mathrm{L}\, y^5 = 46 \end{cases}$$

R.: $x = 1{,}000, \quad y = e^2 \quad$ ó $\quad x = 10^{-63/16}, \quad y = e^{-205/64}$

590. Resolver

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 2{,}500 \\ \log_{x-y} 1{,}000 = \log(x+y) \end{cases}$$

R.: $x = 505, \quad y = 495 \quad$ ó $\quad x = 505, \quad y = -495$

591. Resolver

$$\begin{cases} \log_3(\log_2 y) = 1 + \log_3(\log_2 x) \\ \log_9 x = 2 - \log_3 \sqrt{y} \end{cases}$$

R.: $x = 3, \quad y = 27$

592. Resolver

$$\begin{cases} \log_9\left(x^2 + 2\right) = 2 - \log_{81}\left(y^2 + 9\right) \\ \log_4 (x+y)^2 = \log_2 (x-y) \end{cases}$$

R.: $x = 5, \quad y = 0$

593. Resolver

$$\begin{cases} (\log_{12} x)\left(\log_2 (xy)\right) = \dfrac{1}{\log_x 2} \\ \log_3(x+y) = \dfrac{3\log_3 x}{\log_2 x} \end{cases}$$

R.: $x = 6,\ \ y = 2$ ó $x = 2,\ \ y = 6$

594. Resolver

$$\begin{cases} xe^3 = e^{e-\mathrm{L}\,y} \\ \mathrm{L}\,x + 3\mathrm{L}\left(\mathrm{L}\,y\right) = 0 \end{cases}$$

R.: $x = e^{-3},\ \ y = e^e$

595. Resolver

$$\begin{aligned} \log_5 x + 3^{\log_3 y} &= 7 \\ x^y &= 5^{12} \end{aligned}$$

R.: $x = 125,\ \ y = 4$ ó $x = 625,\ \ y = 3$

596. Resolver

$$\begin{cases} y = 100x \\ x^y = y^x \end{cases}$$

R.: $x = 100^{1/99},\ \ y = 100^{100/99}$

597. Resolver

$$\begin{cases} x^{2/3}y^{1/3} - x^{1/3}y^{2/3} = 2 \\ e^{3/y} = \mathrm{antiL}\,x \end{cases}$$

R.: $x = 9,\ \ y = 1/3$

598. Determinar xy en

$$\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2 \\ (x+y)\cdot 3^x = 216 \end{cases}$$

R.: 15

599. Resolver

$$\begin{cases} \log_{2ay} a^2 + \log_{2x} a \cdot \log_{ax} a \cdot \log_{1/a} 2x = 0 \\ \log_2 x - \log_a y \cdot \log_2 a = \log_2 (1/a) \end{cases}$$

R.: $x = 2,\ \ y = 2a$

600. Resolver el sistema

$$\begin{cases} (nx)^{\log n} = (my)^{\log y} \\ m^{\log x} = n^{\log y} \end{cases}$$

R.: $x = 10^{\frac{\log^3 n}{\log^2 m}},\ \ y = 10^{\frac{\log^2 n}{\log m}}$ ó $x = \dfrac{1}{n},\ \ y = \dfrac{1}{m}$

Prácticas y exámenes de Fundamentos de Matemáticas

Verano 2006

Práctica Calificada No. 2

601. Tres socios aportan \$60,000, \$70,000 y \$90,000 para un negocio que durará 8 años. Luego de 5 años el primer socio retira \$20,000, un año más tarde el segundo retira cierta cantidad y faltando un año el tercero retira \$30,000. Finalizado el negocio la diferencia entre lo que recibe el tercero y el primero representa 1/2 de lo que recibe el segundo. Hallar cuánto aportó el segundo los dos años finales.

602. Si $\sqrt[n]{2^{n^2}\sqrt[n]{2^{2n^3}\sqrt[n]{2^{3n^4}\ldots\sqrt[n]{2^{n^{n+2}}}}}}=2^{28n}$ (n radicales), hallar n. Nota: $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

603. Dados los polinomios :

$$P(x,y)=m\,x^{a+2}\,y^{a+b}+b\,x^{2a}\,y^{b+1}+a\,x^{a+b}\,y^{a+2}$$
$$Q(x,y)=a\,x^{a+b}\,y^{m-1}-b\,x^{a+b}\,y^{m}+m\,x^{a+b}\,y^{m+1}$$

hallar $P+Q$ si se sabe que:

- □ el grado absoluto de P es 16
- □ el grado absoluto de Q es 11
- □ el grado relativo de Q respecto a x es 8.

604. El polinomio $P(x)=x^4+x^3+a\,x^2+b\,x+c$ es divisible por $(x-2)$, al dividirlo por $(x-1)$ ó $(x+2)$ da el mismo residuo y al dividirlo por $(x-3)$ da 80 de resto, hallar a, b y c.

605. Si $x^4+\dfrac{1}{x^4}=47$, hallar el valor de $x^3+\dfrac{1}{x^3}-x^2-\dfrac{1}{x^2}$.

606. Calcular el cociente de dividir: $\dfrac{(2x+1)^8-1}{4x(x+1)}$.

Respuestas:

601. \$60,000
602. 7
603. $8x^8y^8+2x^{12}y^3+2x^8y^3-2x^8y^2+6x^8y$
604. $a=-1,\ b=1,\ c=-22$
605. 11 ó –25
606. $\left(4x^2+4x+1\right)^3+\left(4x^2+4x+1\right)^2+4x^2+4x+2$

Práctica Calificada No. 3

607. Factorizar $\left(a^2-c^2-1\right)^2-4c^2$.

608. Simplificar $\dfrac{a^2+b^2-7a-7b+2ab-18}{(a+b)(a+b+2)}+\dfrac{a-b+3}{a-b}+\dfrac{6(a+2b)}{a^2-b^2}$.

609. Simplificar:

$$E=\left[\left(\frac{x^2-1}{x+2}+\frac{x^2-4}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2-4}{x-1}\right)^2\right]^2-4\left[\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)^2-\left(\frac{x^2-4}{x-1}\right)^2\right]^2$$

610. Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{6x^2-4}{x^4-3x^2-4}$.

611. Simplificar $\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{2a+b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{2a+b}}+\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{2a+b}}{\sqrt{a+2b}+\sqrt{2a+b}}$.

612. Resolver:

a) $\dfrac{ax-b}{x+a}+\dfrac{bx-a}{x+b}=\dfrac{ax^2+bx^2+2ab-4a^2b^2}{x^2+ax+bx+ab}$

b) $\dfrac{\sqrt[n]{x+3}+\sqrt[n]{x-3}}{\sqrt[n]{x+3}-\sqrt[n]{x-3}}=3$

Respuestas:

607. $(a+c-1)(a-c+1)(a-c-1)(a+c+1)$

608. $\dfrac{2\left(a^2+12b-b^2\right)}{a^2-b^2}$

609. $16(x+1)^2(x-2)^2$

610. $\dfrac{-1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x^2+1}$

611. $\dfrac{6(a+b)}{b-a}$

612. a) $-a-b-2ab$ b) $3\left(2^n+1\right)/\left(2^n-1\right)$

Práctica Calificada No. 4

613. La ecuación cuadrática $ax^2+(5a-45)x+15a+30=0$ tiene raíces iguales, $a>0$, hallar r^2+s^2, si r y s son las raíces de la ecuación $x^2+(a+1)x-7=0$.

614.

a) Resolver $\dfrac{7x-3}{x+4}+\dfrac{2x+5}{x-3}=\dfrac{5x^2+6x+14}{x^2+x-12}$.

b) Si la menor de las raíces de la ecuación $15x^2+7x-2=0$ también es solución de la ecuación $\left(a^2+a+1\right)x^2+(a+1)x+a=0$, hallar el valor de a.

615. Si un editor fija el precio de un libro en \$20, deberán venderse 20,000 ejemplares. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas disminuirán en 500 ejemplares. ¿Cuál debe ser el precio del libro para que el ingreso bruto por ventas sea de \$432,000?

616. Si A es el conjunto solución de $-x+3\le\frac{x}{2}-3\le-\frac{x}{3}+12$ y B es el conjunto solución de $\frac{x}{3}-4\le\frac{x}{9}-1\le\frac{x}{9}+2,$ hallar cuántos valores enteros hay en $A\cap B.$

617. Resolver para $x,$ la inecuación:

$$\frac{a}{a+b}x+\frac{2ab}{a-b}\le\frac{b}{a+b}x+\frac{a^2+b^2}{a-b},\quad 0<a<b$$

618. Para ejecutar un proyecto de inversión una empresa necesita \$100,000. Una parte C puede ser suministrada por los accionistas (C es el capital propio) y el resto D debe ser aportado por el banco (D es la deuda). Si la relación deuda/capital (D/C) debe estar entre $1/3$ y $2/3,$ ¿entre qué valores debe estar el capital propio?

Respuestas:

613. 30
614. a) $5/4$ b) $1/4$ ó -2
615. \$24 ó \$36
616. 15
617. $\left[a+b,\infty\right[$
618. $\left]60,000,\ 75,000\right[$

Práctica Calificada No. 5

619. Hallar el menor valor entero que puede tomar k para que la inecuación $-k<\frac{2x+2}{x^2+x+1}<k$ se cumpla para todo valor real de $x.$

620. Para la venta de cierto artículo la relación entre precio (p) y cantidad (q) está dada por $p = \frac{-3q}{20} + 90.$ Si el costo de producir q artículos está dado por $C = 30q + 700,$ determinar para qué cantidades la utilidad es superior a 5,060.

621. Un vendedor de maquinaria industrial recibe una comisión de \$50 por cada máquina vendida. Cuando el número de máquinas por mes es mayor que 25, su comisión para todas las máquinas vendidas aumenta en \$5 por cada máquina vendida que exceda a 25. Determinar entre qué valores debe estar el número de máquinas vendidas para que su comisión total esté entre \$1,820 y \$3,780.

622. Resolver:

a) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 \le 0$

b) $\dfrac{(x^2+2)(3x-8)}{(x-2)^2(x+1)} \le 0$

623. Resolver para x: $\dfrac{2bx-a}{x+1} \ge \dfrac{(b-a)x^2}{x+1} + \dfrac{b}{x+1},$ si se sabe que $0 < b < a.$

624. Resolver para x: $\left| x - \frac{1}{4} \right| + \left| x - \frac{3}{2} \right| \le \frac{7}{2}.$

Respuestas:

619. 3
620. $]160, 240[$
621. $]28, 36[$
622. a) $]-\infty, -1] \cup [2, 5]$ b) $]-\infty, -1[\cup [0, 8/3] - \{2\}$
623. $\left[\dfrac{a+b}{b-a}, -1 \right[\cup [1, \infty[$

624. $\left[-7/8,\ 21/8\right]$

Práctica Calificada No. 6

625.

a) El logaritmo de un número en base 3 aumentado en el logaritmo del triple del mismo número en la misma base es 3. Hallar dicho número.
b) Hallar la base en la cual el logaritmo de 4/25 es una unidad mayor que el logaritmo de 125/8 en una base recíproca de la anterior.

626. Si $\log 2 = m$ y $\log 3 = n,$ hallar en términos de m y n:

a) $\dfrac{1}{\log_{48} 2}$

b) $\log_{60} 15$

627. Hallar un número tal que el logaritmo de 3 en base igual a la raíz cuadrada de dicho número, aumentado en el logaritmo de 3 en base igual al cuadrado de dicho número, da como resultado 1 aumentado en el logaritmo del cubo de dicho número en base igual al cuadrado del recíproco del número.

628. Resolver $\dfrac{\log_2 x^{\log_2 x}}{\log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)} + \dfrac{\log_2(2x)}{\log_2(4x)} = \dfrac{53}{10},$ sabiendo que x es un número entero.

629. Resolver el sistema $\begin{cases} e^{16y^2} = x^{\ln^3 x} \\ y + \ln x = \dfrac{5}{4} \end{cases}.$

630. Resolver el sistema $\begin{cases} x^2 + 4x - 4y + 8 = 0 \\ x - 2y + 8 = 0 \end{cases}.$

Respuestas:

625. a) 3 b) $5/2$

626. a) $4+\dfrac{n}{m}$ b) $\dfrac{1-m+n}{m+n+1}$

627. $1/243$

628. 8

629. $\left(e^{-5}, 25/4\right)$, $\left(e,1/4\right)$

630. $\left(2,5\right)$ y $\left(-4,2\right)$

Examen Parcial

631. Una persona coloca S/.9,600 en un banco A que le paga una tasa de interés simple del 18% anual, después de un determinado tiempo retira su capital e intereses y lo coloca en otro banco B que le paga una tasa de interés simple del 24% anual. Después de 10 meses en el banco B, observa que ha ganado S/.710.4 más que si lo hubiese dejado en el banco A. ¿Qué tiempo estuvo su capital en el banco A?

632. Tres personas aportan \$60,000, \$40,000 y \$30,000 para un negocio que durará 4 años. Después de cierto tiempo de iniciado el negocio, el primer socio retira \$10,000, un año más tarde el segundo aumenta su capital en \$10,000 y el tercero aumenta su capital también en \$10,000. Si al repartir las utilidades la suma de lo que reciben el primero y el tercero es el doble de lo que recibe el segundo, hallar luego de qué tiempo el primero retiró los \$10,000.

633. Si $E=\dfrac{x^4-\left(x+1\right)^2}{x^3-1}-\dfrac{\left(x^2-x\right)^2-1}{x^3+1}-\dfrac{2x^2\left[\left(x^2+1\right)^2-x^2\right]}{x^6-1}$, hallar $P=\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{E}}$.

634. Un padre reparte su herencia entre sus hijos de la manera siguiente: al primero le da \$20,000 y la sexta parte del resto, al segundo le da \$40,000 y la sexta parte del resto, al tercero le da \$60,000 y la sexta parte del resto y así sucesivamente. Al final encuentra que cada uno de ellos ha recibido la misma cantidad. Hallar el valor de la herencia y el número de hijos.

635. Resolver en términos de a:

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a^2 + 5a \\ x + ay + z &= 2a^2 + 4a \\ x + y + az &= 3a^2 + 3a \end{aligned}$$

636. Una compañía aérea tiene en sus aviones tres tipos de pasajes: primera clase, segunda clase y tercera clase. En la siguiente tabla se muestran los precios de los pasajes para una de sus rutas y el peso que cada pasajero puede llevar en su equipaje:

	Primera clase	Segunda clase	Tercera clase
Precio del pasaje (\$)	2400	1200	800
Peso (kg)	48	32	24

Si un avión de esta compañía aérea lleva 300 pasajeros, un peso de 8,880 kg y recaudó \$336,000, ¿cuántos pasajeros viajan en cada clase?

Respuestas:

631. 8 meses
632. 1.5 años
633. $2/x$
634. \$500,000; 5 hijos
635. $x = a,\ \ y = 2a,\ \ z = 3a$
636. 30, 120 y 150

Examen Final

637. En una empresa la relación entre el precio de venta p y la cantidad vendida q de un artículo es $p=-\dfrac{q}{3}+80.$ El costo de producir q unidades es $C=12q+1280.$ Encontrar qué cantidad obtiene la misma utilidad que al vender 84 unidades más.

638. Resolver: $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+1}{x-1}\leq 2.$

639.

a) Resolver: $abx^2+a^2x-b^2x-ab\geq 0, \qquad a<b<0.$

b) ¿Para qué valores de b la inecuación: $a^2x^2+a\sqrt{b}\,x+b^3>0$ tiene como conjunto solución $x\in\mathbb{R}$?

640. Resolver la ecuación:

$$(\log_2 3)(\log_3 x)+\log_x \sqrt{8}=5^{\log_5 3}-\log_{16} 2$$

641. Si $e^{125y^3}=x^{8\ln^3 x-37\ln x}$, hallar x cuando $y=\dfrac{6}{5}.$

642. En una progresión geométrica el segundo y quinto términos son $\dfrac{3}{4}m$ y $\dfrac{2}{9}m,$ respectivamente. Hallar la razón y calcular:

a) la suma de los 6 primeros términos

b) la suma de los infinitos términos de la progresión.

Respuestas:

637. 60

638. $x\in\,]-2,1[\,\cup\,]4,\infty[$

639. a) $x\in\,]-\infty,-a/b]\cup[b/a,\infty[$ b) $b\in\,]1/2,\infty[$

640. $\sqrt[4]{8}$ y 4

641. $e^{\pm 2\sqrt{2}}$

642. a) 3.079 m b) 3.375 m

Año 2006 – I

Práctica Calificada No. 2

643.

a) Reducir: $\dfrac{\left(49^{8^{-\frac{1}{3}}}\right)\left(343^{6}\right)}{49^{2^{3}}}$.

b) Simplificar: $\dfrac{\sqrt[2a]{x^{2a+4b}}\ \sqrt[a]{x^{3a-b}}}{\sqrt[4a]{x^{8a+4b}}}$.

644. Una herencia se reparte en forma directamente proporcional a las edades de cuatro herederos. Si la repartición se hubiese hecho tres años antes a cada uno le habría tocado S/.5,100, S/.7,140, S/.8,160 y S/.10,200. ¿Cuánto le tocó al menor si en el momento de repartir la herencia las edades sumaban 132?

645. Tres socios han ganado en un negocio \$24,000. El primero contribuyó con \$25,000, el segundo con \$40,000 y el tercero con \$20,000, siendo los tiempos de imposición del segundo y el tercero 6 y 8 meses, respectivamente. Si el primero ganó \$6,000, ¿cuál es el tiempo que estuvo el primero en dicho negocio?

646. Si el polinomio:

$$p\,x^{12}\,y^{a}\,z^{2b} + m\,x^{3m+8}\,y^{13}\,z^{3p} + 2(m+p)x^{15}\,y^{11}\,z^{13}$$

es homogéneo, calcular la suma de los coeficientes.

647. Simplificar $E = x^2 - y^2$, si se conoce que:

$$x = \left[\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(a^{-1}b\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$y = \left[\left(ab^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(ab^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

Resolverlo de dos formas distintas.

648. El polinomio:

$$P(x) = a\,x^4 + x^3 - a\,x^2 + b\,x + c$$

es divisible por $(x+1)$ y deja residuo 42 al dividirlo por $(x-2)$. Si los restos de la división de $P(x)$ entre $(x-3)$ y $(x+3)$ suman 296, hallar los valores de a, b y c.

Respuestas:

643. a) 343 b) x^2
644. S/.5,331.81
645. 5 meses y 10 días.
646. 18
647. 4
648. $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$

Práctica Calificada No. 3

649. Factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + m\,x^2 + n\,x + p$, si se sabe que tiene como factor a $(x-1)^3$.

650. Simplificar: $\dfrac{x+2+\dfrac{4}{x-3}}{x-4-\dfrac{2}{x-3}} \div \dfrac{2\,x+2}{3\,x-15}$.

651. Descomponer en fracciones parciales: $\dfrac{-9\,x^2 - 7\,x - 34}{x^4 - x^2 - 12}$.

652. Si se cumple que: $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2\,a\,b}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{2\,a\,b}} + \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{2\,a\,b}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2\,a\,b}} = 8.$ Hallar $\dfrac{a}{b}$.

653. Resolver para x: $\dfrac{px+q}{x+p-q}+\dfrac{px-q}{x-p+q}=\dfrac{2p\left(x^2-qx+px\right)}{x^2-(p-q)^2}$.

654. La promoción de cierta empresa consiste en que por la compra de dos docenas de lápices, se regalan tres lápices. Si la docena cuesta 8.5 soles y se vende cada lápiz en 1.2 soles, ¿cuántas docenas se compraron si se ganó 61.60 soles en total?

Respuestas:

649. $(x-1)^3(x+3)$
650. 1.5
651. $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{x+1}{x^2+3}$
652. 3 ó $1/3$
653. $-q/p$
654. ocho docenas.

Práctica Calificada No. 4

655. Resolver:

$$\begin{aligned}\left(a^2+b^2\right)x - aby &= a^3\\ (a-b)x+(a+b)y &= a^2+b^2\end{aligned}$$

656. Si aumenta el precio de los libros en \$5, dejaría de adquirir 5. Si a continuación me prestaran \$120, adquiriría tantos libros como al principio. ¿Cuál es la suma de dinero con la que cuento para comprar libros?

657. Si b es positivo, formar la ecuación cuadrática cuyas raíces sean la mayor raíz de la ecuación $x^2+bx+a^2=2ax+ab$ y la menor raíz de la ecuación $x^2=bx$.

658. La ecuación $2x^2 - kx + 3 = 0$ tiene por raíces a r_1 y r_2. Encontrar el valor de k para que el producto de una de las raíces disminuida en el doble del cuadrado de la inversa de la otra raíz y la otra disminuida en el doble del cuadrado de la inversa de la primera sea nulo. Además, resolver la ecuación resultante.

659. Una agencia de viajes vendería 40 pasajes a \$72 cada uno. Sin embargo, por cada \$5 que aumente el pasaje, venderá 2 pasajes menos. Si recauda \$2,944, ¿cuántos pasajeros viajarán?

660. Resolver el sistema:

$$3(x-2)^2 + 2(y-3)^2 = 29$$
$$4(x+1)^2 + 5(y-3)^2 = 149$$

Respuestas:

655. $x = a,\ y = b$
656. \$456
657. $x^2 - ax = 0$
658. $k = 59/12 \Rightarrow x_1 = 4/3,\ x_2 = 9/8$
659. 32
660. $(5, 4)$ y $(5, 2)$

Práctica Calificada No. 5

661. Hallar el conjunto solución de la inecuación :

$$\frac{mx + (m-2)^2}{8} + \frac{x + m^2}{12} \geq \frac{(m-1)(x+1)}{3}$$

en términos de m.

662. Un inversionista coloca los $2/5$ de su capital en un banco y luego la mitad de lo que le queda más \$8,000 en la bolsa de valores, quedándole más de \$16,540. Si inicialmente hubiera colocado la tercera parte de su capital más \$2,000 en el banco y luego la mitad del resto en la bolsa de valores le hubiera quedado menos de \$22,200.

¿Cuánto tenía inicialmente si dicha cantidad expresada en miles es entera?

663. Resolver:

$$x^2 - 2x \le 2x + 5 < -4x + 29$$

e indicar cuántos valores enteros admite la solución.

664. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones :

a) $\left(a^2 + b^2\right)x^2 + 2abx + a^2 > 0$

b) $8a^2x^2 + 10b^2 \le \left(2ax + b\right)^2 - 16abx$

665. Para cierto producto cuando se producen q unidades el costo es $C = 4q + 120$ y la relación entre el precio (p) y el número de unidades es $p = -\dfrac{q}{5} + 30.$ Determinar :

a) Si $q \in \left]40, 80\right[$, ¿entre qué valores está el costo?

b) Si la utilidad debe ser mayor a \$480, ¿entre qué valores estará q?

666. Resolver: $1 + \dfrac{b}{x} \ge \dfrac{4a^2 - b^2}{x^2 - bx}$, donde $0 < a < \dfrac{b}{2}$.

Respuestas:

661. $\begin{cases} \text{Si } m > 2 \Rightarrow x \in \left]-\infty, m-2\right] \\ \text{Si } m < 2 \Rightarrow x \in \left[m-2, \infty\right[\\ \text{Si } m = 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$

662. \$82,000, \$83,000 ó \$84,000

663. $x \in \left[-1, 4\right[$; 5

664. a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = -3b/2a$

665. a) $\left]280, 440\right[$ b) $\left]30, 100\right[$

666. $\left]-\infty, -2a\right] \cup \left]0, 2a\right] \cup \left]b, a\right[$

Práctica Calificada No. 6

667. Un fabricante puede producir radios a un costo de \$10 cada uno y estima que si son vendidos a x dólares la unidad, los usuarios comprarán aproximadamente $(80-x)$ radios cada mes. ¿Cuántos radios deberá producir y vender cada mes para que la utilidad no sea inferior a \$1,200 mensuales?

668. Resolver: $|2x+1|-|x-3|\leq x-2.$

669. El cuadrado del logaritmo en base 3 del triple de un número excede en uno al logaritmo en la misma base de dicho número. Calcular el logaritmo en base $\sqrt[3]{9}$ de tal número.

670. Dados: $4\left(5^{a}\right)-25\left(2^{b}\right)=0$ y $\log 2=p.$

a) Encontrar $a(\log 5)$ en función de b y $p.$

b) Calcular el valor de b si se conoce que $a(\log 5)=\log 200.$

671. A partir de $e^{-2\ln x}=x^{\ln y}$, encontrar los valores de z y u en :

$$\log_5^3 z=-x^4$$
$$\log_4 u^2=\log_{e^{-4}} y^2$$

Respuestas:

667. $[30, 40]$

668. $[-1, 0]$

669. 0 ó $-3/2$

670. a) $2-4p+bp$ b) 5

671. $z=1/5,\quad u=\pm 2$

Examen Parcial

672. Se coloca un capital al 5% anual. Luego de 10 meses se coloca otro capital igual al doble del anterior al 6% anual. Si la suma de los intereses representa los 7/15 del primer capital, ¿qué tiempo estuvo colocado cada capital?

673. Se adquieren N discos a determinado valor unitario. Las 2/5 partes se venden ganando el 2.5% en cada uno y la décima parte se vende perdiendo el 10% en cada uno. ¿Cuánto debe ganarse en cada uno de los restantes para obtener una utilidad total del 10%?

674. Si $a^2+3a+b^2+3b+2ab=40$ y $ab=3.5$, calcular a^3-b^3, sabiendo que $a+b>0$ y $a>b$.

675. Descomponer en fracciones parciales:

$$\frac{-9x^2+9x+2}{x^3-3x^2+4x-12}$$

676.

a) Resolver para x:

$$\frac{2x-a}{x+b-c}=\frac{a-2x}{x-b+c}+4$$

b) Si b y c son enteros, indique tres valores de a tal que x resulte un cuadrado perfecto.

677. En una elección en la que había tres candidatos A, B y C, se emitieron en total 15,000 votos. Si A obtuvo 60 votos más que B, y 220 votos más que C, ¿cuántos votos obtuvo el ganador, si el número de votos blancos y nulos fue la sexta parte del total de votos?

Respuestas:

672. 40 meses
673. 20%
674. $43\sqrt{11}/2$

675. $\dfrac{-4}{x-3}-\dfrac{5x+6}{x^2+4}$

676. a) $2(b-c)^2/a$ b) $2,\ 1/2$ y $1/8$

677. 4,260 votos

Examen Final

678. Dada la ecuación $y=x^3-5x+2$, resolver el sistema de ecuaciones que forma respectivamente con:
a) $7x=y+14$
b) $7x+18=y$

679. Resolver:
a) $\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2+2x-15\right)\leq 0$
b) $\left(4x^2+12x+9\right)\left(x^2+3x-10\right)\geq 0$

680. Resolver para x: $\dfrac{x+a}{x-a}\leq\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$.

681. Al resolver $\ln_a^2 x+36\ln_x^2 a=13$, se obtienen 4 soluciones: x_1, x_2, x_3 y x_4, tal que $x_1<x_2<x_3<x_4$. Calcular $\log_{x_1} x_3+\log_{x_2} x_4$.

682. Sabiendo que $\log 3=m$ y $\log 2=n$, hallar $A-B$ en términos de m y n, siendo $A=\log_6 18$, $B=\log_{60}^{-1} 6$.

683. El primer término de una progresión aritmética es 25 y la razón de una progresión geométrica es $1/2$. Si los términos cuarto y octavo de la primera progresión coinciden, respectivamente, con los términos cuarto y sexto de la segunda, determinar en cuánto excede la suma de los cinco primeros términos de la progresión geométrica a la suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética.

Respuestas:

678. a) $(2, 0)$, $(-4, -42)$ y $(2, 0)$

b) $(-2, 4)$, $(4, 46)$ y $(-2, 4)$

679. a) $x \in [-5, 3]$ b) $x \in]-\infty, -5] \cup \{-3/2\} \cup [2, \infty[$

680. Si $a > 0 \Rightarrow]-\infty, -a[\cup [0, a[$,

Si $a < 0 \Rightarrow]a, 0] \cup]-a, \infty[$,

Si $a = 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$

681. $-13/6$

682. $\dfrac{m-1}{m+n}$

683. 133

Ejercicios propuestos de razonamiento matemático

684. En una canasta entran x manzanas o y peras. ¿Cuántas parejas de manzanas y peras entran en la canasta?

R.: $\dfrac{xy}{x+y}$

685. A y B distan 200 km. De A parte un vehículo a 120 km/h y 2 horas más tarde parte de B otro a 100 km/h. ¿A qué distancia de A se encuentran si se dirigen el uno hacia el otro?

R.: No se encuentran

686. El promedio de y números es x. Si dejamos de considerar dos números que suman a, ¿cuál será el nuevo promedio?

R.: $\dfrac{xy-a}{y-2}$

687. Una botella y su corcho valen 150 pesos, costando la botella 100 pesos más que el corcho. ¿Cuánto vale este?
R.: 25 pesos

688. Si a un número se le añade la suma de sus cifras se obtiene 8,799. Calcular la suma de dichas cifras.
R.: 30

689. Dos ruedas de una bicicleta, de radios R y r, recorren un espacio de 45 metros. Si la suma del número de vueltas de ambas ruedas es $15/r$, hallar la relación r/R.

R.: $\dfrac{2\pi-3}{3}$

690. Sea $0<x<1$. Indicar el menor número de entre los siguientes: x^2, $1/x$, $1/x^2$, x, $x-1$.
R.: $x-1$

691. Se mezclaron 200 litros de vino de 5 soles el litro con 30 litros de vino de mayor precio y su obtuvo una mezcla con un precio medio de S/.6.50 por litro. ¿Cuál es el costo en soles por litro del vino de mayor precio?
R.: S/.16.50

692. Se venden 12 litros de leche adulterada con un peso de 12.42 kg neto. Si la densidad de la leche pura es 1.04, ¿cuánta agua se empleó en la adulteración?
R.: 1.5 litros

693. Con una misma suma de dinero se pueden adquirir 24 aviones y 36 barcos o 36 aviones y 12 barcos. ¿Cuántos aviones se podrán adquirir con dicha suma de dinero?
R.: 42

694. Si se tiene una solución de 40 litros al 25% de alcohol, ¿cuántos litros de agua habrá que añadir para rebajarla al 20%?
R.: 10 litros

695. Un comerciante puso en exhibición algunos vestidos con el precio original marcado. Fijó un aviso que señalaba: “Rebajamos el precio en su quinta parte”. Encontrar la relación entre el costo y el precio original si se sabe que el costo era las $3/4$ partes del precio de venta.
R.: $3/5$

696. El agua contenida en un pozo se agota en 3 horas. Cada hora, el nivel de agua desciende la mitad de la altura, más un metro. Determinar la profundidad del pozo.
R.: 14 metros

697. Dentro de 8 años, la edad de Pedro será la que Juan tiene ahora. Dentro de 15 años, Pedro tendrá los $4/5$ de la edad que entonces tendrá Juan. ¿Cuál era la suma de las edades de Juan y Pedro cuando Juan tenía el doble de la edad de Pedro?
R.: 24 años

698. ¿Cuál será la inversa del doble de la inversa del promedio de las inversas de dos cantidades tales como m y n?

R.: $\dfrac{m+n}{4mn}$

699. Dos caños pueden llenar un tanque de 24 litros en 5 y en 6 horas, respectivamente, cada uno funcionando individualmente, mientras que un desagüe puede vaciar completamente el tanque en 10 horas. Si el tanque está vacío y se abren los caños y el desagüe y se cierran apenas se llena el tanque, ¿cuántos litros se fueron por el desagüe?
R.: 9 litros

700. Si un jugador pierde un tercio de su dinero en su primer juego, vuelve a apostar y pierde los $3/5$ de lo que queda y en una tercera apuesta pierde los $4/7$ del resto, ¿qué fracción del dinero que tenía inicialmente le ha quedado?
R.: $4/35$

701. Un comerciante compra naranjas a 3 por 10 pesos e igual número a 5 por 20 pesos. ¿A cuánto las debe vender para que no le quede ninguna?
R.: 3 por 11 pesos

702. Se compran dos varillas metálicas, una a N soles el metro, y otra, que tiene N metros más, a M soles el metro. Si por ambos retazos se pagó lo mismo, ¿cuántos metros se compraron en total?
R.: $\dfrac{N(N+M)}{N-M}$

703. La suma de dos números es a y su producto, $b.$ Encontrar la suma de las inversas de dichos números.
R.: a/b

704. Para que la ecuación $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{N+1}{N}$ sea verdadera cuando N es positivo, se debe cumplir que x sea:
i) $x<1$ ii) $x<0$ iii) $x>0$ iv) $x\in\mathbb{R}$ v) $0<x<1$
R.: v)

705. Si a una cantidad le añado el $y\%$, obtendré el $x\%$. ¿Cuánto se obtendrá si le añado el $2y\%$?
R.: $(2x-100)\%$

706. Juan tiene a años, que es el séxtuplo de la edad que tenía Roberto cuando Juan tenía la tercera parte de la edad que tiene Roberto. Encontrar la edad de este.
R.: $7a/8$ años

707. Encontrar el mínimo valor de $9x^2-12x+9$.
R.: 5

708. Si la utilidad que se obtiene al vender en S soles lo que costó C soles es $\frac{C}{n}$, calcular la utilidad en función de S y n.
R.: $\frac{S}{n+1}$

709. Dos velas de iguales alturas se encienden a la vez, y se consumen en 4 y 3 horas, respectivamente. Si se supone que se consumen a velocidad uniforme, ¿al cabo de cuántas horas de encendidas, la relación de las alturas será 2?
R.: 2 horas y 24 minutos

710. Dos números son proporcionales a 2 y 5. Si se aumenta 175 a uno de ellos y 115 al otro, se obtienen cantidades iguales. ¿Cuál es el menor?
R.: 40

711. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que 5, 3 y 16, respectivamente. Encontrar la suma de los números.
R.: 20

712. Cecilia tiene $5q+1$ monedas de 25 centavos y Susana, $q+5$ monedas de las mismas. ¿Cuál es la diferencia de dinero que tienen en monedas de 20 centavos?
R.: $5(q-1)$

713. Una llave llena un tanque en m horas y otra, en $\frac{1}{m}$ horas (estando inicialmente vacío el tanque). ¿En qué tiempo lo llenarán las dos llaves juntas?

R.: $\frac{m}{m^2+1}$

714. Si el precio de un artículo se aumenta en un porcentaje p, entonces el porcentaje de disminución de las ventas no debe exceder a d para obtener el mismo ingreso. Calcular el valor de d.

R.: $\frac{p}{1+p}$

715. Un frutero compra 100 kilos de manzanas, una parte a S/.40 el kilo y el resto a S/.50 el kilo. Las vende a S/.46 el kilo y gana S/.60. ¿Cuántos kilos compró a S/.40 el kilo?
R.: 46

716. Si el precio de un libro disminuye en $1,000, se podrían adquirir 3 libros más con un mismo monto. ¿Cuál es ese monto si se adquirieron 24 libros con tal descuento?
R.: $168,000

717. Si vendo a 70 pesos cada manzana, gano 120 pesos en el negocio, pero si las vendiera a 50 pesos cada una, perdería 60 pesos. ¿Cuántas manzanas deseo vender?
R.: 9

718. Demostrar que la diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es un múltiplo de 8.

719. Hace p años, A tenía c años, mientras que dentro de q años, B tendrá d años. ¿Cuánto sumarán la edad de B cuando A duplique su edad actual y la de A cuando B triplique su edad actual?
R.: $2c+2p+3d-3q$

720. Un reloj da las tres. Mientras suenan las campanadas pasan 3 segundos. ¿Cuánto tiempo será necesario para que este reloj dé las nueve?
R.: 12 segundos

Amenidades

A) En el esquema siguiente, tachar seis cifras de modo tal que los números que queden sumen 20.

$$\begin{array}{c} 111 \\ 777 \\ 999 \end{array}$$

B) Emplee cuatro cifras 4 y los signos de las operaciones fundamentales para expresar los números $1,\ 2,\ 3,\ ....\ ,\ 10.$

C) Utilice cinco cifras 9 para expresar el número 10 con ayuda de las operaciones aritméticas. Encuentre cinco soluciones.

D) ¿Qué cifra le gusta más o cuál es su cifra preferida?
Pregúntele a un compañero qué cifra $(1,\ 2,\ 3,\ ...\ ,9)$ le gusta más. Supongamos que sea x. Pídale que multiplique el número 12’345,679 por $(9x)$ y verá lo que sucede. Por ejemplo, si le gusta la cifra 5, pídale que multiplique 12’345,679 por 45.

E) ¿Cómo adivinar la cifra tachada?
Solicítele a un amigo que piense un número cualquiera de varias cifras y que haga lo siguiente:
- que escriba el número pensado,
- que cambie el orden de las cifras,
- que reste ambos números,
- que tache una de las cifras de la resta (que no sea cero),
- y que le diga las demás cifras en cualquier orden.

Usted le podrá decir cuál es la cifra tachada.

F) ¿Cómo adivinar el número de hermanos y hermanas?
Pídale a un compañero que haga lo siguiente:
- que añada 3 al número de hermanos que tiene,
- que multiplique por 5 el número obtenido,
- que sume 35 al producto,
- que multiplique por 2 la suma,
- que al resultado le añada el número de hermanas,

- y que le diga el resultado final.

Usted le podrá indicar el número de hermanos y hermanas que tiene.

G) ¿Cómo adivinar el día y el mes de nacimiento?

Propóngale a un amigo que escriba en una hoja de papel el día en que nació y que efectúe las operaciones siguientes:

- que duplique el número escrito,
- que multiplique por 10 lo obtenido,
- que le sume 80 al producto,
- que multiplique por 5 la suma,
- que le añada el número del mes en que nació,
- y que le diga la suma final.

Usted le podrá señalar la fecha en que nació.

Respuestas

A) Se deben tachar 6 cifras de modo que queden las 3 siguientes:

$$\begin{array}{ccc} - & 1 & 1 \\ - & - & - \\ - & - & 9 \end{array}$$

B)

$$1 = \frac{44}{44} \qquad 6 = 4 + \frac{4+4}{4}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} \qquad 7 = \frac{44}{4} - 4$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4} \qquad 8 = 4 + \left[\frac{4}{4} \times 4\right]$$

$$4 = \left[(4-4) \times 4 + 4\right] \qquad 9 = 4 + 4 + \frac{4}{4}$$

$$5 = \frac{(4 \times 4) + 4}{4} \qquad 10 = \frac{44-4}{4}$$

C)

$$10 = \frac{99}{99} + 9$$

$$10 = \frac{9}{9} + \left(\frac{9}{9} \times 9\right)$$

$$10 = \frac{99}{9} - \frac{9}{9}$$

$$10 = \left(9 + \frac{9}{9}\right)^{9/9}$$

$$10 = 9 + 99^{9-9}$$

D) Tenga presente que $12'345,679 \times 9 = 111'111,111.$ En el caso que se escoja la cifra 5, deberá multiplicarse por $9 \times 5 = 45,$ esto es:

$$\begin{aligned} 45 \times 12'345,679 &= 5 \times (9 \times 12'345,679) \\ &= 5 \times (111'111,111) \\ &= 555'555,555 \end{aligned}$$

E) Sea $\overline{abcd}$ el número escogido. De acuerdo con los criterios de divisibilidad y los restos potenciales:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 20c + d$$

$$\overline{abcd} = \left(\overset{o}{9} + 1\right)a + \left(\overset{o}{9} + 1\right)b + \left(\overset{o}{9} + 1\right)c + d$$

$$\overline{abcd} = \overset{o}{9} + a + \overset{o}{9} + b + \overset{o}{9} + c + d$$

$$\overline{abcd} = \overset{o}{9} + (a + b + c + d)$$

Si cambia el orden de las cifras, tendrá por ejemplo $\overline{bdca}$

$$\overline{bdca} = \overset{o}{9} + (b + d + c + a)$$

Restándolos:

$$\overline{abcd} - \overline{bdca} = \overset{o}{9} + a + b + c + d - \overset{o}{9} - b - c - d - a$$
$$= \overset{o}{9}$$

Como la resta debe ser múltiplo de 9, a las tres cifras que su amigo le dirá, usted podrá averiguar la cifra tachada buscando que las cuatro cifras sumen un múltiplo de 9.

Por ejemplo:

$$N = 8,629$$
$$N' = 6,982$$
$$N - N' = 1,647$$

Si su amigo le dijera $1,\ 7\ \text{ y }\ 6,$ entonces:

$$1 + 7 + 6 + x = \overset{o}{9}$$
$$14 + x = \overset{o}{9}$$
$$14 + x = 18$$

La cifra tachada sería

$$x = 4$$

F) Si el número de hermanas no es mayor que 9, deberá hacer lo siguiente:

- restarle 100 al resultado final que le dirá su compañero,
- el número de hermanas es la cifra de las unidades,
- restarle a continuación dicha cifra de unidades,
- divida la resta obtenida entre 10 y tendrá el número de hermanos.

Por ejemplo: 4 hermanos y 3 hermanas.

$$4+3=7$$
$$7\times 5=35$$
$$35+35=70$$
$$70\times 2=140$$
$$140+3=143$$

Si su compañero le indica 143,

$$143-100=43$$

3 unidades $\Rightarrow$ 3 hermanas.

$$43-3=40$$
$$\frac{40}{10}=4 \text{ hermanos}$$

Explicación:

Sean a hermanos y b hermanas

$$\left[5\left(a+3\right)+35\right]\times 2+b=\left[5a+15+35\right]\times 2+b$$
$$=10a+100+b$$
$$=100+10a+b$$

Restándole 100:

$$10a+b=\overline{ab}$$

Son b hermanas y a hermanos.

G) Si desea adivinar el día y el mes del nacimiento de su amigo, al número que él le dirá:

- réstele 400,
- las dos últimas cifras del resultado corresponderán al mes del nacimiento y
- la(s) que está(n) delante de ellas indicarán el día del nacimiento.

Estamos seguros de que el lector podrá efectuar la demostración del caso.

Por ejemplo: 20 de mayo
Día: 20, mes: 5

$$20\times 2=40$$
$$40\times 10=400$$
$$400+80=480$$
$$480\times 5=2,400$$
$$2,400+5=2,405$$

Si su amigo le indica 2,405, réstele 400:

$$2,405-400=\overset{\text{día}}{20}\underset{\text{mes}}{05}$$

Por lo tanto la fecha de nacimiento es el 20 de mayo.

Apuntes de estudio

1. Portocarrero Suárez, Felipe, *Cómo hacer un trabajo de investigación*, 3a. ed., Lima: CIUP, 1990.

2. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú,* tomo I, 3a. ed., Lima: CIUP, 1991.

3. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú,* tomo II, 3a. ed., Lima: CIUP, 1991.

4. Injoque Espinoza, Javier, *WordPerfect 5.1. Fundamentos y orientaciones prácticas*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1992.

5. Miyashiro Miyashiro, Isabel, *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú,* tomo III, Lima: CIUP, 1991.

6. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiesse Rebagliati, *Elementos de gramática española*, 3a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 2003.

7. Gatti Murriel, Carlos y Jorge Wiesse Rebagliati, *Técnicas de lectura y redacción. Lenguaje científico y académico*, 3a. ed. aumentada y nuevamente corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 2003.

8. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos de política de la empresa*, Lima: CIUP, 1992.

9. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo IV, Lima: CIUP, 1992.

10. Pipoli de Butrón, Gina (comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, Lima: CIUP, 1992.

11. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo V, Lima: CIUP, 1993.

12. Rivero, Eduardo, *Contabilidad I*, 2a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 2000.

13. Altamirano, Jesús, *Lotus 2.4. Conceptos y consejos prácticos*, Lima: Universidad del Pacífico, 1993.

14. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Colección de casos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1993.

15. Chong, Esteban y otros, *Teoría y práctica de la contabilidad intermedia*, Lima: CIUP, 1994.

16. Wong, David, *Finanzas en el Perú: un enfoque de liquidez, rentabilidad y riesgo*, 2a. ed., Lima: CIUP, 1995.

17. Mayorga, David y Patricia Araujo, *La importancia de la mercadotecnia estratégica: el caso de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1994.

18. Aliaga Valdez, Carlos, *Manual de matemática financiera: texto, problemas y casos*, 4a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1999.

19. Ángeles, Julio; Jorge Rubio; Yván Soto y Jorge Toma, *Procesamiento estadístico de datos con Minitab y Harvard Graphics*, Lima: Universidad del Pacífico, 1995.

20. Schwalb, María Matilde y Carlos Herrera, *Casos peruanos de mercadotecnia*, Lima: CIUP, 1995.

21. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VI, Lima: CIUP, 1995.

22. Vento Ortiz, Alfredo, *Finanzas aplicadas*, 6a. ed., Lima: CIUP, 2004.

23. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos peruanos de negocios internacionales*, Lima: CIUP, 1995.

24. Muñoz, José Luis, *Análisis e interpretación de estados financieros ajustados por inflación*, Lima: CIUP, 1995.

25. Pipoli de Butrón, Gina (comp.), *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana,* tomo II, Lima: CIUP, 1996.

26. Beltrán, Arlette y Hanny Cueva, *Ejercicios de evaluación privada de proyectos,* 3a. ed., Lima: CIUP, 2000.

27. Aliaga Valdez, Carlos, *Aplicaciones prácticas de matemática financiera: 603 problemas resueltos*, 1a. ed. corregida, Lima: Universidad del Pacífico, 1998.

28. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VII, Lima: CIUP, 1996.

29. Mayorga, David y Patricia Araujo, *Casos sobre la mercadotecnia estratégica de la empresa peruana*, Lima: CIUP, 1997.

30. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo VIII, Lima: CIUP, 1997.

31. Seinfeld, Janice y otros, *Introducción a la economía de los recursos naturales y del medio ambiente*, Lima: 2a. ed., CIUP, 1999.

32. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo IX, Lima: CIUP, 1998.

33. Bonifaz, José Luis y Ruy Lama C., *Optimización dinámica y teoría económica*, 1a. ed. corregida, Lima: CIUP, 2002.

34. Franco Concha, Pedro, *Planes de negocios: una metodología alternativa*, Lima: CIUP, 1999.

35. Miyashiro Miyashiro, Isabel (comp.), *Casos en administración de organizaciones que operan en el Perú*, tomo X, Lima: CIUP, 1999.

36. Schuldt, Jürgen, *Dolarización oficial de la economía: un debate en once actos*, Lima: CIUP, 1999.

37. Schwalb, María Matilde y Juan Carlos Casafranca, *Casos ganadores de los*

Premios MAX/EFFIE, Lima: CIUP, 2000.

38. Medina, Oswaldo, *El achoramiento: una interpretación sociológica,* Lima: CIUP, 2000.

39. Espejo Reese, Ricardo, *Ética y empresas: el caso de la banca peruana*, 2a. ed. corregida y aumentada, Lima: CIUP, 2003.

40. Malca, Óscar, *Comercio electrónico*, Lima: Universidad del Pacífico, 2001.

41. Lescano, Lucio, *La disciplina del servicio*, 2a. ed. corregida y aumentada, Lima: CIUP, 2003.

42. Schwalb, María Matilde; Patricia Araujo y David Mayorga, *Casos ganadores de los Premios Effie 1999*, Lima: Universidad del Pacífico-AFP Integra, 2001.

43. Urrunaga, Roberto; Tami Hiraoka y Antonio Risso, *Fundamentos de economía pública*, Lima: CIUP, 2001.

44. Bonifaz, José Luis y Diego Winkelried, *Matemáticas para la economía dinámica*, 1a. ed. corregida, Lima: CIUP, 2003.

45. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos de administración general en organizaciones que operan en el Perú*, tomo XI, Lima: CIUP, 2001.

46. Pipoli de Butrón, Gina, *Casos de mercadotecnia aplicados a la realidad peruana*, tomo II, Lima: CIUP, 2002.

47. Malca, Óscar, *Comercio internacional*, 2a. ed., Lima: CIUP, 2004.

48. Schwalb, María Matilde; Patricia Araujo y David Mayorga, *Casos ganadores de los Premios Effie 2000*, Lima: Universidad del Pacífico-Alicorp, 2002.

49. Mayorga, David; María Matilde Schwalb y Patricia Araujo, *Casos ganadores de los Premios Effie 2001*, Lima: Universidad del Pacífico-Alicorp, 2002.

50. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos de administración general en organizaciones que operan en el Perú*, tomo XII, Lima: CIUP, 2002.

51. Miyashiro, Isabel (compiladora), *Casos peruanos de comportamiento orga-*

nizacional, tomo I, Lima: CIUP, 2003.

52. Siu K., Ricardo y Carlos Andaluz Z., *Cálculo diferencial: teoría y aplicaciones,* Lima: CIUP, 2003.

53. Schwalb, María Matilde; Claudia Ortega y Emilio García (editores), *Casos de responsabilidad social*, Lima: CIUP, 2003.

54. Araujo, Patricia; David Mayorga y María Matilde Schwalb, *Casos ganadores de los Premios Effie 2002*, Lima: Universidad del Pacífico, 2003.

55. Mayorga, David; Patricia Araujo y María Matilde Schwalb, *Casos ganadores de los Premios Effie 2003*, Lima: Universidad del Pacífico - Interbank, 2004.

56. Malca, Oscar, *Perfiles de productos con potencial agroexportador*, Lima: CIUP, 2004.

57. Miyashiro, Isabel, *Empresa y gerencia en Asia: el caso de la República Popular China,*, Lima: CIUP, 2004.

58. Schwalb, María Matilde y Emilio García (editores), *Buenas prácticas peruanas de responsabilidad social empresarial*, Lima: CIUP, 2004.

59. Cortez, Rafael y Luis Rosales, *340 ejercicios de Microeconomía,* Lima: CIUP, 2005.

60. Seinfeld, Janice, *Análisis económico de la salud,* Lima: CIUP, 2005.

61. Yamada, Gustavo y Patricia Pérez, *Evaluación de impacto de proyectos de desarrollo en el Perú*, Lima: CIUP, 2005.

62. Alva, Edgar, *Fundamentos de Contabilidad. Un enfoque de diálogo con un lenguaje claro*, Lima: CIUP, 2005.

63. Schwalb, María Matilde; Emilio García y Virginia Soldevilla (eds.), *Buenas prácticas peruanas de responsabilidad social empresarial. Colección 2005,* Lima: CIUP, 2006.

64. Toma Inafuko, Jorge y Jorge Luis Rubio Donet, *Estadística aplicada. Primera parte,* Lima: CIUP, 2007.

65. Siu Koochoy, Ricardo y Carlos Andaluz Zúñiga, *Álgebra*, Lima: CIUP, 2007.

66. Yamada, Gustavo y Juan Chacaltana, *Generación de empleo en el Perú: seis casos recientes de éxito*, Lima: CIUP, 2007.

67. Urrunaga, Roberto y José Luis Bonifaz (eds.), *Estudios de caso sobre regulación en infraestructura y servicios públicos en el Perú*, Lima: CIUP, 2008.

68. Schuldt, Jürgen, *Modelos macroeconómicos computarizados (una introducción)*, Lima: CIUP, 2008.

69. Toma Inafuko, Jorge y Jorge Luis Rubio Donet, *Estadística aplicada. Segunda parte,* Lima: CIUP, 2008.

70. Del Castillo, Elsa y Gustavo Yamada, *Responsabilidad social y buen clima laboral: una fórmula ganadora,* Lima: CIUP, 2008.

71. Beltrán, Arlette; Juan Francisco Castro y Gustavo Yamada, *Hacia un programa de crédito de largo plazo para la educación superior en el Perú,* Lima: CIUP, 2008.

72. Schwalb, María Matilde (editora), *Experiencias exitosas de responsabilidad social empresarial*, Lima: Universidad del Pacífico, 2010.

73. Siu Koochoy, Ricardo y Carlos Andaluz Zúñiga, *Aritmética*, Lima: Universidad del Pacífico, 2011.

74. Siu Koochoy, Ricardo y Carlos Andaluz Zúñiga, *Cálculo diferencial de funciones con varias variables*, Lima: Universidad del Pacífico, 2012.

75. Yamada, Gustavo; Juan F. Castro y Roberto Asmat, *Inversión en educación e ingresos laborales*, Lima: Universidad del Pacífico, 2013.

Se terminó de imprimir en los talleres gráficos de
Tarea Asociación Gráfica Educativa
Pasaje María Auxiliadora 156 - Breña
Correo e.: tareagrafica@tareagrafica.com
Página web: www. tareagrafica.com
Teléf. 332-3229 Fax: 424-1582
Agosto 2013 Lima - Perú


apuntes
estudios
ET=(110,18/6)=0.0453358
,025x1,018+2,345/9)
nformática
/6)=0.0453358